فصل ۱

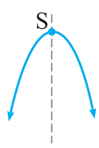
قسمت چهارم

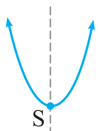
تابع درجه دو

سهمی

سهمی: نمودار هر معادله به شکل $y = ax^{۲} + bx + c$ را که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند و $a \neq ۰$، یک سهمی قائم و یا به اختصار یک سهمی می‌گوییم. به طور مثال، نمودار معادلهٔ $y = ۲x^{۲} + ۳x - ۱$ یک سهمی می‌باشد.

سهمی به معادلهٔ $y = ax^{۲} + bx + c$ $(a \neq ۰)$، همواره به یکی از دو صورت مقابل است:





در شکل‌های روبه‌رو به نقطهٔ S **رأس سهمی** می‌گوییم.

اگر $a > ۰$ باشد، سهمی دارای **پایین‌ترین نقطه** یا **مینیمم** و اگر $a < ۰$ باشد، سهمی دارای **بالاترین نقطه** یا **ماکزیمم** می‌باشد که در هر صورت نقطهٔ مینیمم یا ماکزیمم سهمی همان رأس سهمی است. همچنین خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد، **خط تقارن** یا **محور تقارن** سهمی نامیده می‌شود.

انواع معادلات سهمی و روش رسم نمودار آن‌ها

معادلهٔ سهمی معمولاً به یکی از دو صورت $y = a(x - \alpha)^{۲} + \beta$ یا $y = ax^{۲} + bx + c$ $(a \neq ۰)$ بیان می‌شود که با توجه به این معادلات می‌توان سهمی را رسم نمود. در ادامه به نحوهٔ رسم هر یک از این معادلات خواهیم پرداخت.

خواص سهمی به معادلهٔ $y = a(x - \alpha)^{۲} + \beta$, $(a \neq ۰)$

۱) نقطهٔ $S(\alpha, \beta)$ رأس این سهمی است.

۲) خط به معادلهٔ $x = \alpha$ معادلهٔ خط تقارن (محور تقارن) سهمی است.

۳) اگر $a > ۰$ باشد، دهانهٔ سهمی رو به بالا و اگر $a < ۰$ باشد، دهانهٔ سهمی رو به پایین باز می‌شود.

نکته از خاصیت (۲) فوق، نتیجه می‌گیریم که به ازای هر دو نقطهٔ دلخواه از سهمی، اگر عرض این دو نقطه با هم برابر باشند، آن‌گاه طول این دو نقطه نسبت به خط $x = \alpha$ قرینهٔ یکدیگرند.

مثال

رأس و محور تقارن هر یک از سهمی‌های زیر را به‌دست آورید و تعیین کنید دهانهٔ هر کدام به کدام طرف باز می‌شود.

آ) $y = ۲(x + ۱)^{۲} + ۳$ **ب) $y = -۵(x - ۲)^{۲} - ۷$**

پاسخ : آ) نقطهٔ $S(-۱, ۳)$ رأس سهمی و خط به معادلهٔ $x = -۱$ خط تقارن آن است. چون $a = ۲ > ۰$، پس دهانهٔ آن رو به بالا باز می‌شود.

ب) نقطهٔ $S(۲, -۷)$ رأس سهمی و خط به معادلهٔ $x = ۲$ محور تقارن آن است. چون $a = -۵ < ۰$، پس دهانهٔ آن رو به پایین باز می‌شود.

تست

اگر $x = ۲$ معادلهٔ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y = ۲(x + m - ۱)^{۲} + ۲m$ باشد، مختصات رأس این سهمی کدام است؟

۱) $(۳, ۶)$ ۲) $(۲, -۲)$ ۳) $(۳, -۶)$ ۴) $(۲, ۲)$

پاسخ : با توجه به مطالب ذکرشده، ریشهٔ عبارت داخل پرانتز در معادلهٔ سهمی، همان معادلهٔ محور تقارن سهمی است، پس:

$x + m - ۱ = ۰ \Rightarrow x = -m + ۱$, محور تقارن: $x = ۲ \Rightarrow -m + ۱ = ۲ \Rightarrow m = -۱$

با قرار دادن $m = -۱$، معادلهٔ سهمی به‌صورت $y = ۲(x - ۲)^{۲} - ۲$ درمی‌آید که در این صورت نقطه به مختصات $S(۲, -۲)$ رأس آن می‌باشد و در نتیجه گزینهٔ (۲) صحیح است.

رسم سهمی به معادلهٔ $y = a(x-\alpha)^۲ + \beta$, $(a \neq ۰)$

برای رسم سهمی به معادلهٔ $y = a(x-\alpha)^۲ + \beta$ و $(a \neq ۰)$ فرآیند زیر را انجام می‌دهیم:

۱) با توجه به علامت a، مشخص می‌کنیم که دهانهٔ سهمی رو به بالا باز می‌شود یا رو به پایین.

۲) مختصات رأس سهمی، یعنی نقطهٔ $S(\alpha,\beta)$ را مشخص می‌کنیم.

۳) دو نقطه با طول‌های دلخواه در طرفین رأس (ترجیحاً دو نقطه با طول‌های متقارن نسبت به طول رأس) را مشخص می‌کنیم.
می‌دانیم که مزیت انتخاب دو نقطه با طول‌های متقارن نسبت به طول رأس در این است که عرض این نقاط همواره برابر یکدیگر خواهد بود.

۴) نقاط مشخص‌شده را به‌صورت منحنی به یکدیگر وصل کرده و با توجه به علامت a نمودار را امتداد می‌دهیم.

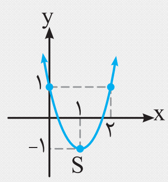
مثال

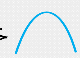
نمودار هر یک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

آ) $y = ۲(x-۱)^۲ - ۱$ ب) $y = -(x+۲)^۲ + ۳$

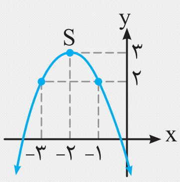
پاسخ: آ) چون $a = ۲$، پس دهانهٔ سهمی رو به بالا باز می‌شود و در واقع باید سهمی به‌صورت  باشد. نقطهٔ به مختصات $S(۱,-۱)$ رأس این سهمی است. طول رأس سهمی $x = ۱$ است، لذا بهتر است دو نقطه با طول‌های متقارن نسبت به $x = ۱$ بیابیم. نقاط به طول‌های $x = ۲$ و $x = ۰$ برای این منظور مناسب هستند. از آن‌جایی که $x = ۲$ و $x = ۰$ نسبت به $x = ۱$ متقارن هستند، پس عرض این نقاط یکسان خواهد بود. مختصات این نقاط را در جدول مشخص کرده و با توجه به این نقاط و این‌که دهانهٔ سهمی رو به بالا باز می‌شود، سهمی را رسم می‌کنیم:

x	۰	۱	۲
y	۱	-۱	۱



ب) چون $a = -۱$، پس سهمی در نهایت به‌صورت  خواهد شد.
مختصات رأس سهمی به‌صورت $S(-۲,۳)$ است. نقاط به طول‌های $x = -۳$ و $x = -۱$ را که طول آن‌ها نسبت به طول رأس سهمی یعنی $x = -۲$ متقارن است، در جدول مشخص نموده و سهمی را رسم می‌کنیم:

x	-۳	-۲	-۱
y	۲	۳	۲



تست

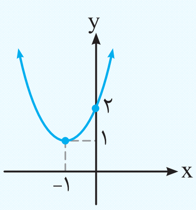
معادلهٔ سهمی شکل مقابل کدام است؟

۱) $y = (x-۱)^۲ + ۱$

۲) $y = -(x+۱)^۲ + ۱$

۳) $y = ۲(x-۱)^۲ + ۱$

۴) $y = (x+۱)^۲ + ۱$



پاسخ: در حالت کلی معادلهٔ سهمی را می‌توان به‌صورت $y = a(x-\alpha)^۲ + \beta$ در نظر گرفت. با توجه به شکل، نقطهٔ $S(-۱,۱)$ مختصات رأس سهمی است. پس $\alpha = -۱$ و $\beta = ۱$. بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y = a(x+۱)^۲ + ۱$ درمی‌آید. از سوی دیگر با توجه به شکل، نمودار سهمی از نقطهٔ $(۰,۲)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند. داریم:

$$y = a(x+۱)^۲ + ۱ \xrightarrow{x=۰\,,\,y=۲} ۲ = a(۰+۱)^۲ + ۱ \Rightarrow ۲ = a + ۱ \Rightarrow a = ۱$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به شکل $y = (x+۱)^۲ + ۱$ تبدیل می‌شود و گزینهٔ (۴) صحیح است.

تست

اگر $(-۳,۴)$ و $(۵,۴)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادلهٔ محور تقارن این سهمی کدام است؟

۱) $x = ۲$ ۲) $x = ۱$ ۳) $x = -۱$ ۴) $x = -۲$

پاسخ: با توجه به این‌که عرض دو نقطهٔ $(-۳,۴)$ و $(۵,۴)$ برابر هستند، پس معلوم می‌شود این دو نقطه نسبت به محور تقارن که طول آن با طول رأس سهمی برابر است، متقارن هستند. بنابراین برای یافتن طول رأس سهمی و نیز معادلهٔ محور تقارن سهمی، کافی است وسط طول‌های این نقاط را به‌دست آوریم. وسط طول‌های این نقاط همان میانگین طول‌های آن‌ها است، پس معادلهٔ محور تقارن برابر است با:

$$x = \frac{۵+(-۳)}{۲} = ۱ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

خواص سهمی به معادله $y = ax^۲ + bx + c$, $(a \neq ۰)$

۱) نقطه به مختصات $S(-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a})$ رأس این سهمی است.

۲) خط به معادله $x = -\frac{b}{۲a}$، معادلهٔ خط تقارن یا محور تقارن این سهمی است.

۳) اگر $a > ۰$، دهانهٔ سهمی رو به بالا و اگر $a < ۰$، دهانهٔ سهمی رو به پایین باز می‌شود.

مثال مختصات رأس و معادلهٔ محور تقارن سهمی $y = ۲x^۲ - ۴x + ۱$ را بیابید.

پاسخ : داریم:

$$x_S = -\frac{b}{۲a} = -\frac{(-۴)}{۲ \times ۲} = ۱ \quad , \quad y_S = -\frac{\Delta}{۴a} = -\frac{(-۴)^۲ - ۴(۲)(۱)}{۴(۲)} = -۱ \Rightarrow \text{مختصات رأس} : S(۱, -۱)$$

هم‌چنین خط به معادله $x = -\frac{b}{۲a} = ۱$، معادلهٔ محور تقارن این سهمی است.

نکته برای رسم نمودار معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ و $(a \neq ۰)$، ابتدا مختصات رأس سهمی یعنی نقطهٔ $S(-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a})$ را می‌یابیم. سپس دو نقطه با طول‌های دلخواه (ترجیحاً دو نقطه با طول‌های متقارن نسبت به طول رأس) را مشخص کرده و در نهایت با توجه به علامت a، سهمی را رسم می‌کنیم.

تذکر به جای یافتن عرض نقطهٔ رأس سهمی به کمک رابطهٔ $-\frac{\Delta}{۴a}$، می‌توان طول رأس یعنی $x = -\frac{b}{۲a}$ را در معادلهٔ سهمی قرار داد تا عرض آن به‌دست آید.

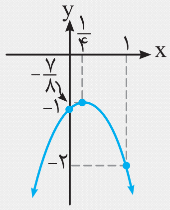
مثال نمودار سهمی $y = -۲x^۲ + x - ۱$ را رسم کنید.

پاسخ : چون $a = -۲ < ۰$، پس دهانهٔ این سهمی رو به پایین باز می‌شود. داریم:

$$x_S = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۱}{۲ \times (-۲)} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow y_S = -۲ \times \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۴} - ۱ = -\frac{۷}{۸} \Rightarrow \text{رأس سهمی} : S(\frac{۱}{۴}, -\frac{۷}{۸})$$

در این‌جا چون طول رأس سهمی عددی کسری است، برای راحتی کار به جای مشخص کردن دو نقطه با طول‌های متقارن نسبت به طول رأس که حداقل یکی از آن‌ها کسری خواهد بود، دو نقطه با طول‌های صحیح در دو طرف رأس در نظر می‌گیریم. توجه کنید که در این حالت عرض این نقاط ممکن است با هم برابر نباشند.

x	۰	$\frac{۱}{۴}$	۱
y	-۱	$\frac{-۷}{۸}$	-۲



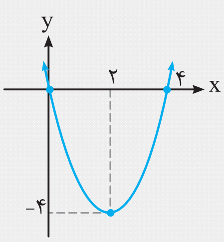
نکته در رسم سهمی، برای مشخص کردن نقطه‌های کمکی، می‌توان از نقاط برخورد سهمی با محورهای مختصات نیز استفاده کرد.

مثال سهمی به معادلهٔ $y = x^۲ - ۴x$ را رسم کنید.

پاسخ : چون $a = ۱ > ۰$، پس دهانهٔ سهمی رو به بالا باز می‌شود. هم‌چنین:

$$x_S = -\frac{b}{۲a} = -\frac{-۴}{۲(۱)} = ۲ \Rightarrow y_S = (۲)^۲ - ۴(۲) = -۴ \Rightarrow \text{رأس سهمی} : S(۲, -۴)$$

$$\text{نقطه‌های کمکی} : \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = ۰ \\ y = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۴x = ۰ \Rightarrow x(x-۴) = ۰ \Rightarrow x = ۰ , x = ۴ \end{cases}$$



مثال

سهمی $y=ax^۲+bx+c$، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ و محور xها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع می‌کند. اگر این سهمی از نقطهٔ $(۲,-۱)$ نیز بگذرد، معادلهٔ سهمی را بنویسید.

پاسخ: سهمی $y=ax^۲+bx+c$ از نقاط $(۰,۳)$، $(۳,۰)$ و $(۲,-۱)$ می‌گذرد، بنابراین مختصات این سه نقطه در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند:

روی سهمی قرار دارد $(۰,۳) \Rightarrow ۳=a(۰)^۲+b(۰)+c \Rightarrow c=۳ \Rightarrow y=ax^۲+bx+۳$

روی سهمی قرار دارد $(۳,۰) \Rightarrow ۰=a(۳)^۲+b(۳)+۳ \Rightarrow ۹a+۳b+۳=۰ \xrightarrow{\div ۳} ۳a+b=-۱ \quad (۱)$

روی سهمی قرار دارد $(۲,-۱) \Rightarrow -۱=a(۲)^۲+b(۲)+۳ \Rightarrow ۴a+۲b=-۴ \xrightarrow{\div ۲} ۲a+b=-۲ \quad (۲)$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \begin{cases} ۲a+b=-۲ \\ ۳a+b=-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲a-b=۲ \\ ۳a+b=-۱ \end{cases} \Rightarrow a=۱ \xrightarrow{۲a+b=-۲} ۲+b=-۲ \Rightarrow b=-۴ \Rightarrow \text{معادلهٔ سهمی}: y=x^۲-۴x+۳$$

صفرهای تابع درجه ۲

نقاط برخورد نمودار یک تابع با محور xها را صفرهای تابع می‌نامیم. بنابراین برای پیدا کردن صفرهای تابع f باید معادلهٔ $f(x)=۰$ را حل کنیم. در تابع درجه دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$، می‌توان تعداد صفرهای تابع را به کمک علامت Δ مشخص کرد.

مثال

صفرهای تابع $f(x)=۳x^۲+۴x+۱$ را مشخص کنید.

پاسخ: ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۰$، صفرهای تابع f می‌باشند:

$$f(x)=۰ \Rightarrow ۳x^۲+۴x+۱=۰ \quad , \quad a=۳\,,\,b=۴\,,\,c=۱$$

روش اول:

$$a+c=b \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-۱ \\ \beta=-\dfrac{c}{a}=-\dfrac{۱}{۳} \end{cases}$$

روش دوم:

$$\Delta=b^۲-۴ac=۱۶-۱۲=۴ \Rightarrow \alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۴+۲}{۲a}=\frac{-۲}{۶}=-\frac{۱}{۳}$$

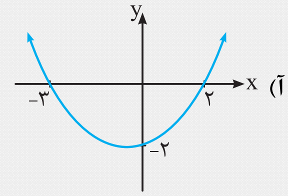
$$\beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۴-۲}{۶}=-\frac{۶}{۶}=-۱$$

نکته اگر α و β صفرهای تابع درجه ۲ باشند، آن‌گاه ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ است که با داشتن یک فرض دیگر می‌توان مقدار a را نیز به‌دست آورد.

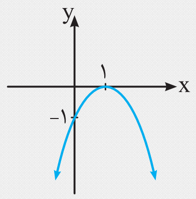
مثال

معادلهٔ سهمی‌های زیر را بنویسید. (مشابه مثال صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

آ)



ب)



پاسخ: آ) سهمی محور xها را در نقاطی با طول‌های ۳- و ۲ قطع کرده است، پس ۳- و ۲ صفرهای تابع هستند، بنابراین معادلهٔ سهمی به صورت $f(x)=a(x+۳)(x-۲)$ می‌باشد. طبق نمودار، $f(۰)=-۲$ است، بنابراین:

$$f(۰)=a(۰+۳)(۰-۲)=-۶a=-۲ \Rightarrow a=\frac{-۲}{-۶}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۳}(x+۳)(x-۲)$$

ب) نمودار f، محور طول‌ها را فقط در یک نقطه به طول ۱ قطع کرده است، پس $x=۱$ تنها صفر تابع f است و در نتیجه ضابطهٔ f به‌صورت $f(x)=a(x-۱)(x-۱)=a(x-۱)^۲$ می‌باشد. داریم:

$$f(۰)=-۱ \Rightarrow f(۰)=a(۰-۱)^۲=a=-۱ \Rightarrow f(x)=-(x-۱)^۲$$

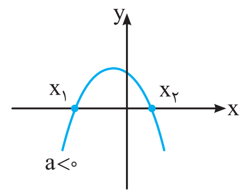
نکته محل برخورد نمودار تابع درجه ۲ با محور yها، برابر $f(۰)=c$ می‌باشد.

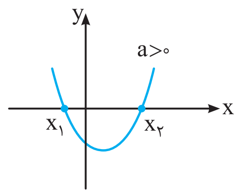
بحث روی علامت ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ و نمودار تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$

در این قسمت می‌خواهیم بدون به‌دست آوردن ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم و فقط با استفاده از علامت S و P، علامت ریشه‌های معادله را (در صورت وجود) مشخص کنیم.

فرض کنیم معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز باشد، یعنی $\Delta>۰$ باشد. برای بحث در علامت ریشه‌ها، ابتدا $P=\frac{c}{a}$ (حاصل‌ضرب ریشه‌ها) را به‌دست می‌آوریم:

۱) اگر $P<۰$، آن‌گاه دو ریشه مختلف‌العلامت‌اند (یکی مثبت و دیگری منفی) و نمودار تابع f به یکی از دو حالت زیر است:





توجه کنید در این حالت ($\Delta>۰$ و $\frac{c}{a}<۰$)، نمودار از هر چهار ناحیه می‌گذرد.

نکتهٔ مهم اگر $\frac{c}{a}<۰$، آن‌گاه Δ حتماً مثبت است، لذا فقط شرط $\frac{c}{a}<۰$ را بررسی می‌کنیم.

به عنوان مثال، در معادلهٔ درجه دوم $۳x^۲+۱۱x-۱=۰$، عبارت $P=\frac{c}{a}=\frac{-۱}{۳}$ عددی منفی است، پس (Δ حتماً مثبت است) معادله دارای دو ریشه، یکی مثبت و دیگری منفی است.

مثال

به ازای چه مقادیری از m، معادلهٔ $(m-۱)x^۲+۴x+(m+۲)=۰$، دارای دو ریشهٔ حقیقی، یکی مثبت و دیگری منفی است؟

پاسخ: اگر P (حاصل‌ضرب دو ریشه) منفی باشد، آن‌گاه معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی مختلف‌العلامت است:

$$P=\frac{c}{a}=\frac{m+۲}{m-۱}<۰\ ,\ m+۲=۰\ ,\ m-۱=۰\Rightarrow m=-۲\ ,\ m=۱$$

m		-۲		۱	
m+۲	-	۰	+		+
m-۱	-		-	۰	+
P	+	۰	-	تعریف نشده	+

با توجه به جدول، اگر $-۲<m<۱$، آن‌گاه P عددی منفی است.

تست

به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $f(x)=x^۲-(m+۱)x+m+\frac{۲۵}{۴}$ از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می‌گذرد؟

۱) $m<-\frac{۲۵}{۴}$ ۲) $-۴<m<۶$ ۳) $m>۶$ ۴) $-\frac{۲۵}{۴}<m<۶$

پاسخ: شرط آن‌که سهمی از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات بگذرد آن است که:

$$P<۰\ ,\ P=\frac{c}{a}=m+\frac{۲۵}{۴}<۰\Rightarrow m<-\frac{۲۵}{۴}$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۲) اگر $P>۰$ (حاصل‌ضرب دو عدد، عددی مثبت است.)، آن‌گاه دو ریشه متحدالعلامت‌اند (هر دو ریشه مثبت یا هر دو ریشه منفی هستند).

برای تشخیص مثبت بودن هر دو ریشه و یا منفی بودن آن‌ها، S (جمع ریشه‌ها) را تشکیل می‌دهیم:

آ) اگر $S>۰$ (جمع دو عدد)، آن‌گاه هر دو ریشه مثبت‌اند.

ب) اگر $S<۰$ (جمع دو عدد)، آن‌گاه هر دو ریشه منفی‌اند.

بنابراین:

نکته ۱ شرط وجود دو ریشهٔ حقیقی مثبت آن است که $S=-\frac{b}{a}>۰\ ,\ P=\frac{c}{a}>۰$ و $\Delta>۰$

نکته ۲ شرط وجود دو ریشهٔ حقیقی منفی آن است که $S=-\frac{b}{a}<۰\ ,\ P=\frac{c}{a}>۰$ و $\Delta>۰$

مثال

بدون حل معادله، علامت ریشه‌های معادلهٔ $5x^2+9x+1=0$ را مشخص کنید.

پاسخ : ابتدا Δ را به‌دست می‌آوریم:

$\Delta=b^2-4ac=81-20=61>0 \Rightarrow$ معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

هم‌چنین $P=\frac{c}{a}=\frac{1}{5}$ عددی مثبت است و در نتیجه هر دو ریشه متحدالعلامت هستند. S را به‌دست می‌آوریم: $S=-\frac{b}{a}=-\frac{9}{5}$

چون جمع دو عدد (هر دو عدد مثبت یا هر دو عدد منفی) منفی می‌باشد، پس دو عدد باید منفی باشند. لذا معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی می‌باشد.

مثال

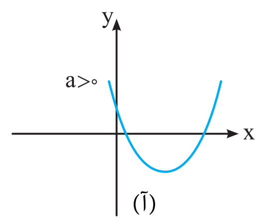
حدود m برای آن‌که معادلهٔ $mx^2+mx-2=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی باشد را مشخص کنید.

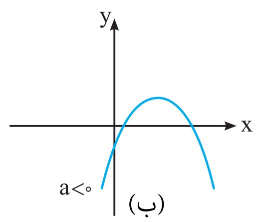
پاسخ : شرط داشتن دو ریشهٔ حقیقی منفی برای معادلهٔ درجهٔ دوم آن است که: $\Delta>0 \quad , \quad P=\frac{c}{a}>0 \quad , \quad S=-\frac{b}{a}<0$

$$S=-\frac{b}{a}=-\frac{m}{m}=-1<0 \quad \checkmark \quad , \quad P=\frac{c}{a}=\frac{-2}{m}>0 \Rightarrow m<0 \quad (*)$$

$$\Delta=m^2+8m=m(m+8)>0 \xrightarrow{(*)} m+8<0 \Rightarrow m<-8 \xrightarrow{(*)} m<-8$$

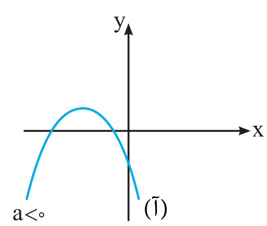
نکته ۱ اگر معادلهٔ $f(x)=ax^2+bx+c=0$ دارای دو ریشهٔ مثبت باشد، آن‌گاه نمودار f به یکی از دو صورت زیر است:

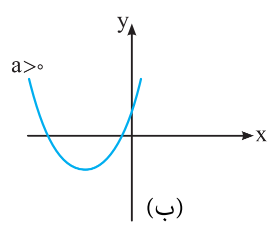




توجه کنید که نمودار (آ)، **فقط** از ناحیهٔ سوم **نمی‌گذرد** و نمودار (ب)، **فقط** از ناحیهٔ دوم **نمی‌گذرد.**

نکته ۲ اگر معادلهٔ $f(x)=0$ دارای دو ریشهٔ منفی باشد، آن‌گاه نمودار f به یکی از دو صورت زیر است:





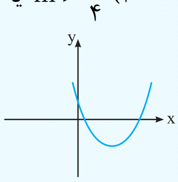
توجه کنید که نمودار (آ)، **فقط** از ناحیهٔ اول **نمی‌گذرد** و نمودار (ب)، **فقط** از ناحیهٔ چهارم **نمی‌گذرد.**

تست

به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $f(x)=x^2-x+m$ فقط از ناحیهٔ سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $m\geq 0$ ۲) $0\leq m<\frac{1}{4}$ ۳) $m<\frac{1}{4}$ ۴) $m>\frac{1}{4}$ یا $m<0$

پاسخ : با توجه به این‌که ضریب x^2 عددی مثبت است (سهمی رو به بالا)، نمودار تابع f باید به‌صورت



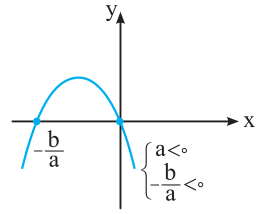
باشد، در واقع معادلهٔ $f(x)=0$ باید دو ریشهٔ حقیقی مثبت داشته باشد، پس باید داشته باشیم:

$$P=\frac{c}{a}>0 \quad , \quad S=-\frac{b}{a}>0 \quad , \quad \Delta>0$$

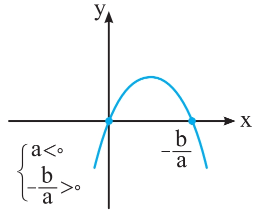
$$P=m>0 \quad , \quad S=-\frac{b}{a}=1>0 \quad , \quad \Delta=1-4m>0 \Rightarrow m<\frac{1}{4}$$

از طرفی اگر $m=0$ باشد، آن‌گاه ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=x^2-x$ درمی‌آید که نمودار آن نیز از ناحیهٔ سوم نمی‌گذرد. پس حدود m باید به‌صورت $0\leq m<\frac{1}{4}$ باشد تا نمودار تابع فقط از ناحیهٔ سوم محورهای مختصات نگذرد. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

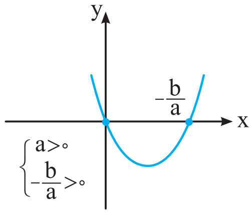
اگر $P=0$، آن‌گاه $c=0$ می‌باشد و در نتیجه ریشه‌ها $\alpha=0$ و $\beta=-\frac{b}{a}$ است و نمودار f به یکی از چهار حالت زیر می‌باشد: (نمودار f حتماً از مبدأ مختصات می‌گذرد.)



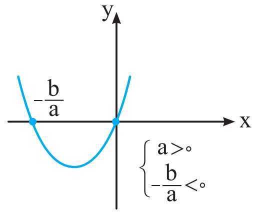
نمودار فقط از ناحیهٔ اول نمی‌گذرد.



نمودار فقط از ناحیهٔ دوم نمی‌گذرد.



نمودار فقط از ناحیهٔ سوم نمی‌گذرد.



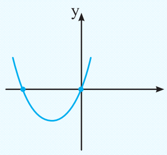
نمودار فقط از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد.

تست

به‌ازای کدام مقادیر m نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=mx^2+(m+1)x$ فقط از ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $-1<m<2$ ۲) $-2<m<0$ ۳) $m>0$ ۴) $m<0$

پاسخ: $c=0$ می‌باشد، لذا نمودار f از مبدأ مختصات می‌گذرد. برای آن‌که نمودار فقط از ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات نگذرد، نمودار آن باید به‌صورت



باشد، لذا سهمی باید رو به بالا و ریشهٔ دیگر معادله باید منفی باشد، پس:

$$x=-\frac{b}{a}=-\frac{m+1}{m}<0 \quad , \quad a=m>0 \Rightarrow m+1>0 \Rightarrow m>-1 \xrightarrow{m>0} m>0 \Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

خلاصهٔ مطالب گفته‌شده

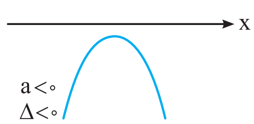
اگر در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، $\Delta>0$ باشد، آن‌گاه:

۱) $P<0 \Rightarrow$ معادله دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامت است.

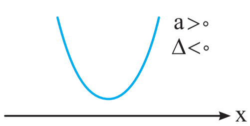
۲) $P>0 \Rightarrow$ دو ریشه متحدالعلامت‌اند. $\Rightarrow \begin{cases} S>0 \Rightarrow \text{هر دو ریشه مثبت} \\ S<0 \Rightarrow \text{هر دو ریشه منفی} \end{cases}$

۳) $P=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=-\frac{b}{a} \end{cases}$

اگر $\Delta<0$، در این صورت معادله ریشهٔ حقیقی ندارد. در واقع تابع $y=ax^2+bx+c$، محور xها را قطع نمی‌کند و نمودار تابع به یکی از دو صورت زیر است:



نمودار همواره پایین محور xها قرار دارد.



نمودار همواره بالای محور xها قرار دارد.

مثال

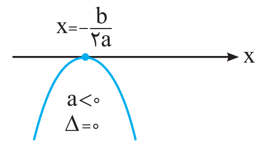
حدود m برای آن‌که نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=mx^2+2mx+m+1$ همواره بالای محور xها قرار گیرد را مشخص کنید.

پاسخ: در سهمی اگر $m>0$ = ضریب x^2 و $\Delta<0$، آن‌گاه نمودار سهمی همواره بالای محور xها قرار می‌گیرد:

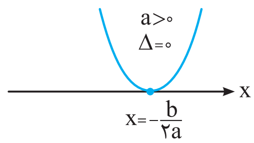
$$\Delta=b^2-4ac=4m^2-4m(m+1)=4m(m-(m+1))=4m(-1)<0 \Rightarrow m>0$$

از طرفی اگر $m=0$ = ضریب x^2، آن‌گاه ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=1$ درمی‌آید که خط $y=1$ بالای محور xها قرار دارد، پس به ازای $m\geq 0$، نمودار تابع f همواره بالای محور xها قرار می‌گیرد.

اگر $\Delta = ۰$، در این صورت معادله دارای ریشهٔ مضاعف $x = -\frac{b}{۲a}$ است. در این حالت نمودار تابع، محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند و می‌گوییم نمودار f در $x = -\frac{b}{۲a}$ بر محور x ها مماس است. نمودار کلی تابع در این حالت به یکی از دو صورت زیر است:



نمودار تابع زیر محور x ها و بر آن مماس است.



نمودار تابع بالای محور x ها و بر آن مماس است.

تست

به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع $f(x) = x^۲ + mx + ۴$، محور x ها را فقط در یک نقطه و در سمت چپ محور x ها قطع می‌کند؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۲− ۴) ۴−

پاسخ: برای آن‌که نمودار تابع، محور x ها را فقط در یک نقطه قطع کند، باید معادلهٔ $f(x) = ۰$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، لذا:

$$x^۲ + mx + ۴ = ۰ \Rightarrow \Delta = m^۲ - ۱۶ = ۰ \Rightarrow m = \pm ۴ \qquad (*)$$

اما در سمت چپ محور x ها، x عددی منفی است، لذا:

$$x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{m}{۲} < ۰ \Rightarrow m > ۰ \xrightarrow{(*)} m = ۴$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

اگر نمودار تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$، $(a \neq ۰)$ را داشته باشیم، می‌توانیم به کمک آن، علامت ضرایب a، b و c را با توجه به توضیحات داده‌شده مشخص کنیم.

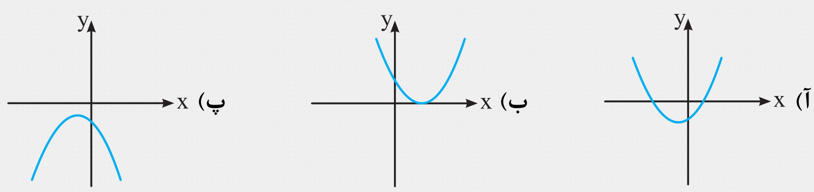
علامت a: اگر سهمی رو به بالا باشد، $a > ۰$ و اگر رو به پایین باشد، $a < ۰$ می‌باشد.

علامت b: طول رأس سهمی $x = \frac{-b}{۲a}$ است. با توجه به علامت a و علامت x، علامت b تعیین می‌شود.

علامت c: محل برخورد سهمی با محور y ها، $f(۰) = c$ است. با توجه به محل برخورد، علامت c تعیین می‌شود.

مثال

در هر یک از قسمت‌های زیر، سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ رسم شده است. علامت a، b و c را مشخص کنید.



پاسخ: آ) سهمی رو به بالاست، پس ضریب $x^۲$ عددی مثبت است: $a > ۰$

سهمی محور y ها را در نقطه‌ای با عرض منفی قطع کرده است، پس: $f(۰) = c < ۰$

هم‌چنین طول رأس سهمی منفی است، پس: $x = -\frac{b}{۲a} < ۰ \xrightarrow{a>۰} -b < ۰ \Rightarrow b > ۰$

ب) سهمی رو به بالا است، پس: $a > ۰$

رأس سهمی روی محور x ها و در قسمت مثبت آن قرار دارد. پس: $x = \frac{-b}{۲a} > ۰ \xrightarrow{a>۰} -b > ۰ \Rightarrow b < ۰$

هم‌چنین سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض مثبت قطع کرده است، پس: $f(۰) = c > ۰$

پ) سهمی قائم رو به پایین است، پس: $x^۲$ ضریب $= a < ۰$

رأس سهمی در ناحیهٔ سوم قرار دارد، پس طول آن عددی منفی است، بنابراین: $x = -\frac{b}{۲a} < ۰ \xrightarrow{a<۰} -b > ۰ \Rightarrow b < ۰$

هم‌چنین عرض از مبدأ سهمی منفی است، پس: $f(۰) = c < ۰$

فصل ۱

قسمت پنجم
معادلات گویا و رادیکالی

تعریف: کسرهایی را که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای باشند، عبارت‌های گویا می‌نامند. برای مثال عبارت‌های $\frac{x+۴}{x^۲+۳}$، $x-\frac{۲}{x+۵}$ و $\frac{-۱}{x}$ همگی گویا هستند.
مقدار یک عبارت گویا وقتی با معنی است که مخرجش صفر نباشد. یعنی در حالتی‌که مخرج یک عبارت گویا صفر شود، مقدار آن عبارت گویا تعریف نشده است.
عبارت گویای $\frac{x-۲}{x+۱}$ به ازای $x=-۱$ تعریف نشده است، زیرا با قرار دادن $x=-۱$ در آن، مخرج کسر برابر صفر شده و در این حالت کسر تعریف نشده است.

حل معادلات گویای $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

برای حل این نوع معادلات طرفین وسطین می‌کنیم، معادلهٔ به‌دست‌آمده را حل می‌کنیم و جواب با شرط آن‌که مخرج هیچ‌یک از دو کسر را صفر نکند، قابل قبول است.

مثال هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

آ) $\frac{۳x+۱}{x+۲}=۲$ ب) $\frac{x+۱}{۲x-۱}=\frac{۳x+۱}{x+۵}$

پاسخ: آ)
$$\frac{۳x+۱}{x+۲}=\frac{۲}{۱}\Rightarrow ۳x+۱=۲(x+۲)\Rightarrow ۳x+۱=۲x+۴\Rightarrow ۳x-۲x=۴-۱\Rightarrow x=۳$$
$x=۳$ مخرج کسر را صفر نمی‌کند، بنابراین $x=۳$ جواب معادله است.

ب)
$$\frac{x+۱}{۲x-۱}=\frac{۳x+۱}{x+۵}\Rightarrow (x+۱)(x+۵)=(۳x+۱)(۲x-۱)$$
$$\Rightarrow x^۲+۵x+x+۵=۶x^۲-۳x+۲x-۱\Rightarrow x^۲+۶x+۵=۶x^۲-x-۱\Rightarrow ۵x^۲-۷x-۶=۰$$
$$\Delta=b^۲-۴ac=۴۹-۴(۵)(-۶)=۱۶۹\Rightarrow x_۱,x_۲=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۷\pm۱۳}{۱۰}\Rightarrow x_۱=۲\ ,\ x_۲=-۰/۶$$
هر دو جواب قابل قبول است.

یادآوری کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م)

مخرج‌مشترک بین دو یا چند کسر، همان کوچک‌ترین مضرب مشترک بین مخرج‌های آن‌ها است و برای محاسبهٔ ک.م.م مخرج کسرها، کافی است در صورت امکان مخرج هر کسر را تجزیه کنیم، سپس حاصل‌ضرب عوامل مشترک با نمای بزرگ‌تر در عوامل غیر مشترک را به‌دست آوریم.

نکته برای حل معادلات گویا، دو طرف معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها ضرب می‌کنیم و عبارت جبری به‌دست‌آمده را حل می‌کنیم. از بین جواب‌های به‌دست‌آمده، آن‌هایی را قبول می‌کنیم که مخرج هیچ‌یک از کسرها را صفر نکند.

مثال هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

آ) $\frac{۲-x}{۲x+۱}-\frac{x+۱}{x-۲}=\frac{۵}{۲}$ ب) $\frac{۲x+۳}{۲x-۲}-\frac{۵}{x^۲-۱}=\frac{۲x-۳}{۲x+۲}$

پاسخ: آ) مخرج هیچ‌یک از دو کسر نیاز به تجزیه ندارد، بنابراین: $۲(۲x+۱)(x-۲)=$ ک.م.م مخرج‌ها

دو طرف معادله را در $۲(۲x+۱)(x-۲)$ ضرب می‌کنیم:
$$۲\cancel{(۲x+۱)}(x-۲)\times\frac{۲-x}{\cancel{۲x+۱}}-۲(۲x+۱)\cancel{(x-۲)}\times\frac{x+۱}{\cancel{x-۲}}=۵(۲x+۱)(x-۲)$$
$$\Rightarrow ۲(x-۲)(۲-x)-۲(۲x+۱)(x+۱)=۵(۲x+۱)(x-۲)\Rightarrow ۲(۲x-x^۲-۴+۲x)-۲(۲x^۲+۲x+x+۱)=۵(۲x^۲-۴x+x-۲)$$
$$\Rightarrow -۶x^۲+۲x-\cancel{۱۰}=۱۰x^۲-۱۵x-\cancel{۱۰}\Rightarrow -۶x^۲-۱۰x^۲+۲x+۱۵x=۰\Rightarrow -۱۶x^۲+۱۷x=۰$$
$$\Rightarrow x(-۱۶x+۱۷)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ -۱۶x+۱۷=۰\Rightarrow x=\frac{۱۷}{۱۶}\end{cases}$$
هیچ‌یک از جواب‌های به‌دست آمده، مخرج کسرها را صفر نمی‌کنند، پس هر دو جواب قابل قبول است.

ب) مخرج کسرها را تجزیه می‌کنیم:

$$۲x-۲=۲(x-۱)\ ,\ x^۲-۱=(x-۱)(x+۱)\ ,\ ۲x+۲=۲(x+۱)$$

$$\Rightarrow \text{ک.م.م مخرج‌ها} =۲(x-۱)(x+۱)$$

دو طرف معادله را در $۲(x-۱)(x+۱)$ ضرب می‌کنیم:

$$۲(x-۱)(x+۱)\times\frac{۲x+۳}{۲(x-۱)}-۲(x-۱)(x+۱)\times\frac{۵}{(x-۱)(x+۱)}=۲(x-۱)(x+۱)\times\frac{۲x-۳}{۲(x+۱)}$$

$$\Rightarrow (x+۱)(۲x+۳)-۲(۵)=(x-۱)(۲x-۳)$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۳x+۲x+۳-۱۰=۲x^۲-۳x-۲x+۳\Rightarrow ۱۰x=۱۰\Rightarrow x=۱$$

امّا $x=۱$ مخرج کسرهای اول و دوم را صفر می‌کند، پس معادله جواب ندارد.

تست

اگر دو معادلهٔ $\frac{x}{۴x+۴}=\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{x}$ و $\frac{-۳x}{۴}=\frac{kx}{x-۲}$ یک جواب مشترک داشته باشند، مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) ۱-

پاسخ:

$$۴x+۴=۴(x+۱)\ ,\ \frac{۱}{x}-\frac{۱}{x+۱}=\frac{x}{۴(x+۱)}\xrightarrow{\times ۴x(x+۱)}۴(x+۱)-۴x=x(x)$$

$$\Rightarrow ۴x+۴-۴x=x^۲\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=\pm ۲$$

$x=۲$ ریشهٔ معادلهٔ $\frac{-۳x}{۴}=\frac{kx}{x-۲}$ نمی‌باشد ($x=۲$ ریشهٔ مخرج است)، بنابراین $x=-۲$ ریشهٔ معادلهٔ $\frac{-۳x}{۴}=\frac{kx}{x-۲}$ است، لذا:

$$\frac{-۲k}{-۲-۲}=\frac{-۳(-۲)}{۴}\Rightarrow\frac{k}{۲}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow k=۳\Rightarrow$$ بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست

معادلهٔ $\frac{۵}{x}-\frac{۴}{x^۲-۲x}=۱-\frac{۲}{x-۲}$؛

۱) ریشهٔ حقیقی ندارد. ۲) یک ریشهٔ مثبت دارد. ۳) فقط یک ریشهٔ منفی دارد. ۴) دو ریشهٔ متمایز دارد.

پاسخ: ک.م.م مخرج کسرها برابر $x(x-۲)$ است. دو طرف معادله را در $x(x-۲)$ ضرب می‌کنیم:

$$۵(x-۲)-۴=x(x-۲)-۲(x)\Rightarrow ۵x-۱۰-۴=x^۲-۲x-۲x\Rightarrow x^۲-۹x+۱۴=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=۸۱-۵۶=۲۵>۰\Rightarrow x_۱,x_۲=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۹\pm۵}{۲}\Rightarrow x_۱=۲\ ,\ x_۲=۷$$

چون $x=۲$ مخرج کسر معادله را صفر می‌کند، غیر قابل قبول است و لذا معادله فقط یک ریشهٔ حقیقی $x=۷$ دارد و گزینهٔ (۲) صحیح است.

مثال

به ازای چه مقدار a، معادلهٔ $\frac{a}{x}=\frac{a-x}{x}+\frac{x}{a-x}$ دارای جواب $x=۲$ است؟

پاسخ: چون $x=۲$ جواب معادله است، در معادله صدق می‌کند. با قرار دادن $x=۲$ در معادلهٔ $\frac{a}{x}=\frac{a-x}{x}+\frac{x}{a-x}$ و با حل معادله بر حسب a، مقدار a را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۲}{a-۲}+\frac{a-۲}{۲}=\frac{a}{۲}\Rightarrow\frac{۲}{a-۲}=\frac{a}{۲}-\frac{a-۲}{۲}\Rightarrow\frac{۲}{a-۲}=۱\Rightarrow ۲=a-۲\Rightarrow a=۴$$

تست

اگر $x=۲$ ریشهٔ معادلهٔ $\frac{a}{x-۴}+\frac{۱}{x^۲-۴x}=۲$ باشد، ریشهٔ دیگر معادله کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

پاسخ:

$$\frac{۱}{x^۲-۴x}+\frac{a}{x-۴}=۲\xrightarrow{x=۲}-\frac{۱}{۴}-\frac{a}{۲}=۲\xrightarrow{\times ۴}-۱-۲a=۸\Rightarrow -۲a=۹\Rightarrow a=-\frac{۹}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{x(x-۴)}+\frac{-\frac{۹}{۲}}{x-۴}=۲$$

$$\xrightarrow{\times x(x-۴)}۱-\frac{۹}{۲}(x)=۲(x)(x-۴)\xrightarrow{\times ۲}۲-۹x=۴x^۲-۱۶x$$

$$\Rightarrow ۴x^۲-۷x-۲=۰\ ,\ \Delta=b^۲-۴ac=۴۹+۳۲=۸۱\Rightarrow x=\frac{۷\pm۹}{۸}\Rightarrow\begin{cases}x=۲\\ x=\frac{-۱}{۴}\end{cases}$$

بنابراین ریشهٔ دیگر معادله $x=-\frac{۱}{۴}$ است و در نتیجه گزینهٔ (۴) صحیح است.

در حل بعضی از معادلات گویا می‌توان با انتخاب متغیر جدید، معادله را ساده‌تر حل کرد. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال

معادلهٔ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$ را حل کنید.

پاسخ: با توجه به معادله، قرار می‌دهیم: $x+\frac{1}{x}=A \Rightarrow A^2+3A-4=0 \Rightarrow (A+4)(A-1)=0 \Rightarrow A=1$ یا $A=-4$

$A=1 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=1 \xrightarrow{\times x} x^2+1=x \Rightarrow x^2-x+1=0\ ,\ \Delta=b^2-4ac=-3<0 \Rightarrow$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

$A=-4 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=-4 \xrightarrow{\times x} x^2+1=-4x \Rightarrow x^2+4x+1=0\ ,\ \Delta=b^2-4ac=12$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{-4\pm2\sqrt{3}}{2}=\frac{-2(2\pm\sqrt{3})}{2}=-2\pm\sqrt{3}$$

$x=-2+\sqrt{3}$ و $x=-2-\sqrt{3}$ قابل قبول هستند، بنابراین معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی است.

تست

در مورد معادلهٔ $\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2+\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)-6=0$، کدام گزینه درست است؟

۱) ریشهٔ مضاعف دارد. ۲) ریشهٔ حقیقی ندارد. ۳) چهار ریشهٔ حقیقی دارد. ۴) دو ریشه دارد.

پاسخ: قرار می‌دهیم:

$$\frac{x^2}{x^2+1}=A \Rightarrow A^2+A-6=0 \Rightarrow (A+3)(A-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} A=-3 \\ \text{یا} \\ A=2 \end{cases}$$

اگر $A=-3$ باشد، معادله به‌صورت $\frac{x^2}{x^2+1}=-3$ درمی‌آید. این معادله جواب ندارد، زیرا سمت راست معادله عددی منفی است و سمت چپ معادله نمی‌تواند عددی منفی شود.

اگر $A=2$ باشد، در این صورت: $\frac{x^2}{x^2+1}=2 \Rightarrow x^2=2x^2+2 \Rightarrow x^2=-2$

این معادله نیز جواب ندارد و در نتیجه معادله ریشهٔ حقیقی ندارد. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

کاربرد معادلات گویا

مستطیل طلایی: مستطیلی را که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول آن برابر با نسبت طول به عرض مستطیل باشد، مستطیل طلایی می‌گوییم.

می‌خواهیم نسبت طول به عرض را در مستطیل طلایی به‌دست آوریم. فرض کنیم طول مستطیل، x و عرض آن، y باشد. طبق فرض، داریم:

$$\frac{\text{مجموع طول و عرض}}{\text{طول}}=\frac{\text{طول}}{\text{عرض}} \Rightarrow \frac{x+y}{x}=\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{x}+\frac{y}{x}=\frac{x}{y} \Rightarrow 1+\frac{y}{x}=\frac{x}{y}\quad (*)$$

فرض کنیم $A=\frac{x}{y}$ باشد، در این صورت $\frac{y}{x}$، عکس $\frac{x}{y}$ است، پس: $\frac{y}{x}=\frac{1}{\frac{x}{y}}=\frac{1}{A} \xrightarrow{(*)} 1+\frac{1}{A}=A \xrightarrow{\times A} A+1=A^2 \Rightarrow A^2-A-1=0$

$$\Delta=b^2-4ac=1-4(-1)=5 \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2(1)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ A=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

عدد $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ عددی منفی است، پس نمی‌تواند نسبت دو عدد مثبت باشد و در نتیجه غیر قابل قبول است. پس $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ نسبت طول به عرض مستطیل طلایی است. اگر $y=1$ باشد، آن‌گاه $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.

عدد طلایی: عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ را عدد طلایی می‌گوییم.

مثال

فاصلهٔ بین دو شهر A و B، ۱۲۰ کیلومتر است. اتومبیلی از شهر A با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در حرکت است. هم‌چنین اتومبیل دومی از شهر B که سرعت آن ۱۸ کیلومتر در ساعت کم‌تر از سرعت اتومبیل اول است، به سمت شهر A در حرکت است. اگر اتومبیل اول، ۲۰ دقیقه زودتر از اتومبیل دوم این مسیر را طی کند، سرعت هر یک از اتومبیل‌ها را به‌دست آورید. (مشابه فعالیت ۲ صفحهٔ ۲۰ کتاب درسی)

پاسخ: اگر متحرکی با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت، مسافت x کیلومتر را در t ساعت طی کند، آن‌گاه: $x=vt \Rightarrow t=\frac{x}{v}$

چون $x=120$ کیلومتر است، پس زمان اتومبیل اول برای طی کردن این مسافت برابر $t_1=\frac{120}{v}$ است. هم‌چنین سرعت اتومبیل دوم ۱۸ کیلومتر در ساعت کم‌تر از سرعت اتومبیل اول است، پس سرعت آن برابر $v-18$ می‌باشد و زمان طی‌شده توسط این اتومبیل $t_2=\frac{120}{v-18}$ می‌باشد. اما اتومبیل اول ۲۰ دقیقه ($\frac{1}{3}$ ساعت) زودتر می‌رسد، پس بین t_1 و t_2 تساوی $t_2=t_1+\frac{1}{3}$ برقرار است و در نتیجه داریم: $\frac{120}{v-18}=\frac{120}{v}+\frac{1}{3}$

برای حل این معادلهٔ گویا داریم: $۳v(v-۱۸)$: ک.م.م مخرج‌ها

دو طرف معادله را در $۳v(v-۱۸)$ ضرب می‌کنیم:

$$۳v(\cancel{v-۱۸})\times\frac{۱۲۰}{\cancel{v-۱۸}}=۳\cancel{v}(v-۱۸)\times\frac{۱۲۰}{\cancel{v}}+\cancel{۳}v(v-۱۸)\times\frac{۱}{\cancel{۳}}\Rightarrow\cancel{۳۶۰v}=\cancel{۳۶۰v}-۳۶۰\times۱۸+v^۲-۱۸v$$

$$\Rightarrow v^۲-۱۸v-۳۶۰\times۱۸=۰\Rightarrow\Delta=۱۸^۲+۴\times\overset{۲۰\times۱۸}{\cancel{۳۶۰}}\times۱۸=۱۸^۲(۱+۸۰)=۱۸^۲\times۹^۲\Rightarrow v=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\Rightarrow v=\frac{۱۸+۱۸\times۹}{۲}=۹۰\frac{km}{h}$$

مثال

علی و برادرش با هم در ۶ ساعت متنی را تایپ می‌کنند. اگر علی بخواهد به تنهایی این متن را تایپ کند، ۵ ساعت زودتر از برادرش انجام می‌دهد. مشخص کنید علی به تنهایی در چند ساعت این متن را تایپ می‌کند.

پاسخ: فرض کنیم علی در x ساعت متن را تایپ می‌کند، پس در هر ساعت، $\frac{۱}{x}$ متن تایپ می‌شود. همچنین برادرش ۵ ساعت دیرتر از علی این کار را انجام می‌دهد، پس وی در $x+۵$ ساعت این متن را تایپ می‌کند و در نتیجه در یک ساعت، $\frac{۱}{x+۵}$ متن توسط وی تایپ می‌شود.

از آن‌جایی که دو نفری در ۶ ساعت این متن را تایپ می‌کنند، پس در یک ساعت $\frac{۱}{۶}$ متن تایپ می‌شود.

پس متنی که توسط این دو نفر در یک ساعت تایپ می‌شود برابر $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۵}$ است و در نتیجه باید داشته باشیم: $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۵}=\frac{۱}{۶}$

عبارت $۶x(x+۵)$، ک.م.م مخرج کسرها می‌باشد، دو طرف معادلهٔ بالا را در $۶x(x+۵)$ ضرب می‌کنیم:

$$۶\cancel{x}(x+۵)\times\frac{۱}{\cancel{x}}+۶x(\cancel{x+۵})\times\frac{۱}{\cancel{x+۵}}=\cancel{۶}x(x+۵)\times\frac{۱}{\cancel{۶}}\Rightarrow۶(x+۵)+۶x=x(x+۵)\Rightarrow۶x+۳۰+۶x=x^۲+۵x$$

$$\Rightarrow x^۲-۷x-۳۰=۰\ ,\ \Delta=۴۹-۴(۱)(-۳۰)=۱۶۹\xrightarrow{x>۰}x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۷+\sqrt{۱۶۹}}{۲}=\frac{۷+۱۳}{۲}=۱۰$$

معادلات رادیکالی

هر معادله‌ای را که در آن عبارت رادیکالی شامل مجهول وجود داشته باشد، یک معادلهٔ رادیکالی می‌گوییم. به عنوان مثال، معادلات $x+\sqrt{x-۱}=۴$ و $۲x+\sqrt[۳]{x+۲}=۵$، معادلاتی رادیکالی هستند.

برای حل یک معادلهٔ رادیکالی می‌توان جملات را طوری به طرفین تساوی جابه‌جا کرد که عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد، سپس با توان‌رسانی طرفین معادله و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج نمود. پس از حل معادله باید مطمئن شویم که جواب‌های حاصل در معادلهٔ اولیه صدق می‌کنند.

مثال

معادلات رادیکالی زیر را حل کنید.

آ) $\sqrt{x-۱}-۵=۰$ ب) $x-\sqrt{x+۴}=۲$ پ) $\sqrt{x+۳}=\sqrt{x+۱}+۱$

پاسخ: آ)

$$\sqrt{x-۱}-۵=۰\Rightarrow\sqrt{x-۱}=۵\xrightarrow[\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}]{\text{دو طرف معادله را}}x-۱=۲۵\Rightarrow x=۲۵+۱=۲۶$$

با قرار دادن $x=۲۶$ در معادلهٔ اولیه $(\sqrt{x-۱}-۵=۰)$، مشاهده می‌کنیم که تساوی عددی به‌وجود می‌آید:

$$\sqrt{۲۶-۱}-۵=\sqrt{۲۵}-۵=۵-۵=۰$$

ب)

$$x-\sqrt{x+۴}=۲\Rightarrow x-۲=\sqrt{x+۴}\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}}(x-۲)^۲=x+۴\Rightarrow x^۲-۴x+\cancel{۴}=x+\cancel{۴}$$

$$\Rightarrow x^۲-۵x=۰\Rightarrow x(x-۵)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x-۵=۰\Rightarrow x=۵\end{cases}$$

$x=۰$ در معادلهٔ اولیه صدق نمی‌کند: $x-\sqrt{x+۴}=۲\xrightarrow{x=۰}۰-\sqrt{۴}=۲\Rightarrow-۲=۲$

پس $x=۰$ جواب معادله نمی‌باشد.

$x=۵$ در معادلهٔ اولیه صدق می‌کند، پس $x=۵$ جواب معادله است: $x-\sqrt{x+۴}=۲\xrightarrow{x=۵}۵-\sqrt{۵+۴}=۲\Rightarrow۵-۳=۲$

پ)

$$\sqrt{x+۳}=\sqrt{x+۱}+۱\xrightarrow[\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}]{\text{دو طرف معادله را}}x+۳=(\sqrt{x+۱}+۱)^۲\Rightarrow x+۳=(\sqrt{x+۱})^۲+۲\sqrt{x+۱}+۱^۲$$

$$\Rightarrow\cancel{x}+۳=\cancel{x}+۱+۲\sqrt{x+۱}+۱\Rightarrow۱=۲\sqrt{x+۱}\Rightarrow\sqrt{x+۱}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}}x+۱=\frac{۱}{۴}\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}-۱=-\frac{۳}{۴}$$

با قرار دادن $x=-\frac{۳}{۴}$ در معادلهٔ اولیه، داریم:

$$\sqrt{-\frac{۳}{۴}+۳}=\sqrt{-\frac{۳}{۴}+۱}+۱\Rightarrow\sqrt{\frac{۹}{۴}}=\sqrt{\frac{۱}{۴}}+۱\Rightarrow\frac{۳}{۲}=\frac{۱}{۲}+۱\Rightarrow\frac{۳}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

پس $x=-\frac{۳}{۴}$ جواب معادله است.

مثال

به ازای چه مقداری از a، $x=3$ ریشهٔ معادلهٔ $a+\sqrt{x+6}=7$ می‌باشد؟

پاسخ: $x=3$ ریشهٔ معادله است، پس در معادله صدق می‌کند. با قرار دادن $x=3$ در معادله، مقدار a را به‌دست می‌آوریم:

$$a+\sqrt{3+6}=7\Rightarrow a+3=7\Rightarrow a=7-3=4$$

تست

به ازای کدام مقدار a، $x=2$ ریشهٔ معادلهٔ $2\sqrt{a+1}-\sqrt{2x^2-5x+6}=6$ می‌باشد؟

۱) ۳۵ ۲) ۲۴ ۳) ۱۵ ۴) ۸

پاسخ: با قرار دادن عدد ۲ به جای x در معادله و حل معادلهٔ رادیکالی بر حسب a، مقدار a به‌دست می‌آید:

$$x=2\,,\ 2\sqrt{a+1}-\sqrt{2x^2-5x+6}=6\Rightarrow 2\sqrt{a+1}-\sqrt{8-10+6}=6\Rightarrow 2\sqrt{a+1}-2=6$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{a+1}=8\Rightarrow \sqrt{a+1}=4\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} a+1=16\Rightarrow a=15\Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

با تعیین حدود x قبل از حل معادله، می‌توان جواب معادله را مشخص کرد و یا گفت معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

مثال

بدون حل معادله:

آ) توضیح دهید چرا معادلهٔ $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+2=0$ جواب ندارد. (مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

ب) جواب معادلهٔ $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-3x+2}=0$ را به‌دست آورید.

پاسخ: آ) $\sqrt{x}$ و $\sqrt{x+1}$ عبارت‌هایی نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) هستند، پس جمع آن‌ها نیز نامنفی است ($\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\geq 0$). از طرفی وقتی عدد نامنفی با عدد مثبت ۲ جمع شود، حاصل بزرگ‌تر یا مساوی ۲ می‌شود، پس: $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+2\geq 2$

بنابراین عبارت $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+2$ هیچ‌گاه برابر صفر نمی‌شود و در نتیجه معادله جواب ندارد.

ب) مجموع دو عبارت نامنفی صفر شده است، پس این تساوی وقتی برقرار است که دو عبارت هم‌زمان صفر شوند. بنابراین جواب‌های مشترک دو معادله $x^2-1=0$ و $x^2-3x+2=0$ ریشه‌های معادله خواهند بود:

$$\begin{cases}x^2-1=0\Rightarrow x=\pm1\\ x^2-3x+2=0\Rightarrow x=1\ ,\ x=2\end{cases}\xrightarrow{\text{جواب مشترک}} x=1$$

پس $x=1$ جواب معادله است.

در حل برخی از معادلات رادیکالی، جواب‌هایی به‌دست می‌آیند که قابل قبول نیستند. برای آن‌که بدون امتحان کردن جواب‌های قابل قبول را مشخص کنیم، باید:

۱) حدود متغیر را مشخص کنیم (در رادیکال با فرجهٔ زوج، عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد).

۲) قبل از آن‌که دو طرف را به توان ۲ برسانیم، شرط مثبت یا منفی بودن دو طرف را بررسی کنیم.

مثال

معادلهٔ $2x-\sqrt{x+3}=9$ را حل کنید.

پاسخ: ابتدا عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x+3\geq 0\Rightarrow x\geq -3 \quad (1)$$

عبارت رادیکالی را در یک طرف معادله قرار می‌دهیم:

$$2x-\sqrt{x+3}=9\Rightarrow 2x-9=\sqrt{x+3}$$

چون $\sqrt{x+3}\geq 0$ می‌باشد، پس $2x-9$ نیز باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$2x-9\geq 0\Rightarrow 2x\geq 9\Rightarrow x\geq \frac{9}{2} \quad (2)$$

$$(1)\bigcap(2)\Rightarrow x\geq\frac{9}{2}$$

با حل معادله، هر جواب بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{9}{2}$ قابل قبول است:

$$2x-9=\sqrt{x+3}\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}}(2x-9)^2=x+3\Rightarrow 4x^2-36x+81=x+3\Rightarrow 4x^2-37x+78=0$$

$$\Rightarrow \Delta=(-37)^2-4(4)(78)=121\Rightarrow x=\frac{-(-37)+\sqrt{121}}{2(4)}=\frac{37+11}{8}=\frac{48}{8}=6\geq\frac{9}{2}\ \checkmark\ ,\ x=\frac{37-11}{8}=\frac{26}{8}=\frac{13}{4}<\frac{9}{2}\ \times$$

با تغییر متغیر می‌توان برخی از معادلات رادیکالی را ساده‌تر حل کرد.

تست

در معادلهٔ $x^2+2x+1=\sqrt{x^2+2x+7}$، مجموع ریشه‌های معادله کدام است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) 2 ۴) 3

پاسخ : اگر بخواهیم دو طرف معادله را به توان ۲ برسانیم، در سمت چپ معادله، عبارت x^4 به وجود می‌آید:

$$(x^2+2x+1)^2 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع سه‌جمله‌ای}} x^4+\cdots$$

حل معادلهٔ درجه ۴ به راحتی امکان‌پذیر نمی‌باشد.

اگر x^2+2x+1 را برابر t بگیریم، آن‌گاه: $x^2+2x+1=t \Rightarrow x^2+2x+7=(x^2+2x+1)+6=t+6$

معادله بر حسب t به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$t=\sqrt{t+6} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} t^2=t+6 \Rightarrow t^2-t-6=0 \Rightarrow (t-3)(t+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} t-3=0 \Rightarrow t=3 \\ t+2=0 \Rightarrow t=-2 \end{cases}$$

فقط $t=3$ در معادلهٔ $t=\sqrt{t+6}$ صدق می‌کند، پس $t=3$ جواب این معادله است. بنابراین داریم: $t=x^2+2x+1=3 \Rightarrow x^2+2x-2=0$

در معادلهٔ درجه دوم، مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ است. پس:

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a}=-2 \Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) صیح است.

مثال

نقطه‌ای روی خط به معادلهٔ $y=x+1$ به فاصلهٔ ۵ از نقطهٔ $(-1,7)$ پیدا کنید.

پاسخ : اگر A نقطهٔ مورد نظر و طول آن x باشد، آن‌گاه عرض آن $y=x+1$ است. پس مختصات A به‌صورت $A(x,x+1)$ می‌باشد. طبق فرض، فاصلهٔ A تا نقطهٔ $B(-1,7)$ برابر ۵ است، پس داریم:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-1-x)^2+(7-(x+1))^2}=5$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} (-1-x)^2+(6-x)^2=25 \Rightarrow 1+2x+x^2+36-12x+x^2=25$$

$$\Rightarrow 2x^2-10x+12=0 \xrightarrow{\div 2} x^2-5x+6=0 \Rightarrow (x-2)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow A(x,x+1)=(2,3) \\ x=3 \Rightarrow A(x,x+1)=(3,4) \end{cases}$$

تست

مثلث متساوی‌الساقین ABC با رأس‌های $A(\alpha,-1)$، $B(2,1)$ و $C(1,-2)$ و قاعدهٔ BC مفروض است. α کدام است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 3

پاسخ : مثلث ABC در رأس A متساوی‌الساقین است، بنابراین:

$$AB=AC \Rightarrow \sqrt{(2-\alpha)^2+(1+1)^2}=\sqrt{(1-\alpha)^2+(-2+1)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} (2-\alpha)^2+4=(1-\alpha)^2+1 \Rightarrow 4-4\alpha+\cancel{\alpha^2}+4=1-2\alpha+\cancel{\alpha^2}+1 \Rightarrow -4\alpha+2\alpha=2-8 \Rightarrow -2\alpha=-6 \Rightarrow \alpha=3$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

مثال

معادله‌ای شامل مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۲ یکی از ریشه‌های آن باشد. (مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۲۴ کتاب درسی)

پاسخ : دو عبارت رادیکالی می‌نویسیم که به ازای $x=2$، حاصل عبارت زیر رادیکال مربع کامل شود:

$$\sqrt{4x+1} \overset{x=2}{=\!=} \sqrt{9}=3 \quad , \quad \sqrt{x+2} \overset{x=2}{=\!=} \sqrt{4}=2$$

اگر این دو عبارت را با هم جمع کنیم یا از هم کم کنیم و یا هم‌چنین ضرایبی به آن‌ها بدهیم و حاصل را به‌دست آوریم، معادله‌ای رادیکالی حاصل می‌شود که $x=2$ یکی از ریشه‌های آن است:

$\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+2}=5$ یا $4\sqrt{4x+1}-3\sqrt{x+2}=4(3)-3(2)=6$ یا ...

۱۵۸. اگر هر یک از ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+ax+b=0$، سه برابر معکوس هر ریشه از معادلهٔ $-x^2+5x+7=0$ باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{30}{7}$ ۲) $\frac{25}{7}$ ۳) $-\frac{25}{7}$ ۴) $-\frac{30}{7}$

۱۵۹. ضرایب معادلهٔ درجه دوم $2mx^2-(m-2)x+m-2=0$ همگی گویا و یکی از ریشه‌های معادله $3-\sqrt{3}$ می‌باشد. مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{4}{7}$ ۲) $\frac{2}{7}$ ۳) $-\frac{3}{11}$ ۴) $-\frac{2}{11}$

قسمت چهارم: تابع درجه دو

ویژگی‌های سهمی

☆۱۶۰. رأس سهمی $y=x^2-4x+3$ کدام است؟

۱) $(2,-1)$ ۲) $(-2,15)$ ۳) $(1,0)$ ۴) $(-1,6)$

☆۱۶۱. بیش‌ترین مقدار سهمی $y=-3x^2+12x-1$ کدام است؟ (مشابه تمرین ۳ صفحه ۱۸ کتاب درسی)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

☆۱۶۲. کم‌ترین مقدار سهمی $y=x^2+6x-4$ کدام است؟ (مشابه تمرین ۳ صفحه ۱۸ کتاب درسی)

۱) -13 ۲) -9 ۳) -7 ۴) -3

☆۱۶۳. اگر مینیمم سهمی با ضابطهٔ $y=(m-1)x^2+x$ برابر ۲- باشد، m کدام است؟

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{9}{8}$

۱۶۴. اگر بیش‌ترین مقدار تابع $f(x)=(k+3)x^2-4x+k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) -4 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۴

☆۱۶۵. نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-x^2+(m+1)x+2m-1$ روی محور Oy دارای ماکزیمم است. عرض نقطهٔ ماکزیمم کدام است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) ۴ ۴) ۵

۱۶۶. به ازای کدام مقدار a، نقطهٔ مینیمم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=ax^2-2\sqrt{2}x+a$ بر روی خط $y=1$ واقع است؟ (سراسری ریاضی)

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

☆۱۶۷. اگر نقطهٔ $S(1,1)$ نقطهٔ ماکزیمم سهمی $y=ax^2+bx$ باشد، مقادیر a و b کدام‌اند؟

۱) $a=-2$ و $b=1$ ۲) $a=-1$ و $b=2$ ۳) $a=-1$ و $b=-2$ ۴) $a=-2$ و $b=-1$

۱۶۸. معادلهٔ سهمی که $S(-1,3)$ رأس آن است و از نقطهٔ $(-2,4)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $y=-x^2-2x-3$ ۲) $y=-x^2+2x+3$ ۳) $y=x^2-2x+4$ ۴) $y=x^2+2x+4$

☆۱۶۹. اگر خط $x=1$ محور تقارن سهمی $y=2x^2+3mx+1$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $-\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

۱۷۰. محور تقارن سهمی $y=-2x^2+5x-1$، خط به معادلهٔ $3x-2y=1$ را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{7}{8}$ ۲) $\frac{11}{8}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{2}{5}$

☆۱۷۱. اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه دوم $y=(a-1)x^2+x+3$ نسبت به خط $x=2$ متقارن باشد، این منحنی محور xها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟ (سراسری تجربی)

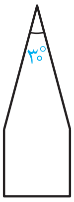
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

☆۱۷۲. نمودار تابع با ضابطهٔ $y=ax^2+bx+c$ محور xها را در نقاط $x=-1$ و $x=3$ و محور yها را در نقطهٔ $y=-1$ قطع می‌کند. عرض نقطهٔ مینیمم تابع کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

☆۱۷۳. پرتابگری وزنه‌ای را پرتاب می‌کند. ارتفاع وزنه بعد از t ثانیه از رابطهٔ $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$ به‌دست می‌آید. بعد از .... ثانیه وزنه به بالاترین ارتفاع ممکن می‌رسد و ارتفاع نقطهٔ اوج وزنه .... می‌باشد. (مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)

۱) ۲ ، ۲۱ ۲) ۲/۵ ، ۱۹/۷۵ ۳) ۳ ، ۱۶ ۴) ۳/۵ ، ۹/۷۵



☆۱۷۴. پنجره‌ای به شکل مربع داریم که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس $30°$ قرار گرفته است. اگر محیط پنجره ۶ متر باشد، طول ضلع مربع چند متر باشد تا پنجره کم‌ترین نوردهی را داشته باشد؟ (مشابه مثال صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۶۵ ۳) ۰/۷۲ ۴) ۰/۸۴

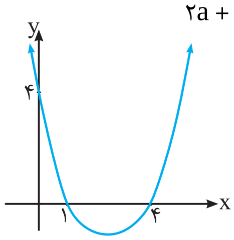
صفرهای تابع

☆۱۷۵. کدام تابع زیر، فاقد صفر است؟

۱) $y = x^2 + 3x + 2$ ۲) $y = -x^2 + 2x + 3$ ۳) $y = -x^2 + 3x - 4$ ۴) $y = x^2 - 4x - 2$

۱۷۶. اگر منحنی $y = (x - a)^2 - 1$ محور طول‌ها را در دو نقطه به طول‌های k_1 و k_2 قطع کند، مقدار $k_1 + k_2$ کدام است؟

۱) a ۲) $2a$ ۳) $2a - 2$ ۴) $2a + 2$



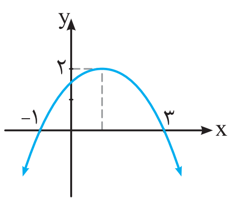
☆۱۷۷. معادلهٔ سهمی مقابل کدام است؟ (مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)

۱) $y = -x^2 - 5x + 4$

۲) $y = -x^2 + 5x + 4$

۳) $y = x^2 - 5x + 4$

۴) $y = x^2 - 3x + 4$



۱۷۸. سهمی مقابل، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$

۳) ۱ ۴) $\frac{3}{4}$

۱۷۹. به ازای کدام مقدار k دو سهمی به معادلات $y = -x^2 + x + k$ و $y = x^2 - 3x + 1$ همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲-

نمودار تابع درجه ۲

☆۱۸۰. به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$، محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۲)

۱) $a < -9$ ۲) $a < -3$

۳) $a > -1$ ۴) $-3 < a < 0$

۱۸۱. به ازای کدام مجموعه مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$، محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟ (سراسری ریاضی- ۹۵)

۱) $m > 2$ ۲) $-1 < m < 2$ ۳) هر مقدار m ۴) هیچ مقدار m

☆۱۸۲. به ازای کدام مجموعه مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$، محور xها را در هر دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۵)

۱) $m > 1$ یا $m < -2$ ۲) $-2 < m < 1$

۳) فقط $m < -2$ ۴) فقط $m > 1$

☆۱۸۳. اگر منحنی به معادلهٔ $y = 2x^2 - 4x + m - 3$، محور xها را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع کند، آن‌گاه مجموعهٔ مقادیر m به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی- ۸۷)

۱) $m > 3$ ۲) $3 < m < 4$ ۳) $3 < m < 5$ ۴) $4 < m < 9$

۱۸۴. منحنی به معادلهٔ $y = (x-1)(x^2 - ax + a)$ محور xها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. مجموعهٔ مقادیر a به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $-4 < a < 0$ ۲) $0 < a < 2$ ۳) $0 < a < 4$ ۴) $a > 4$

۱۸۵. نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + 4x + a - 3$ از طرف بالا بر محور xها مماس شده است، طول نقطهٔ تماس کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور)

۱) ۲- ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

۱۸۶. به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع $y=(m-۲)x^{۲}-۳x+m+۲$ بالای محور xها و مماس بر آن است؟ (سراسری ریاضی)

۱) -۳ ۲) $-\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

☆۱۸۷. اگر تابع درجه دوم $f(x)=(m+۲)x^{۲}+۴x+(m-۱)$ محور xها را در دو نقطهٔ متمایز قطع کند، مقادیر m کدام است؟

۱) $-۱<m<۴$ ۲) $۱<m<۲$ ۳) $-۲<m<۳$ ۴) $-۳<m<۲\ ,\ m\neq -۲$

۱۸۸. به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(۱-m)x^{۲}+x+(m-۲)$ از چهار ناحیهٔ محورهای مختصات گذشته و دارای ماکزیمم است؟ (سراسری تجربی)

۱) $m<۱$ ۲) $m>۲$ ۳) $۱<m<۲$ ۴) $-۱<m<۲$

☆۱۸۹. به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $f(x)=(m-۱)x^{۲}+mx+m-۳$ از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می‌گذرد؟

۱) $m>۲$ ۲) $۱<m<۳$ ۳) $m<۱$ ۴) $۰<m<۱$

۱۹۰. به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x)=(a-۳)x^{۲}+ax-۱$ از ناحیهٔ اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (سراسری ریاضی- ۹۳)

۱) $a\leq ۲$ ۲) $۰<a\leq ۲$ ۳) $۲<a<۳$ ۴) $۰<a<۳$

☆۱۹۱. به ازای کدام مقادیر a، منحنی به معادلهٔ $y=ax^{۲}-(a+۲)x$ از ناحیهٔ دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (سراسری ریاضی- ۸۹)

۱) $a\leq -۲$ ۲) $a>-۲$ ۳) $a>۰$ ۴) $-۲\leq a<۰$

۱۹۲. با کدام مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y=(m+۲)x^{۲}-۲x+۱$ از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می‌گذرد؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۷)

۱) $m<-۲$ ۲) $m<-۱$ ۳) $-۲<m<-۱$ ۴) $-۴<m<-۲$

۱۹۳. به ازای کدام مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y=mx^{۲}+(m-۳)x+m$ فقط از ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $m\in \mathbb{R}$ ۲) $m\in \varnothing$ ۳) $۰<m<۱$ ۴) $۱<m<۲$

۱۹۴. حدود m برای آن‌که نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=mx^{۲}+mx-۱$ همواره در زیر محور xها باشد، کدام است؟

۱) $-۴<m\leq ۰$ ۲) $m<۰$ ۳) $m\leq ۰$ ۴) $m>-۴$

۱۹۵. با کدام مجموعه مقادیر m، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{۲}-mx+m-۲$ همواره بالای محور xها قرار می‌گیرد؟

۱) $\{m:m>۰\}$ ۲) $\{m:m>۲\}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\varnothing$

☆۱۹۶. به ازای کدام مجموعه مقادیر a، هر نقطه از نمودار تابع $f(x)=(a-۱)x^{۲}+۲\sqrt{۲}x+a$ بالای محور xهاست؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۹)

۱) $a<-۱$ ۲) $a>۱$ ۳) $a>۲$ ۴) $۱<a<۲$

۱۹۷. منحنی به معادلهٔ $y=(۲x+۱)(x+۸)$ با خطوط $y=mx$ نقطهٔ مشترکی ندارد. مجموعهٔ مقادیر m چگونه است؟ (سراسری ریاضی- ۸۸)

۱) $۵<m\leq ۱۳$ ۲) $۱۵<m<۲۳$ ۳) $۷<m<۱۵$ ۴) $۹<m<۲۵$

☆۱۹۸. به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(m-۱)x^{۲}+\sqrt{۳}x+m$ همواره در زیر محور xهاست؟ (سراسری ریاضی- ۸۵)

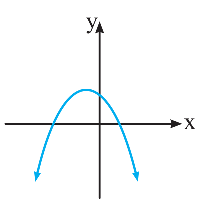
۱) $m<-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}<m<۱$ ۳) $۱<m<\frac{۳}{۲}$ ۴) $m>\frac{۳}{۲}$

۱۹۹. به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y=(m+۲)x^{۲}-۲mx+۱$ همواره بالای محور xها است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۵)

۱) $m>-۲$ ۲) $-۲<m<-۱$ ۳) $-۲<m<۲$ ۴) $-۱<m<۲$

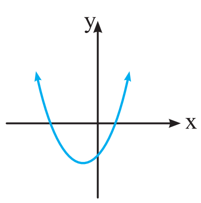
- نمودار تست‌های بعدی، سهمی $y=ax^{۲}+bx+c$ است. با توجه به نمودار داده‌شده به تست‌ها پاسخ دهید.

☆۲۰۰. علامت a و c کدام است؟ (مشابه کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)



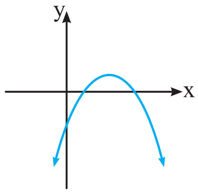
۱) $a,c>۰$
۲) $a,c<۰$
۳) $c<۰\ ,\ a>۰$
۴) $c>۰\ ,\ a<۰$

☆۲۰۱. علامت a و b چگونه است؟ (مشابه کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)



۱) $a,b>۰$
۲) $a,b<۰$
۳) $a>۰\ ,\ b<۰$
۴) $b>۰\ ,\ a<۰$

۲۰۲. علامت b و c چگونه است؟ (مشابه کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)



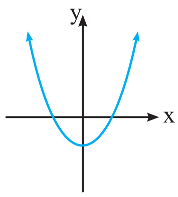
۱) $b,c>0$

۲) $b,c<0$

۳) $c<0\ ,\ b>0$

۴) $c>0\ ,\ b<0$

☆**۲۰۳.** کدام گزینه صحیح است؟



۱) $ac>0\ ,\ b=0$

۲) $ac<0\ ,\ b=0$

۳) $ac>0\ ,\ b>0$

۴) $ac<0\ ,\ b<0$

قسمت پنجم: معادلات گویا و رادیکالی

حل معادلات گویا

☆**۲۰۴.** معادلهٔ $2x+\frac{3}{x}=-1$ چه وضعیتی دارد؟

۱) دو ریشهٔ مثبت دارد. ۲) ریشهٔ حقیقی ندارد. ۳) دو ریشهٔ منفی دارد. ۴) ریشهٔ مضاعف دارد.

☆**۲۰۵.** تعداد جواب‌های معادلهٔ $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{8}{x^2-4}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☆**۲۰۶.** حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $\frac{2x}{x+1}-\frac{3}{x-2}=4$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۲۰۷. حاصل عبارت سمت چپ معادلهٔ $x\left(\frac{3}{x^2+x}-\frac{2}{x-1}\right)=\frac{-2x+1}{x-1}$ به ازای جواب معادله کدام است؟

۱) -3 ۲) -6 ۳) 6 ۴) 3

☆**۲۰۸.** به ازای کدام مقدار مثبت a، معادلهٔ $\frac{x+a}{x}-\frac{x}{x+a}=\frac{4a}{x+a}$ دارای جواب $x=1$ است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۰۹. اگر $x=1$ جواب معادلهٔ $\frac{2x}{x+1}-\frac{a}{x-2}=\frac{-x-7}{x^2-x-2}$ باشد، جواب دیگر معادله کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۳ ۴) فاقد جواب دیگر

★**۲۱۰.** جواب طبیعی معادلهٔ $\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x+1}=-\frac{1}{3}$ در نامعادلهٔ $1\le\frac{x+a}{5}\le 2$ صدق می‌کند. حدود a کدام است؟

۱) $0\le a\le 4$ ۲) $3\le a\le 8$ ۳) $0\le a\le 8$ ۴) $-3\le a\le 1$

۲۱۱. مجموعه جواب معادله‌های $\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}=4$ و $x^2-3x+2=0$ یکسان است. a کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) -12 ۴) -8

★**۲۱۲.** معادلهٔ $\left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)^2+3\left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)+2=0$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) صفر

۲۱۳. به ازای کدام مقدار صحیح a، معادلهٔ $\frac{ax}{x+1}-\frac{2}{x-1}=\frac{a}{x^2-1}$ فقط یک ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -2 ۴) -3

کاربرد معادلات گویا

۲۱۴. در یک مستطیل، نسبت مجموع طول با دو برابر عرض به طول با نسبت طول به عرض آن برابر است. در این مستطیل، طول چند برابر عرض است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

☆**۲۱۵.** عرض یک مستطیل طلایی $\sqrt{۵}+۳$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟

۱) $۱۷+۴\sqrt{۵}$ ۲) $۱۸+۵\sqrt{۵}$ ۳) $۱۹+۷\sqrt{۵}$ ۴) $۲۲+۱۰\sqrt{۵}$

۲۱۶. تیم فوتبال A در ۱۱ بازی ابتدایی خود جمعاً ۲۷ امتیاز کسب کرده است. اگر این تیم در تمام بازی‌های بعدی، امتیاز کامل را کسب کرده باشد و میانگین امتیازهای کل او ۲/۸ باشد، این تیم چند بازی انجام داده است؟ (مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۲۱ کتاب درسی)

۱) ۳۰ ۲) ۲۸ ۳) ۱۹ ۴) ۱۳

☆**۲۱۷.** دو گلولهٔ A و B با سرعت ثابت، فاصلهٔ ۶۰ متری را طی می‌کنند. اگر سرعت گلولهٔ A، ۱۰ متر بر ثانیه بیش‌تر از سرعت گلولهٔ B باشد، آن‌گاه گلولهٔ A، نیم ثانیه زودتر از گلولهٔ B این مسیر را طی می‌کند. سرعت گلولهٔ A چند متر بر ثانیه است؟ (مشابه فعالیت ۲ صفحهٔ ۲۰ کتاب درسی)

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

۲۱۸. فاصلهٔ بین دو شهر واقع در کنار رودخانه‌ای ۴۸ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۷ ساعت است. در صورتی‌که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیش‌تر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد، سرعت حرکت کشتی در جهت حرکت آب کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

☆**۲۱۹.** برای رنگ‌آمیزی نمای یک ساختمان از دو دستگاه A و B استفاده می‌شود. اگر این دو دستگاه با هم کار کنند، این رنگ‌آمیزی ۴ ساعت طول می‌کشد. اگر سرعت کار دستگاه A، دو برابر سرعت کار دستگاه B باشد، با دستگاه B در چند ساعت می‌توان نمای این ساختمان را رنگ‌آمیزی کرد؟ (مشابه مثال صفحهٔ ۲۱ کتاب درسی)

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۷/۵ ۴) ۹

★**۲۲۰.** اگر سه شیر آب A، B و C همزمان باز باشند، یک استخر را در ۱۸ ساعت پر از آب می‌کنند. اگر حجم آبی که از شیر A خارج می‌شود، ۲ برابر حجم آب خارج‌شده از شیر B و حجم آب خارج‌شده از شیر B، سه برابر حجم آب خارج‌شده از شیر C باشد، آن‌گاه این استخر پس از چند ساعت فقط با شیر B پر می‌شود؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۵۴ ۴) ۶۰

حل معادلات رادیکالی

☆**۲۲۱.** جواب معادلهٔ $x-\sqrt{x}=۲$، کدام است؟ (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۹

☆**۲۲۲.** کدام‌یک از معادلات زیر، دارای ریشهٔ حقیقی است؟ (مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

آ) $۲+\sqrt{x-۴}=۰$ ب) $\sqrt{x+۲}+\sqrt{x+۳}=۰$ پ) $\sqrt{۳x-۶}+\sqrt{x^۲-۲x}=۰$

۱) آ ۲) ب ۳) آ و ب ۴) پ

۲۲۳. معادلهٔ $۲x+\sqrt{۲x-۱}=۱$ دارای: ....

۱) یک جواب مضاعف است. ۲) جواب نیست. ۳) دو جواب متمایز است. ۴) یک جواب است.

☆**۲۲۴.** معادلهٔ $۳x-۲+\sqrt{۴x-۳}=۰$، از نظر تعداد جواب‌ها چگونه است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۷)

۱) یک جواب دارد. ۲) دو جواب هم‌علامت ۳) دو جواب با علامت مختلف ۴) جواب ندارد.

۲۲۵. معادلهٔ $x\sqrt{۱-x^۲}+۳\sqrt{۱-x^۲}=۰$، چند جواب دارد؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۲۲۶. معادلهٔ $x\sqrt{x-۲}-x=۰$، چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) دو ریشه ۲) چهار ریشه ۳) سه ریشه ۴) یک ریشه

۲۲۷. معادلهٔ $\sqrt{2-x}+\sqrt{2x-2}=\sqrt{x+\sqrt{x-2}}$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ریشهٔ حقیقی ندارد. ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

★۲۲۸. معادلهٔ $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt[4]{x^3+x-10}=0$ چند جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) فاقد جواب است.

۲۲۹. در معادلهٔ $\sqrt{2+\sqrt{2x-x^3}}=\sqrt{2}$، مجموع ریشه‌ها چقدر است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $-2\sqrt{2}$ ۳) -1 ۴) صفر

☆۲۳۰. به ازای کدام مقدار a، $x=3$ جواب معادلهٔ $2x+\sqrt{3x+a}=10$ می‌باشد؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

☆۲۳۱. اگر $x=4$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $x+a=\sqrt{5x-x^2}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟ (سراسری تجربی- ۸۷)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) جواب دیگر ندارد.

۲۳۲. به ازای کدام مقدار a، $x=-1$ ریشهٔ معادلهٔ $\sqrt{x^2-4x+a}+\sqrt{3x+a}=4$ می‌باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) -3 ۴) -2

☆۲۳۳. حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $\sqrt{x^2+4x+5}=x^2+4x+3$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۴)

۱) -2 ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

★۲۳۴. مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x+1}=1$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $-\frac{5}{2}$ ۴) -3

کاربرد معادلات رادیکالی

☆۲۳۵. طول نقاطی واقع بر محور xها و به فاصلهٔ $3\sqrt{2}$ از نقطهٔ $(-1,3)$ کدام است؟

۱) $5,-1$ ۲) $-5,1$ ۳) $4,-2$ ۴) $2,-4$

☆۲۳۶. فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(m,2m+3)$ و $B(2,-3)$ برابر ۵ است. مقادیر m کدام‌اند؟

۱) $-3,-1$ ۲) $4,-1$ ۳) $-3,2$ ۴) $4,-2$

۲۳۷. طول نقطهٔ M واقع بر محور طول‌ها که از دو نقطهٔ $B(-2,3)$ و $C(4,-1)$ به یک فاصله باشد، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

☆۲۳۸. عرض نقطهٔ M واقع بر محور yها که از دو نقطهٔ $(1,1)$ و $(-3,3)$ به یک فاصله باشد، کدام است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) -4 ۴) -5

۲۳۹. مثلث متساوی‌الساقین ABC با رأس‌های $A(a,-1)$، $B(3,2)$ و $C(2,4)$ و قاعدهٔ BC مفروض است. مقدار a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴/۵ ۳) -6 ۴) $-5/5$

★۲۴۰. نقطهٔ $(a,2a)$ مرکز دایره‌ای گذرنده بر دو نقطهٔ $(2,1)$ و $(-1,4)$ است. شعاع این دایره کدام است؟ (سراسری تجربی)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $3\sqrt{2}$

☆۲۴۱. دایره‌ای از دو نقطهٔ $(0,1)$ و $(3,0)$ گذشته و معادلهٔ یک قطر آن به‌صورت $x-y=2$ است. شعاع این دایره کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۰)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۳

۲۴۲. فاصلهٔ نقطهٔ A به طول مثبت روی خط $y=x+3$ از نقطهٔ $(-1,1)$ برابر ۵ است. عرض نقطهٔ A کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳