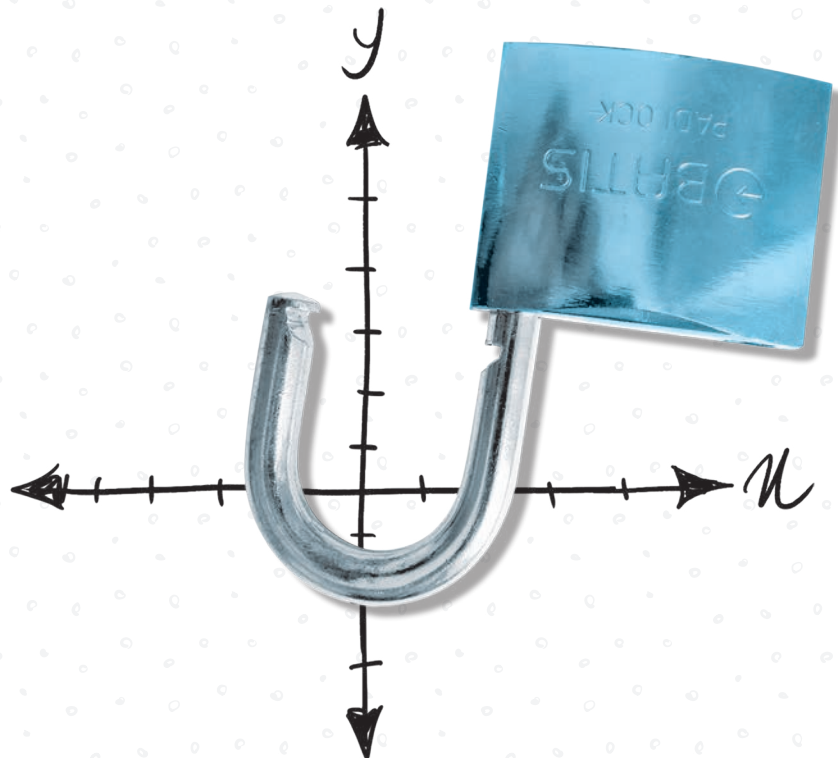


## فصل اوّل

# هندسه تحلیلی و جبر

فصلی که می‌بینید جعبه ابزاریه برای استفاده در بقیه مباحث ریاضی. این فصل با هندسه تحلیلی شروع می‌شه (که قبلاً تو کتاب سال چهارم بود). کلی مطالب جدید راجع به خط، نقطه، فاصله‌هاشون از هم و از خودشون رو تو این بخش یاد می‌گیری. بعد وارد تابع و معادله درجه دوم می‌شه! همون سهمی پارسال! ولی این دفعه هم سوال‌های نمودارش و هم معادله‌اش پیچیده‌تر می‌شه. آخرش هم به معادلات گویا و گنگ می‌رسه. این بحث تا آخرین دقایقی که ریاضی می‌خونید، دست از سرتون برنمی‌داره! پس خوب یادش بگیر.



## هندسه تحلیلی

**یادآوری:** در سال‌های گذشته با مفاهیم معادله خط، شیب، عرض از مبدا، تابع خطی و... آشنا شدید. در این بخش به طور خلاصه آن‌ها را بیان می‌کنیم.

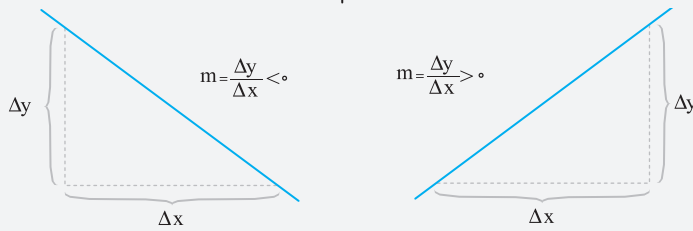
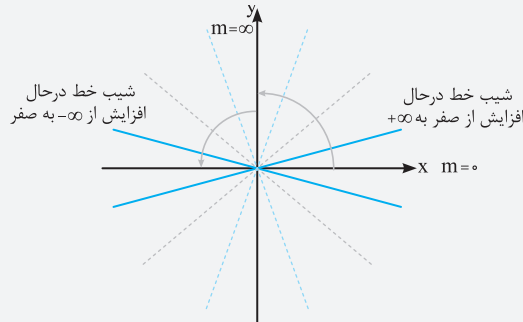
**شیب:** تعریف‌ها و تعبیرهایی از شیب که تاکنون آموخته‌اید عبارتند از:

**الف:** در معادله  $y = ax + b$  مقدار  $a$  را شیب خط می‌نامند.

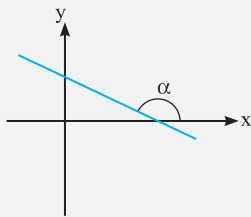
**ب:** در معادله  $ax + by + c = 0$ ، شیب برابر  $-\frac{a}{b}$  است.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

**پ:** میزان تغییرات  $y$  به تغییرات  $x$  که برابر  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  است را شیب خط می‌گویند.



**ت:** تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد، شیب خط است.



$$\tan \alpha = m$$

### معادله خط

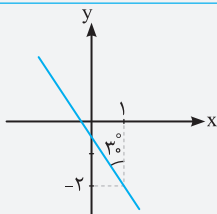
برای به‌دست آوردن معادله خط، دو روش داریم:

❶ **با داشتن شیب و یک نقطه:** معادله خطی با شیب  $m$  که از نقطه  $A(x_0, y_0)$  می‌گذرد، عبارت است از:

❷ **با داشتن دو نقطه:** هرگاه دو نقطه  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_0, y_0)$  را داشته باشیم، می‌توانیم به کمک رابطه  $m_{AB} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$  شیب خط گذرا از نقاط  $A$  و  $B$  را بیابیم و به کمک معادله  $y - y_0 = m(x - x_0)$ ، ضابطه خط را بیابیم.

### نکته

معادله خط را  $y = ax + b$  فرض نمود و با جای‌گذاری دو نقطه  $(x_0, y_0)$  و  $(x_1, y_1)$  و تشکیل دستگاه، می‌توان  $a$  و  $b$  را یافت. به این ترتیب ضابطه  $y = ax + b$  به دست می‌آید.



$$m = \tan 12^\circ = -\tan 6^\circ = -\sqrt{3}$$

**مثال:** عرض از مبدا خط مقابل کدام است؟

$$1) -2\sqrt{2} + 1 \quad 2) \sqrt{3} - 2$$

$$3) 1 - 2\sqrt{3} \quad 4) 2 - 2\sqrt{2}$$

**پاسخ:** در مثلث قائم‌الزاویه ساخته‌شده، یک زاویه  $30^\circ$  است، بنابراین زاویه دیگر  $60^\circ$  درجه است و می‌توان نتیجه گرفت، زاویه خط با جهت مثبت محور طول‌ها  $12^\circ$  درجه است. تانژانت  $12^\circ$  درجه، شیب خط مفروض است.

**تذکر:** تانژانت‌های دو زاویه مکمل قرینه یک‌دیگرند.

با داشتن شیب  $m = -\sqrt{3}$  و نقطه  $(1, -2)$  معادله خط را می‌نویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 2 = -\sqrt{3}(x - 1) \Rightarrow y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} - 2$$

عرض از مبدأ

پس گزینه «۲» درست است.

**مثال:** خط گذرنده از دو نقطه  $(1, 3)$  و  $(2, 7)$  محور طول‌ها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

(۱)  $-\frac{1}{4}$       (۲)  $\frac{1}{5}$       (۳)  $\frac{1}{4}$       (۴)  $-\frac{1}{5}$

**پاسخ:** فرض می‌کنیم معادله خط،  $y = ax + b$  است. نقاط داده‌شده را در خط جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} (1, 3) \rightarrow y = ax + b \Rightarrow 3 = a(1) + b \Rightarrow a + b = 3 \\ (2, 7) \rightarrow y = ax + b \Rightarrow 7 = a(2) + b \Rightarrow 2a + b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases}$$

یعنی معادله خط  $y = 4x - 1$  است.

این خط جایی محور طول‌ها را قطع می‌کند که  $y = 0$  شود.

$$0 = 4x - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

پس گزینه «۳» درست است.

### شیب‌های دو خط موازی و دو خط عمود بر هم

۱ دو خط موازی، شیب‌های برابر دارند، یعنی اگر شیب‌های دو خط موازی  $m$  و  $m'$  باشند، باید  $m = m'$  باشد.

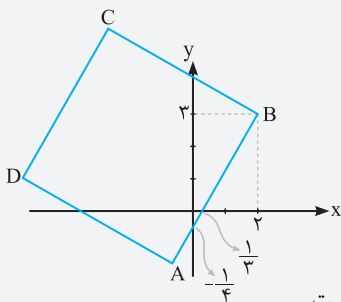
۲ حاصل ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم، برابر  $-1$  است، یعنی  $mm' = -1$  است.

دقت کنید رابطه  $mm' = -1$  برای دو خط غیرموازی با محورهای مختصات برقرار است.

**مثال:** اگر معادله ضلع  $AB$  در مستطیل شکل زیر  $3x - 4y = -6$  باشد،

عرض از مبدأ خط  $BC$  کدام است؟

(۱)  $\frac{11}{2}$       (۲)  $\frac{14}{3}$       (۳)  $\frac{15}{2}$       (۴)  $\frac{17}{3}$



**پاسخ:** ضلع  $BC$  بر ضلع  $AB$  عمود است، پس شیب  $BC$  عکس و قرینه شیب  $AB$  است.

$$AB: 3x - 4y = -6 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \Rightarrow m_{AB} = \frac{3}{4}$$

$$m_{BC} \cdot m_{AB} = -1 \Rightarrow m_{BC} \times \frac{3}{4} = -1 \Rightarrow m_{BC} = -\frac{4}{3}$$

حال شیب  $BC$  را می‌یابیم:

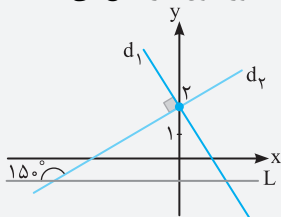
به کمک مختصات نقطه  $B(2, 3)$  و شیب  $m = -\frac{4}{3}$ ، معادله خط  $BC$  را می‌نویسیم.

$$y - y_B = m_{BC}(x - x_B) \Rightarrow y - 3 = -\frac{4}{3}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{17}{3}$$

عرض از مبدأ این خط  $\frac{17}{3}$  است.

پس گزینه «۴» درست است.

**مثال:** با توجه به شکل زیر، اگر خط  $L$  موازی محور  $x$ ها رسم شده باشد، خط  $d_1$  در کدام نقطه، محور طول‌ها را قطع می‌کند؟

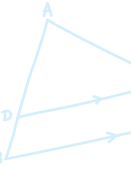


(۱)  $\sqrt{3}$

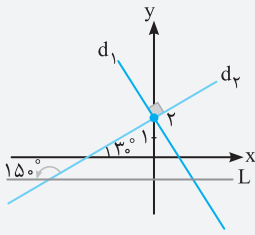
(۲)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(۳)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۴)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$



• پاسخ: خط با جهت مثبت محور طول‌ها زاویه  $30^\circ$  درجه می‌سازد، پس شیب آن  $\tan 30^\circ$  یعنی  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  است.



چون خط  $d_1$  بر خط  $d_2$  عمود است، بنابراین شیب خط  $d_1$  عکس و قرینه شیب خط  $d_2$  است.

$$d_2 : m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\sqrt{3}$$

عرض از مبدا این خط  $+2$  است.

معادله خط  $d_1$  برابر  $y = -\sqrt{3}x + 2$  است.

برای یافتن محل برخورد این خط با محور طول‌ها، باید عرض آن را صفر بگذاریم:

$$y = -\sqrt{3}x + 2 \rightarrow 0 = -\sqrt{3}x + 2 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

پس گزینه «۴» درست است.

۱. معادله خط گذرا به دو نقطه  $A(3, 0)$  و  $B(0, -2)$  کدام است؟

$2x - 3y + 6 = 0$  (۴)     
 $2x + 3y - 6 = 0$  (۳)     
 $2x + 3y + 6 = 0$  (۲)     
 $2x - 3y - 6 = 0$  (۱)

۲. به ازای کدام مقادیر  $m$  نقاط  $(m, 2)$ ،  $(6, 4m+1)$  و مبدا مختصات در یک راستا قرار می‌گیرند؟

$2$  و  $-\frac{9}{4}$  (۴)     
 $-2$  و  $-\frac{3}{4}$  (۳)     
 $-2$  و  $\frac{3}{4}$  (۲)     
 $-2$  و  $\frac{9}{4}$  (۱)

۳. معادله خط گذرنده از نقطه محل برخورد دو خط  $y = 2x$  و  $y = \frac{x}{4}$ ، بر خط  $y = -x + 4$  عمود است. معادله آن خط کدام است؟

$y = -x + 1$  (۴)     
 $y = x + 1$  (۳)     
 $y = -x$  (۲)     
 $y = x$  (۱)

۴. خطی که از نقاط متمایز  $A(m, -1)$  و  $B(1, 1-2m)$  می‌گذرد، محور  $y$ ها را در نقطه‌ای به عرض  $3$  قطع کرده است. این خط محور  $x$ ها را با چه طولی قطع می‌کند؟

$-2/5$  (۴)     
 $-1/5$  (۳)     
 $1$  (۲)     
 $-2$  (۱)

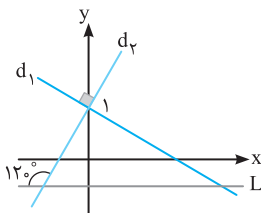
۵. یکی از خطوط به معادله  $(K+1)y + 2Kx - K + 1 = 0$  بر خط گذرنده از دو نقطه  $A(2, -1)$  و  $B(8, 3)$  عمود است. معادله این خط کدام است؟

$3y - 2x = -5$  (۴)     
 $2y - 2x = -5$  (۳)     
 $2y + 3x = 1$  (۲)     
 $2y + 2x = 4$  (۱)

۶. در مثلثی با رئوس  $A(-1, -4)$ ،  $B(-5, 6)$  و  $C(3, 2)$  معادله ارتفاع  $AH$  کدام است؟

$y = -2x - 6$  (۴)     
 $y = 4x$  (۳)     
 $2y + x + 9 = 0$  (۲)     
 $y = 2x - 2$  (۱)

۷. در شکل زیر خط  $d_1$  عمود بر خط  $d_2$  است و خط  $L$  موازی محور  $x$ ها رسم شده است. خط  $d_1$  در کدام نقطه، محور طول‌ها را قطع می‌کند؟



$\sqrt{2}$  (۲)     
 $1$  (۱)

$2$  (۴)     
 $\sqrt{3}$  (۳)

۸. اگر  $A(-1, 2)$ ،  $B(3, 0)$  و  $C(1, -2)$  سه رأس مثلث  $ABC$  باشند، معادله ارتفاع وارد بر ضلع  $BC$  از رأس  $A$  کدام است؟

$y = x + 3$  (۴)     
 $y = -2x$  (۳)     
 $y = -x + 1$  (۲)     
 $y = -x - 3$  (۱)

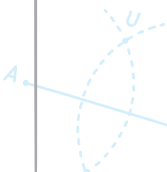
۹. نقاط  $A(2, 5)$ ،  $B(3, -1)$  و  $C(0, 2)$  سه رأس مثلث هستند. مختصات پای ارتفاع  $AH$  کدام است؟

$(-\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$  (۴)     
 $(-\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$  (۳)     
 $(\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$  (۲)     
 $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$  (۱)

۱۰. معادله سه ضلع یک مثلث  $x + y = 1$ ،  $y = 2x$  و  $x = 1$  است، معادله خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟

(تکثیر زیرفاکت)

$y + x = \frac{1}{3}$  (۴)     
 $y + x = \frac{2}{3}$  (۳)     
 $x = \frac{2}{3}$  (۲)     
 $y = \frac{2}{3}$  (۱)



۱۱. دو نقطه A و B به طول‌های  $x_A = 1$  و  $x_B = 2$  روی خط  $y = 4x - 2$  قرار دارند. اگر تصاویر A و B روی محور xها C و D باشند، مساحت دوزنقه ABCD چقدر است؟

- ۳ (۱)      ۲ (۲)      ۵ (۳)      ۴ (۴)

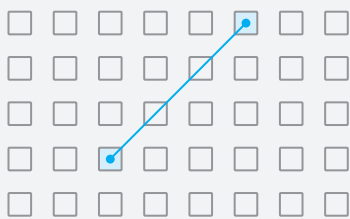
۱۲. دو نقطه M و M' روی محور طول‌ها وجود دارند که اگر  $A(1, -2)$  و  $B(3, 2)$  باشند، زاویه‌های  $\widehat{AMB}$  و  $\widehat{AM'B}$  قائمه می‌شود. حاصل ضرب طول نقاط M و M' کدام است؟

- ۱ (۱)      -۱ (۲)      ۲ (۳)      -۲ (۴)

### فاصله دو نقطه

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

فاصله دو نقطه  $A(x_A, y_A)$  و  $B(x_B, y_B)$  از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید. و فاصله هر نقطه مانند  $A(x_A, y_A)$  از مبدأ برابر  $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$  است.



**مثال:** در یک کلاس، پنج ردیف ۸ نفره نیمکت مطابق شکل چیده شده است. اگر ابعاد طول و عرض هر نیمکت را ۵۰ سانتی‌متر در نظر بگیریم، فاصله مرکز نیمکت ردیف ۲، شماره ۳ با مرکز نیمکت ردیف ۵، شماره ۶ کدام است؟ (فضای خالی بین دو نیمکت نیز به اندازه یک نیمکت است.)

- ۱)  $50\sqrt{18}$       ۲)  $25\sqrt{18}$   
۳)  $25\sqrt{85}$       ۴)  $50\sqrt{72}$

**پاسخ:**

می‌خواهیم فاصله نقطه  $(5, 3)$  را از نقطه  $(11, 9)$  بیابیم:

$$d = \sqrt{(11-5)^2 + (9-3)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$$

چون ابعاد هر نیمکت ۵۰cm است فاصله واقعی  $50 \times \sqrt{72}$  می‌باشد. پس گزینه «۴» درست است.

### نقطه وسط پاره‌خط

مختصات نقطه M وسط پاره‌خط AB با مختصات نقاط  $A(x_A, y_A)$  و  $B(x_B, y_B)$  برابر است با:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

**مثال:** اگر سه نقطه  $A(-1, 0)$ ،  $B(3, 4)$  و  $C(2, 5)$  سه رأس یک مثلث باشند، طول میانه CM کدام است؟

- ۳ (۱)       $\sqrt{10}$  (۲)       $\sqrt{11}$  (۳)       $\sqrt{12}$  (۴)

$$M\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = M(1, 2)$$

**پاسخ:** ابتدا مختصات نقطه M وسط AB را می‌یابیم:

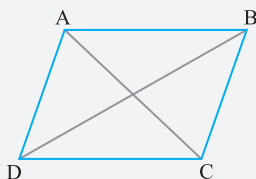
$$CM = \sqrt{(x_M - x_C)^2 + (y_M - y_C)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{10}$$

حال طول پاره‌خط CM را می‌یابیم: پس گزینه «۲» درست است.

### رابطه بین مختصات رئوس متوازی‌الاضلاع

در هر متوازی‌الاضلاع ABCD، مجموع مختصات رئوس مقابل با هم برابرند.

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$



۱۳. اگر نقاط  $A(1,2)$ ،  $B(3,7)$ ،  $C(4,5)$  و  $D(m+1, n-1)$  مختصات چهار رأس متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  باشند، حاصل  $m.n$  کدام است؟

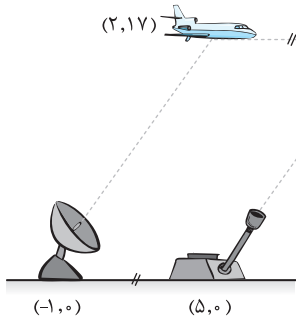
- (۱)  $-1$       (۲)  $2$       (۳)  $1$       (۴)  $3$

۱۴. نقاط  $A(0,-1)$ ،  $B(3,2)$  و  $C(-2,1)$  سه رأس یک مثلث هستند. نوع مثلث کدام است؟

- (۱) قائم‌الزاویه      (۲) متساوی‌الساقین  
(۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین      (۴) نامشخص

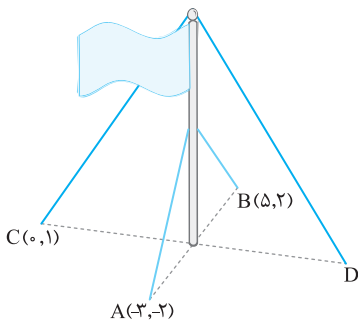
۱۵. مطابق شکل اگر هواپیما، رادار و زده‌هوایی در یک صفحه باشند، زده‌هوایی به کدام مختصات شلیک کند تا هواپیما شکار شود؟

- (۱)  $(8,17)$   
(۲)  $(5,17)$   
(۳)  $(17,5)$   
(۴)  $(17,8)$



۱۶. یک میله پرچم، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است به طوری که فاصله هر نقطه تا میله با فاصله نقطه مقابل آن تا میله برابر است. مختصات نقطه  $D$  کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)

- (۱)  $(2,-1)$   
(۲)  $(-1,2)$   
(۳)  $(3,-2)$   
(۴)  $(-2,3)$



۱۷. نقطه  $(7,6)$  رأس یک متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات  $2y + 4x = 8$  و  $2y - 3x = 11$  هستند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ (تجربی ۹۰)

- (۱)  $(1,5)$       (۲)  $(3,4)$       (۳)  $(3,5)$       (۴)  $(4,3)$

۱۸. مثلثی با رئوس  $A(2,6)$ ،  $B(-2,5)$  و  $C(2,3)$  مفروض است. طول میانه  $AM$  کدام است؟

- (۱)  $2$       (۲)  $2\sqrt{2}$       (۳)  $4$       (۴)  $8$

۱۹. در مثلثی با رئوس  $A(4,3)$ ،  $B(2,0)$  و  $C(6,-1)$  معادله میانه وارد بر ضلع  $BC$  کدام است؟

- (۱)  $3y = x - 2$       (۲)  $x = 4$       (۳)  $y = 3$       (۴)  $-y = 3x - 6$

۲۰. نقاط  $A(1,0)$ ،  $B(4,2)$  و  $C(a,-a)$  مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار  $a$ ، مثلث  $ABC$  در رأس  $A$  قائمه و متساوی‌الساقین است؟

- (۱)  $-3$       (۲)  $-2$       (۳)  $2$       (۴)  $3$

۲۱. دو نقطه روی نیم‌ساز ربع اول و سوم داریم که از نقطه  $A(1,2)$  به فاصله ۲ هستند. مجموع طول‌های این نقاط کدام است؟

- (۱)  $1$       (۲)  $2$       (۳)  $3$       (۴)  $4$

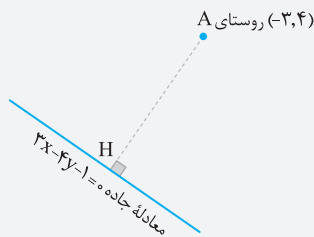
## فاصله نقطه از خط

فاصله نقطه  $A(x_0, y_0)$  از خط  $ax + by + c = 0$  برابر  $AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  است.



فاصله نقطه  $A(x_0, y_0)$  از خط عمودی  $x = K$  برابر  $|K - x_0|$  و از خط افقی  $y = K'$  برابر  $|K' - y_0|$  است.

**مثال:** می‌خواهیم از یک روستا که در مختصات  $(-3, 4)$  قرار دارد یک راه آسفالت به جاده‌ای به معادله  $3x - 4y - 1 = 0$  احداث کنیم. اگر واحدهای مختصات برحسب کیلومتر باشد و هزینه احداث هر کیلومتر جاده ۱۰۰ میلیون تومان باشد، حداقل هزینه احداث جاده کدام است؟



- (۱) ۵۲۰ میلیون
- (۲) ۵۴۰ میلیون
- (۳) ۵۶۰ میلیون
- (۴) ۵۸۰ میلیون

**پاسخ:**

کوتاه‌ترین فاصله، خط عمود AH است.

$$AH = \frac{|3x_A - 4y_A - 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|3(-3) - 4(4) - 1|}{\sqrt{25}} = \frac{26}{5}$$

طول جاده  $\frac{26}{5}$  کیلومتر است و برای احداث این جاده  $52 = \frac{26}{5} \times 100 = 520$  میلیون باید هزینه نمود. پس گزینه «۱» درست است.

## فاصله دو خط موازی

فاصله دو خط موازی  $ax + by + c = 0$  و  $ax + by + c' = 0$  برابر است با:

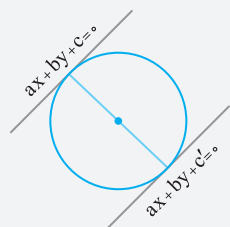
$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

دقت کنید که قبل از استفاده از این فرمول اولاً باید همه بخش‌های معادله به سمت چپ منتقل شوند و ثانیاً ضرایب  $x$  و  $y$  در دو معادله باید برابر باشند و در صورت لزوم باید با ضرب و تقسیم یک یا چند عدد در معادلات، ضرایب را یکسان نمود.

**مثال:** دایره‌ای بر دو خط  $y - 2x + 1 = 0$  و  $2y - 4x = -7$  مماس است. شعاع دایره کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{5}$
- (۲)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- (۳)  $\frac{\sqrt{5}}{4}$
- (۴)  $\frac{\sqrt{5}}{8}$

**پاسخ:** ابتدا در ضابطه  $2y - 4x = -7$  ضرایب  $x$  و  $y$  را به سمت چپ منتقل می‌کنیم و سپس طرفین را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا ضرایب در دو معادله یکسان شوند.



$$\begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ y - 2x + \frac{7}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow 2R = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|\frac{7}{2} - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \Rightarrow 2R = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

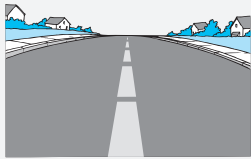
پس گزینه «۳» درست است.

## معادله خط وسط دو خط موازی

مجموعه نقاطی که از دو خط موازی  $ax + by + c = 0$  و  $ax + by + c' = 0$  فاصله‌ای برابر دارند، بر روی خطی موازی دو خط قبلی به معادله  $ax + by + \frac{c + c'}{2} = 0$  قرار دارند.



**مثال:** اگر معادله جدول‌های کنار خیابانی مستقیم  $2x + 3y - 1 = 0$  و  $4x + 6y + 5 = 0$  باشند، معادله خط‌چین وسط خیابان کدام است؟



$$2x + 3y - \frac{3}{4} = 0 \quad (2) \quad 2x - 3y - \frac{1}{4} = 0 \quad (1)$$

$$2x - 3y + \frac{1}{4} = 0 \quad (4) \quad 2x + 3y + \frac{3}{4} = 0 \quad (3)$$

**پاسخ:** خط‌چین وسط خیابان دقیقاً خطی موازی وسط امتداد دو جدول طرفین خیابان است، پس می‌توان پس از یکسان کردن ضرایب معادلات جدول‌ها، معادله خط‌چین را پیدا کرد:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ 4x + 6y + 5 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\div 2} \begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ 2x + 3y + \frac{5}{2} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{خط‌چین}} 2x + 3y + \frac{-1 + \frac{5}{2}}{2} = 0$$

$$2x + 3y + \frac{3}{4} = 0$$

پس گزینه «۳» درست است.

۲۲. نقطه C با کدام طول روی خط  $y = 2x - 2$  باشد تا فاصله آن از نقاط A(1,2) و B(2,0) یکسان باشد؟

$$\frac{13}{6} \quad (4) \quad \frac{22}{13} \quad (3) \quad \frac{5}{6} \quad (2) \quad \frac{5}{3} \quad (1)$$

۲۳. اگر A(-1,2) و B(3,4) باشند، معادله عمودمنصف پاره‌خط AB کدام است؟

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{3} \quad (4) \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \quad (3) \quad y = -2x + 5 \quad (2) \quad y = 2x - 5 \quad (1)$$

۲۴. یک روستا دارای دو دبستان است که مختصات آن‌ها در نقشه به صورت E(3,10) و F(7,2) است. هدف آن است که هر دانش‌آموز در نزدیک‌ترین مدرسه نسبت به خانه خود ثبت‌نام کند. معادله خطی که روستا را با این هدف به دو قسمت تقسیم می‌کند کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)

$$y = -2x + 4 \quad (4) \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \quad (3) \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \quad (2) \quad y = 2x - 4 \quad (1)$$

(تجربی فارغ ۹۲)

۲۵. مساحت مثلثی به رأس‌های A(2,5), B(3,0), C(0,2) کدام است؟

$$7/5 \quad (4) \quad 7 \quad (3) \quad 6/5 \quad (2) \quad 6 \quad (1)$$

۲۶. مساحت مثلثی با سه رأس A(4,0), B(5,2), C(-1,2) کدام است؟

$$5 \quad (4) \quad \frac{11}{2} \quad (3) \quad 6 \quad (2) \quad \frac{13}{2} \quad (1)$$

۲۷. اگر فاصله نقطه M(1,2) از خط  $2x + my - 1 = 0$  برابر ۲ باشد، m کدام است؟

$$m = -1 \quad (4) \quad m = 1 \quad (3) \quad m = 4 \quad (2) \quad m = -4 \quad (1)$$

۲۸. یک رأس مربع، نقطه A(2,-1) و یک ضلع آن واقع بر خط  $2x + 4y = 1$  است. مساحت مربع کدام است؟

$$0/04 \quad (4) \quad 0/01 \quad (3) \quad 0/25 \quad (2) \quad 0/05 \quad (1)$$

۲۹. معادله ضلع مربعی  $3x - 4y = 7$  است. اگر A(1,2) یک رأس آن باشد، محیط مربع کدام است؟

$$\frac{48}{5} \quad (4) \quad \frac{144}{25} \quad (3) \quad \frac{12}{5} \quad (2) \quad 12 \quad (1)$$

۳۰. دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات  $x - 3y = 4$  و  $3x + y = 1$  و یک رأس آن نقطه A(2,1) است. مساحت این مستطیل چقدر است؟

$$3 \quad (4) \quad 3/5 \quad (3) \quad 4 \quad (2) \quad 4/8 \quad (1)$$

۳۱. معادله قطر مربعی به صورت  $5x + 12y - 4 = 0$  است. اگر A(1,1) یک رأس آن باشد، مساحت مربع چقدر است؟

$$4 \quad (4) \quad 2 \quad (3) \quad 4\sqrt{2} \quad (2) \quad 2\sqrt{2} \quad (1)$$

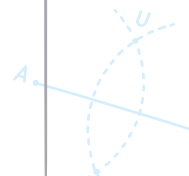
(تجربی فارغ ۹۳)

۳۲. نقطه (3,-1) وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط  $2y - x = 5$  است. مساحت این مربع کدام است؟

$$80 \quad (4) \quad 75 \quad (3) \quad 45 \quad (2) \quad 40 \quad (1)$$

۳۳. اگر A(-1,2), B(3,0), C(1,-2) سه رأس مثلث ABC باشند، طول ارتفاع BH کدام است؟

$$\frac{8\sqrt{5}}{5} \quad (4) \quad \frac{6\sqrt{5}}{5} \quad (3) \quad \frac{14\sqrt{5}}{5} \quad (2) \quad \frac{12\sqrt{5}}{5} \quad (1)$$





۳۴. فاصله دو خط به معادلات  $y = \sqrt{3}x + 2$  و  $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$  کدام است؟

- (۱)  $2 - \sqrt{3}$  (۲)  $\sqrt{3} - 1$  (۳)  $\sqrt{3} + 1$  (۴)  $2 + \sqrt{3}$

۳۵. دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات  $2x - 2y = 3$  و  $y = x + 1$  هستند. مساحت این مربع کدام است؟

- (۱)  $\frac{9}{8}$  (۲)  $\frac{9}{4}$  (۳)  $\frac{25}{8}$  (۴)  $\frac{25}{4}$

۳۶. فاصله دو خط موازی  $y = \sqrt{3}x + 1$  و  $ax + by = 6$  برابر  $\frac{1}{5}$  واحد است.  $a$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳)  $3\sqrt{3}$  (۴)  $-3\sqrt{3}$

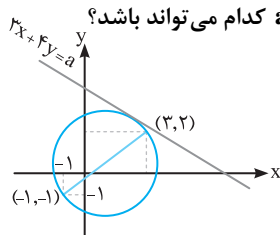
۳۷. دو نقطه روی خط به معادله  $y = x - 1$  قرار دارند که فاصله این نقاط از خط به معادله  $2x - 3y = 5$  برابر  $\sqrt{13}$  است. طول این دو نقطه کدام است؟

- (۱) ۹ و ۱۵ (۲) ۱۱ و ۱۵ (۳) ۱۵ و ۱۱ (۴) ۹ و ۱۱

۳۸. عرض از مبدا مثبت خطی که فاصله آن از خطی به معادله  $3x + 4y = 1$  به برابر ۲ است، کدام است؟

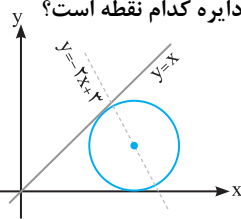
- (۱)  $\frac{2}{25}$  (۲)  $\frac{2}{75}$  (۳)  $\frac{1}{75}$  (۴)  $\frac{1}{25}$

۳۹. دو انتهای قطر دایره‌ای نقاط  $(-1, -1)$  و  $(3, 2)$  هستند. اگر این دایره بر خط  $3x + 4y = a$  مماس باشد،  $a$  کدام می‌تواند باشد؟



- (۱)  $-\frac{25}{2}$  (۲) -۱۷ (۳) ۱۷ (۴)  $\frac{25}{2}$

۴۰. مرکز دایره‌ای در ربع اول روی خط  $y = -2x + 3$  قرار دارد که بر محور طول‌ها و خط  $y = x$  مماس است. مرکز دایره کدام نقطه است؟



- (۱)  $-3 + 2\sqrt{2}$  (۲)  $-3 - 3\sqrt{2}$  (۳)  $-3 + 3\sqrt{2}$  (۴)  $-2 + 3\sqrt{2}$

۴۱. معادله‌های دو ضلع موازی مربعی به صورت  $ax + y = 5$  و  $x + y = 7a$  هستند. مختصات مرکز مربع روی کدام خط قرار دارد؟

- (۱)  $x + y + 6 = 0$  (۲)  $x + y - 6 = 0$  (۳)  $x - y - 6 = 0$  (۴)  $x - y + 6 = 0$

۴۲. معادله نیم‌ساز دو خط  $3x + 4y = 1$  و  $4x + 3y = 3$  کدام می‌تواند باشد؟

- (۱)  $y = x - 2$  (۲)  $y = x + 2$  (۳)  $y = -x + 2$  (۴)  $y = -x - 2$

## تابع درجه ۲ و معادله درجه دوم

**یادآوری:** معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  را با شرط  $a \neq 0$  معادله درجه دوم می‌نامند.

این معادله دارای مُمین  $\Delta = b^2 - 4ac$  است.

در این معادله:

اگر  $\Delta > 0$  باشد، معادله دارای ۲ ریشه است.

اگر  $\Delta = 0$  باشد، معادله ریشه مضاعف دارد.

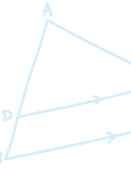
اگر  $\Delta < 0$  باشد، معادله ریشه ندارد.

ریشه‌های معادله در صورت وجود از فرمول  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$  به دست می‌آیند. در صورتی که  $\Delta = 0$  باشد، ریشه مضاعف معادله

$$x = \frac{-b}{2a} \text{ می‌شود.}$$

**نکته**

هرگاه تجزیه معادله درجه دوم به کمک فاکتورگیری یا اتحاد یک جمله‌ای مشترک امکان‌پذیر باشد، بهتر است به کمک این اتحادها معادله را حل کنیم.



مثلاً برای حل معادلات  $x^2 - 2x = 0$  و  $x^2 - 7x + 12 = 0$  بهتر است به روش‌های زیر عمل کنیم:

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \end{cases}$$

### یک تکنیک حرفه‌ای

برای تجزیه معادلات درجه دومی که جمله درجه ۲ آن‌ها، ضریب دارد، بهتر است به روش زیر عمل کنیم:

فرض کنید می‌خواهیم عبارت  $ax^2 + bx + c$  را تجزیه کنیم.

**الف:** عبارت را به صورت  $\frac{1}{a}(ax^2 + bx + c)$  می‌نویسیم.

**ب:** دو عدد می‌یابیم که مجموع آن‌ها  $b$  و ضرب آن‌ها  $ac$  باشد.

**پ:** دو عدد یافته‌شده (مثلاً  $k$  و  $k'$ ) را در عبارت‌های داخل پرانتز جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\frac{1}{a}(ax+k)(ax+k')$$

مثلاً برای حل معادله  $2x^2 - 15x + 27 = 0$  بهتر است عبارت درجه دوم را تجزیه کنیم:

$$2x^2 - 15x + 27 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(2x^2 - 15x + 27) = 0$$

اکنون باید ۲ عدد بیابیم که مجموع آن‌ها  $-15$  و حاصل ضرب آن‌ها  $54$  باشد (دقت کنید  $27$  در نظر گرفته نمی‌شود)

$$\frac{1}{2}(2x - 6)(2x - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{9}{2} \end{cases}$$

این دو عدد  $-9$  و  $-6$  می‌باشد. آن‌ها را در پرانتزها جای‌گذاری می‌کنیم:

### نکته

۱ در معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر مجموع ضرایب صفر شود یکی از ریشه‌ها  $1$  و دیگری  $\frac{c}{a}$  است.

مثلاً ریشه‌های معادله  $3x^2 - 5x + 2 = 0$  برابر  $x = 1$  و  $x = \frac{2}{3}$  است.

۲ در معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر  $a + c = b$  باشد یکی از ریشه‌ها  $-1$  و دیگری  $-\frac{c}{a}$  است.

مثلاً ریشه‌های معادله  $3x^2 + 5x + 2 = 0$  برابر  $x = -1$  و  $x = -\frac{2}{3}$  می‌باشند.

**مثال:** معادله  $mx^2 - (3m+1)x + \Delta m - 1 = 0$  دارای ریشه مضاعف است. ریشه‌های مضاعف آن کدام‌اند؟  
 $(1) -2$  و  $(2) 4$        $(3) -2$  و  $(4) 4$        $(5) 4$  و  $(6) 2$

**پاسخ:** اگر معادله ریشه مضاعف دارد، پس دلتای آن برابر صفر است، بنابراین:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (-3m+1)^2 - 4(m)(\Delta m - 1) = 0 \Rightarrow 9m^2 + 6m + 1 - 2\Delta m^2 + 4m = 0$$

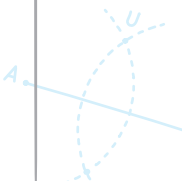
$$\Rightarrow -11m^2 + 10m + 1 = 0 \Rightarrow 11m^2 - 10m - 1 = 0$$

$$\frac{1}{11}(11m-11)(11m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{11} \end{cases}$$

از طرفی ریشه مضاعف تابع  $x = -\frac{b}{2a}$  است.

$$x = -\frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow -\frac{-(3m+1)}{2m} = \frac{3m+1}{2m} = \begin{cases} m = 1 \rightarrow x = \frac{4}{2} = 2 \\ m = \frac{-1}{11} \rightarrow x = \frac{11}{-2} = -\frac{11}{2} = -5.5 \end{cases}$$

پس گزینه «۴» درست است.



# پاسخنامه تشریحی

۱. ۲ ۳ ۴

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 0}{0 - 3} = \frac{2}{3}$$

روش اول: ابتدا شیب خط AB را می‌یابیم:

سپس معادله خط را به کمک یکی از نقاط A یا B می‌نویسیم:

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 0 = \frac{2}{3}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - 2$$

$$3y = 2x - 6 \Rightarrow 3y - 2x + 6 = 0 \quad \text{یا} \quad -3y + 2x - 6 = 0$$

طرفین را در ۳ ضرب می‌کنیم:

روش دوم: فرض می‌کنیم معادله خط به صورت  $y = ax + b$  باشد، با جای‌گذاری دو نقطه A(۳, ۰) و B(۰, -۲) در معادله، مجهولات a و b را می‌یابیم:

$$y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 0 = a(3) + b \\ -2 = a(0) + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 0 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - 2$$

$$3y = 2x - 6 \Rightarrow 2x - 3y - 6 = 0$$

طرفین را در ۳ ضرب می‌کنیم:

۲. ۱ ۲ ۳ ۴

اگر سه نقطه را به ترتیب  $A(m, 3)$ ،  $B(6, 2m+1)$  و  $O(0, 0)$  در نظر بگیریم، شیب‌های دو خط OA و OB باید با هم برابر باشند تا این سه نقطه در یک راستا قرار بگیرند:

$$m_{OA} = m_{OB} \Rightarrow \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{y_B - y_O}{x_B - x_O} \Rightarrow \frac{3 - 0}{m - 0} = \frac{2m + 1 - 0}{6 - 0}$$

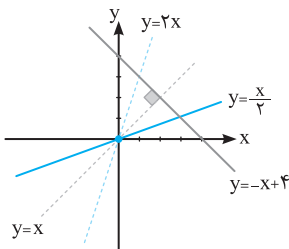
$$4m^2 + m - 18 = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}(4m + 9)(4m - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{-9}{4} \\ m = 2 \end{cases}$$

۳. ۲ ۳ ۴

ابتدا محل برخورد دو خط  $y = 2x$  و  $y = \frac{x}{2}$  را با تشکیل دستگاه می‌یابیم:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow 2x = \frac{x}{2} \Rightarrow 4x = x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$$

محل برخورد، نقطه  $(0, 0)$  است. خط مطلوب، بر خط  $y = -x + 4$  عمود است. پس شیب آن عکس و قرینه شیب خط  $y = -x + 4$  است.



$$m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-1} = 1$$

معادله خط مطلوب را به کمک نقطه  $(0, 0)$  و شیب  $m = 1$  می‌نویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x$$

۴. ۱ ۲ ۳ ۴

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 2m - (-1)}{1 - m} = \frac{2 - 2m}{1 - m} = 2$$

شیب خط گذرنده از دو نقطه A و B را می‌یابیم:

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - (-1) = 2(x - m) \Rightarrow y = 2x - 2m - 1$$

معادله خط را با شیب ۲ و نقطه  $A(m, -1)$  می‌نویسیم:

این خط محور عرض‌ها را در  $y = 3$  قطع نموده است، بنابراین:  $3 = 2(0) - 2m - 1 \Rightarrow m = -2 \Rightarrow y = 2x - 2(-2) - 1 = 2x + 3$

برای یافتن نقطه‌ای که محور طول‌ها را قطع می‌کند، y را صفر می‌گذاریم:

$$y = 2x + 3 \Rightarrow 0 = 2x + 3 \Rightarrow x = \frac{-3}{2} = -1.5$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - (-1)}{8 - 2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ابتدا شیب خط AB را می‌یابیم:

$$m' = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

چون خط مطلوب، بر خط AB عمود است پس شیب آن، عکس و قرینه شیب AB است.

بنابراین شیب خط  $(K+1)y + 2Kx - K + 1 = 0$  برابر  $-\frac{3}{2}$  است.

$$(K+1)y + 2Kx - K + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{-2K}{K+1}x + \frac{K-1}{K+1}$$

$$m' = \frac{-2K}{K+1} = -\frac{3}{2} \Rightarrow 4K = 3K + 3 \Rightarrow K = 3$$

$$(K+1)y + 2Kx - K + 1 = 0 \xrightarrow{K=3} 2y + 3x = 1$$

حال با جای گذاری 3 به جای K معادله را حل می‌کنیم:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2 - 6}{3 - (-5)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

شیب BC را می‌یابیم:

$$m_{AH} = \frac{-1}{m_{BC}} = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

چون ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است، بنابراین شیب AH عکس و قرینه BC می‌باشد.

$$y - y_A = m_{AH}(x - x_A) \Rightarrow y - (-4) = 2(x - (-1)) \Rightarrow y = 2x - 2$$

حال معادله خط AH را می‌یابیم.

شیب خط  $d_1$  برابر  $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$  یعنی  $m_1 = \sqrt{3}$  است. چون خط  $d_1$  بر  $d_2$  عمود است، شیب آن عکس و قرینه شیب  $m_2$  است.

$$m_1 = \frac{-1}{m_2} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

با استفاده از شیب خط به دست آمده و نقطه برخورد دو خط  $d_1$  و  $d_2$  به مختصات  $(0, 1)$  معادله خط  $d_1$  را می‌نویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + 1$$

$$0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + 1 \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

این خط محور طول‌ها را در نقطه‌ای به عرض  $y = 0$  قطع می‌کند.

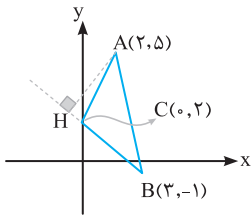
$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = 1 \Rightarrow m_{AH} = \frac{-1}{m_{BC}} = \frac{-1}{1} = -1$$

شیب خط BC را می‌یابیم:

$$y - y_A = m_{AH}(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = -1(x + 1) \Rightarrow y = -x + 1$$

و سپس معادله خط AH را می‌نویسیم:

برای یافتن نقطه H باید معادله دو خط AH و BC را بیابیم و آن‌ها را با هم قطع دهیم.



$$\begin{cases} \text{شیب خط BC: } m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2 - (-1)}{0 - 3} = -1 \\ \text{معادله خط BC: } y - y_C = m(x - x_C) \Rightarrow y - 2 = -1(x - 0) \Rightarrow y = -x + 2 \end{cases}$$

$$m_{AH} = \frac{-1}{m_{BC}} = \frac{-1}{-1} = 1$$

از آنجایی که خط AH بر خط BC عمود است شیب خط AH عکس و قرینه شیب خط BC است.

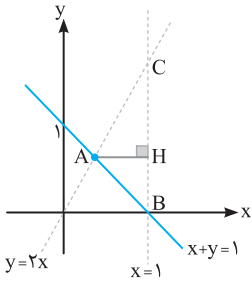
$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 5 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x + 3$$

معادله خط AH را می‌یابیم:

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-1}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}$$

برای یافتن نقطه H باید دستگاه معادلات دو خط BC و AH را تشکیل دهیم:

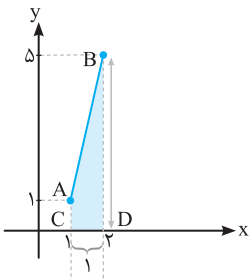
**نکته:** در سوالات مثلث، اگر یکی از اضلاع آن افقی یا عمودی باشد بهتر است شکل مثلث را رسم کنیم.



یکی از اضلاع مثلث ( $x=1$ ) خطی عمود است. پس بهتر است شکل مثلث را رسم کنیم. همان طور که می بینید، کوتاه ترین ارتفاع مثلث، ارتفاع  $AH$  می باشد که یک خط افقی است و معادله آن باید به صورت  $y=K$  باشد. به این ترتیب فقط گزینه «۱» می تواند درست باشد. اگر بخواهیم  $K$  را بیابیم، باید معادله دو خط  $x+y=1$  و  $y=2x$  را قطع دهیم و عرض نقطه تقاطع را بیابیم:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow x+2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \Rightarrow y=\frac{2}{3}$$

با استفاده از مختصات نقطه  $A(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  معادله کوتاه ترین ارتفاع به صورت  $y=\frac{2}{3}$  است.



با رسم شکل به محاسبه مساحت دوزنقه می پردازیم:

$$y_A = 4(1) - 3 = 1$$

$$y_B = 4(2) - 3 = 5$$

همان طور که می بینید طول قاعده بزرگ برابر ۵ و طول قاعده کوچک برابر ۱ است. ارتفاع دوزنقه هم فاصله  $x=1$  تا  $x=2$  یعنی  $h=1$  است.

$$S_{\text{دوزنقه}} = \frac{\text{مجموع قاعده بزرگ و قاعده کوچک}}{2} \times \text{ارتفاع} = \frac{5+1}{2} \times 1 = 3$$

نقطه  $(x, 0)$  را به عنوان مختصات نقطه  $M$  روی محور طول ها در نظر می گیریم، شیب خطهای  $AM$  و  $BM$  را می یابیم:

$$m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{0 - (-2)}{x - 1} = \frac{2}{x - 1}$$

$$m_{BM} = \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B} = \frac{0 - 2}{x - 3} = \frac{-2}{x - 3}$$

می دانیم  $m_{AM} \cdot m_{BM} = -1$  است و حاصل ضرب نقاط  $x$  و  $x'$  برابر  $\frac{c}{a}$  است.

$$\frac{2}{x-1} \times \frac{-2}{x-3} = -1 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 4 \Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$xx' = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$$



در متوازی الاضلاع  $ABCD$  مجموع مختصات رئوس مقابل هم، با یکدیگر برابرند، یعنی:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 4 = 3 + m + 1 \\ 2 + 5 = 7 + n - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \end{cases} \Rightarrow m \cdot n = 1$$

**روش اول:** طول اضلاع  $AB$ ،  $AC$  و  $BC$  را محاسبه می کنیم:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{18}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-2-0)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{8}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-2-3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{26}$$

اگر دقت کنید  $AB^2 + AC^2 = BC^2$  می باشد. بنابراین مثلث قائم الزاویه است.

**روش دوم:** تأیید قائم بودن زاویه مثلث، بررسی عکس و قرینه بودن شیبهای دو ضلع قائمه است.

$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - (-1)}{3 - 0} = 1 \\ m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{1 - (-1)}{-2 - 0} = -1 \end{cases} \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{AC} = -1$$

رأس  $A$  قائمه است.

۱۵. ۲ ۳ ۴

با توجه به این که شکل حاصل متوازی الاضلاع است، مجموع مختصات رئوس مقابل با هم برابرند. مختصات نقطه مورد نظر را  $(x, y)$  فرض می کنیم.

$$\begin{cases} 2 + 5 = -1 + x \\ 0 + 17 = 0 + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 17 \end{cases}$$

پس داریم:

ضدهوایی باید به نقطه  $(8, 17)$  شلیک کند تا امکان شکار هواپیما وجود داشته باشد.

۱۶. ۲ ۳ ۴

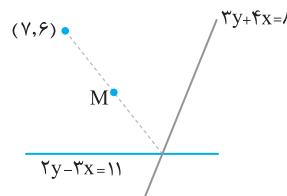
مختصات وسط پاره خط  $CD$  و مختصات وسط پاره خط  $AB$  با هم برابرند، پس:

$$\begin{cases} \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{0 + x_D}{2} = \frac{-3 + 5}{2} \\ \frac{1 + y_D}{2} = \frac{-2 + 2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = -1 \end{cases} \Rightarrow D(2, -1)$$

۱۷. ۱ ۲ ۴

اگر دو خط  $2y - 3x = 11$  و  $3y + 4x = 8$  را با هم قطع دهیم، مختصات رأس مقابل نقطه  $(7, 6)$  به دست می آید. دقت کنید نقطه  $(7, 6)$  روی هیچ یک از دو خط  $2y - 3x = 11$  و  $3y + 4x = 8$  قرار ندارد. بنابراین رأس  $(7, 6)$  نقطه مقابل، برخورد دو خط است.

$$\begin{cases} 3y + 4x = 8 \\ 2y - 3x = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9y + 12x = 24 \\ 4y - 12x = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 17y = 68 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow x = -1$$



مختصات  $M$  یعنی وسط قطر را می یابیم:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{7 + (-1)}{2} = 3 \\ y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{6 + 4}{2} = 5 \end{cases}$$

۱۸. ۱ ۳ ۴

اول مختصات  $M$  یعنی وسط  $BC$  را پیدا می کنیم:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-2 + 2}{2} = 0 \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{5 + 3}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow M(0, 4)$$

حال، اندازه پاره خط  $AM$  را محاسبه می کنیم:

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(0 - 2)^2 + (4 - 6)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۱۹. ۱ ۳ ۴

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2 + 6}{2} = 4 \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0 + (-1)}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M(4, -\frac{1}{2})$$

ابتدا مختصات نقطه وسط  $BC$  را می یابیم:

$$m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{-\frac{1}{2} - 3}{4 - 4} = \frac{-\frac{7}{2}}{0} = \text{تعریف نشده}$$

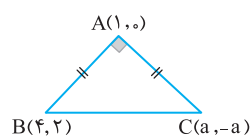
حال شیب خط  $AM$  را محاسبه می کنیم:

**تذکر:** هرگاه شیب خطی تعریف نشده باشد آن خط قائم است و معادله آن  $x = x_0$  می باشد.

$$x = x_0 \Rightarrow x = x_M = 4 \quad \text{یا} \quad x = x_A = 4$$

۲۰. ۱ ۲ ۳ ۴

**روش اول:** می دانیم  $AB = AC$  است، پس:



$$\begin{aligned} \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\ \sqrt{(4-0)^2 + (2-0)^2} &= \sqrt{(a-0)^2 + (-a-0)^2} \\ \sqrt{13} &= \sqrt{2a^2 - 2a + 1} \end{aligned}$$



مهرماه

فصل اول

۴۵

هندسه تحلیلی و جبر

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$2a^2 - 2a + 1 = 13 \Rightarrow 2a^2 - 2a - 12 = 0.$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow (a-3)(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=-2 \end{cases}$$

از طرفی رابطه فیثاغورس، یعنی  $AB^2 + AC^2 = BC^2$  هم باید برقرار باشد.

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(a-4)^2 + (-a-2)^2} = \sqrt{2a^2 - 4a + 20}.$$

حال مقادیر  $AB$ ،  $AC$  و  $BC$  را در رابطه فیثاغورس جای گذاری می‌کنیم:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 13 + (2a^2 - 2a + 1) = 2a^2 - 4a + 20 \Rightarrow a = 3$$

بدیهی است جواب نهایی تست  $a = 3$  است.

**روش دوم:** شیب خط  $AC$  باید عکس و قرینه شیب خط  $AB$  باشد چرا که دو خط بر هم عمودند.

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-a-0}{a-1} \Rightarrow m_{AC} \cdot m_{AB} = -1$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-0}{4-1} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-a}{a-1} \times \frac{2}{3} = -1 \Rightarrow \frac{-2a}{3a-3} = -1 \Rightarrow 2a = 3a - 3 \Rightarrow a = 3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۱



در هر معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$

مجموع ۲ ریشه برابر با  $S = \frac{-b}{a}$  است.

نقطه  $(a, a)$  را روی نیم‌ساز ربع اول و سوم در نظر می‌گیریم و فاصله آن را تا نقطه  $A(1, 2)$  محاسبه می‌کنیم:

$$\sqrt{(a-1)^2 + (a-2)^2} = 2 \Rightarrow (a^2 - 2a + 1) + (a^2 - 4a + 4) = 4 \Rightarrow 2a^2 - 6a + 1 = 0.$$

در معادله  $2a^2 - 6a + 1 = 0$  مجموع ۲ ریشه برابر  $S = \frac{-(-6)}{2} = 3$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲

**روش اول:** نقطه‌ای به مختصات  $M(x, 2x-3)$  روی خط  $y = 2x - 3$  در نظر می‌گیریم. فاصله آن تا نقاط  $A(1, 2)$  و  $B(2, 0)$  را می‌یابیم و آن‌ها را با هم مساوی می‌گذاریم:

$$MA = MB \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (2x-3-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (2x-3)^2} \Rightarrow 6x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{6}$$

پای عمودمنصف  $(\frac{1+2}{2}, \frac{2+0}{2}) = (\frac{3}{2}, 1)$

**روش دوم:** معادله خط عمودمنصف را می‌یابیم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-2}{2-1} = -2$$

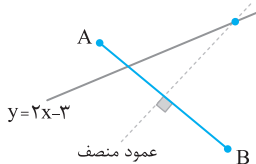
$$m' = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$y - y_0 = m'(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{2}(x - \frac{3}{2}) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

معادله عمودمنصف را می‌یابیم:

حال، معادله عمودمنصف را با خط  $y = 2x - 3$  قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Rightarrow 2x - 3 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{13}{6}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳

**روش اول:** از آن جایی که فاصله هر نقطه روی عمودمنصف تا دو سر پاره‌خط برابر است، با فرض این‌که نقطه  $M(x, y)$  روی عمودمنصف است می‌توان گفت:

$$MA = MB \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 \Rightarrow 8x + 4y = 20 \Rightarrow y = -2x + 5$$

روش دوم: شیب و نقطهٔ وسط AB را می‌یابیم:

$$M\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2+4}{2}\right) \Rightarrow M(1, 3)$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-2}{3-(-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

شیب عمودمنصف، عکس و قرینهٔ شیب خط AB است.

معادلهٔ خط عمودمنصف را می‌نویسیم:

$$y - 3 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 5$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴

خط مطلوب، همان عمودمنصف پاره‌خط EF (یا فاصلهٔ دو مدرسه) است.

$$\text{مختصات وسط EF: } \begin{cases} x_M = \frac{x_E + x_F}{2} = \frac{3+7}{2} = 5 \\ y_M = \frac{y_E + y_F}{2} = \frac{1+2}{2} = 6 \end{cases}$$

شیب EF را می‌یابیم و آن را عکس و قرینه می‌کنیم تا شیب عمودمنصف پیدا شود:

$$m_{EF} = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{2-1}{7-3} = \frac{1}{4} = -2 \Rightarrow \text{عمودمنصف} = \frac{-1}{m_{EF}} = \frac{-1}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$y - 6 = \frac{1}{2}(x - 5) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

معادله خط را می‌نویسیم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵

### راهنمای ۱

برای یافتن مساحت مثلثی با رئوس  $A(x_A, y_A)$ ،  $B(x_B, y_B)$  و  $C(x_C, y_C)$  می‌توان از روش زیر استفاده نمود.

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \\ x_A & y_A \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} [(x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A) - (x_B y_A + x_C y_B + x_A y_C)]$$

### تذکره:

۱ ترتیب چیدن نقاط در فرمول S اهمیتی ندارد، فقط اولین نقطه در مرتبهٔ آخر باید تکرار شود.

۲ در صورت منفی شدن جواب S، مساحت برابر قدرمطلق آن است.

به کمک راهنمای فوق مساحت را می‌یابیم:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \\ 0 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(2 \times 0) + (3 \times 2) + (0 \times 5)] - (3 \times 5 + 0 \times 0 + 2 \times 2) = \frac{1}{2} [6 - 19] = \frac{-13}{2} = -6.5$$

از آن جایی که مساحت نمی‌تواند عددی منفی باشد، پس  $S = 6.5$  است.



مهرماه

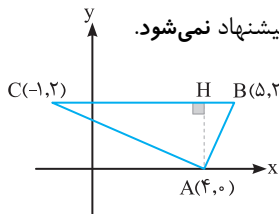


روش اول: با استفاده از راهبرد گفته شده داریم:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 2 \\ -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(5 \times 0 + 4 \times 2 + (-1) \times 2) - (4 \times 2 + (-1) \times 0 + 5 \times 2)] = \frac{1}{2} [6 - 18] = -6 \rightarrow S = 6$$

روش دوم: شکل مثلث را رسم می‌کنیم.

دقت کنید دلیل رسم، در این تست این است که دو نقطه عرض‌های برابر دارند در غیر این صورت روش رسم پیشنهاد نمی‌شود. با توجه به شکل، طول ارتفاع  $AH = 2$  و طول قاعده  $BC = 6$  است.



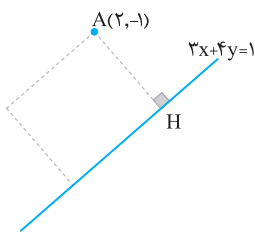
$$S = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} (2 \times 6) = 6$$

فاصله نقطه  $M(1,2)$  را از خط  $3x + my - 1 = 0$  پیدا می‌کنیم و آنرا برابر ۲ می‌گذاریم:

$$\frac{|3(1) + m(2) - 1|}{\sqrt{3^2 + m^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|2m + 2|}{\sqrt{9 + m^2}} = 2 \Rightarrow \frac{2|m+1|}{\sqrt{9 + m^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|m+1|}{\sqrt{9 + m^2}} = 1 \Rightarrow |m+1| = \sqrt{9 + m^2}$$

$$\Rightarrow m^2 + 2m + 1 = 9 + m^2 \Rightarrow 2m = 8 \Rightarrow m = 4$$

فاصله نقطه  $A$  تا خط  $3x + 4y - 1 = 0$  برابر ضلع مربع است.



$$AH = \frac{|3x_0 + 4y_0 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3(2) + 4(-1) - 1|}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5} = 0.2$$

مساحت مربع برابر است با:

$$S = (\text{طول ضلع})^2 = (0.2)^2 = 0.04$$

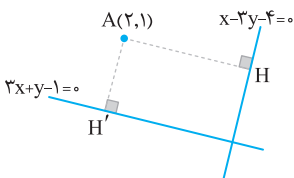
فاصله رأس تا خط  $3x - 4y - 7 = 0$  را می‌یابیم که همان طول ضلع مربع است.

$$AH = \frac{|3x_0 - 4y_0 - 7|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|3(1) - 4(2) - 7|}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5}$$

محیط مربع، ۴ برابر ضلع آن است.

$$P = 4(\text{ضلع}) = 4\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{48}{5}$$

فاصله نقطه  $A$  را از دو خط داده شده می‌یابیم. این فاصله‌ها، همان طول اضلاع مستطیل است.

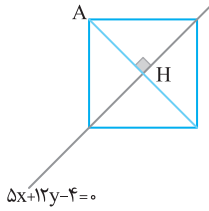


$$AH = \frac{|x_0 - 2y_0 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|2 - 2(1) - 4|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

$$AH' = \frac{|3x_0 + y_0 - 1|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|3(2) + 1 - 1|}{\sqrt{10}} = \frac{6}{\sqrt{10}}$$

$$S = AH \cdot AH' = \frac{5}{\sqrt{5}} \times \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{30}{10} = 3$$

فاصله نقطه A از قطر  $5x + 12y - 4 = 0$  برابر با نصف طول قطر مربع است.

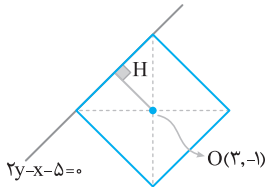


$$AH = \frac{|\Delta x_0 + 12y_0 - 4|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|\Delta(1) + 12(1) - 4|}{\sqrt{169}} = \frac{13}{13} = 1$$

بنابراین طول قطر مربع  $2(1) = 2$  خواهد بود.

$$S = \frac{d^2}{2} = \frac{(2)^2}{2} = 2$$

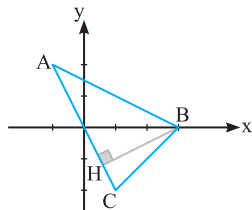
فاصله نقطه  $(3, -1)$  در مرکز مربع تا معادله یک ضلع آن، برابر نصف طول ضلع مربع است.



$$OH = \frac{|2y_0 - x_0 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2(-1) - 3 - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

طول ضلع مربع 2 برابر OH یعنی  $\frac{20}{\sqrt{5}}$  است، پس مساحت مربع برابر می‌شود با  $80$ .  $S = \left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 = 80$

ابتدا شیب و معادله خط AC را می‌یابیم:



$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-2 - 2}{1 - (-1)} = \frac{-4}{2} = -2$$

اکنون معادله AC را می‌نویسیم:

$$y - y_A = m_{AC}(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = -2(x + 1) \Rightarrow y = -2x \Rightarrow y + 2x = 0$$

فاصله نقطه B از خط  $y + 2x = 0$  همان ارتفاع BH است.

$$BH = \frac{|y + 2x|}{\sqrt{1 + 2^2}} = \frac{|0 + 2(3)|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

معادله هر دو خط را به سمت چپ مساوی انتقال می‌دهیم:

$$\begin{cases} \sqrt{3}y - 3x + 6 = 0 & (1) \\ y - \sqrt{3}x - 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

با تقسیم ضابطه شماره (1) بر  $\sqrt{3}$  ضرایب خطوط (1) و (2) را یکسان می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{3}y - 3x + 6}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow y - \frac{3}{\sqrt{3}}x + \frac{6}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow y - \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = 0$$

$$\begin{cases} y - \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = 0 \\ y - \sqrt{3}x - 2 = 0 \end{cases}$$

حال دوباره ضابطه دو خط را می‌نویسیم:

$$d = \frac{|2\sqrt{3} - (-2)|}{\sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{2\sqrt{3} + 2}{2} = \sqrt{3} + 1$$

اکنون می‌توانیم فاصله دو خط را بیابیم:

فاصله دو ضلع مربع، طول ضلع مربع است.

$$\begin{cases} 2x - 2y - 3 = 0 \\ y - x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y - 3 = 0 \\ 2x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

با ضرب 2- در معادله دوم ضرایب X و Y را در دو ضابطه، یکسان می‌کنیم:

$$\text{طول ضلع} = \frac{|-3 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{8}}$$

حال طول ضلع مربع را به کمک فاصله دو خط می‌یابیم:

$$S = \left(\frac{5}{\sqrt{8}}\right)^2 = \frac{25}{8}$$

برای یافتن مساحت مربع کافی است ضلع را به توان 2 برسانیم:

از آن جایی که دو خط  $y = \sqrt{3}x + 1$  و  $y = \frac{-a}{b}x + \frac{c}{b}$  موازی‌اند باید شیب‌های آن‌ها برابر باشند.  
 $-\frac{a}{b} = \sqrt{3} \Rightarrow -a = \sqrt{3}b$   
 حال فاصله دو خط  $y - \sqrt{3}x - 1 = 0$  و  $y + \frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = 0$  را می‌یابیم:

$$\text{فاصله} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{(x \text{ ضریب})^2 + (y \text{ ضریب})^2}} = \frac{|-\frac{c}{b} + 1|}{\sqrt{(\frac{a}{b})^2 + 1}} = \frac{|-\frac{c}{b} + 1|}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1}} = \frac{|-\frac{c}{b} + 1|}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$|-\frac{c}{b} + 1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{c}{b} + 1 = 1 \Rightarrow -\frac{c}{b} = 0 \rightarrow \text{غ ق ق} \\ -\frac{c}{b} + 1 = -1 \Rightarrow \frac{-c}{b} = -2 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

در نتیجه:

از طرفی می‌دانیم  $a = -\sqrt{3}b$  پس  $a = -3\sqrt{3}$  است.

**روش اول:** نقطه  $M(x, x-1)$  را روی خط  $y = x - 1$  در نظر می‌گیریم و فاصله آن را از خط  $2x - 3y - 5 = 0$  می‌یابیم که برابر  $\sqrt{13}$  است، یعنی:

$$MH = \frac{|2x - 3(x-1) - 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|-x - 2|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \Rightarrow |x + 2| = 13 \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 13 \Rightarrow x = 11 \\ x + 2 = -13 \Rightarrow x = -15 \end{cases}$$

**روش دوم:** معادله خطی موازی خط  $2x - 3y - 5 = 0$  را مانند  $2x - 3y + c = 0$  فرض می‌کنیم که فاصله این دو خط برابر  $\sqrt{13}$  باشد.

$$\frac{|c - (-5)|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \sqrt{13} \Rightarrow |c + 5| = 13 \Rightarrow \begin{cases} c = 8 \\ c = -18 \end{cases}$$

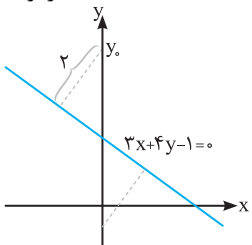
$$2x - 3y + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 8 = 0 \\ 2x - 3y - 18 = 0 \end{cases}$$

معادلات خط را بر اساس  $c$ ‌های پیدا شده می‌نویسیم:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ 2x - 3y + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 10 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y = x - 1 \\ 2x - 3y - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -15 \\ y = -16 \end{cases}$$

حال این خطوط را با  $y = x - 1$  قطع می‌دهیم:

فرض می‌کنیم عرض از مبدا خط مورد نظر برابر  $y_0$  است. پس مطابق شکل فاصله نقطه  $(0, y_0)$  را تا خط  $3x + 4y - 1 = 0$  برابر ۲ می‌گذاریم:



$$\frac{|3x_0 + 4y_0 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|3(0) + 4y_0 - 1|}{5} = 2$$

$$\Rightarrow |4y_0 - 1| = 10 \Rightarrow \begin{cases} 4y_0 - 1 = 10 \Rightarrow y_0 = \frac{11}{4} = 2.75 \checkmark \\ 4y_0 - 1 = -10 \Rightarrow y_0 = \frac{-9}{4} = -2.25 \end{cases}$$

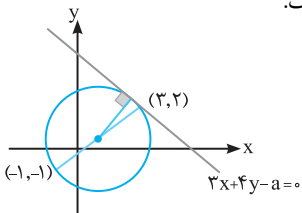
می‌گذاریم:

از آن جایی که دو سر قطر دایره نقاط  $(-1, -1)$  و  $(3, 2)$  است، بنابراین وسط این دو نقطه مرکز دایره و فاصله آن‌ها قطر دایره می‌باشد.

مرکز دایره  $(\frac{-1+3}{2}, \frac{-1+2}{2}) = (1, \frac{1}{2})$

شعاع  $= \frac{5}{2} \rightarrow \sqrt{(-1-3)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

با توجه به شکل متوجه می‌شویم فاصله نقطه  $(1, \frac{1}{2})$  از خط  $3x + 4y - a = 0$  برابر شعاع دایره یعنی  $\frac{5}{2}$  است.



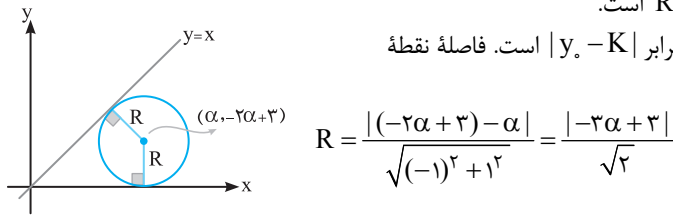
$$\frac{|3x_0 + 4y_0 - a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{|3(1) + 4(\frac{1}{2}) - a|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{|\frac{5}{2} - a|}{5} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} - a = \pm \frac{25}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{2} - a = \frac{25}{2} \Rightarrow a = -10 \\ \frac{5}{2} - a = -\frac{25}{2} \Rightarrow a = 15 \end{cases}$$

با توجه به شکل عرض از مبدا مثبت است، پس  $a = \frac{35}{2}$  مورد قبول خواهد بود.

با توجه به شکل، می‌توان نتیجه گرفت مرکز دایره که به مختصات  $(\alpha, -2\alpha+3)$  است از دو خط  $y=x$  و  $y=0$  فاصله‌ای برابر دارد. فاصله نقطه  $(\alpha, -2\alpha+3)$  از خط  $y=0$  برابر  $R = |-2\alpha+3-0|$  است.

به یاد داشته باشید که فاصله نقطه  $(x, y)$  از خط افقی  $y=K$  برابر  $|y-K|$  است. فاصله نقطه  $(\alpha, -2\alpha+3)$  از خط  $y-x=0$  را محاسبه می‌کنیم:



$$R = \frac{|(-2\alpha+3)-\alpha|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} = \frac{|-3\alpha+3|}{\sqrt{2}}$$

هر دو فاصله با هم برابرند، پس:

$$\frac{|-3\alpha+3|}{\sqrt{2}} = |-2\alpha+3| \xrightarrow{\text{توان } 2} \frac{9\alpha^2-18\alpha+9}{2} = 4\alpha^2-12\alpha+9 \Rightarrow 9\alpha^2-18\alpha+9 = 8\alpha^2-24\alpha+18$$

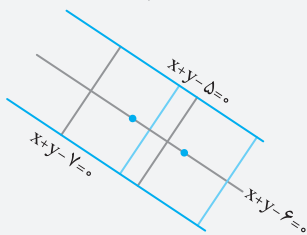
$$\Rightarrow \alpha^2 + 6\alpha - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-6-\sqrt{72}}{2} = -3-3\sqrt{2} \\ \alpha = \frac{-6+\sqrt{72}}{2} = -3+3\sqrt{2} \end{cases}$$

با توجه به این که مرکز دایره در ربع اول است پس باید  $\alpha$  مثبت باشد، پس  $\alpha = -3+3\sqrt{2}$  می‌باشد.

**نکته:** مرکز مربع نقطه‌ای در وسط این دو خط است.

خط وسط دو خط موازی  $ax+by+c=0$  و  $ax+by+c'=0$  برابر است با:

$$ax+by+\frac{c+c'}{2}=0$$



چون دو خط  $ax+y=5$  و  $x+y=7a$  موازی هستند و شیب‌های آن‌ها با هم برابرند، پس  $a=1$  است.

$$a=1 \Rightarrow \begin{cases} x+y-7=0 \\ x+y-5=0 \end{cases}$$

پس خط وسط دو خط  $x+y-7=0$  و  $x+y-5=0$  برابر است با:

$$x+y+\frac{-5-7}{2}=0 \Rightarrow x+y-6=0$$

**راهنمای ۲**

هر نقطه بر روی نیم‌ساز، از دو خط تشکیل‌دهنده زاویه، فاصله‌ای برابر دارد.

برای یافتن معادله نیم‌ساز دو خط  $ax+by+c=0$  و  $a'x+b'y+c'=0$  از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

دو معادله حاصل از این رابطه، دو نیم‌ساز مطلوب هستند.

مطابق آنچه گفته شد برای یافتن نیم‌ساز دو خط  $3x+4y-1=0$  و  $4x+3y-3=0$  رابطه زیر را می‌نویسیم:

$$\frac{|3x+4y-1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|4x+3y-3|}{\sqrt{4^2+3^2}} \Rightarrow |3x+4y-1| = |4x+3y-3| \Rightarrow \begin{cases} 3x+4y-1=4x+3y-3 \Rightarrow y=x-2 \\ 3x+4y-1=-4x-3y+3 \Rightarrow 7y=-7x+4 \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها خط  $y=x-2$  جواب است.

برای حل این معادله به جای  $x^2$  از مجهول معاون A استفاده می‌کنیم:

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \Rightarrow (x^2)^2 - 4(x^2) + 3 = 0 \xrightarrow{x^2=A} A^2 - 4A + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (A-1)(A-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \\ A=3 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

معادله دارای ۴ ریشه متمایز است.

