



هندسه‌ی تحلیلی و جبر

فصل اول (۱۴ پیمانه)

پیمانه‌های ۱ تا ۱۴

کتاب درسی
ریاضی ۲: فصل اول، صفحه‌های ۱ تا ۲۴

تعداد تست

۲۰	یادآوری و تکمیل معادله‌ی خط	آبی	سبز	زرد
۲۰+۱۰	فاصله‌ی دو نقطه و مختصات نقطه‌ی وسط پاره‌خط	هندسه‌ی تحلیلی (۴ پیمانه) (۷۰ تست شناسنامه‌دار)		
۲۰	فاصله‌ی نقطه از خط			

۲۰	مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم (روابط بین ضرایب و ریشه‌ها)	آبی	سبز	زرد
۱۰	تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم با استفاده از P و S	معادله‌ی درجه‌ی دوم و تابع درجه ۲ (۶ پیمانه) (۹۰ تست شناسنامه‌دار)		
۱۰	روش تغییر متغیر برای حل معادله			
۲۰	معادله‌ی سهمی، ماکزیمم، می‌نیمم و رأس آن			
۲۰+۱۰	صفرهای تابع درجه ۲ (نمودار سهمی)			

۲۰	معادلات گویا	آبی	سبز	زرد
۲۰	معادلات رادیکالی	معادلات گویا و معادلات رادیکالی (۲ پیمانه) (۴۰ تست شناسنامه‌دار)		

۲۰	سؤال‌های ویژه‌ی برترها	آبی	سبز	زرد
سؤال‌های ویژه‌ی برترها (۱ پیمانه) (۲۰ تست شناسنامه‌دار)				

۲۰	آزمون جمع‌بندی پایان فصل	آبی	سبز	زرد
آزمون جمع‌بندی پایان فصل (۱ پیمانه) (۲۰ تست شناسنامه‌دار)				

بادرخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.
آبی: مسلطم.
سبز: نسبتاً مسلطم.
زرد: مسلط نیستم.
گام‌های بعدی: اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیشتر دارید.

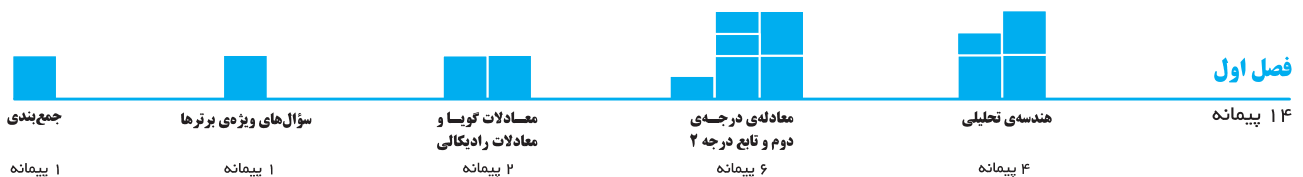
هندسه‌ی تحلیلی و جبر

۱۴ پیمانه
 ۸ پیمانه‌ی ۲۰ سؤالی
 ۴ پیمانه‌ی ۱۰ سؤالی
 ۱ پیمانه‌ی ۲۰ سؤالی ویژه‌ی برترها
 ۱ پیمانه‌ی ۲۰ سؤالی آزمون جمع‌بندی

۲۴۰ سؤال شناسنامه‌دار
 سؤال ۹۹
 از آزمون‌های کانون

سؤال ۸۱
 از کنکورهای سراسری

۶۰ سؤال طراحی شده
 از کتاب درسی
 این سؤال‌ها برای پوشش مطالب کتاب درسی طراحی شده‌اند.

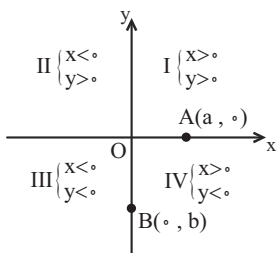




یادآوری و تکمیل معادله‌ی خط

درس‌نامه

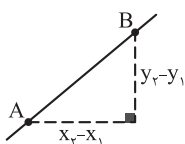
نقطه در دستگاه مختصات ◀ شکل زیر، یک دستگاه محورهای مختصات را نمایش می‌دهد. این دستگاه از چهار ناحیه تشکیل شده است و



هر نقطه‌ی دلخواه $A(x, y)$ در آن به طول x و به عرض y است. در شکل مقابل، علامت مختصات هر نقطه در چهار ناحیه مشخص شده است.

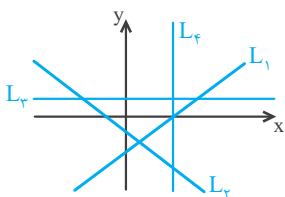
- ۱- اگر نقطه‌ای در ناحیه‌ی اول یا سوم باشد، طول و عرض آن هم‌علامتند.
- ۲- اگر نقطه‌ای در ناحیه‌ی دوم یا چهارم باشد، طول و عرض آن مختلف‌العلامتند.
- ۳- اگر نقطه‌ای روی محور x ها باشد، عرض آن صفر و مختصات آن $A(a, 0)$ است.
- ۴- اگر نقطه‌ای روی محور y ها باشد، طول آن صفر و مختصات آن $B(0, b)$ است.

شیب یک خط ◀ شیب یک خط برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی. به عبارت دیگر شیب خط گذرنده از دو نقطه‌ی غیر هم‌طول $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:



$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

اگر خط L با جهت مثبت محور x ها، زاویه‌ی حاده بسازد، شیب خط مثبت و اگر زاویه‌ی منفرجه بسازد، شیب خط منفی است. همچنین خط‌های افقی شیب صفر دارند و برای خط‌های عمود بر محور x ها، شیب تعریف نمی‌شود.



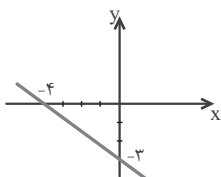
تعریف نمی‌شود: $m_{L_v} = 0$ و $m_{L_h} < 0$ و $m_{L_1} > 0$

معادله‌ی خط ◀ معادله‌ی یک خط به دو صورت باز و بسته نوشته می‌شود. به جدول زیر توجه کنید:

نوع معادله	شکل معادله	شیب خط	عرض از مبدأ	مثال
باز	$ax + by + c = 0$ (a و b با هم صفر نیستند)	$m = -\frac{a}{b}$	$-\frac{c}{b}$	$2x - 3y + 7 = 0 \Rightarrow m = \frac{2}{3}$
بسته	$y = mx + h$	ضریب x	h	$y = 3x - 7 \Rightarrow m = 3$

توجه ◀◀ اگر معادله‌ی یک خط در اختیار باشد، برای رسم نمودار آن کافی است دو نقطه از آن را بیابیم و در دستگاه مختصات این دو نقطه را به هم وصل کنیم، برای این منظور معمولاً نقاط تلاقی با محور x ها (طول از مبدأ خط) و y ها (عرض از مبدأ خط) را می‌یابیم.

مثال: خط به معادله‌ی $3x + 4y + 12 = 0$ را رسم کنید. این خط از کدام ناحیه‌ی محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟



حل: دو نقطه از خط را می‌یابیم، برای یافتن عرض از مبدأ، طول را صفر و برای یافتن طول از مبدأ عرض را صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{array}{l|ll} x & 0 & -4 \\ y & -3 & 0 \end{array}$$

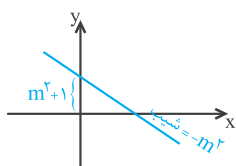
دیده می‌شود که این خط از ناحیه‌ی اول عبور نمی‌کند.

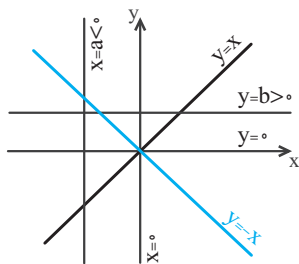
نست ◀ خط به معادله‌ی $y = -m^2x + m^2 + 1$ به ازای هر عدد حقیقی غیر صفر m ، از کدام ناحیه‌ی محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

- اول (۱) دوم (۲) سوم (۳) چهارم (۴)

پاسخ ◀ گزینه‌ی «۳» $m \neq 0$ ، بنابراین $-m^2$ شیب خط همواره منفی و $m^2 + 1$ عرض از مبدأ آن، همواره مثبت

است، شکل تقریبی نمودار به صورت روبه‌روست که از ناحیه‌ی سوم نمی‌گذرد.





۱ معادله‌ی خطوط خاص: به معادله‌ی خطوط خاص در شکل مقابل توجه کنید:

- (۱) $y = x$: نیمساز ناحیه‌های اول و سوم
- (۲) $y = -x$: نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم
- (۳) $y = b$: خطی موازی محور x ها
- (۴) $x = a$: خطی موازی محور y ها
- (۵) $y = 0$: معادله‌ی محور x ها
- (۶) $x = 0$: معادله‌ی محور y ها
- (۷) $y = mx$: خطی که از مبدأ می‌گذرد.

توجه کنید که هر نقطه بر روی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم ($y = x$) یا نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم ($y = -x$) از دو محور به یک فاصله است.

۲ روش‌های نوشتن معادله‌ی خط: در هر یک از حالت‌های زیر، می‌توان معادله‌ی خط را نوشت.

۱- معلوم بودن شیب و یک نقطه از خط	۲- معلوم بودن دو نقطه از خط	۳- معلوم بودن طول از مبدأ و عرض از مبدأ
<p>معادله: $y - y_1 = m(x - x_1)$</p>	<p>معادله: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$</p>	<p>معادله: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$</p>

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(2, 5)$ عبور کرده و شیب آن -2 باشد.

حل: $m = -2 \Rightarrow y - 5 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 9$

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $A(1, -2)$ و $B(5, -1)$ بگذرد.

حل: $m_{AB} = \frac{-1 - (-2)}{5 - 1} = \frac{1}{4} \Rightarrow y - (-1) = \frac{1}{4}(x - 5) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{9}{4}$

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که طول از مبدأ آن -2 و عرض از مبدأ آن 3 باشد.

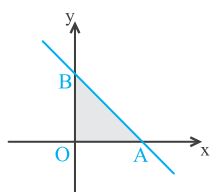
حل: $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow 3x - 2y = -6 \Rightarrow 3x - 2y + 6 = 0$

تست اگر خط $\Delta: x + my = 4$ با محورهای مختصات مثلثی به مساحت 8 واحد سطح تشکیل دهد، $|m|$ کدام است؟

- ۱) ۲
- ۲) ۳
- ۳) ۴
- ۴) ۴

پاسخ گزینه‌ی «۲» مطابق شکل زیر، اگر خط محورهای مختصات را در A و B قطع کند، آنگاه مساحت مثلث

برابر است با:



$$S_{OAB} = \frac{OB \times OA}{2}$$

OA و OB به ترتیب طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط Δ هستند و داریم:

$$\Delta: x + my = 4 \begin{cases} \xrightarrow{x=0} y_B = \frac{4}{m} \Rightarrow B(0, \frac{4}{m}) \\ \xrightarrow{y=0} x_A = 4 \Rightarrow A(4, 0) \end{cases} \Rightarrow S_{OAB} = \frac{OB \times OA}{2} = \frac{|\frac{4}{m}|(4)}{2} = 8 \Rightarrow \frac{16}{|m|} = 16 \Rightarrow |m| = 1$$

اگر سه نقطه‌ی A, B و C بر روی یک خط (یک استقامت) واقع باشند، آنگاه $m_{AB} = m_{AC}$.

مثال: نشان دهید سه نقطه‌ی $A(1, 3), B(0, 2)$ و $C(-1, 1)$ بر یک استقامتند.

حل: باید نشان دهیم $m_{AB} = m_{AC}$:

$$m_{AB} = \frac{2-3}{0-1} = 1 \quad \text{و} \quad m_{AC} = \frac{1-3}{-1-1} = 1$$



وضعیت دو خط نسبت به هم: اگر m و m' به ترتیب شیب دو خط (غیرمنطبق) Δ و Δ' باشند، آنگاه:
 الف) شرط موازی و غیر منطبق بودن دو خط آن است که $m = m'$.
 ب) شرط عمود بودن دو خط آن است که $m \cdot m' = -1$.
 پ) شرط متقاطع و غیر عمود بودن دو خط آن است که $m \neq m'$.

● **مثال:** معادله‌ی خط Δ گذرنده از نقطه‌ی $(1, 3)$ را در دو حالت زیر بیابید.

الف) خط Δ با خط $L: 2y + 3x = 5$ موازی باشد. ب) خط Δ بر خط $y = 5x - 2$ عمود باشد.

○ **حل:** الف) شیب خط Δ با شیب خط L برابر است، پس معادله‌ی آن $2y + 3x = k$ است و نقطه‌ی $(1, 3)$ در آن صدق می‌کند، بنابراین $k = 2 \times 3 + 3 \times 1 = 9$ ، پس $2y + 3x = 9$.

ب) باید $m_{\Delta} \cdot m_{\Delta'} = -1$ ، از آنجایی که $m_{\Delta'} = 5$ ، پس $m_{\Delta} = -\frac{1}{5}$ ، در نتیجه معادله‌ی خط برابر است با $\Delta: y - 3 = -\frac{1}{5}(x - 1)$.

● **تست** مثلث ABC با رئوس $A(1, 1)$ ، $B(-1, -2)$ و $C(2, 0)$ ، در کدام رأس قائمه است؟

○ (۱) A (۲) B (۳) C (۴) مثلث قائم‌الزاویه نیست.

پاسخ گزینه‌ی «۳» شیب خطوط را می‌یابیم:

$$m_{AB} = \frac{-3-1}{-1-1} = 2 \quad m_{AC} = \frac{0-1}{2-1} = -1 \quad m_{BC} = \frac{0-(-2)}{2-(-1)} = 1$$

AC بر BC عمود است، پس مثلث در رأس C قائمه است.

● **توجه** اگر دو خط Δ و Δ' ، شیب یکسانی نداشته باشند، یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند، برای یافتن محل تلاقی دو خط کافی است دستگاه دو معادله‌ی دوجمله‌ای آن‌ها را حل کنیم.

● **مثال:** در شکل مقابل، خط‌های $\Delta: y = x$ و $\Delta': 2x - y = -6$ داده شده‌اند.

الف) مساحت سطح هاشور خورده را بیابید.

ب) معادله‌ی بزرگترین ارتفاع مثلث را بیابید.

پ) تصویر نقطه‌ی A بر خط Δ را بیابید.

○ **حل:** الف) برای یافتن مساحت، اندازه‌ی ضلع AO و ارتفاع وارد بر آن، BH را می‌یابیم:

$$\Delta': 2x - y = -6 \xrightarrow{y=0} x = -3 \Rightarrow A(-3, 0) \Rightarrow AO = 3$$

برای یافتن BH ، نقطه‌ی B محل تلاقی دو خط را می‌یابیم:

$$\begin{cases} \Delta: y = x \\ \Delta': 2x - y = -6 \end{cases} \xrightarrow{y=x} 2x - x = -6 \Rightarrow x = -6, y = -6 \Rightarrow BH = 6$$

$$S_{AOB} = \frac{AO \times BH}{2} = \frac{3 \times 6}{2} = 9$$

بنابراین:

ب) بزرگترین ارتفاع مثلث، بر کوچکترین ضلع آن وارد می‌شود که با توجه به شکل، AO کوچکترین ضلع مثلث است؛ معادله‌ی ارتفاع وارد بر این ضلع، یعنی خط BH برابر $x = -6$ است.

پ) تصویر نقطه‌ی A بر خط Δ از محل تلاقی ارتفاع AH' و خط Δ به دست می‌آید. AH' بر Δ عمود است، پس $m_{AH'} = \frac{-1}{m_{\Delta}} = -1$

بنابراین:

$$AH': y - y_A = m_{AH'}(x - x_A) \Rightarrow y - 0 = -1(x - (-3)) \Rightarrow y = -x - 3$$

$$\begin{cases} \Delta: y = x \\ AH': y = -x - 3 \end{cases} \xrightarrow{y=x} x = -x - 3 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}, y = \frac{-3}{2} \Rightarrow H'(\frac{-3}{2}, \frac{-3}{2})$$



پیمانه‌ی ۱

۲۰
تست

شیب یک خط و معادله‌ی آن

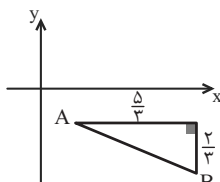
تیپ ۱

صفحه‌های ۲ تا ۴ ریاضی ۲

۱. در شکل زیر، ضریب زاویه‌ی خطی که از دو نقطه‌ی A و B می‌گذرد، کدام است؟

۱

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با ۴- الف) (سراسری تجربی- ۷۳)



- (۱) $\frac{5}{2}$
- (۲) $\frac{2}{5}$
- (۳) $-\frac{2}{5}$
- (۴) $-\frac{5}{2}$

۲. خط گذرنده بر دو نقطه‌ی $(-2, 3)$ و $(7, -3)$ محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۲

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۳- کار در کلاس- مکمل ۶- ب) (سراسری فنی و حرفه‌ای- ۹۰)

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) $\frac{3}{5}$
- (۴) $\frac{2}{5}$

۳. به ازای کدام مقادیر m، خط به معادله‌ی $y = mx + m - 3$ از ناحیه‌ی دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۳

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با ۲) (سراسری انسانی- ۹۴)

- (۱) $0 \leq m \leq 3$
- (۲) $m \geq 3$
- (۳) $m \leq 0$
- (۴) هیچ مقدار m

۴. اگر m و b اعداد حقیقی و $mb > 0$ ، کدام‌یک از نقاط زیر نمی‌تواند در معادله‌ی خط $y = mx + b$ صدق کند؟

۴

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با ۲)

- (۱) $(0, 1389)$
- (۲) $(-1389, 0)$
- (۳) $(13, 89)$
- (۴) $(1389, 0)$

۵. به ازای کدام مقادیر a، نقاط $(a, 3)$ ، $(6, 4a+1)$ و مبدأ مختصات در یک راستا قرار می‌گیرند؟

۵

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با ۴- الف) (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۵)

- (۱) $2, \frac{9}{4}$
- (۲) $2, \frac{3}{4}$
- (۳) $-2, \frac{-3}{4}$
- (۴) $2, \frac{-9}{4}$

۶. سه نقطه‌ی متمایز $A(3, 2)$ ، $B(m+1, m)$ و $C(m^2, m+1)$ روی یک خط قرار دارند. در این صورت عرض از مبدأ خط کدام است؟

۶

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۳- کار در کلاس- مرتبط با ۶) (آزمون کانون- ۵ آبان ۹۶)

- (۱) -۴
- (۲) ۵
- (۳) -۱
- (۴) ۱

۷. در صفحه‌ی مختصات x و y، نقطه‌ی $(x_0, -3)$ روی خطی که از نقاط $(0, 4)$ و $(-2, 0)$ می‌گذرد قرار دارد، x_0 کدام است؟

۷

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۳- کار در کلاس- مرتبط با ۶)

- (۱) $-\frac{3}{5}$
- (۲) -۴
- (۳) ۳
- (۴) $\frac{4}{5}$

۸. نقاط $P(-1, -2)$ و $Q(4, 2)$ مفروض‌اند. نقطه‌ی $R(1, m)$ طوری انتخاب شده است که $PR + RQ$ حداقل باشد، m کدام است؟

۸

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۳- کار در کلاس- مرتبط با ۶)

- (۱) $-\frac{3}{5}$
- (۲) $-\frac{2}{5}$
- (۳) $-\frac{1}{5}$
- (۴) $\frac{1}{5}$

صفحه‌های ۳ و ۴ ریاضی ۲

تیپ ۲

وضعیت دو خط نسبت به هم

۹. نقطه‌ی A بر روی خط $\Delta: 2x - y + 1 = 0$ و نقاط $M(1, -2)$ و $N(3, -4)$ مفروضند. اگر پاره‌خط‌های MA و NA هم‌راستای هم باشند،

۹

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۱)

آنگاه مجموع طول و عرض نقطه‌ی A کدام است؟

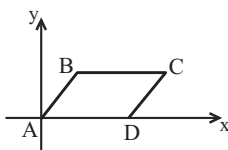
- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) -۱
- (۴) -۲

۱۰. در شکل زیر، چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. اگر اندازه‌ی ضلع BC برابر ۵ باشد و معادله خطی که ضلع AB روی آن قرار دارد،

۱۰

$y - 2x = 0$ باشد و معادله خطی که ضلع CD روی آن قرار دارد $ay + bx + 5 = 0$ باشد، آنگاه $a + b$ برابر کدام گزینه است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۱) (آزمون کانون- ۹۱)



- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{3}{2}$
- (۳) -۱
- (۴) $-\frac{1}{2}$



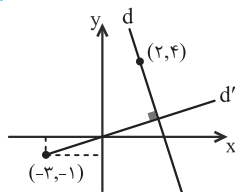
۱۱. مساحت متوازی‌الاضلاع محدود به خطوطی به معادله‌ی $y = x + 3$ و $x = 4$ و محور y ها و نیمساز ناحیه‌ی اول برابر کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۱) (سراسری تجربی - ۷۷)

- ۸ (۱)
- ۱۲ (۲)
- ۱۴ (۳)
- ۱۵ (۴)

۱۲. در شکل زیر معادله‌ی خط d کدام است؟

- ۱) $y = -2x + 10$
- ۲) $y = -3x + 10$
- ۳) $y = -3x + 8$
- ۴) $y = -2x + 8$



۱۳. اگر خطوط $-bx + (a-b)y - 8 = 0$ و $3ax + by - c = 0$ در نقطه‌ی $(1, 2)$ یکدیگر را قطع کنند و بر هم عمود باشند، آن‌گاه c کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۲-ب) (آزمون کانون- ۲۱ مهر ۹۶)

- ۱ (۱)
- ۱ (۲)
- ۴ (۳)
- ۴ (۴)

۱۴. دو خط به معادلات $ay - x = -7$ و $a^3x + y = 2$ بر دو ضلع مربعی منطبق‌اند. در این صورت برای a چند جواب وجود دارد؟

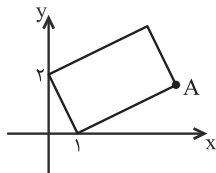
(ریاضی ۲- صفحه ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۳) (آزمون کانون- ۵ آبان ۹۶)

- صفر (۱)
- ۱ (۲)
- ۲ (۳)
- ۳ (۴)

۱۵. اگر شکل زیر یک مستطیل باشد، مختصات نقطه‌ی A کدام می‌تواند باشد؟

(ریاضی ۲- صفحه ۴- کار در کلاس- مشابه ۳-ب) (آزمون کانون - ۴ آبان ۹۷)

- ۱) $(2, \frac{3}{2})$
- ۲) $(3, \frac{3}{4})$
- ۳) $(5, 2)$
- ۴) $(6, 1)$



۱۶. دایره‌ای به مرکز $O(2, -3)$ مفروض است. از نقطه‌ی $(8, -5)$ واقع بر محیط این دایره خطی مماس بر دایره رسم می‌کنیم. خط مماس محور طول‌ها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

(ریاضی ۲- صفحه ۴- کار در کلاس- مشابه ۳) (آزمون کانون - ۴ آبان ۹۷)

- ۱) $(-\frac{19}{3}, 0)$
- ۲) $(\frac{29}{3}, 0)$
- ۳) $(\frac{19}{3}, 0)$
- ۴) $(-\frac{29}{3}, 0)$

۱۷. اگر $A(-1, 2)$ ، $B(3, 0)$ و $C(1, -2)$ سه رأس مثلث ABC باشند، معادله‌ی ارتفاع وارد بر ضلع BC از رأس A کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۳-ب) (آزمون کانون- ۱ اردیبهشت ۹۵)

- ۱) $y = -x - 3$
- ۲) $y = -x + 1$
- ۳) $y = -2x$
- ۴) $y = x + 3$

۱۸. معادله‌ی سه ضلع یک مثلث $x + y = 1$ و $y = 2x$ و $x = 1$ است، معادله‌ی خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۳-ب) (سراسری تجربی - ۸۴)

- ۱) $y = \frac{2}{3}$
- ۲) $x = \frac{2}{3}$
- ۳) $y + x = \frac{2}{3}$
- ۴) $y + x = \frac{1}{3}$

۱۹. مثلث با رأس‌های $A(1, -1)$ ، $B(3, 1)$ و $C(-1, 3)$ را در نظر بگیرید. نقطه‌ی H ، محل تلاقی ارتفاع CH با ضلع AB است. عرض نقطه‌ی H کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۳)

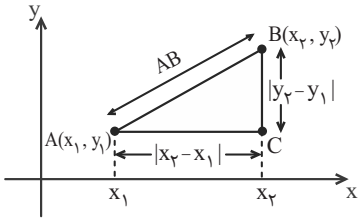
- صفر (۱)
- ۱ (۲)
- ۲ (۳)
- ۱ (۴)

۲۰. تصویر نقطه‌ی $A(-3, 2)$ بر روی خط $L: 3y - 2x + 1 = 0$ ، نقطه‌ی $B(a, b)$ است. $a + b$ کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۳-ب)

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۲ (۳)
- ۱ (۴)

فاصله‌ی دو نقطه \blacktriangleleft برای پیدا کردن فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ به شکل زیر توجه کنید. با توجه به شکل، فاصله‌ی بین A و C برابر $|x_2 - x_1|$ و فاصله‌ی بین B و C برابر $|y_2 - y_1|$ است. با توجه به قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC داریم:



$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

$$\rightarrow AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

توجه $\blacktriangleleft\blacktriangleleft$ فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ از مبدأ مختصات برابر $OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ است.

تست دو نقطه‌ی $A(1, 3)$ و $B(-1, 4)$ دو رأس مقابل از مربعی هستند. مساحت مربع کدام است؟

- (۴) $\frac{9}{8}$
- (۳) $\frac{7}{4}$
- (۲) $\frac{5}{2}$
- (۱) $\frac{3}{4}$

پاسخ گزینه‌ی «۲» فاصله‌ی دو رأس مقابل از مربع برابر قطر مربع و مساحت مربع، نصف مجذور قطر آن است، پس:

$$d = \sqrt{(1+1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \text{ و } S = \frac{d^2}{2} = \frac{5}{2}$$

تست نقطه‌ی $A(6, m)$ در ناحیه‌ی چهارم و به فاصله‌ی 10° از مبدأ مختصات است، نقطه‌ی A بر روی کدام خط زیر قرار ندارد؟

- (۴) $y - x + 12 = 0$
- (۳) $y + x + 2 = 0$
- (۲) $x = 6$
- (۱) $y = -8$

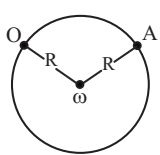
پاسخ گزینه‌ی «۴» وقتی نقطه در ناحیه‌ی چهارم است، عرض آن منفی است.

$$10 = \sqrt{6^2 + m^2} \Rightarrow 100 = 36 + m^2 \Rightarrow m = \pm 8 \xrightarrow{m < 0} m = -8 \Rightarrow A(6, -8)$$

بدیهی است که نقطه‌ی $A(6, -8)$ بر روی خطوط $y = -8$ و $x = 6$ قرار دارد. نقطه‌ی A در معادله‌ی خط $y + x + 2 = 0$ نیز صدق می‌کند.

تست شعاع دایره‌ای که از دو نقطه‌ی $(0, 0)$ و $(3, 1)$ گذشته و مرکز آن روی خط به معادله‌ی $y = 2x$ باشد، کدام است؟

- (۴) $\sqrt{13}$
- (۳) $\sqrt{10}$
- (۲) $\sqrt{5}$
- (۱) $2\sqrt{2}$



پاسخ گزینه‌ی «۲» مرکز این دایره را ω می‌نامیم. چون طبق فرض مسأله، روی خط به معادله‌ی $y = 2x$ قرار دارد، پس می‌توانیم مختصات آن را به صورت $\omega(\alpha, 2\alpha)$ در نظر بگیریم. چون دو نقطه‌ی $O(0, 0)$ و $A(3, 1)$ بر این دایره واقع هستند، پس اگر شعاع دایره را با R نشان دهیم، آن‌گاه $OA = R = \omega A$.

$$OA = \omega A \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2\alpha - 0)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2} \Rightarrow (\alpha - 0)^2 + (2\alpha - 0)^2 = (\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha^2 = (\alpha^2 - 6\alpha + 9) + (4\alpha^2 - 4\alpha + 1) \Rightarrow 0 = -6\alpha + 9 - 4\alpha + 1 \Rightarrow 10\alpha = 10 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$R = OA = \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2\alpha - 0)^2} = \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2} = \sqrt{5\alpha^2} \xrightarrow{\alpha=1} R = \sqrt{5}$$

الف) اگر دو نقطه‌ی A و B هم‌عرض باشند، آنگاه $AB = |x_B - x_A|$.

ب) اگر دو نقطه‌ی A و B هم‌طول باشند، آنگاه $AB = |y_B - y_A|$.

پ) اگر نقطه‌ی A از دو نقطه‌ی B و C به یک فاصله باشد، آنگاه $AC = AB$.

ت) اگر نقطه‌ی $A(\alpha, \beta)$ از دو محور به یک فاصله باشد، آنگاه این نقطه بر روی یکی از دو خط $y = x$ یا $y = -x$ است و در نتیجه $|\alpha| = |\beta|$.

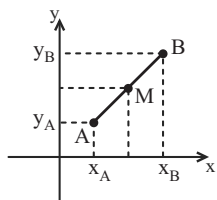
مثال: نقطه‌ی M واقع بر محور طول‌ها از دو نقطه‌ی $A(-2, 3)$ و $B(4, -1)$ به یک فاصله است. مختصات نقطه‌ی M را بیابید.

حل: نقطه‌ی M بر روی محور طول‌هاست، پس $M(x, 0)$. فاصله‌ی این نقطه از دو نقطه‌ی A و B برابر است، پس:

$$MA = MB \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + 3^2} = \sqrt{(x-4)^2 + 1^2} \Rightarrow x^2 + 4x + 13 = x^2 - 8x + 17 \Rightarrow 12x = 4 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow M(\frac{1}{3}, 0)$$



مختصات نقطه‌ی وسط پاره‌خط ◀ هرگاه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در دستگاه مختصات باشند، آنگاه مختصات نقطه‌ی M ،

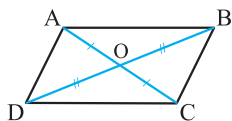


$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

وسط پاره‌خط AB برابر است با:

نقاط A و B قرینه‌ی یکدیگر نسبت به نقطه‌ی M هستند.

نکته در متوازی‌الاضلاع قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند. با توجه به شکل روبه‌رو داریم:



$$x_O = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_B + x_D}{2}, \quad y_O = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

مثال: اگر $A(0, -3)$ ، $B(1, 1)$ و $C(3, 1)$ سه رأس مثلث ABC باشند، آنگاه معادله‌ی میانه‌ی وارد بر ضلع BC را بیابید.

حل: معادله‌ی میانه‌ی ضلع BC خطی است که از نقطه‌ی A و نقطه‌ی M که وسط دو نقطه‌ی B و C است، عبور می‌کند.

$$M\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+1}{2}\right) \Rightarrow M(2, 1) \text{ و } A(0, -3) \Rightarrow m_{AM} = \frac{1 - (-3)}{2 - 0} = 2$$

بنابراین معادله‌ی میانه $y - 1 = 2(x - 2)$ است.

نست خط Δ عمود منصف پاره‌خطی است که دو نقطه‌ی $A(0, 4)$ و $B(2, 0)$ را به هم وصل می‌کند، عرض از مبدأ خط Δ کدام است؟

$$\begin{matrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}$$

پاسخ گزینه‌ی «۳» خط مطلوب (Δ) ، بر پاره‌خط AB عمود است، از طرفی نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB در این خط صدق می‌کند، بنابراین:

$$m_{AB} = \frac{0 - 4}{2 - 0} = -2 \Rightarrow m_{\Delta} = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad M\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (1, 2)$$

معادله‌ی خط عمود منصف برابر با $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$ یا $y - 2 = 0$ یا $2y - x - 3 = 0$ است. با قرار دادن $x = 0$ در خط، عرض از مبدأ برابر $\frac{3}{2}$ است.

قرینه‌ی یک نقطه نسبت به نقطه‌ی دیگر یا یک خط: اگر نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AA' باشد، آنگاه نقطه‌ی A' را قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به

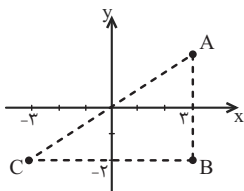
نقطه‌ی M می‌نامیم. بنابراین برای یافتن قرینه‌ی یک نقطه نسبت به یک خط یا نقطه‌ی دیگر از این ویژگی استفاده می‌کنیم.

قرینه‌ی نقطه‌ی $A(a, b)$ نسبت به محور x ها	قرینه‌ی نقطه‌ی $A(a, b)$ نسبت به محور y ها	قرینه‌ی نقطه‌ی $A(a, b)$ نسبت به مبدأ مختصات	قرینه‌ی نقطه‌ی $A(a, b)$ نسبت به خط $y = x$	قرینه‌ی نقطه‌ی $A(a, b)$ نسبت به خط $y = -x$
$A'(a, -b)$	$A'(-a, b)$	$A'(-a, -b)$	$A'(b, a)$	$A'(-b, -a)$

نست اگر قرینه‌ی نقطه‌ی $A(3, 2)$ نسبت به محور x ها و مبدأ مختصات را به ترتیب B و C بنامیم، مساحت مثلث ABC کدام است؟

$$\begin{matrix} 96 & 48 & 24 & 12 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

پاسخ گزینه‌ی «۱»



$$A(3, 2) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} B(3, -2)$$

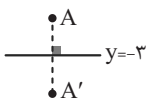
$$A(3, 2) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ مختصات}} C(-3, -2)$$

با توجه به نمودار، مثلث ABC در رأس B قائم‌الزاویه است و مساحت آن برابر است با:

$$S = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{|y_B - y_A| \times |x_C - x_B|}{2} = \frac{4 \times 6}{2} = 12$$

تست قرینه‌ی نقطه‌ی $A(-1, 4)$ نسبت به خط $y = -3$ ، نقطه‌ی A' است. این نقطه بر روی کدام خط زیر است؟
 $y = -10x$ (۱) $y = -x - 9$ (۲) $y + x + 10 = 0$ (۳) $y + 3x + 13 = 0$ (۴)

پاسخ گزینه‌ی «۴» اگر A' قرینه‌ی A نسبت به خط $y = -3$ باشد، با توجه به شکل فرضی، میانگین عرض‌های نقاط A و A' برابر -3 و دو نقطه هم‌طولند، پس $\frac{4 + y_{A'}}{2} = -3$ و $y_{A'} = -10$ ، در نتیجه $A'(-1, -10)$ که در گزینه‌ی ۴ صدق می‌کند.



مثال: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(0, 3)$ را نسبت به خط L به معادله‌ی $y + x - 4 = 0$ بیابید.

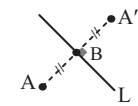
حل: اگر A' ، قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به خط L باشد، آنگاه خط گذرنده از AA' بر خط L عمود است. ابتدا معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $A(0, 3)$ می‌گذرد و بر خط $y + x - 4 = 0$ عمود است را به دست می‌آوریم. شیب خط $y + x - 4 = 0$ ، برابر با (-1) است، پس شیب خط عمود 1 است:

همچنین نقطه‌ی وسط پاره‌خط AA' ، محل برخورد دو خط فوق است:

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow 2y = 7 \Rightarrow y = 3.5, x = 0.5 \rightarrow B(0.5, 3.5)$$

نقطه‌ی B وسط AA' است

$$\begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow \frac{0 + x_{A'}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_{A'} = 1 \\ y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow \frac{3 + y_{A'}}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow y_{A'} = 4 \end{cases} \Rightarrow A'(1, 4)$$



پیمانه‌های ۲ و ۳

فاصله‌ی دو نقطه

تیب ۳

صفحه‌های ۴ تا ۶ و تمرین‌های صفحه‌ی ۹ ریاضی ۲

۲۱. فاصله‌ی مبدأ مختصات از نقطه‌ی تلاقی دو خط به معادلات $3y = 2x + 11$ و $2y + x = 5$ کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۶- کار در کلاس- مرتبط با ۳) (سراسری انسانی- ۹۱)

- ۱) $2\sqrt{10}$ (۴) ۲) $\sqrt{8}$ (۲) ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{10}$ (۴)

۲۲. مقدار m چقدر باشد تا فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(m, 2)$ و $B(2m + 1, -m)$ برابر 5 باشد؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۵- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت) (آزمون کانون- ۵ آبان ۹۶)

- ۱) 3 یا صفر (۲) فقط 2 (۲) فقط 3 (۳) فقط 5 (۴) 2 یا 5 (۴)

۲۳. فاصله‌ی نقطه‌ی $A(-2m + 1, 3m - 9)$ از دو محور مختصات به یک اندازه است. در این صورت فاصله‌ی نقطه‌ی A تا مبدأ مختصات برابر است با:

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۵- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت) (آزمون کانون- ۱۹ آبان ۹۶)

- ۱) 5 یا 3 (۲) $15\sqrt{2}$ یا $5\sqrt{2}$ (۲) $3\sqrt{2}$ یا $15\sqrt{2}$ (۳) 2 یا 8 (۴)

۲۴. اگر $A(8, 0)$ و $B(0, 0)$ دو رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند، مربع عرض رأس سوم کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۹- مرتبط با تمرین ۳)

- ۱) 60 (۲) 48 (۳) 56 (۴) 68 (۴)

۲۵. نقاط $A(-1, 1)$ و $B(3, -2)$ ، $C(3, 1)$ ، ABC مثلث هستند. نوع مثلث و مساحت آن کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۶- کار در کلاس- مشابه ۱) (آزمون کانون- ۴ آبان ۹۷)

- ۱) متساوی‌الاضلاع و 6 (۲) متساوی‌الساقین و 4 (۳) قائم‌الزاویه و 6 (۴) قائم‌الزاویه و 4

۲۶. خطی با شیب $-\frac{3}{4}$ از نقطه‌ی $A(2, \frac{5}{4})$ گذشته و محورهای مختصات را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصله‌ی این دو نقطه‌ی تقاطع کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌های ۳ و ۵- ترکیبی) (سراسری انسانی خارج از کشور- ۸۸)

- ۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۴)

۲۷. مساحت مثلثی که دو ضلع آن واقع بر خطوطی به معادله‌های $y + x = 2$ و $y - x = 4$ و ضلع دیگر آن بر محور x ها قرار دارد، کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۵- فعالیت- مرتبط با نتیجه‌ی پ) (سراسری تجربی- ۷۳)

- ۱) 5 (۲) 6 (۳) 7 (۴) 8 (۴)



۲۸. دو قطر یک دایره بر دو خط $x=2$ و $y=2$ واقع هستند. اگر این دایره از نقطه‌ی $A(2, 0)$ بگذرد، شعاع این دایره کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه ۴- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت) (آزمون کانون - ۴ آبان ۹۷)

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۴ (۴) $\sqrt{3}$

۲۹. نقطه‌ی $(a, 2a)$ مرکز دایره‌ی گذرنده بر دو نقطه‌ی $(2, 1)$ و $(-1, 4)$ است. شعاع این دایره کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه ۹- مرتبط با تمرین ۴- ب) (سراسری تجربی - ۸۴)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $3\sqrt{2}$

۳۰. دایره‌ای از دو نقطه‌ی $(0, 1)$ و $(3, 0)$ گذشته و معادله‌ی یک قطر آن به صورت $x - y = 2$ است. شعاع این دایره کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه ۹- مرتبط با تمرین ۴- ب) (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۰)

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) ۳

۳۱. دایره‌ای محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه ۹- مرتبط با تمرین ۴- ب) (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۵)

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) ۳

۳۲. نقطه‌ی $P(4m, 11)$ روی عمودمنصف پاره‌خط واصل دو نقطه‌ی $A(0, m)$ و $B(6, 15)$ قرار دارد. m کدام می‌تواند باشد؟

(ریاضی ۲- صفحه ۵- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت) (آزمون کانون - ۱۶ آذر ۹۷)

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) -۳

مختصات نقطه‌ی وسط پاره‌خط تیپ ۴ صفحه‌های ۶ تا ۹ ریاضی ۲

۳۳. قرینه‌ی نقطه‌ی $A(3, 5)$ نسبت به نقطه‌ی $B(0, -4)$ روی کدام خط زیر قرار ندارد؟

(ریاضی ۲- صفحه ۷- کار در کلاس- مکمل ۲- ب)

- (۱) $x + y + 10 = 0$ (۲) $2x - y - 7 = 0$ (۳) $x + 3 = 0$ (۴) $y + 13 = 0$

۳۴. نقطه‌ی وسط دو نقطه‌ی $A(m, -n)$ و $B(-n, m)$ همواره روی کدام خط زیر قرار دارد؟

(ریاضی ۲- صفحه ۷- مرتبط با فعالیت- ث)

- (۱) $y = -x$ (۲) $y = x$ (۳) $y = -x + m$ (۴) $y = x + n$

۳۵. دو نقطه‌ی $A(2, -1)$ و $C(3, 0/5)$ مفروضند. اگر نقطه‌ی A وسط پاره‌خط BC باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی B از مبدأ مختصات چند برابر $\sqrt{29}$ است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌های ۵ و ۷- ترکیبی)

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۳۶. نقاط $A(2\beta, \beta)$ و $B(\beta + 3, \beta - 4)$ دو رأس مثلث ABC و معادله‌ی میانه‌ی نظیر رأس C خط $y = 5$ می‌باشد، مختصات وسط AB کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه ۷- کار در کلاس- مکمل ۱) (سراسری تجربی - ۷۱)

- (۱) $(5, 9)$ (۲) $(5, 12)$ (۳) $(9, 5)$ (۴) $(12, 5)$

۳۷. نقاط $A(m - n, 2m + 3)$ و $B(m + n, 2n - 3)$ نسبت به نقطه‌ی $C(-2, 2)$ قرینه‌ی یکدیگرند. در این صورت $3m - 2n$ کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه ۷- کار در کلاس- مکمل ۲) (آزمون کانون - ۱۷ فروردین ۹۷)

- (۱) -۶ (۲) -۱۴ (۳) -۲ (۴) ۴

۳۸. اگر قرینه‌ی نقطه‌ی $A(-2, -1)$ نسبت به خط $\Delta: y = ax + b$ نقطه‌ی $A'(3, 4)$ باشد، آنگاه خط Δ از کدام ناحیه عبور نمی‌کند؟

(ریاضی ۲- صفحه ۷- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت)

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۳۹. نقاط $A(2, -1)$ و $B(0, 1)$ و $C(-1, 1)$ سه رأس یک مثلث هستند. طول میانه‌ی CM برابر است با:

(ریاضی ۲- صفحه ۷- کار در کلاس- مشابه ۱)

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) ۴ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

۴۰. اگر $A(3, 5)$ ، $B(-2, 1)$ و $C(1, -1)$ رئوس مثلث ABC باشند، معادله‌ی میانه‌ی BM کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه ۷- کار در کلاس- مشابه ۱) (سراسری فنی و حرفه‌ای - ۸۹)

- (۱) $2y = x + 6$ (۲) $2y = x + 4$ (۳) $4y = x + 4$ (۴) $4y = x + 6$

۴۱. اگر نقطه‌ی $(3, 4)$ وسط پاره‌خطی باشد که یک سر آن روی محور طول‌ها و سر دیگر آن روی محور عرض‌ها باشد، در این صورت معادله‌ی خط گذرنده از این سه نقطه کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه ۷- کار در کلاس- مرتبط با ۲) (آزمون کانون - ۵ آبان ۹۶)

- (۱) $3x + 2y - 12 = 0$ (۲) $3y + 4x - 24 = 0$ (۳) $3y + 2x - 12 = 0$ (۴) $3x + 4y - 24 = 0$

۴۲. دو نقطه‌ی $A(-4, 7)$ و $B(1, 5)$ دو سر قطری از دایره هستند. معادله‌ی قطری از دایره که از مبدأ مختصات می‌گذرد کدام است؟ (۲)

(ریاضی ۲- صفحه ۹- مرتبط با تمرین ۴) (آزمون کانون- ۲۱ مهر ۹۶)

$$y + 4x = 0 \quad (1) \quad 5y - 2x = 0 \quad (2) \quad y - 4x = 0 \quad (3) \quad 2y - 5x = 0 \quad (4)$$

۴۳. نقطه‌ی $A(7, 6)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $2y - 3x = 11$ و $3y + 4x = 8$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ (۳)

(ریاضی ۲- صفحه ۹- مکمل تمرین ۵) (سراسری تجربی - ۹۰)

$$(1, 5) \quad (1) \quad (3, 4) \quad (2) \quad (3, 5) \quad (3) \quad (4, 3) \quad (4)$$

۴۴. اگر نقطه‌ی $P(-12, k)$ روی عمودمنصف پاره‌خط واصل دو نقطه‌ی $A(0, -3)$ و $B(6, 15)$ قرار داشته باشد، k کدام است؟ (۴)

(ریاضی ۲- صفحه ۷- کار در کلاس- مرتبط با ۱) (آزمون کانون- ۲ آذر ۹۷)

$$-39 \quad (1) \quad -3 \quad (2) \quad 11 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

۴۵. نقطه‌ی A به طول ۴ واقع بر محور x ها و نقطه‌ی B به عرض ۲- روی محور y هاست. معادله‌ی خطی که از وسط AB بر آن عمود باشد، کدام است؟ (۵)

(ریاضی ۲- صفحه‌های ۳ و ۷- ترکیبی) (سراسری انسانی خارج کشور- ۸۷)

$$2y + x = 0 \quad (1) \quad 2y + x = 1 \quad (2) \quad y + 2x = 3 \quad (3) \quad y + 2x = 4 \quad (4)$$

۴۶. اگر $A(2, 4)$ و $B(-4, 2)$ ، آنگاه عمود منصف پاره‌خط AB ، محور x ها را با چه طولی قطع می‌کند؟ (۶)

(ریاضی ۲- صفحه‌های ۳ و ۷- ترکیبی) (آزمون کانون- ۲۲ آبان ۸۸)

$$1 \quad (1) \quad -1 \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad \text{صفر} \quad (4)$$

۴۷. سه نقطه‌ی $(0, 2)$ ، $(4, 0)$ و مبدأ مختصات رأس‌های یک مثلث هستند. ارتفاع و میانه‌ی وارد بر بزرگ‌ترین ضلع این مثلث، آن را به ترتیب در H و M قطع کرده است. طول MH چند برابر $\sqrt{5}$ است؟ (۷)

(ریاضی ۲- صفحه‌های ۳ و ۷- ترکیبی) (آزمون کانون- ۹۱)

$$0/8 \quad (1) \quad 0/6 \quad (2) \quad 0/4 \quad (3) \quad 0/2 \quad (4)$$

۴۸. نقاط $A(4, 2)$ ، $B(1, -1)$ و $C(6, -1)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه‌ی AM باشند، طول MH چقدر است؟ (۸)

(ریاضی ۲- صفحه‌های ۶ و ۷- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت) (آزمون کانون- ۵ آبان ۹۶)

$$\frac{1}{2} \quad (1) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad \frac{1}{2} \quad (4)$$

۴۹. در مثلث ABC با مختصات رئوس $A(2, 2)$ ، $B(2, 5)$ و $C(6, 2)$ ، طول پاره‌خطی که از رأس A بر ضلع مقابل آن رسم می‌شود تا مثلث ABC را به دو مثلث با مساحت یکسان تقسیم کند، کدام است؟ (۹)

(ریاضی ۲- صفحه ۷- کار در کلاس- مرتبط با ۱) (آزمون کانون- ۱۶ آذر ۹۷)

$$2 \quad (1) \quad 2/5 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 3/5 \quad (4)$$

۵۰. اگر نقاط $A(0, 4)$ و $B(6, 2)$ دو سر قطر یک مربع باشند، معادله‌ی قطر دیگر مربع کدام است؟ (۱۰)

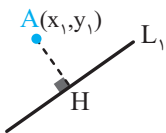
(ریاضی ۲- صفحه ۷- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت) (آزمون کانون- ۴ آبان ۹۷)

$$y = 3x - 6 \quad (1) \quad y = \frac{x}{3} + 2 \quad (2) \quad y = 3x + 6 \quad (3) \quad y = \frac{x}{3} - 2 \quad (4)$$

فاصله‌ی نقطه از خط

درس‌نامه

با توجه به شکل زیر، فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ از خط L_1 به معادله‌ی $ax + by + c = 0$ برابر است با:



$$AH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط به معادله‌ی $ax + by + c = 0$ برابر $OH = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ است.

تست فاصله‌ی نقطه‌ی A روی نیمساز ناحیه‌ی اول از خط $4x - 3y + 7 = 0$ برابر ۳ است، طول نقطه‌ی A کدام است؟

$$8 \quad (4) \quad 7 \quad (3) \quad 6 \quad (2) \quad 5 \quad (1)$$

پاسخ گزینه‌ی «۴» مختصات هر نقطه روی نیمساز ناحیه‌ی اول به صورت $A(\alpha, \alpha)$ است، بنابراین:

$$AH = \frac{|4\alpha - 3\alpha + 7|}{\sqrt{16 + 9}} = 3 \Rightarrow |\alpha + 7| = 3 \times 5 \Rightarrow \alpha + 7 = \pm 15 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 8 \\ \alpha_2 = -22 \end{cases}$$

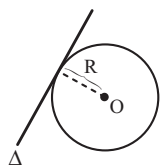
نقطه‌ی A در ناحیه‌ی اول است، پس طول و عرض آن مثبت خواهد بود، بنابراین $\alpha = 8$ قابل قبول و $A(8, 8)$ است.



تست خط $3x - 4y - 2 = 0$ بر دایره به مرکز $O(-2, 3)$ مماس است. مساحت دایره کدام است؟

- ۱۶π (۱) ۴π (۲) ۸π (۳) ۳۲π (۴)

پاسخ گزینه ی «۱» می‌دانیم فاصله‌ی مرکز دایره از خط مماس بر آن برابر شعاع دایره است. کافی است فاصله‌ی مرکز دایره را از خط بیابیم:



$$3x - 4y - 2 = 0 \text{ و } O(-2, 3)$$

$$R = \frac{|3(-2) - 4(3) - 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-6 - 12 - 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4$$

$$S = \pi R^2 \xrightarrow{R=4} S = 16\pi$$

بنابراین $R = 4$ و مساحت دایره برابر است با:

برای یافتن فاصله‌ی دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از هم، می‌توانیم یک نقطه بر روی یک خط در نظر



$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

بگیریم و فاصله‌ی آن را از خط دیگر بیابیم. روش دیگر استفاده از فرمول روبه‌روست:

توجه در معادله‌ی دو خط موازی، چنانچه ضرایب x و y آنها مساوی نباشند، متناسب‌اند و با ضرب یا تقسیم طرفین معادله‌ی یکی از خطوط بر عدد مناسب، ضرایب را مساوی می‌کنیم.

● **مثال:** فاصله‌ی دو خط به معادله‌های $\Delta: 3x - 4y + 2 = 0$ و $\Delta': 6x - 8y - 1 = 0$ را بیابید.

○ **حل:** دو خط موازیند، زیرا شیب هر کدام برابر $\frac{3}{4}$ است. برای یکی ضرایب، معادله‌ی خط Δ را در ۲ ضرب می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\Delta: 6x - 8y + 4 = 0, \quad \Delta': 6x - 8y - 1 = 0 \Rightarrow d = \frac{|4 - (-1)|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{5}{\sqrt{100}} = \frac{1}{2}$$

۲۰

تست

پیمانه‌ی ۴

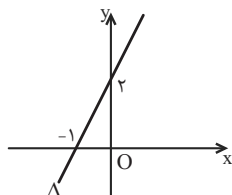


صفحه‌های ۸ تا ۱۰ ریاضی ۲

تیب ۵

فاصله‌ی نقطه از خط

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۸- مشابه مثال)



(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۱)

$$x + 2y + 2 = 0 \quad (۴)$$

(۳) نیم‌ساز ناحیه‌ی دوم و چهارم

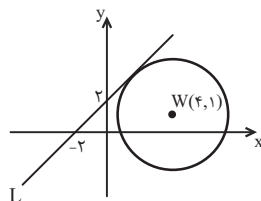
۵۱. در شکل مقابل، فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط Δ کدام است؟

- ۱) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۱)
۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۲)
۳) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (۳)
۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴)

۵۲. نقطه‌ی $A(3, -2)$ به کدام یک از خطوط زیر نزدیک‌تر است؟

- ۲) محور x ها (۱)
۳) $x = 2\sqrt{2}$ (۲)

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مشابه ۱)



۵۳. با توجه به شکل زیر، شعاع دایره چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

- ۳) ۲/۵ (۱)
۲) ۲ (۲)
۴) ۳ (۳)
۳/۵ (۴)

۵۴. دو نقطه بر خط به معادله‌ی $y = x - 1$ قرار دارند که فاصله‌ی این نقاط از خط به معادله‌ی $2x - 3y = 5$ ، برابر $\sqrt{13}$ است. طول این دو نقطه،

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مکمل (۱) (سراسری تجربی - ۸۹)

- ۴) ۱۵ و ۹ (۱)
۱۱ و ۱۵ (۲)
۱۱ و ۱۵ (۳)
۱۱ و ۹ (۴)

۵۵. فاصله‌ی نقطه‌ای واقع بر نیم‌ساز ناحیه‌ی دوم از خط به معادله‌ی $3y - 2x + 4 = 0$ برابر $3\sqrt{13}$ واحد است، عرض آن نقطه کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۱) (سراسری تجربی- ۷۹)

- ۵) ۵ (۱)
۶ (۲)
۷ (۳)
۸ (۴)

۵۶. دو نقطه‌ی A و B واقع بر خط به معادله‌ی $2x - y = 0$ از خط به معادله‌ی $3x = 4y + 5$ به فاصله‌ی ۲ قرار دارند. طول پاره خط AB کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۱) (آزمون کانون- ۲۰ خرداد ۸۹)

- ۶) $2\sqrt{5}$ (۱)
 $4\sqrt{5}$ (۲)
 $3\sqrt{2}$ (۳)
 $4\sqrt{2}$ (۴)

۵۷. فاصله‌ی نقطه‌ی $A(-1, 4)$ از خط $8x + 6y = k$ برابر ۳ است. مقدار k کدام می‌تواند باشد؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۱) (آزمون کانون- ۵ آبان ۹۶)

- (۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۴۶ (۴) ۵۴

۵۸. فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط به معادله‌ی $2y = mx + b$ گذرنده بر نقطه‌ی $(1, 2)$ برابر با ۱ است، m کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۱) (سراسری تجربی - ۷۴)

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

۵۹. نقاط $A(0, 3)$ ، $B(2, 0)$ و $C(1, 1)$ رأس‌های یک مثلث هستند. طول ارتفاع وارد بر ضلع AB کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۱) (آزمون کانون- ۱۶ خرداد ۹۲)

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{13}}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{14}}$ (۳) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (۴) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

۶۰. مساحت مثلثی با رأس‌های $A(-1, 2)$ ، $B(2, 4)$ و $C(4, -1)$ برابر است با:

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۸- مرتبط با مثال) (آزمون کانون- ۱۹ آبان ۹۶)

- (۱) ۱۹ (۲) $\frac{19}{2}$ (۳) ۹ (۴) ۳۸

۶۱. دایره‌ای به مرکز $(2, 1)$ ، بر دو خط به معادلات $3x + 4y = 5$ و $12y - 5x = a$ مماس است. دو مقدار ممکن برای a کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مکمل ۲) (آزمون کانون - ۲۰ مهر ۹۷)

- (۱) ۱۱ و ۱۵ (۲) ۳ و ۱ (۳) ۱۱ و ۱۵ (۴) ۳ و ۱

۶۲. یک ضلع مربعی منطبق بر خط به معادله‌ی $y = x + 2$ و نقطه‌ی $A(3, -1)$ یک رأس آن است. اندازه‌ی قطر مربع کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۹- مکمل تمرین ۷) (سراسری ریاضی - ۷۵)

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۶۳. دو رأس غیرمجاور یک مربع روی خط به معادله‌ی $3x - 4y = 1$ قرار دارند. اگر نقطه‌ی $A(2, 1)$ رأس دیگری از مربع باشد، در این صورت مساحت مربع کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۹- مرتبط با تمرین ۷) (آزمون کانون- ۱۹ آبان ۹۶)

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{2}{25}$ (۳) $\frac{1}{10}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۶۴. نقطه‌ی $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله‌ی $2y - x = 5$ است. مساحت این مربع کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۹- مرتبط با تمرین ۷) (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۳)

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۷۵ (۴) ۸۰

۶۵. دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2y + x = 6$ و $2x - y = 7$ و یک رأس آن نقطه‌ی $A(8, 5)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۹- مرتبط با تمرین ۷) (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۰)

- (۱) $7\frac{1}{2}$ (۲) $9\frac{1}{6}$ (۳) $11\frac{1}{4}$ (۴) $12\frac{1}{8}$

۶۶. نقاط $A(-1, 0)$ ، $B(3, 3)$ و $C(0, -2)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۸- مرتبط با مثال)

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۲ (۳) ۱۱ (۴) ۳۲

صفحه‌های ۸ تا ۱۰ ریاضی ۲

تیپ ۶

فاصله‌ی دو خط موازی

۶۷. فاصله‌ی دو خط به معادلات $y = \sqrt{3}x + 2$ و $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$ کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۹- مشابه تمرین ۸- ب) (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۸)

- (۱) $2 - \sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3} - 1$ (۳) $\sqrt{3} + 1$ (۴) $2 + \sqrt{3}$

۶۸. دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۹- مرتبط با تمرین ۸- ب) (سراسری تجربی - ۹۲)

- (۱) $\frac{9}{8}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{25}{8}$ (۴) $\frac{25}{4}$

۶۹. فاصله‌ی دو خط $L_1: y - x + a = 0$ و $L_2: y - x + 2a = 0$ برابر $2\sqrt{2}$ است، اگر این دو خط از ناحیه‌ی چهارم عبور نکنند، a کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۹- مکمل تمرین ۸)

- (۱) -۱ (۲) -۴ (۳) -۲ (۴) -۳

۷۰. خط Δ'' از دو خط $x - y + 3 = 0$ و $y - x + 1 = 0$ به یک فاصله است. عرض از مبدأ Δ'' کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۹- مرتبط با تمرین ۸)

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲



درسنامه - مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم (روابط بین ضرایب و ریشه‌ها)

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله α و β ریشه‌های یک معادله‌ی درجه‌ی دوم باشند، آنگاه:

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \Rightarrow x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \quad (1)$$

از طرفی در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با ریشه‌های α و β ، با تقسیم طرفین معادله بر $a \neq 0$ ، معادله‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \xrightarrow{(1)} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ و } \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad (\text{مجموع ریشه‌ها}) \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \quad (\text{حاصل ضرب ریشه‌ها})$$

● مثال: مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $x^2 - 5x - 3 = 0$ را بدون حل آن بیابید.

○ حل: توجه کنید که $\Delta = (-5)^2 - 4(-3) = 37 > 0$ ، بنابراین:

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{1} = 5 \quad \text{و} \quad P = \frac{c}{a} = \frac{-3}{1} = -3$$

۱ روابط متقارن و نامتقارن بین ریشه‌های معادله: رابطه‌هایی که در آن‌ها با تعویض جای متغیرها، تغییری نمی‌کنند را متقارن می‌نامیم، به‌عنوان مثال

رابطه‌های متقارن و $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ رابطه‌ای نامتقارن است. در تست‌هایی که رابطه‌ی جبری بین دو ریشه داده شده، دو حالت خواهیم داشت:

الف) رابطه‌ی داده شده متقارن باشد: در این حالت از اتحادهای جبری استفاده کرده و رابطه را بر حسب S و P می‌نویسیم.

تست) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 5x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2 + \beta^2$ کدام است؟

$$\frac{17}{4} \quad (1) \quad \frac{29}{4} \quad (2) \quad \frac{15}{4} \quad (3) \quad \frac{27}{4} \quad (4)$$

پاسخ) گزینه‌ی «۲» با استفاده از اتحاد $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ خواهیم داشت:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\underbrace{\alpha + \beta}_S)^2 - 2\underbrace{\alpha\beta}_P = S^2 - 2P = \left(-\frac{-5}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{25}{4} + 1 = \frac{29}{4}$$

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه:

$$(1) \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P \quad (2) \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS \quad (3) \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} \quad (4) |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

● مثال: اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^2 + bx + 2 = 0$ ، دو عدد صحیح متوالی باشند، b را بیابید.

○ حل: ریشه‌ها را α و $\alpha + 1$ در نظر می‌گیریم، بنابراین:

$$\alpha + 1 - \alpha = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow 1 = \frac{\sqrt{b^2 - 8}}{1} \Rightarrow b^2 - 8 = 1 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3$$

ب) رابطه‌ی داده شده متقارن نباشد: در این حالت معمولاً با استفاده از S یا P ، یک ریشه‌ی معادله را یافته و با صدق دادن این ریشه در خود معادله، مجهول خواسته شده را می‌یابیم.

تست) در معادله‌ی $2x^2 - 10x + a = 0$ ، یک ریشه از دو برابر ریشه‌ی دیگر، یک واحد بیشتر است. a کدام است؟

$$\frac{88}{3} \quad (4) \quad \frac{44}{9} \quad (3) \quad \frac{83}{7} \quad (2) \quad \frac{88}{9} \quad (1)$$

پاسخ) گزینه‌ی «۱» اگر ریشه‌ها را α و β بنامیم، آنگاه $\alpha = 2\beta + 1$. با افزودن β به طرفین این رابطه خواهیم داشت:

$$\alpha + \beta = 3\beta + 1 \xrightarrow{\alpha + \beta = \frac{10}{2} = 5} 5 = 3\beta + 1 \Rightarrow \beta = \frac{4}{3}$$

ریشه‌ی معادله در خود معادله صدق می‌کند، با قرار دادن $\frac{4}{3}$ در معادله a را می‌یابیم:

$$2\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 10\left(\frac{4}{3}\right) + a = 0 \Rightarrow \frac{32}{9} - \frac{40}{3} + a = 0 \Rightarrow a = \frac{88}{9}$$

تست اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x - 2 = 0$ باشند، آنگاه حاصل عبارت $\alpha^2 - 5\alpha - \beta$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (-۲) ۴ (-۱)

$$x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{-(-4)}{1} = 4$$

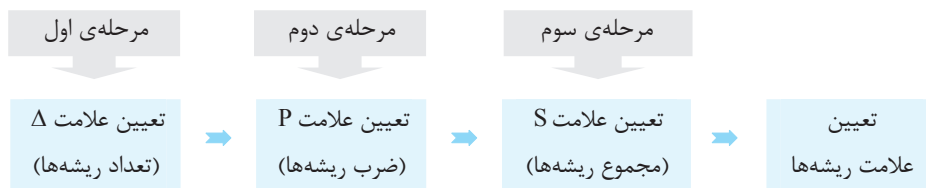
پاسخ گزینه‌ی «۳»

α ریشه‌ی معادله است، پس در خود معادله صدق می‌کند:

$$x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 4\alpha + 2$$

$$\xrightarrow{\alpha^2 = 4\alpha + 2} \alpha^2 - 5\alpha - \beta = 4\alpha + 2 - 5\alpha - \beta = -(\alpha + \beta) + 2 = -4 + 2 = -2$$

۲ تعداد و علامت ریشه‌های معادله: با استفاده از P, S, Δ می‌توان تعداد و علامت ریشه‌های معادله را یافت. برای این منظور مراحل زیر را انجام می‌دهیم:



● **مثال:** بدون حل معادله، در مورد تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 7x + 1 = 0$ نظر دهید.

○ **حل:** $\Delta = (-7)^2 - 4(2)(1) = 41 > 0$ ، پس معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد، از طرفی $P = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} > 0$ ، پس هر دو ریشه هم‌علامت هستند. همچنین

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{7}{2} > 0$$

بنابراین هر دو ریشه مثبت‌اند.

تست معادله‌ی $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{2} = 0$

- (۱) دو ریشه‌ی حقیقی و مثبت دارد.
(۲) دو ریشه‌ی حقیقی و منفی دارد.
(۳) دو ریشه‌ی حقیقی و مختلف‌العلامت دارد.
(۴) ریشه‌ی حقیقی ندارد.

پاسخ گزینه‌ی «۱» دلتای معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \Delta = (-(\sqrt{3} + 1))^2 - 4\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{2} > 0$$

از آنجا که $\Delta > 0$ است پس معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد. از طرفی $P = \frac{c}{a} = \sqrt{2} > 0$ و $S = \frac{-b}{a} = \sqrt{3} + 1 > 0$ ، چون حاصلضرب و مجموع ریشه‌ها مثبت است، پس هر دو ریشه مثبت‌اند.

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

- (الف) اگر $ac < 0$ باشد، آنگاه معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی مختلف‌العلامت است. (توجه کنید که با این شرط $\Delta > 0$ است).
(ب) اگر $b = 0$ و $\Delta > 0$ ، آنگاه معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی و قرینه‌ی هم است.
(پ) اگر $a = c$ و $\Delta > 0$ ، آنگاه معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی و عکس هم است.

تست معادله‌ی $2x^2 + (2k^2 + 3)x - (k^2 + 1) = 0$ ، به ازای هر مقدار حقیقی k

- (۱) دو ریشه‌ی حقیقی و مثبت دارد.
(۲) دو ریشه‌ی حقیقی و منفی دارد.
(۳) دو ریشه‌ی حقیقی و مختلف‌العلامت دارد.
(۴) ریشه‌ی حقیقی ندارد.

پاسخ گزینه‌ی «۳» از آنجایی که $ac = -2(k^2 + 1) < 0$ ، پس معادله به ازای هر مقدار حقیقی k دارای دو ریشه‌ی حقیقی مختلف‌العلامت است.



تست به ازای کدام مقدار m ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $(m^2 + 1)x^2 + (m^2 - 1)x + m^2 + 3m - 2 = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی و قرینه است؟

- (۱) فقط ۱ (۲) فقط -۱ (۳) هیچ مقداری (۴) ۱ و -۱

پاسخ گزینه‌ی «۲» دو ریشه قرینه‌اند، پس مجموع آن‌ها صفر است، یعنی $x' + x'' = \frac{-b}{a} = 0$ ، بنابراین باید $b = 0$ و $\Delta > 0$ باشد، در نتیجه

$m^2 - 1 = 0$ پس $m = 1$ یا $m = -1$. حال با جایگذاری این مقادیر m در معادله، Δ را بررسی می‌کنیم:

(غ ق ق) ریشه‌ی حقیقی ندارد. $m = 1 \Rightarrow 2x^2 + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 - 16 < 0$

(ق ق) $m = -1 \Rightarrow 2x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 + 32 > 0$



پیمانه‌ی ۵



صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳ و تمرین‌های صفحه‌ی ۱۸ ریاضی ۲

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله تیپ ۷

۷۱ به ازای یک مقدار m ، ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 + 3mx + 2m + 6 = 0$ ، معکوس یکدیگرند. مجموع این دو ریشه کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با کار در کلاس) (سراسری انسانی خارج از کشور - ۹۵)

- (۱) $-1/5$ (۲) $1/5$ (۳) ۲ (۴) ۳

۷۲ در معادله‌ی $2x^2 + (2k - 1)x - k = 0$ ، به ازای کدام مقدار k مجموع معکوس هر دو ریشه برابر $\frac{7}{3}$ است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با کار در کلاس) (سراسری تجربی- ۷۷)

- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۳ به ازای کدام مقدار m عدد $\frac{1}{8}$ واسطه‌ی حسابی بین دو ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی $(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0$ است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با کار در کلاس) (سراسری ریاضی- ۸۴)

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۴ (۴) -۴

۷۴ به ازای کدام مقدار m ، عدد $\sqrt{2}$ واسطه‌ی هندسی بین ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0$ است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با کار در کلاس) (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۴)

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) -۳

۷۵ به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 - (m + 3)x + 5 = 0$ ، برابر ۶ می‌باشد؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با کار در کلاس) (سراسری تجربی - ۹۳)

- (۱) $-\frac{9}{5}$ (۲) ۱ (۳) 1 و $-\frac{9}{5}$ (۴) $\frac{9}{5}$ و -۱

۷۶ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ چقدر است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با کار در کلاس) (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۵)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۷۷ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - (m + 2)x + \frac{1}{8} = 0$ باشند و $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = 2$ باشد، آنگاه m کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با کار در کلاس) (آزمون کانون- ۱۹ آبان ۹۶)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۷ (۴) به ازای هیچ مقدار m

۷۸ اگر $a + 3b + 9c = 0$ ، آنگاه یکی از جواب‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ همواره کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با کار در کلاس) (آزمون کانون- ۲۲ آبان ۹۶)

- (۱) $-\frac{b}{3a}$ (۲) $\frac{c}{3a}$ (۳) $\frac{3c}{a}$ (۴) $-\frac{3b}{a}$

۷۹. اگر α و β ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $x^2 - 2x - 2 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2 - \alpha + \beta$ کدام است؟

(۹)

(ریاضی ۲ - صفحه‌ی ۱۳ - مرتبط با کار در کلاس) (آزمون کانون - ۱۸ آبان ۹۷)

- (۱) ۲ (۲) صفر (۳) ۴ (۴) -۲

۸۰. در معادله‌ی $3x^2 - 15x + m = 0$ ، اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه‌ی دیگر بیشتر باشد، m کدام است؟

(۱۰)

(ریاضی ۲ - صفحه‌ی ۱۳ - مرتبط با کار در کلاس) (سراسری ریاضی - ۸۲)

- (۱) $\frac{59}{5}$ (۲) $\frac{63}{5}$ (۳) $\frac{59}{4}$ (۴) $\frac{63}{4}$

۸۱. به ازای کدام مقدار k در معادله‌ی درجه دوم $2x^2 - x + k = 0$ بین ریشه‌ها رابطه‌ی $3 = x_1 + 2x_2$ برقرار است؟

(۱۱)

(ریاضی ۲ - صفحه‌ی ۱۳ - مرتبط با کار در کلاس) (سراسری تجربی - ۷۹)

- (۱) -۱۲ (۲) -۱۰ (۳) ۸ (۴) ۶

۸۲. در معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 + ax + 9 = 0$ ، یک ریشه دو برابر ریشه‌ی دیگر است، مجموع دو ریشه‌ی مثبت کدام است؟

(۱۲)

(ریاضی ۲ - صفحه‌ی ۱۳ - مرتبط با کار در کلاس) (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۴)

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) ۵

۸۳. در معادله‌ی $3x^2 - 17x + m = 0$ یک ریشه از سه برابر ریشه‌ی دیگر ۳ واحد بیشتر است. m کدام است؟

(۱۳)

(ریاضی ۲ - صفحه‌ی ۱۳ - مرتبط با کار در کلاس) (سراسری ریاضی - ۸۷)

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۸۴. در معادله‌ی $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشه‌ی دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟

(۱۴)

(ریاضی ۲ - صفحه‌ی ۱۳ - مرتبط با کار در کلاس) (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۱)

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳ و تمرین‌های صفحه‌ی ۱۸ ریاضی ۲

تیب ۸

تعداد و علامت ریشه‌های معادله

۸۵. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 2x + 4 - 2m = 0$ باشند، به‌ازای کدام مقادیر m نقطه‌ی $A(\alpha, \beta)$ در ناحیه‌ی اول یا سوم است؟

(۱۵)

(ریاضی ۲ - صفحه‌ی ۱۲ - فعالیت - مرتبط با ۲) (آزمون کانون - ۶ مرداد ۹۶)

- (۱) $\frac{3}{2} < m$ (۲) $\frac{3}{2} \leq m < 2$ (۳) $m > 2$ (۴) $m < 2$

۸۶. کدام معادله‌ی زیر به ازای هر مقدار حقیقی a دارای دو ریشه‌ی حقیقی و مختلف‌العلامت است؟

(۱۶)

- (۱) $x^2 + (a^2 + 1)x + a = 0$ (۲) $x^2 + ax - (a^2 + 1) = 0$
 (۳) $x^2 + a(a^2 + 1)x + 1 = 0$ (۴) $(a^2 + 1)x^2 + x - a = 0$

۸۷. اگر ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $x^2 - 3x + 2a - 1 = 0$ هم‌علامت باشند، a کدام عدد زیر نمی‌تواند باشد؟

(۱۷)

(ریاضی ۲ - صفحه‌ی ۱۲ - فعالیت - مرتبط با ۲)

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{5}$

۸۸. به ازای کدام مقدار m ، معادله‌ی $x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0$ دارای ریشه‌ی مضاعف منفی است؟

(۱۸)

(ریاضی ۲ - صفحه‌ی ۱۲ - فعالیت - مرتبط با ۲)

- (۱) $3 \pm \sqrt{12}$ (۲) $3 + \sqrt{12}$ (۳) $3 + \sqrt{3}$ (۴) مقداری برای m وجود ندارد.

۸۹. به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یکدیگرند؟

(۱۹)

(ریاضی ۲ - صفحه‌ی ۱۲ - فعالیت - مرتبط با ۲) (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۰)

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۹۰. به ازای چند مقدار a ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $x^2 + a^2x + 1 = a(x+2)$ ، قرینه‌ی یکدیگرند؟

(۲۰)

(ریاضی ۲ - صفحه‌ی ۱۲ - فعالیت - مرتبط با ۲)

- (۱) یک مقدار (۲) دو مقدار (۳) بی‌شمار (۴) هیچ مقداری

تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم به کمک S و P ◀ معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با ریشه‌های حقیقی x' و x'' را می‌توان بر حسب S و P به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ نوشت، که در آن $S = \frac{-b}{a}$ (مجموع ریشه‌ها) و $P = \frac{c}{a}$ (حاصل ضرب ریشه‌ها) است.

مثال: معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش $3 - 2\sqrt{2}$ و $3 + 2\sqrt{2}$ باشند.

حل: $S = x_1 + x_2 = (3 - 2\sqrt{2}) + (3 + 2\sqrt{2}) = 6$ و $P = x_1 x_2 = (3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = 9 - 8 = 1$

بنابراین $S = 6$ و $P = 1$ ، پس:

$$x^2 - Sx + P = 0 \xrightarrow{S=6, P=1} x^2 - 6x + 1 = 0$$

تست اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x + 1 = 0$ و $\alpha > \beta$ باشند، آنگاه معادله‌ای که ریشه‌هایش 5α و 4β باشد، کدام است؟

$$x^2 - 15x + 9 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \quad (3)$$

$$x^2 + 7x + 10 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + 15x + 9 = 0 \quad (4)$$

پاسخ گزینه‌ی «۳» چون مجموع ضرایب صفر است، پس ریشه‌ها $x' = 1$ و $x'' = \frac{c}{a} = \frac{1}{4}$ است. چون $\alpha > \beta$ پس $\alpha = 1$ و $\beta = \frac{1}{4}$ است. بنابراین:

$$5\alpha = 5 \quad \text{و} \quad 4\beta = 1 \quad \text{است و خواهیم داشت:}$$

$$S = x_1 + x_2 = 5 + 1 = 6 \quad \text{و} \quad P = x_1 x_2 = 5 \times 1 = 5$$

بنابراین معادله‌ی مطلوب $x^2 - 6x + 5 = 0$ است.

در بعضی از تست‌ها، ریشه‌های یک معادله بر حسب ریشه‌های معادله‌ی دیگر داده می‌شود. در این حالت، مجموع (S') و حاصل ضرب (P') ریشه‌های معادله‌ی جدید را یافته و معادله‌ی $x^2 - S'x + P' = 0$ را تشکیل می‌دهیم.

تست اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + ax + b = 0$ مربع ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، $2a + b$ کدام است؟

$$-12 \quad (1) \quad 12 \quad (2) \quad -13 \quad (3) \quad 13 \quad (4)$$

پاسخ گزینه‌ی «۳» فرض می‌کنیم ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ برابر α و β باشند، در این صورت ریشه‌های معادله‌ی جدید α^2 و β^2 خواهند بود و داریم:

$$\begin{cases} S' = \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 3^2 - 2 \times 1 = 7 \\ P' = \alpha^2 \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = P^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 7x + 1 = 0$$

بنابراین $a = -7$ و $b = 1$ و در نتیجه $2a + b = -14 + 1 = -13$.

نکته اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند و بخواهیم معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهیم که ریشه‌هایش: الف- قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی بالا باشد، کافی است علامت b را قرینه کنیم. ب- عکس ریشه‌های معادله‌ی بالا باشد، کافی است جای a و c را عوض کنیم. پ- عکس و قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی بالا باشد، کافی است جای a و c را عوض کرده و علامت b را قرینه کنیم.



۹۱. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش $2 + \sqrt{4-a}$ و $2 - \sqrt{4-a}$ باشد، کدام است؟ (ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۳- کار در کلاس- مشابه ۳) (سراسری ریاضی - ۶۸)

$$x^2 - ax + 4 = 0 \quad (4)$$

$$x^2 + 4x - a = 0 \quad (3)$$

$$x^2 + ax - 4 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 - 4x + a = 0 \quad (1)$$

۹۲. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - x - 1 = 0$ باشند، معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌هایش $\alpha\beta + \alpha^2$ و $\beta^2 + \alpha\beta$ باشد، کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با پاراگراف ۳)

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad (1) \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad (2) \quad 2x^2 - x - 1 = 0 \quad (3) \quad 2x^2 + x - 1 = 0 \quad (4)$$

۹۳. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x(\Delta x + 2) = 2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله‌ی $4x^2 - kx + 25 = 0$ به صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2} \right\}$ است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با کار در کلاس) (سراسری ریاضی - ۹۰)

$$27 \quad (1) \quad 28 \quad (2) \quad 29 \quad (3) \quad 31 \quad (4)$$

۹۴. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 - 4x + 6 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به صورت $\{3\alpha - 1, 3\beta - 1\}$ است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با کار در کلاس) (آزمون کانون- ۱۹ آبان ۹۶)

$$x^2 - 2x - 4 = 0 \quad (1) \quad x^2 - 6x - 13 = 0 \quad (2) \quad x^2 + 6x - 13 = 0 \quad (3) \quad x^2 + 2x - 4 = 0 \quad (4)$$

۹۵. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $4x^2 - 5x - 1 = 0$ باشند، ریشه‌های کدام معادله به صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1 \right\}$ است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با کار در کلاس) (آزمون کانون- ۳ آذر ۹۶)

$$x^2 + 3x + 8 = 0 \quad (1) \quad x^2 - 3x + 8 = 0 \quad (2) \quad x^2 + 3x - 8 = 0 \quad (3) \quad x^2 - 3x - 8 = 0 \quad (4)$$

۹۶. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $2x^2 + (c+2)x + 8 = 0$ باشند، آن‌گاه ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + bx + c = 0$ به صورت $\sqrt{\alpha\beta}$ و $2\sqrt{\alpha\beta}$ خواهد بود. حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با پاراگراف ۱) (آزمون کانون- ۱۹ آبان ۹۶)

$$-5 \quad (1) \quad 5 \quad (2) \quad 4 \quad (3) \quad -4 \quad (4)$$

۹۷. اگر هر یک از ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 + ax + b = 0$ ، دو برابر معکوس هر ریشه از معادله‌ی $4x^2 - 7x + 3 = 0$ باشد، a کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با پاراگراف ۱) (سراسری تجربی - ۸۶)

$$-14 \quad (1) \quad -12 \quad (2) \quad -8 \quad (3) \quad -6 \quad (4)$$

۹۸. ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + ax + b = 0$ ، یک واحد از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + 7x + 1 = 0$ بیش‌تر است، b کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با پاراگراف ۱) (سراسری تجربی - ۸۷)

$$-2 \quad (1) \quad -1 \quad (2) \quad \frac{2}{3} \quad (3) \quad \frac{4}{3} \quad (4)$$

۹۹. ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کمتر است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با پاراگراف ۱) (سراسری تجربی - ۹۴)

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (1) \quad x^2 + 3x + 1 = 0 \quad (2) \quad x^2 - 5x + 2 = 0 \quad (3) \quad x^2 + 5x + 2 = 0 \quad (4)$$

۱۰۰. ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + ax + b = 0$ ، از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 - 4x - 1 = 0$ یک واحد بیشتر است، b کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با پاراگراف ۱) (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۶)

$$-5 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 4 \quad (3) \quad 6 \quad (4)$$



برای حل بعضی از معادلات چندجمله‌ای می‌توانیم با انتخاب یک متغیر جدید، معادله را به معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل کرده و آن را حل کنیم. برای حل معادلات به شکل کلی $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ (n عددی طبیعی) که در آن a، b، c ضرایب ثابت هستند، با فرض $x^n = t$ ، معادله‌ی $at^2 + bt + c = 0$ حاصل می‌شود. با حل این معادله و در نظر گرفتن شرایط محدودکننده‌ی احتمالی t، می‌توان جواب‌های معادله‌ی اصلی را یافت.

● مثال: معادله $2x^6 - x^3 - 3 = 0$ را حل کنید.

○ حل: با فرض $x^3 = t \geq 0$ ، معادله‌ی $2t^2 - t - 3 = 0$ حاصل می‌شود. با حل این معادله خواهیم داشت:

$$2t^2 - t - 3 = 0 \xrightarrow{a+c=b} t_1 = -1, t_2 = \frac{3}{2} \rightarrow \begin{cases} x^3 = -1 & \text{غ ق ق} \\ x^3 = \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}, x_2 = -\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

● مثال: تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی $x^6 - 4x^3 - 7 = 0$ را بدون حل آن بیابید.

○ حل: با انتخاب $x^3 = t \geq 0$ ، معادله‌ی $t^2 - 4t - 7 = 0$ حاصل می‌شود. در این معادله $\Delta = 16 - 4(-7) = 16 + 28 > 0$ و $\frac{c}{a} = -7 < 0$ (دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت)، پس معادله بر حسب t، دارای دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت است، یعنی یک ریشه‌ی مثبت (t_1) و یک ریشه‌ی منفی (t_2). از آنجایی که $x^3 = t \geq 0$ ، فقط مقدار مثبت t برای x^3 قابل قبول است. بنابراین معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی و قرینه ($x = \pm\sqrt[3]{t_1}$) است.

۱۰ تست

پیمانه‌ی ۷



صفحه‌ی ۱۱ و تمرین‌های صفحه‌ی ۱۸ ریاضی ۲

تپ ۱۰

روش تغییر متغیر برای حل معادله

۱۰۱. تعداد جواب‌های حقیقی معادله‌ی $x^6 + 10x^3 + 9 = 0$ کدام است؟
 (۱) ۱ صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴ (ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۱- مشابه مثال) (سراسری انسانی خارج از کشور - ۹۲)

۱۰۲. حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی $2x^6 - 7x^3 + 5 = 0$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) $\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ (۳) $-\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ (۴) صفر (ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۸- مکمل تمرین ۱-ب)

۱۰۳. اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $\frac{1}{2}x^6 - 3x^3 - 4 = 0$ باشند، آنگاه حاصل $\alpha^3 + \beta^3 + \alpha\beta$ کدام است؟
 (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (ریاضی ۲- صفحه‌های ۱۱ و ۱۳- ترکیبی)

۱۰۴. مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ ، کدام است؟
 (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴ (ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۱- مکمل کار در کلاس) (سراسری تجربی - ۹۰)

۱۰۵. مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2 + x)^2 - 1 = 0$ کدام است؟
 (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲ (ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۱- مرتبط با کار در کلاس) (آزمون کانون- ۱۹ آبان ۹۶)

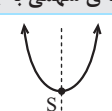
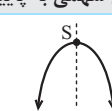
۱۰۶. حاصل ضرب جواب‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2 + 3)^2 - 5x^2 - 11 = 0$ کدام است؟
 (۱) ۴ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) -۴ (ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۸- مشابه تمرین ۱) (آزمون کانون- ۱۷ آذر ۹۶)

۱۰۷. کدام معادله، تعداد جواب‌های حقیقی کم‌تری نسبت به معادله‌ی بقیه‌ی گزینه‌ها دارد؟
 (۱) $x^6 - 7x^3 + 12 = 0$ (۲) $x^6 + 8x^3 + 7 = 0$ (۳) $4x^6 + 1 = 5x^3$ (۴) $(x^2 + x)^2 - 14(x^2 + x) + 24 = 0$ (ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۸- مشابه تمرین ۱) (آزمون کانون- ۱۹ آبان ۹۶)

۱۰۸. اگر معادله‌ی $x^6 - (m+2)x^3 + m + 5 = 0$ دارای ۴ ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد، مجموعه‌ی مقادیر m به کدام صورت است؟
 (۱) $m < -4$ (۲) $m > 4$ (۳) $-4 < m < 4$ (۴) $4 < m < 9$ (ریاضی ۲- صفحه‌های ۱۱ و ۱۳- ترکیبی) (سراسری تجربی - ۸۵)

۱۰۹. مجموعه مقادیر a کدام باشد تا معادله‌ی $x^6 + (3a+1)x^3 + (a^2-1) = 0$ دارای دو جواب قرینه باشد؟
 (۱) $\{-\frac{1}{3}\}$ (۲) $\{a \in \mathbb{R} | -1 < a < 1\}$ (۳) $\{a \in \mathbb{R} | a < -1 \cup a > 1\}$ (۴) تهی (ریاضی ۲- صفحه‌های ۱۱ و ۱۳- ترکیبی) (آزمون کانون- ۷ آبان ۹۵)

۱۱۰. در یک دنباله‌ی هندسی، جمله‌ی دوم و دو برابر جمله‌ی پنجم و جمله‌ی هشتم می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند، بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آنهاست؟
 (۱) $2 + \sqrt{3}$ (۲) $5 + 2\sqrt{3}$ (۳) $5 + 4\sqrt{3}$ (۴) $7 + 4\sqrt{3}$ (ریاضی ۱- صفحه‌های ۲۱ و ۲۶ و ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۱- ترکیبی) (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۲)

$a > 0$	$a < 0$
دهانه‌ی سهمی به بالا	دهانه‌ی سهمی به پایین
	
می‌نیمم‌دار است.	ماکزیمم‌دار است.

تعریف و معادله‌ی سهمی: هر معادله به شکل $y = ax^2 + bx + c$ که در آن a, b, c اعداد حقیقی و $a \neq 0$ است را یک تابع درجه ۲ و نمودار آن را سهمی می‌نامیم. نقطه‌ی S در شکل‌های روبه‌رو را رأس سهمی یا نقطه‌ی ماکزیمم (می‌نیمم) تابع می‌نامیم. خط گذرنده از رأس و عمود بر محور x ها را محور تقارن سهمی می‌نامیم. این خط در نقطه‌ی رأس بر سهمی عمود است.

معادله‌ی یک سهمی را می‌توان به صورت $y = a(x - x_S)^2 + y_S$ نیز نمایش داد. به جدول زیر توجه کنید:

معادله	مختصات رأس	محور تقارن	ماکزیمم (می‌نیمم)
$y = a(x - x_S)^2 + y_S$	$S(x_S, y_S)$	$x = x_S$	y_S
$y = ax^2 + bx + c$	$S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$	$x = -\frac{b}{2a}$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$

● **مثال:** در سهمی‌های زیر، مختصات رأس و ماکزیمم (می‌نیمم) سهمی را یافته و معلوم کنید دهانه‌ی سهمی به کدام سمت است.

(۱) $f(x) = 2x^2 - x + 1$

(۲) $g(x) = -2(x + 3)^2 + 6$

○ **حل:** (۱) $a = 2 > 0$ ، دهانه رو به بالا و تابع می‌نیمم‌دار است. طول رأس $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$ ، عرض آن را با قرار دادن این طول در معادله‌ی سهمی می‌یابیم.

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \times \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{7}{8}$$

بنابراین می‌نیمم سهمی $\frac{7}{8}$ و مختصات رأس سهمی $S\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{8}\right)$ است.

(۲) $a = -2 < 0$ ، دهانه رو به پایین و تابع ماکزیمم‌دار است. طول رأس $x_S = -3$ و عرض آن $y_S = 6$ است. بنابراین ماکزیمم سهمی ۶ و مختصات رأس سهمی $S(-3, 6)$ است.

توجه در معادله‌ی سهمی، محل تلاقی نمودار با محور y ها را عرض از مبدأ سهمی می‌نامیم.

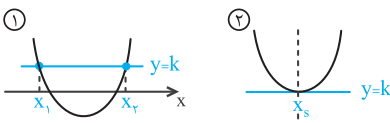
نکته اگر مختصات رأس سهمی معلوم باشد، بهتر است از معادله‌ی $y = a(x - x_S)^2 + y_S$ استفاده کنیم.

تست سهمی‌ای که رأس آن نقطه‌ی $(-2, 1)$ و عرض از مبدأ آن برابر ۴ باشد، از کدام نقطه‌ی زیر عبور می‌کند؟

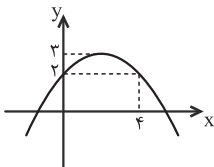
- (۱) $(2, 11)$ (۲) $\left(-1, \frac{5}{4}\right)$ (۳) $(3, 27)$ (۴) $\left(-1, \frac{7}{4}\right)$

پاسخ گزینه‌ی «۴» با توجه به نکته‌ی بالا، معادله‌ی سهمی را به صورت $y = a(x + 2)^2 + 1$ در نظر می‌گیریم. از طرفی عرض از مبدأ ۴ است، پس نقطه‌ی $(0, 4)$ در معادله صدق می‌کند. با بررسی گزینه‌ها، دیده می‌شود که فقط گزینه‌ی «۴» در آن صدق می‌کند.

نکته اگر خط $y = k$ سهمی را در دو نقطه به طول‌های x_1 و x_2 قطع کند، آنگاه طول رأس، وسط طول این دو نقطه یعنی $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$ است که همان معادله‌ی محور تقارن تابع است. از طرفی اگر خط $y = k$ سهمی را در یک نقطه قطع کند، آنگاه عرض نقطه‌ی ماکزیمم (می‌نیمم) برابر k است.



تست نمودار سهمی روبه‌رو داده شده است. اگر نقطه‌ی $A(6, y_0)$ بر روی سهمی باشد، y_0 کدام است؟



- (۱) -1 (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) -2

پاسخ گزینه‌ی «۱» چون دو نقطه با طول‌های صفر و ۴ عرض‌های برابری دارند، پس طول رأس وسط آن‌ها است و داریم:

$$x_S = \frac{0+4}{2} = 2 \xrightarrow{y_S=3} S(2, 3) \Rightarrow y = a(x-2)^2 + 3 \xrightarrow{(0, 2) \in \text{سهمی}} 2 = a(0-2)^2 + 3 \Rightarrow a = \frac{-1}{4}$$

پس $y = \frac{-1}{4}(x-2)^2 + 3$ ، نقطه‌ی $A(6, y_0)$ بر روی سهمی است، پس $y_0 = \frac{-1}{4}(6-2)^2 + 3 = -1$.



تست مجموعه نقاط سهمی $y = mx^2 + 4x - 3m$ عرضی بزرگتر و مساوی -8 دارند و محور تقارن آن خط $x = k \geq -2$ است، m کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۴

پاسخ گزینه «۲» با توجه به این که عرض کلیه نقاط سهمی بزرگتر و مساوی -8 است، پس دهانه‌ی آن رو به بالا و ضریب x^2 مثبت است. پس $m > 0$ ، از طرفی عرض می‌نیمم برابر -8 است و داریم:

$$-\frac{\Delta}{4a} = -8 \Rightarrow \frac{16 - 4(m)(-3m)}{4m} = 8 \Rightarrow 16 + 12m^2 = 32m \Rightarrow 12m^2 - 32m + 16 = 0 \Rightarrow 3m^2 - 8m + 4 = 0$$

از حل معادله دو جواب $m = 2$ و $m = \frac{2}{3}$ به دست می‌آید. معادله‌ی محور تقارن سهمی $y = ax^2 + bx + c$ خط $x = -\frac{b}{2a}$ است، پس:

$$\xrightarrow{m=2} y = 2x^2 + 4x - 6 \Rightarrow x = -\frac{4}{2 \times 2} = -1 \Rightarrow x = -1 \geq -2 \text{ قابل قبول است.}$$

$$\xrightarrow{m=\frac{2}{3}} y = \frac{2}{3}x^2 + 4x - 2 \Rightarrow x = -\frac{4}{2 \times \frac{2}{3}} = -3 \Rightarrow x = -3 \text{ غ.ق.}$$



پیمانه‌ی ۸



صفحه‌های ۱۴ تا ۱۸ ریاضی ۲

تیپ ۱۱

ماکزیمم (می‌نیمم)، رأس و محور تقارن سهمی

۱۱۱. اگر بیش‌ترین مقدار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (K + 3)x^2 - 4x + K$ برابر صفر باشد، مقدار K کدام است؟

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۴- مکمل مثال ۱) (سراسری ریاضی - ۸۳)

- (۱) -4 (۲) -1 (۳) ۱ (۴) ۴

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۴- مرتبط با مثال ۱) (سراسری ریاضی- ۷۸)

۱۱۲. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 + ax + 4$ می‌نیممی برابر ۳ دارد، a کدام است؟

- (۱) ± 4 (۲) ± 3 (۳) ± 2 (۴) ± 1

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۸- مرتبط با تمرین ۳) (سراسری انسانی- ۹۴)

۱۱۳. بیشترین مقدار تفاضل $\frac{1}{9}$ مربع عددی، از ۶ برابر آن عدد، کدام است؟

- (۱) ۵۴ (۲) ۶۳ (۳) ۷۲ (۴) ۸۱

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۸- مرتبط با تمرین ۳) (سراسری ریاضی - ۷۷)

۱۱۴. به ازای کدام مقدار a ، نقطه‌ی می‌نیمم نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = ax^2 - 2\sqrt{2}x + a$ بر روی خط $y = 1$ واقع است؟

- (۱) -1 (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۸- مرتبط با تمرین ۳) (سراسری تجربی- ۷۴)

۱۱۵. خط به معادله‌ی $y = -\frac{5}{2}x - \frac{5}{2}$ محور تقارن منحنی تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + a$ را بر روی خود منحنی قطع می‌کند. a کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -1 (۳) ۱ (۴) ۲

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۸- مرتبط با تمرین ۳) (آزمون کانون- ۱۹ آبان ۹۶)

۱۱۶. اگر محور تقارن سهمی به معادله $y = x^2 - kx + 1$ به صورت $x = -2$ باشد، کمترین مقدار سهمی کدام است؟

- (۱) -3 (۲) -2 (۳) ۲ (۴) ۳

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۸- مرتبط با تمرین ۳) (سراسری تجربی- ۷۵)

۱۱۷. نقطه‌ی می‌نیمم تابع با ضابطه‌ی $y = x^2 + ax + 2$ روی نیمساز ربع سوم قرار دارد. a کدام است؟

- (۱) -4 (۲) -2 (۳) ۲ (۴) ۴

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۸- مرتبط با تمرین ۳) (آزمون کانون- ۳ آذر ۹۶)

۱۱۸. اگر کمترین مقدار سهمی $y = x^2 - mx + m - 1$ برابر -1 باشد، مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

- (۱) -1 (۲) صفر (۳) ۲ (۴) ۴

(ریاضی ۲- صفحه‌ی ۱۸- مرتبط با تمرین ۳)

۱۱۹. اگر سهمی به معادله‌ی $y = -x^2 + bx + 3$ دارای ماکزیمم ۷ در ناحیه‌ی دوم باشد، مقادیر ممکن برای b کدام است؟

- (۱) 4 یا -4 (۲) فقط ۴ (۳) فقط -4 (۴) هیچ مقدار