

بہ نام پروردگار مہربان



ریاضیات انسانی کنکور

دہم | یازدہم | دوازدہم

مسعود غزالی بینا

مدیر و ناظر علمی گروہ ریاضی: عباس اشرفی



تقدیم به استاد بزرگوارم دکترهامون سبّطی که
علاقه خود به تدریس را مدیون ایشان هستم.



مقدمه

دختر و پسرای گلم سلام!

امیدوارم الان که دارین این کتابو میخونین حال دلتون خوب باشه و یه دنیا اتفاقای خوب و مثبت در انتظارتون باشه. یه بار دیگه کتابای درسی تغییر کردن و مهروماه بازم مثل همیشه دست به کار شد تا کتابایی که لایق شما عزیزانه رو وارد بازار کنه.

عارضم خدمتتون که به جمع و جور بودن کتاب قشنگمون نگاه نکنین، مطمئن باشین هر مطلبی که موردنیاز کنکورتون باشه رو داخل این کتاب قرار دادم و تست‌های مهم کنکور دهه ۹۰ رو به‌طور کامل براتون حل کردم؛ فقط کافیه به این کتاب اعتماد کنین و با خیال راحت مشغول خوندن برای کنکور بشین.

تشکر و سپاس

- جناب آقای احمد اختیاری مدیر محترم انتشارات مهروماه
- استاد محمدحسین انوشه مدیر محترم شورای تألیف که همواره به بنده لطف داشته و در این سال‌ها همیشه از من حمایت کردن.

- استاد عباس اشرفی مدیر محترم گروه ریاضی که تا تألیف رو به من یاد بدن پیر شدن! اما از صبر و اعتمادشون بسیار سپاسگزارم.
- دوست بسیار خوبم احسان لعل که بسیار به من انگیزه می‌داد و آقای حمیدرضا پیام که از راهنمایی ایشون بسیار بهره بردم و با روحیه طنازی که داشتن روحیه همه ما رو خوب کردن!
- خانمها مائده میرزایی (رتبه ۴۶ انسانی کنکور ۹۴) و زهرا شریفی (رتبه ۳۰۵ انسانی کنکور ۹۴) که نظرات بسیار مؤثری در کتاب ارائه دادن.

در انتها

از تمامی اساتید و دانش‌آموزان محترم خواهشمندم نظرات ارزشمندشان را از طریق ایمیل به آدرس masoud.ghazali1994@gmail.com یا از طریق تلگرام به آدرس [@riyazi_20](https://t.me/riyazi_20) ارسال فرمایند.

ارادتمند شما
مسعود غزالی بینا

فهرست

- | | | |
|-----|--------------------------------|--------|
| ۷ | عبارت‌های جبری | فصل ۱ |
| ۲۱ | معادله درجه دوم | فصل ۲ |
| ۳۹ | تابع | فصل ۳ |
| ۹۳ | آشنایی با منطق و استدلال ریاضی | فصل ۴ |
| ۱۱۹ | آمار | فصل ۵ |
| ۱۹۳ | شمارش | فصل ۶ |
| ۲۱۷ | احتمال | فصل ۷ |
| ۲۳۵ | الگوهای خطی | فصل ۸ |
| ۲۵۷ | دنباله هندسی | فصل ۹ |
| ۲۷۵ | ریشه، توان، تابع نمایی | فصل ۱۰ |
| ۲۸۹ | سوالات کنکور ۹۸ | |
| ۳۰۳ | فرمول‌نامه | |



معادلات به فرم $ax + b = 0$ ($b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) را معادله درجه اول می‌نامند. روش حل این گونه معادلات را قبلاً آموخته‌اید. از معادله درجه اول برای تبدیل صورت فارسی به صورت ریاضی استفاده می‌شود تا مجهول به دست آید.

تست: در یک کارخانه، حقوق یک مهندس ۲ برابر یک تکنسین و $\frac{2}{3}$ مدیر ارشد کارخانه است. قسمت تولید این کارخانه، ۳ مدیر ارشد، ۸ مهندس و ۱۲ تکنسین دارد. اگر حقوق اختصاص داده شده به کل این بخش ماهیانه $55/5$ میلیون تومان باشد، حقوق یک مهندس در ماه چند میلیون تومان است؟

۱) $1/5$ ۲) ۳ ۳) $4/5$ ۴) ۶

پاسخ گزینه «۲»

حقوق یک مهندس را برابر x ، تکنسین را برابر y و مدیر ارشد را برابر z در نظر می‌گیریم پس طبق فرض تست داریم:

$$x = 2y \text{ و } x = \frac{2}{3}z \Rightarrow x = ?$$

مجموع حقوق ۳ مدیر ارشد، ۸ مهندس و ۱۲ تکنسین برابر $55/5$ میلیون تومان است، پس:

$$3z + 8x + 12y = 55/5 \xrightarrow[\substack{y = \frac{x}{2} \\ z = \frac{3}{2}x}]{\substack{y = \frac{x}{2} \\ z = \frac{3}{2}x}} 3\left(\frac{3}{2}x\right) + 8x + 12\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= 55/5 \Rightarrow \frac{9}{2}x + 8x + 6x = 55/5$$



$$\Rightarrow \frac{9x + 16x + 12x}{2} = 55 / 5$$

$$\Rightarrow 37x = 111 \Rightarrow x = \frac{111}{37} = 3$$

وعدۀ ۲

معادله درجه دوم



معادلات به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) را معادله درجه دوم می نامند.

تست: اگر a ، b و c ضرایب معادله درجه دوم

$$x(3x - 2) = 7x + 6$$
 باشند، حاصل $a + b$ کدام است؟

۱) -۱۲ ۲) ۳ ۳) -۶ ۴) ۹

پاسخ گزینه «۳»

$$x(3x - 2) = 7x + 6 \Rightarrow 3x^2 - 2x = 7x + 6$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 2x - 7x - 6 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{3x^2}} - \underline{\underline{9x}} - \underline{\underline{6}} = 0$$

a b c

$$\Rightarrow a + b = 3 + (-9) = 3 - 9 = -6$$

وعدۀ ۳

روش های حل معادله درجه دوم



چهار روش کلی برای حل معادله درجه دوم وجود دارد:
۱. روش تجزیه: در این روش با استفاده از فاکتورگیری، اتحادها و دسته بندی معادله را تبدیل به حاصل ضرب دو یا چند عبارت می کنیم سپس تک تک عبارت ها را مساوی صفر قرار داده و جواب را می یابیم.



تست: یکی از ریشه‌های معادله $(x+1)(x-5) + 12(x+1) = 0$

کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) -۳

۳ (۳) ۵ ۴ (۴) -۷

پاسخ گزینه «۴»

از عبارت $(x+1)$ فاکتور می‌گیریم:

$$(x+1)(x-5+12) = 0 \Rightarrow (x+1)(x+7) = 0$$

$$\Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1, \quad x+7=0 \Rightarrow x=-7$$

تذکر: می‌توانستید از همان ابتدا گزینه‌ها را جای‌گذاری کنید تا

بینید به‌ازای کدام x کل عبارت صفر می‌شود

چاشنی: گاهی اوقات معادلاتی دارای فرم کلی درجه دوم

هستند اما درجه دو نیستند که این معادلات را می‌توان با تغییر

متغیر به درجه دو تبدیل و حل کرد.

تست: تعداد جواب‌های حقیقی معادله $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$

کدام است؟

(انسانی خارج ۹۲)

۱ (۱) صفر ۲ (۲) ۱

۳ (۳) ۲ ۴ (۴) ۴

پاسخ گزینه «۱»

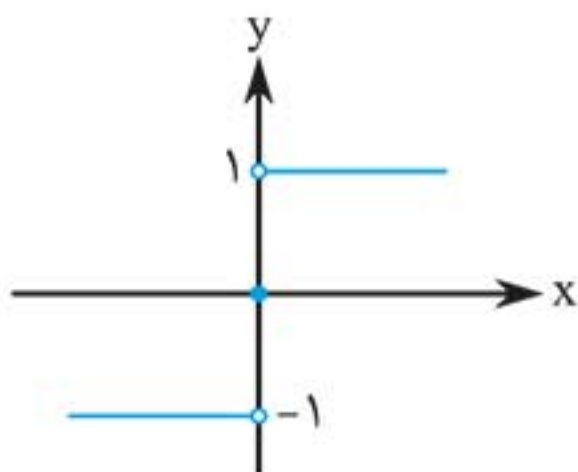
x^2 را برابر t در نظر گرفته و معادله را حل می‌کنیم:

$$(x^2)^2 + 10x^2 + 9 = 0 \xrightarrow{x^2=t} t^2 + 10t + 9 = 0$$



تابع پلکانی که به صورت زیر است را تابع علامت گویند و با نماد $f(x) = \text{sign}(x)$ نشان می دهند.

$$f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$



چاشنی: دامنه تابع علامت \mathbb{R} ، (اعداد حقیقی) و بُرد آن $R = \{-1, 0, 1\}$ است.

تست: اگر $f(x) = x$ و $g(x) = \text{sign}(x)$ باشد، حاصل

$$\frac{f(-2) + g(\sqrt{2})}{f(3) - g(-\sqrt{3})}$$

کدام است؟

$$\frac{1}{4} \text{ (۴)} \quad -4 \text{ (۳)} \quad -\frac{1}{4} \text{ (۲)} \quad 4 \text{ (۱)}$$

پاسخ گزینه «۲»

$$f(x) = x \Rightarrow f(-2) = -2, f(3) = 3$$



$$g(x) = \text{Sign}(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Sign}(\sqrt{2})$$

$$= 1, \text{Sign}(-\sqrt{3}) = -1 \Rightarrow \frac{-2+1}{3-(-1)} = \frac{-1}{4}$$

تذکر: حاصل تقریبی $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ را حفظ باشید:

$$\sqrt{2} \simeq 1/4, \sqrt{3} \simeq 1/7, \sqrt{5} \simeq 2/2$$



جزء صحیح عدد حقیقی a برابر با بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی a است و با نماد $[]$ نشان می‌دهند.

صحیح است \Leftarrow جزء صحیح برابر همان عدد است

$$[-2] = -2$$

عدد داخل
جزء صحیح

صحیح نیست \Leftarrow در این صورت مشخص می‌کنیم که عدد مورد نظر بین کدام دو عدد صحیح است و عدد کوچک‌تر را انتخاب می‌کنیم:

کوچک‌تر



$$[-1/9]: -2 < -1/9 < -1 \Rightarrow [-1/9] = -2$$

کوچک‌تر



$$[2/1]: 2 < 2/1 < 3 \Rightarrow [2/1] = 2$$



کوچکتر
↑
 $[\sqrt{3}]: 1 < \sqrt{3} < 2 \Rightarrow [\sqrt{3}] = 1$

کوچکتر
↑
 $[\sqrt{5} - 2]: 0 < 0.2 < 1 \Rightarrow [\sqrt{5} - 2] = 0$

تست: حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$[-\sqrt{3} + 3] + \left[\frac{8}{5}\right] + \left[\frac{10}{3}\right] - [-2/3]$$

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

پاسخ گزینه «۴»

$$-\sqrt{3} + 3 = -1.7 + 3 = 1.3$$

$$\Rightarrow 1 < 1.3 < 2 \Rightarrow [-\sqrt{3} + 3] = 1$$

$$\frac{8}{5} = 1.6 \Rightarrow 1 < 1.6 < 2 \Rightarrow \left[\frac{8}{5}\right] = 1$$

$$\frac{10}{3} = 3.3 \Rightarrow 3 < 3.3 < 4 \Rightarrow \left[\frac{10}{3}\right] = 3$$

$$-3 < -2/3 < -2 \Rightarrow [-2/3] = -3 \Rightarrow 1 + 1 + 3 - (-3)$$

$$= 1 + 1 + 3 + 3 = 8$$

چاشنی: برای رسم توابع جزء صحیح شامل $[x]$ باید دامنه‌ها را یک

واحد یک واحد جدا کنیم و برای هر قسمت از دامنه یک ضابطه جدا

تعریف کنیم؛ سپس با توجه به دامنه هر قسمت، نمودار را رسم می‌کنیم.



وعدۀ ۱۰



جدول تغییرات معیارهای گرایش به مرکز

میانۀ	میانگین	مُد	شاخصها تغییرات
$+k$	$+k$	$+k$	اگر همه داده‌ها را با عدد k جمع کنیم
$-k$	$-k$	$-k$	اگر همه داده‌ها را منهای عدد k کنیم
$\times k$	$\times k$	$\times k$	اگر همه داده‌ها را در عدد k ضرب کنیم
$\div k$	$\div k$	$\div k$	اگر همه داده را بر عدد k تقسیم کنیم ($k \neq 0$)

پس همان‌طور که مشاهده می‌کنید هر اتفاقی برای همه داده‌ها بیفتد دقیقاً همان اتفاق برای معیارهای گرایش به مرکز می‌افتد.

تست: در جدول فراوانی داده‌های دسته‌بندی شده زیر، اگر به تمام داده‌ها $1/5$ واحد اضافه شود، میانگین داده‌های جدید برابر 10 می‌شود. فراوانی دسته سوم کدام است؟

داده‌ها	۳	۷	۱۱	۱۵
فراوانی	۴	۵	a	۳

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ گزینه «۲»



چون به همه داده‌ها $1/5$ واحد اضافه شده پس به میانگین نیز $1/5$ واحد اضافه شده و برابر 10 شده است در نتیجه میانگین اولیه برابر است با:

$$10 - 1/5 = 8/5 \Rightarrow \bar{x} = 8/5$$

حال با استفاده از رابطه میانگین موزون، مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$8/5 = \frac{4 \times 3 + 5 \times 7 + 11a + 3 \times 15}{4 + 5 + a + 3}$$

$$\Rightarrow 8/5 = \frac{12 + 35 + 11a + 45}{a + 12} \Rightarrow 8/5 a + 10 \cdot 2 = 92 + 11a$$

$$\Rightarrow 2/5 a = 10 \Rightarrow a = \frac{10}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

تست: در داده‌های $1, 2, 4, 7, 10, 80$ داده دورافتاده را حذف کرده و کل داده‌ها را در (-2) ضرب و به علاوه عدد (1) می‌کنیم. شاخص حد وسط در حالت اول چقدر از شاخص حد وسط در حالت دوم بیشتر است؟

$$14/1 (4) \quad 9/3 (3) \quad 5/5 (2) \quad 3/1 (1)$$

پاسخ گزینه « 4 »

در حالت اول چون داده دور افتاده داریم، شاخص حد وسط، میانه است:

$$1, 2, 4, 7, 10, 80$$

↓
میانه

$$\text{میانه} = \frac{4 + 7}{2} = \frac{11}{2} = 5/5$$

در حالت دوم داده پرت (80) حذف شده، پس شاخص حد وسط، میانگین است.



از طرفی همه داده‌ها در عدد (-2) ضرب و به علاوه عدد (1) شده‌اند پس میانگین نیز همین گونه تغییر می‌کند:

$$1, 2, 4, 7, 10 \Rightarrow \bar{x} = \frac{1+2+4+7+10}{5} = \frac{24}{5} = 4/8$$

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = -2(\bar{x}_{\text{قدیم}}) + 1 = -2(4/8) + 1 = -8/6$$

شاخص حد وسط در حالت دوم برابر $-8/6$ است، پس:

$$5/5 - (-8/6) = 5/5 + 8/6 = 14/1$$

پیشنهاد: اگر همه داده‌ها با هم برابر باشند میانگین، میانه و مد با هم برابرند و مقدارشان برابر یکی از داده‌هاست.

وعدۀ ۱۱

معیارهای پراکندگی



این معیارها به چهار دسته تقسیم می‌شوند: **۱** دامنه تغییرات **۲** واریانس **۳** انحراف معیار **۴** دامنه میان چارکی

۱. دامنه تغییرات (R): اختلاف کوچک‌ترین داده از بزرگ‌ترین داده را

$$\underline{R} = \underline{x_{\max}} - \underline{x_{\min}}$$

دامنه تغییرات بزرگ‌ترین داده کوچک‌ترین داده

این معیار برای نشان دادن پراکندگی داده‌ها مناسب نیست چون در آن فقط دو داده دخیل هستند.

پیشنهاد: اگر تمام داده‌ها با هم برابر باشند، دامنه تغییرات برابر صفر است و بالعکس (این ویژگی در مورد تمام معیارهای پراکندگی صادق است). $R = 0 \Leftrightarrow$ داده‌ها برابر باشند



کنکور سراسری ۹۸

۱. حاصل عبارت با معنی $\frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1} + \frac{x-1}{2x+1} - \frac{2x+1}{2x-1}$ به صورت $\frac{P(x)}{4x^2 - 1}$ است. کدام است $P(x)$ ؟

- (۱) $-8x$ (۲) $-4x$ (۳) $-4x + 1$ (۴) $2x - 3$

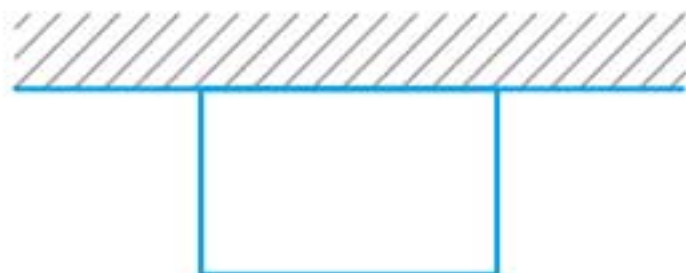
۲. به ازای کدام مقدار a ، معادله $\frac{x-2}{ax-5} = \frac{a+2}{x-1} - 1$ دارای جواب $x = 3$ است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۳. اگر رابطه $\{(3, a + 2b), (5, 4), (7, 2), (3, 7), (5, 2a - b)\}$ یک تابع باشد، $a^2 - b^2$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۴. می خواهیم با یک قطعه سیم به طول ۵۶ متر، زمینی به شکل مستطیل، که یک طرف آن دیوار است محصور شود. بیشترین مساحت زمین محصور شده، کدام است؟



- (۱) ۳۶۴ (۲) ۳۷۸ (۳) ۳۹۲ (۴) ۴۰۶



پاسخنامه کنکور ۹۸

۱. گزینه «۱»

روش اول: ابتدا بین کسرهای مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1} + \frac{x-1}{2x+1} - \frac{2x+1}{2x-1}$$

$$= \frac{2x^2 - x + 2x^2 - 3x + 1 - 4x^2 - 4x - 1}{4x^2 - 1} = \frac{-8x}{4x^2 - 1}$$

با توجه به اینکه حاصل عبارت برابر $\frac{P(x)}{4x^2 - 1}$ است، بنابراین:

$$P(x) = -8x$$

روش دوم: با جای‌گذاری عدد ۱ در عبارت اصلی و عبارت شامل $P(x)$ و همچنین در گزینه‌ها داریم:

$$\frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1} + \frac{x-1}{2x+1} - \frac{2x+1}{2x-1} \xrightarrow{x=1} \frac{1}{3} + 0 - \frac{3}{1} = \frac{-8}{3} \quad (1)$$

$$\frac{P(x)}{4x^2 - 1} \xrightarrow{x=1} \frac{P(x)}{3} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \frac{P(x)}{3} = -\frac{8}{3} \Rightarrow P(x) = -8$$

بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: $\xrightarrow{x=1} -8x = -8 \quad \checkmark$

گزینه ۲: $\xrightarrow{x=1} -4x = -4 \quad \times$

پیوست ۲

فرمول نامه



عبارت‌های جبری

۱. اتحاد مربع دو جمله‌ای: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

۲. اتحاد مربع سه جمله‌ای:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

۳. اتحاد مزدوج: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

۴. اتحاد جمله مشترک: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

۵. اتحاد مکعب دو جمله‌ای: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

۶. اتحاد چاق و لاغر: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

۷. مجموع اعداد هر سطر در مثلث خیام:

$$2^{n-1} \quad (n \text{ شماره سطر است})$$

۸. ب.م.م: حاصل ضرب عوامل مشترک با کمترین توان

۹. ک.م.م: حاصل ضرب عوامل مشترک با بیشترین توان در عوامل غیرمشترک

۱۰. دامنه عبارت گویا: $\mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$

۱۱. ضرب و تقسیم دو عبارت گویا:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

معادله درجه دوم

۱. معادله درجه اول: $ax + b = 0 \quad (a \neq 0, b \in \mathbb{R})$

۲. معادله درجه دوم: $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

۳. روش ریشه‌گیری:

$$\Delta^2 = 0^2 \Rightarrow \Delta = \pm 0, \Delta^2 = 0, \Delta = \pm \sqrt{0}$$