

فهرست

(فصل ۴)

معادله‌ها و نامعادله‌ها

۱۸۶	درس ۱: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن
۱۹۴	درس ۲: سهمی
۲۰۶	درس ۳: تعیین علامت
۲۲۲	آزمون
۲۲۴	پاسخ‌نامه تشریحی
۲۴۵	پاسخ‌نامه آزمون

(فصل ۵)

تابع

۲۴۸	درس ۱: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن
۲۵۴	درس ۲: دامنه و برد
۲۵۹	درس ۳: مقدار تابع و نمایش ریاضی تابع
۲۶۵	درس ۴: تابع خطی
۲۷۲	درس ۵: انواع تابع
۲۸۳	درس ۶: رسم نمودار برخی توابع به کمک انتقال
۲۹۴	آزمون
۲۹۶	پاسخ‌نامه تشریحی
۳۱۷	پاسخ‌نامه آزمون

(فصل ۶)

شمارش، بدون شمردن

۳۱۹	درس ۱: شمارش
۳۲۶	درس ۲: جایگشت
۳۳۳	درس ۳: ترکیب
۳۴۱	آزمون
۳۴۳	پاسخ‌نامه تشریحی
۳۵۲	پاسخ‌نامه آزمون

(فصل ۷)

آمار و احتمال

۳۵۴	درس ۱: احتمال یا اندازه‌گیری شانس
۳۷۴	درس ۲: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه
۳۷۷	آزمون
۳۷۹	پاسخ‌نامه تشریحی
۳۹۱	پاسخ‌نامه آزمون

(فصل ۱)

مجموعه، الگو و دنباله

۷	درس ۱: یادآوری مجموعه‌ها
۱۰	درس ۲: مجموعه‌های مهم اعداد - بازه
۱۵	درس ۳: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی
۱۷	درس ۴: مجموعه مرجع و متمم
۲۰	درس ۵: تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه
۲۴	درس ۶: الگوی خطی
۲۷	درس ۷: الگوی درجه دوم
۳۱	درس ۸: دنباله و سایر الگوها
۳۵	درس ۹: دنباله حسابی (تصادد حسابی یا تصاعد عددی)
۴۳	درس ۱۰: دنباله هندسی
۵۲	آزمون
۵۳	پاسخ‌نامه تشریحی
۷۷	پاسخ‌نامه آزمون

(فصل ۲)

مثلثات

۷۹	درس ۱: نسبت‌های مثلثاتی
۹۰	درس ۲: دایره مثلثاتی
۱۰۰	درس ۳: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی
۱۰۸	آزمون
۱۱۰	پاسخ‌نامه تشریحی
۱۲۷	پاسخ‌نامه آزمون

(فصل ۳)

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

۱۲۹	درس ۱: ریشه و توان
۱۳۴	درس ۲: ریشه n ام
۱۴۰	درس ۳: توان‌های گویا
۱۴۳	درس ۴: اتحادها و تجزیه
۱۵۴	درس ۵: عبارت‌های گویا / گویا کردن مخارج‌های گنگ
۱۶۱	آزمون
۱۶۳	پاسخ‌نامه تشریحی
۱۸۴	پاسخ‌نامه آزمون

مجموعه و زنباله الگو (فصل ۱)

(درس ۱)

یادآوری مجموعه‌ها

مجموعه، دسته‌ای از اشیاء است که خوب مشخص شده باشند؛ یعنی دقیقاً معلوم باشد کدام عضوها در مجموعه هستند و کدام عضوها نیستند. پس مثلاً مجموعه «شاعران معروف ایرانی» یا «گل‌های خوشبو» از نظر ریاضی مجموعه نیستند. اما مجموعه اعداد اول یک رقمی یک مجموعه است که آن را به صورت $A = \{2, 3, 5, 7\}$ نشان می‌دهیم.



گاهی اوقات این مجموعه را به صورت نمودار ون شکل مقابل هم نشان می‌دهیم:

A نام مجموعه است. می‌نویسیم $2 \in A$ یعنی ۲ عضو مجموعه A است و $6 \notin A$ یعنی عدد ۶ عضو مجموعه A نیست.

در مجموعه‌ها عضوهای تکراری را یک بار می‌نویسیم و ترتیب اعضا اهمیتی ندارد؛ پس مثلاً $\{1, 1, 2, 2\}$ همان $\{2, 1\}$ است.

اگر تمام عضوهای مجموعه A در مجموعه B هم باشند، می‌نویسیم $A \subseteq B$ و می‌خوانیم « A زیرمجموعه B است». مثلاً $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$. دقت کنید که $\{2, 3, 5\} \not\subseteq \{1, 2, 3\}$ ، چون عضو ۵ در مجموعه اول هست اما در دومی نیست.

مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد را $\emptyset$ یا $\{\}$ یا تهی می‌نامیم. مثلاً مجموعه اعداد اول دورقمی که یکان آن‌ها ۵ باشد، تهی است چون چنین عددی وجود ندارد. حواستان هست که $\{\emptyset\}$ تهی نیست، یک مجموعه (عضوی است!

تست اگر $A = \{1, 2, \{\}\}$ و $B = \{\}$ چندتا از روابط $B \subseteq A$ ، $B \in A$ ، $\emptyset \subseteq B$ ، $A \subseteq A$ درست هستند؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ گزینه: خوب گوش کنید... $A \subseteq A$ همواره درست است؛ هر مجموعه زیرمجموعه خودش است.

$\emptyset \subseteq B$ نیز همیشه درست است؛ $\emptyset$ زیرمجموعه تمام مجموعه‌ها است.

$B \in A$ درست است؛ چون $B = \{\}$ را به صورت عضو در مجموعه A می‌بینیم:

$$A = \{1, 2, \{\}\}$$

این B است.

$$A = \{1, 2, \{\}\}$$

عضو B در A هم هست.

$B \subseteq A$ نیز درست است؛ چون عضو B یعنی عدد ۱، در A هم هست:

و بالاخره رابطه $2 \in A$ درست است؛ چون عضو ۲ را در A داریم، پس ۵ رابطه درست‌اند.

تا این‌جا هستید ببینید که $\emptyset \in B$ ، $\{\} \in B$ و $2 \in B$ هیچ کدام درست نیستند.

اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

① اشتراک A و B مجموعه‌ای است که در هر دوی آن‌ها باشند. اشتراک دو مجموعه A و B را با $A \cap B$ نشان می‌دادیم. پس مثلاً:

$$\{1, 2, 3\} \cap \{0, 1, 3, 4, 5\} = \{1, 3\}$$

$$\{1, 2, 3\} \cap \{4, 5, 6\} = \emptyset$$

$$A \cap A = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

در ذهن داشته باشید که:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

این را هم حتماً به یاد دارید:

یعنی اگر A زیرمجموعه B باشد، اشتراکشان می‌شود A .

② اگر A و B عضو مشترکی نداشته باشند، یعنی $A \cap B = \emptyset$ ، می‌گوییم A و B جدا از هم یا ناسازگارند.

اجتماع A و B مجموعه‌ای است که در A یا در B یا در هر دوی آن‌ها باشند.

$$\{1, 2, 3\} \cup \{0, 2, 5\} = \{0, 1, 2, 3, 5\} \quad (\text{عضو تکراری را یک بار می‌نویسیم})$$

$$\{2, 4\} \cup \{-1, 3\} = \{-1, 2, 3, 4\}$$

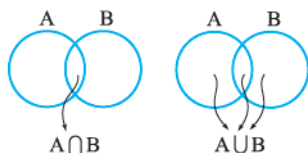
$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cup A = A$$

لازم به تأکید هست که:

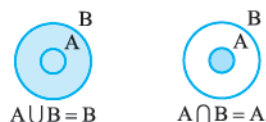
$$A \cup B = B$$

و هم‌چنین اگر $A \subseteq B$ باشد، داریم:

نمودار ون را ببینید:



در حالتی که $A \subseteq B$ است، نمودارهای اجتماع و اشتراک را ببینید:

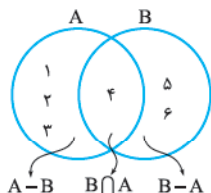


تفاضل دو مجموعه A و B به صورت $A - B$ یعنی مجموعه‌ی عضوایی از A که در B نیستند. از آن طرف $B - A$ یعنی مجموعه‌ی عضوایی از B که در A نیستند.

پس مثلاً با دو مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{4, 5, 6\}$ داریم:

$$B - A = \{4, 5, 6\} - \{1, 2, 3, 4\} = \{5, 6\}$$

$$A - B = \{1, 2, 3, 4\} - \{4, 5, 6\} = \{1, 2, 3\}$$



نمودار ون خیلی خوب‌تر است:

موافقتی که $A - B$ و $B - A$ مساوی نیستند، مگر این‌که خود A و B مساوی باشند.

در مورد این‌ها نظرتان چیست؟

$$A - A = \emptyset, A - \emptyset = A$$

$$\emptyset - A = \emptyset$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$$

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A - B = A, B - A = B$$

اگر $A \subseteq B$ باشد، $A - B$ می‌شود $\emptyset$. به زبان ریاضی:

اگر A و B اشتراک نداشته باشند، $A - B$ می‌شود A . این‌طوری:

تست کدام با بقیه فرق دارد؟

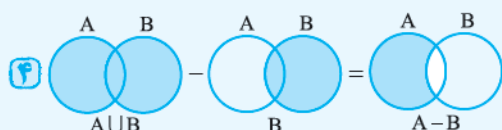
$$A - B \quad (1)$$

$$A - (A \cap B) \quad (2)$$

$$(A \cup B) - A \quad (3)$$

$$(A \cup B) - B \quad (4)$$

پاسخ گزینه ۳ نمودار ون را برای ۲ و ۴ ببینید:



پس ۱، ۲ و ۴ همگی $A - B$ هستند، اما ۳ فرق دارد:

$$(4) \quad A \cup B - A = (A \cup B) - A = B - A$$

تست کدام نادرست است؟

$$A - B \subseteq A \quad (1)$$

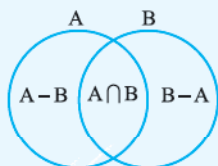
$$A - B \subseteq B - A \quad (2)$$

$$A \subseteq A \cup B \quad (3)$$

$$A \cap B \subseteq B \quad (4)$$

پاسخ گزینه ۲ یک بار دیگر نمودار ون را ببینید:

داریم:



$$(A - B) \subseteq A, (A \cap B) \subseteq A$$

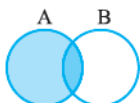
$$A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$$

و البته هر سه مجموعه $A - B$ ، $A \cap B$ و $B - A$ زیرمجموعه $A \cup B$ هستند.

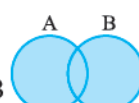
با نگاهی به نمودار ون، درستی رابطه‌های زیر را تأیید کنید.

$$A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$$

$$(A \cap B) \cup (A - B) = A$$



$$(A - B) \cup B = A \cup B$$





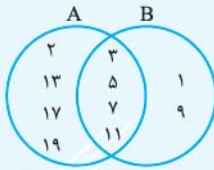
تست اگر A مجموعه اعداد اول کم‌تر از ۲۰ و B مجموعه اعداد فرد کم‌تر از ۱۲ باشد، $(A - B) \cup (B - A)$ چندعضوی است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

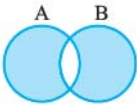
۴ (۱)



پاسخ گزینه در A عضوهای ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷ و ۱۹ و در B اعضای ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ و ۱۱ را داریم.

نمودار را ببینید:

پس $A - B$ چهار عضو و $B - A$ دو عضو و اجتماع آن‌ها ۶ عضو دارد.



$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$ همان $(A - B) \cup (B - A)$ است. ببینید: $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

یک مثال فانتزی هم از ترکیب اجتماع و اشتراک و تفاضل می‌بینیم:

تست اگر $A_k = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, (-1)^k \leq x \leq k\}$ ، آن‌گاه $(A_7 \cup A_3) - (A_7 \cap A_3)$ چند عضو دارد؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ گزینه اولین کار نوشتن A_7 و A_3 است. باید به جای k اعداد ۱، ۲ و ۳ را بگذاریم:

$$A_1 = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x \leq 1\} = \{-1, 0, 1\}$$

$$A_3 = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x \leq 3\} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$A_7 \cap A_3 = \{-1, 0, 1\} \cap \{-1, 0, 1, 2, 3\} = \{-1, 0, 1\}$$

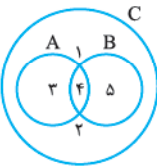
$$A_7 \cup A_3 = \{-1, 0, 1, 2, 3\} \cup \{-1, 0, 1, 2, 3\} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$\{-1, 0, 1, 2, 3\} - \{-1, 0, 1\} = \{2, 3\}$$

و در نتیجه تفاضل می‌شود:

که دو عضو دارد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



$$A \subseteq C, 2 \in (A \cup B), 4 \in (A \cup B), 3 \subseteq A$$

۱- با توجه به نمودار مقابل، چندتا از عبارتهای مقابل درست نیست؟

۱ (۲)

صفر (۱)

۲ (۴)

۲ (۳)

۲- در مجموعه $A = \{\{\}, \{\{\}\}\}$ کدام گزینه نادرست است؟

$$\{\{\}\} \subseteq A \quad (۴)$$

$$\{\{\}\} \in A \quad (۳)$$

$$\{\} \in A \quad (۲)$$

$$\{\} \subseteq A \quad (۱)$$

۳- اگر $A = \{2\}$ ، $B = \{2, \{2\}\}$ و $C = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$ ، کدام رابطه نادرست است؟

$$B \subseteq C \quad (۴)$$

$$A \subseteq B \quad (۳)$$

$$A \subset B \quad (۲)$$

$$B \subset C \quad (۱)$$

۴- اگر $A = \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ ، $B = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$ و $C = \{1, 2, 3\}$ باشد، کدام رابطه درست است؟

$$A - B = \{C\} \quad (۴)$$

$$B - C = \{1, 2\} \quad (۳)$$

$$B - C = \emptyset \quad (۲)$$

$$A - B = C \quad (۱)$$

۵- اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ، مجموعه $(A \cup B) - (A \cap B)$ چند عضو دارد؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۶- مجموعه‌های $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ ، $B = \{1, 5, 7, 3, 9\}$ و $C = \{1, 7, 8, 10, 11\}$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه نادرست است؟

$$(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C \quad (۲)$$

$$n((A \cup B) - C) = 7 \quad (۱)$$

$$n(A \cap B) = n(A \cap C) \quad (۴)$$

$$n(C \cup \emptyset) = n(B \cap B) \quad (۳)$$

۷- با توجه به شکل مقابل، اجتماع دو مجموعه $A - (A - B)$ و $B - (B - A)$ چند عضو دارد؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۸- اگر $A = \{2, 3, 6, 7, 8\}$ و $B = \{2, 4, 5, 6\}$ باشند، مجموعه $(A \cup B) - [A - (A \cap B)]$ چند عضو دارد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۹- مجموعه $(\mathbb{Z} - \mathbb{N}) - (\mathbb{Z} - \mathbb{W})$ چندعضوی است؟

بی‌شمار (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۱۰- اگر A مجموعه اعداد دورقمی و $B = \{7k : k \in A\}$ باشد، آن‌گاه مجموعه $A \cap B$ چند عضو دارد؟

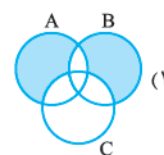
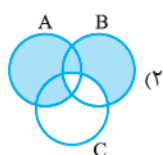
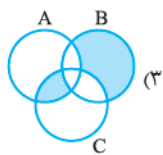
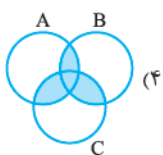
۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۶ (۱)

۱۱- نمایش هندسی مجموعه $(A-B) \cup (B-C)$ کدام است؟



۱۲- قسمت رنگی شکل مقابل، نمودار ون کدام مجموعه است؟

(۱) $A - (B \cap C)$

(۳) $A \cup (B \cap C)$

(۲) $(A \cap B) \cup C$

(۴) $(A \cup B) \cap C$

۱۳- اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، حاصل $A - (B - (A \cap B))$ کدام مجموعه است؟

(۱) A

(۲) B

(۳) $A \cap B$

(۴) $A \cup B$

۱۴- اگر A ، B و C سه مجموعه غیر تهی به طوری که $A \subset B$ باشد، آن گاه مجموعه $(A \cap (B - C)) - (A \cap B \cap C)$ کدام است؟

(۱) $A - C$

(۲) $A \cap C$

(۳) A

(۴) B

۱۵- اگر $A \cup (B - A) = B$ باشد، آن گاه:

(۱) $A \subseteq B$

(۲) $B \subseteq A$

(۳) $A = \emptyset$

(۴) $B = \emptyset$

۱۶- اگر $A \cap B = \emptyset$ و $A \cap C = \emptyset$ ، آن گاه کدام نتیجه گیری درست است؟

(۱) $B \cap C = \emptyset$

(۲) $B \cap C \neq \emptyset$

(۳) $A \cap (B \cup C) = \emptyset$

(۴) $A \cap (B - C) \neq \emptyset$

۱۷- اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq -n, 2^m \leq n\}$ باشد، آن گاه مجموعه $A_4 \cap A_7$ چند زیر مجموعه دارد؟

(۱) ۸

(۲) ۱۶

(۳) ۳۲

(۴) ۳۶

درس ۲

مجموعه های مهم اعداد - بازه

این مجموعه ها را از سال نهم می شناسید:

نام	نماد	عضوها	توضیح
اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$	$1, 2, 3, \dots$	$N \subseteq W$ است. در W علاوه بر اعداد طبیعی، صفر را داریم. $N \subseteq W \subseteq Z$ است. Z شامل قرینه اعداد طبیعی هم هست.
اعداد حسابی	$\mathbb{W}$	$0, 1, 2, 3, \dots$	
اعداد صحیح	$\mathbb{Z}$	$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$	
اعداد گویا	$\mathbb{Q}$	$\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$	$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q$ است. اعداد کسری مثل $\frac{2}{3}$ و $-\frac{1}{5}$ و ... علاوه بر اعداد صحیح، در Q هستند.
اعداد گنگ	Q^c	اعدادی که نمایش کسری ندارند.	اعدادی مانند $\sqrt{2}$ و π ، نمایش کسری ندارند.
اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$	کل اعداد گویا و گنگ در کنار هم	کل نقاط محور اعداد حقیقی را دارد.

تست عدد $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{8}}$ عضو چندتا از مجموعه های Q ، Q^c ، $\mathbb{R}$ است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

$$\frac{\sqrt{49 \times 2}}{\sqrt{4 \times 2}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{4}} = \frac{7}{2}$$

پاسخ گزینه ۲: به جای ۹۸ می نویسیم 49×2 و به جای ۸ هم 4×2 می گذاریم. پس داریم: پس این عدد $7/2$ است. در Z و Q^c نیست و در $\mathbb{R}$ و Q هست. یعنی در دوتا از مجموعه ها.

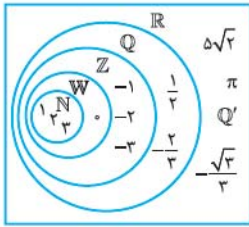
در اعداد گنگ، تعداد رقم های اعشاری بی شمار است و دوره تناوب ندارد.

مثلاً $0.101001000100001000001\dots$ نیز گنگ است. جذر اعدادی که مربع کامل نیستند، هم گنگ است؛ π نیز گنگ

است. مجموعه اعداد گنگ را به صورت Q^c یا $\bar{Q}$ هم نشان می دهیم. این خاصیت ها را ببینید:

$$Q - Q' = Q, Q' \cap Q = \emptyset, \mathbb{R} - Q = Q', Q' - Q = Q'$$





برای نمایش اعداد $\sqrt{k}$ روی محور از رابطه فیثاغورس استفاده می‌شود، مثلاً نمایش $\sqrt{5}$ روی محور را ببینید:
 $OA = 2$, $AB = 1$
 $OB^2 = OA^2 + AB^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \Rightarrow OB = \sqrt{5} = OM$
 این مجموعه‌ها را در نمودار ون ببینید:

تست با کدام مجموعه اشتراک ندارد؟

- (۱) $\{x | x^2 = \frac{4}{9}\}$ (۲) $\{x | -1 < x < 0\}$ (۳) $\{x | x^2 = 3\}$ (۴) $\{x | x \notin \mathbb{Z}\}$

پاسخ گزینه: اعضای (۱) اعداد $\pm \frac{2}{3}$ هستند که مربع آن‌ها می‌شود $\frac{4}{9}$ و با $\mathbb{Q}$ اشتراک دارد؛ چون $\pm \frac{2}{3}$ در $\mathbb{Q}$ هستند. در (۲) اعداد گویای بین -1 و 0 و صفر، مثلاً $-\frac{1}{2}$ ، با $\mathbb{Q}$ مشترک‌اند. در (۳) هم اعداد غیر صحیح مانند $-\frac{1}{2}$ با $\mathbb{Q}$ مشترک‌اند. اما در (۴) اعدادی که $x^2 = 3$ باشد $\pm\sqrt{3}$ هستند که در $\mathbb{Q}$ قرار نمی‌گیرند؛ پس با $\mathbb{Q}$ اشتراک ندارد.

تست اگر $\{x | x \in A, (x+3)(2x-1)=0\}$ برابر $\{\frac{1}{2}\}$ باشد، A می‌تواند چندان از مجموعه‌های مقابل باشد؟ $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{W}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}-\mathbb{Z}, \mathbb{Q}-\mathbb{N}, \mathbb{Q}'$

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ گزینه: $(x+3)(2x-1)=0$ یعنی مقدار x برابر $-\frac{1}{2}$ یا $\frac{1}{2}$ است. اما مجموعه فقط برابر $\{\frac{1}{2}\}$ شده، پس $-\frac{1}{2}$ در A نیست و $\frac{1}{2}$ در آن هست. $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}'$ عدد $\frac{1}{2}$ را ندارند و در $\mathbb{Q}-\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}-\mathbb{W}$ عدد $-\frac{1}{2}$ هم حضور دارد؛ اما $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ مناسب است؛ چون $-\frac{1}{2}$ را ندارد و $\frac{1}{2}$ را دارد، پس فقط یکی از مجموعه‌ها مناسب است.

بازه‌ها

بازه‌ها، زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی هستند که همه اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص را نشان می‌دهند. اول انواع بازه‌ها را در جدول روبه‌رو می‌بینیم:
 دقت کنید که در بازه‌ها باید $a < b$ باشد.
 راستی بازه باز (a, a) در واقع $\emptyset$ است و بازه بسته $[a, a]$ مجموعه تک‌عضوی $\{a\}$ است.

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	نوع	بازه
	$\{x \in \mathbb{R} a < x < b\}$	باز	(a, b)
	$\{x \in \mathbb{R} a \leq x < b\}$	نیم‌باز	$[a, b)$
	$\{x \in \mathbb{R} a < x \leq b\}$	نیم‌باز	$(a, b]$
	$\{x \in \mathbb{R} a \leq x \leq b\}$	بسته	$[a, b]$
	$\{x \in \mathbb{R} x > a\}$	باز	$(a, +\infty)$
	$\{x \in \mathbb{R} x \geq a\}$	نیم‌باز	$[a, +\infty)$
	$\{x \in \mathbb{R} x < b\}$	باز	$(-\infty, b)$
	$\{x \in \mathbb{R} x \leq b\}$	نیم‌باز	$(-\infty, b]$
	$\mathbb{R}$	باز	$(-\infty, +\infty)$

تست در اعداد $1, 1/1, \sqrt{10}, \sqrt{2}, \frac{3}{4}$ و چندان عضو بازه $(1, 3]$ هستند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ گزینه: بازه از طرف ۱ باز است؛ پس شرط آن $1 < x \leq 3$ است و در نتیجه ۱ عضو آن نیست اما ۳ عضو بازه هست. $\sqrt{2}, \frac{3}{4}$ و $1/1$ نیز در این فاصله هستند اما $\sqrt{10}$ عددی بیشتر از ۳ است و در بازه قرار ندارد.
 بنابراین اعداد $1, 1/1, \sqrt{2}, \frac{3}{4}$ و ۳ در بازه هستند که می‌شود ۴ تا.

$$\{\sqrt{2}, \frac{3}{4}\} \cdot \emptyset \cdot (0, 1) \cdot (-1, 2) \cdot \{1, 2\}$$

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

تست چندتا از مجموعه‌های مقابل، زیرمجموعه $[-1, 2]$ هستند؟

پاسخ گزینه ۱ این بازه به شکل نیم‌باز $(-\frac{1}{2}, 2)$ است، پس عدد ۲ را ندارد و $\{1, 2\}$ و $(-1, 2)$ زیرمجموعه آن نیستند، اما $\sqrt{2}$ و $\frac{3}{4}$ را دارد و کل بازه $(0, 1)$ در آن هست. هم زیرمجموعه تمام مجموعه‌هاست، پس از بین مجموعه‌های داده شده ۳ تای آن‌ها قبول‌اند.

برای محاسبه اجتماع، اشتراک و تفاضل بازه‌ها، از نمایش آن‌ها روی محور استفاده می‌شود. مثال زیر را ببینید:

تست در کدام گزینه اعداد صحیح کم‌تری هست؟

$$[-1, 4] - \{1, 2\} \quad (۴)$$

$$(-2, 6] \cap [-6, 1) \quad (۳)$$

$$[0, 4] - (2, 4) \quad (۲)$$

$$[0, 1) \cup [1, 2] \quad (۱)$$

۱

$$[0, 1) \cup [1, 2] = [0, 2] \xrightarrow{\text{اعداد صحیح}} 0, 1, 2 \Rightarrow \text{تا } ۳$$

پاسخ گزینه ۱

۲

$$[0, 4] - (2, 4) = [0, 2] \cup \{4\} \xrightarrow{\mathbb{Z} \text{ در }} 0, 1, 2, 4 \Rightarrow \text{تا } ۴$$

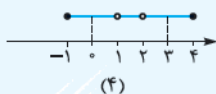
۳

$$(-2, 6] \cap [-6, 1) = (-2, 1) \xrightarrow{\text{عضو } \mathbb{Z}} -1, 0 \Rightarrow \text{تا } ۲$$

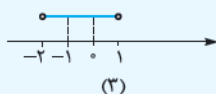
۴

$$[-1, 4] - \{1, 2\} = [-1, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 4] \xrightarrow{\text{اعداد صحیح}} -1, 0, 3, 4 \Rightarrow \text{تا } ۴$$

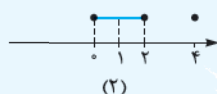
جواب آخر گزینه‌ها را هم ببینید:



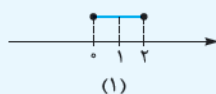
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

تست اگر $(x-1, 3-2x) \cup \{2\}$ بازه‌ای نیم‌باز باشد، چند مقدار برای x وجود دارد؟

بی‌شمار (۴)

هیچ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ گزینه ۱ در چه صورت اجتماع بازه باز و مجموعه تک‌عضوی، نیم‌باز می‌شود؟ فقط دو امکان وجود دارد:

$$۱ \quad (a, b) \cup \{a\} = [a, b)$$

$$۲ \quad (a, b) \cup \{b\} = (a, b]$$

$$x-1=2 \Rightarrow x=3$$

$$3-2x=2 \Rightarrow 1=2x \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

پس باید عدد ۲، مساوی عدد اول یا آخر بازه باشد:

$$x=3 \Rightarrow (x-1, 3-2x) = (2, -3) \Rightarrow \text{غقق}$$

حالا بازه را ببینید:

$$x=\frac{1}{2} \Rightarrow (x-1, 3-2x) = (-\frac{1}{2}, 2) \Rightarrow \text{قق}$$

پس فقط یک مقدار برای x داریم.

حواستان هست که همیشه باید در بازه (a, b) داشته باشیم $a < b$. پس بازه به شکل $(2, -3)$ بی‌معنی است.

$$(1, 3) \cup \{3\} \cdot [1, 3] - \{1\} \cdot (-7, 3] - [-10, 1] \cdot [0, 3] \cap (1, 7)$$

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

تست در بین مجموعه‌های مقابل، چند بازه مختلف وجود دارد؟

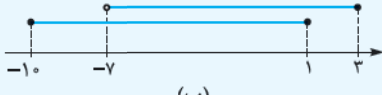
پاسخ گزینه ۱ هر ۴ بازه یکسان‌اند!



(ت)



(پ)



(ب)



(الف)

$$(1, 3) \cup \{3\} = (1, 3]$$

$$[1, 3] - \{1\} = (1, 3]$$

$$(-7, 3] - [-10, 1] = (-7, 3]$$

$$[0, 3] \cap (1, 7) = (1, 3]$$

$[a, b] \cap [c, d] = [c, d]$ عدد کمتر بین b و d ، عدد بیشتر بین a و c

اگر فرمول دوست دارید، این‌ها هم هست:

$[a, b] \cup [c, d] = [c, d]$ عدد بیشتر بین b و d ، عدد کمتر بین a و c

به شرطی که بازه‌ها اشتراک داشته باشند.

تست اگر $A = (2, 2m+1)$ ، $B = [n-2, 6]$ و اجتماع آن‌ها $A \cup B = [-1, 6]$ باشد، کدام نمی‌تواند باشد؟

$\frac{7}{4}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

۱ (۲)

$\frac{5}{3}$ (۱)

پاسخ گزینه ۱ اجتماع دو بازه از طرف چپ بسته است، پس حتماً اجتماع از اعضای بازه B شروع شده است و $n-2 = -1$ است، پس $n = 1$.



$$2 < 3m+1 \leq 6$$

به خاطر شرط بازه A

$$1 < 3m < 5 \Rightarrow \frac{1}{3} < m \leq \frac{5}{3}$$

چون n برابر 1 بود، پس $m \times n$ عددی بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{5}{3}$ است و خود $\frac{5}{3}$ هم می تواند باشد، اما $\frac{7}{4}$ نیست. ($\frac{5}{3}$ از $\frac{7}{4}$ بیشتر است).

هم چنین در انتهای بازه، اجتماع عدد 6 به صورت باز است، پس انتهای بازه A یعنی $3m+1$ از 6 بیشتر نیست.

تست کدام یک بازه است؟

(1) $\{0\} - \{5, 1\}$

(2) $\{1, 2\} - \{2, 3\}$

(3) $(1, 2) - [-2, 2]$

(4) $\{4, 7\} - [-1, 4]$

پاسخ گزینه 2

(1) اجتماع دو بازه است:

(2) اجتماع 3 بازه است:

(3) یک بازه و یک مجموعه تک عضوی است (در واقع 2 تا بازه).

اما (4) یک بازه است:



$(-1, 4] - \{7, 4\} = (-1, 4)$

بعضی وقت ها سروته بازه برحسب یک متغیر هستند. کار سختی نداریم، فقط باید خودمان بازه ها را مشخص کنیم.

تست اگر A_i بازه $((-1)^i i, i^2)$ باشد، حاصل $(A_1 \cup A_3) - (A_2 \cap A_4)$ شامل چند عدد صحیح است؟

(1) 9

(2) 10

(3) 11

(4) 12

پاسخ گزینه 2

$i=1 \Rightarrow A_1 = ((-1)^1 1, 1) = (-1, 1)$

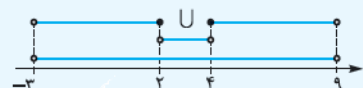
$i=2 \Rightarrow A_2 = ((-1)^2 2, 4) = (2, 4)$

$i=3 \Rightarrow A_3 = ((-1)^3 3, 9) = (-3, 9)$

$(A_1 \cup A_3) - (A_2 \cap A_4) = (-3, 9) - (2, 4) = (-3, 2] \cup [4, 9)$

پس $A_1 \cup A_3 = (-3, 9)$ و $A_2 \cap A_4 = (2, 4)$ و بنابراین:

به شکل هم توجه کنید:



در $(-3, 2]$ اعداد صحیح ± 2 و ± 1 و صفر را داریم (پنج عدد صحیح) و در $[4, 9)$ اعداد

صحیح 4، 5، 6، 7، 8 را داریم (پنج عدد صحیح) یعنی روی هم 10 عضو صحیح دارد.

پرسش های چهارگزینه ای

(کتاب درسی)

۱۸- در میان اعداد $\sqrt{2}$ ، $1/4142$ ، $1/414$ ، $1/41$ و $1/4$ به ترتیب چند عدد گویا و چند عدد گنگ هست؟

(1) 4، 1

(2) 3، 2

(3) 4، 1

(4) 3، 2

(کتاب درسی)

۱۹- کدام رابطه درست است؟

(1) $W \subseteq Q \subseteq Z \subseteq R$

(2) $N \subseteq W \subseteq Q \subseteq R$

(3) $N \subseteq Z \subseteq W \subseteq Q$

(4) $N \subseteq Z \subseteq Q' \subseteq R$

۲۰- کدام مجموعه تهی نیست؟

(1) $W - Z$

(2) $N \cap Q'$

(3) $\{x \in N \mid -2 \leq x \leq 2\}$

(4) $\{x \in Z \mid 2 < x < 3\}$

۲۱- چندتا از تساوی های مقابل نادرست است؟
 $Z \cup Q = R$ ، $W \cap Q = N$ ، $W - Z = Q - Q'$ ، $Z \cap W = N$

(1) 1

(2) 2

(3) 3

(4) 4

۲۲- کدام گزینه نادرست است؟

(1) $Q' - Q \subseteq Q'$

(2) $Q \cap Q' \subseteq Q'$

(3) $Q - Q' \not\subseteq Q'$

(4) $Q \cup Q' \subseteq Q$

(کتاب درسی)

(1) 1

(2) 3

(3) 2

(4) 4

(کتاب درسی)

۲۴- اگر $A = (-\frac{7}{3}, \sqrt{6})$ و $B = (-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}]$ ، آن گاه در $A - B$ چند عدد صحیح وجود دارد؟

(1) 1

(2) 2

(3) 3

(4) صفر

(کتاب درسی)

۲۵- کدام بازه، بسته است؟

(1) $(1, 2) - (1, 3)$

(2) $(1, +\infty) \cup (-\infty, 2)$

(3) $[1, 3) - (2, 3)$

(4) $(-\infty, 2) \cap (-3, +\infty)$

۲۶- حاصل کدام گزینه یک بازه نیست؟

- (۱) $(-۲, ۲) \cup (-۳, ۱)$ (۲) $(-۴, -۲) - (-۳, -۲)$ (۳) $(۱, ۵) - (۳, ۴)$ (۴) $(۱, ۵) \cap (۳, ۷)$

۲۷- اشتراک دو مجموعه $[-۵, ۴]$ و $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$ چندعضوی است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) ۵

۲۸- حاصل $(-۲, ۳) \cup [(\frac{۴}{۳}, ۵) \cap (۳, ۱۰)]$ کدام است؟

- (۱) $(-۲, ۱۰)$ (۲) $(-۲, ۵)$ (۳) $(-۲, ۵) - \{۳\}$ (۴) $[-۲, ۵)$

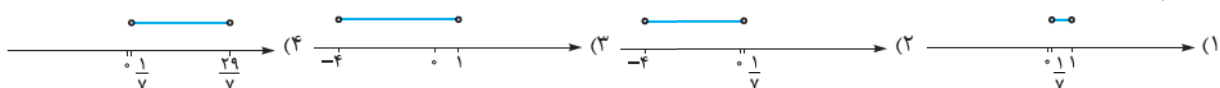
۲۹- اگر $A = (-۳, ۱]$ ، $B = (۰, ۴)$ و $C = [-۲, ۲]$ ، آن گاه $(A \cup C) - B$ دارای چند عضو صحیح است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

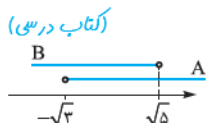
۳۰- اگر $A = \{x | 1 < \frac{2x+1}{3} \leq 5, x \in \mathbb{Q}\}$ ، $B = \{x | 1 < \frac{x+5}{y} < 3, x \in \mathbb{N}\}$ و $C = (-۲, ۸) - (-۳, ۴)$ ، مجموعه $A \cap B$ چند عضو مشترک با مجموعه C دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۱- اگر $(b, ۲) \cup (۱, a) = (-۲, \frac{۱۵}{y})$ باشد، نمایش مجموعه $(a-۲, b+۳) \cap (b-۲, a+۲)$ روی محور اعداد حقیقی به کدام صورت است؟



۳۲- اگر $C = (-۲, ۲]$ و بازه‌های A و B به شکل زیر روی محور نشان داده شوند، حاصل $(A \cap B) - C$ چگونه است؟



- (۱) $\emptyset$ (۲) شامل عدد صحیح نیست. (۳) فقط یک عدد صحیح دارد. (۴) فقط دو عدد صحیح دارد.

۳۳- اگر $[m+۲, +\infty) \cup (-\infty, 2m-1] = \mathbb{R}$ ، حدود m کدام است؟

- (۱) $m \leq ۱$ (۲) $m \geq ۱$ (۳) $m \leq ۳$ (۴) $m \geq ۳$

۳۴- اگر عدد حقیقی x در بازه $[2x-1, 3x+2]$ قرار گیرد، چند مقدار صحیح برای آن وجود دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۵- اگر $A = (b-1, 2b+1)$ و $2 \notin A$ نباشد، محدوده قابل قبول برای b کدام بازه است؟

- (۱) $(۲, ۴)$ (۲) $[۲, ۴)$ (۳) $[۳, ۴)$ (۴) $(۳, ۴)$

۳۶- اجتماع بازه‌های $B = (a, ۵)$ و $A = (-۲, b)$ برابر $(-۳, ۶)$ است. کدام نتیجه‌گیری درست است؟

- (۱) $ab = -۱۸$ (۲) $ab = ۱۸$ (۳) $ab = -۱۵$ (۴) $ab = ۱۵$

۳۷- اگر $\{a\} = (-\infty, m-۲] \cap [2m+1, +\infty)$ ، مقدار $a+m$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۵ (۴) -۸

۳۸- اگر $(a+b, -1, 2] \cap (a, b) = (a+1, a+3)$ ، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) -۲

۳۹- اگر n عددی طبیعی و دو مجموعه $A = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ و $B = (n-۳, n+1)$ دارای اشتراک ناتهی باشند، جمع مقادیر n کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) ۱۵

۴۰- اگر هیچ یک از مجموعه‌های $A \cap (-1, 2)$ و $A - (-1, 2)$ تهی نباشند، کدام بازه به عنوان A مورد قبول است؟

- (۱) $(۰, ۳)$ (۲) $(۰, ۲)$ (۳) $(-۱, ۱)$ (۴) $(۲, ۳)$

۴۱- به ازای چند مقدار صحیح m ، بازه $(۱۰, m)$ شامل دقیقاً سه عدد مضرب ۴ است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۲- اگر $\emptyset = (-\infty, ۴] \cap (۳-a, +\infty)$ ، بازه $(-۱, a+۵)$ حداکثر شامل چند عدد طبیعی است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۴۳- اگر $(-۲, ۲) \subseteq (۴a-۲, a+۱)$ ، عدد $\frac{۵}{y}a+1$ حتماً متعلق به کدام بازه است؟

- (۱) $(۰, ۳)$ (۲) $[۱, ۴]$ (۳) $[-۱, ۲]$ (۴) $[۰, ۲]$

۴۴- اگر $-۱ < a < ۰$ باشد، مجموعه $(\frac{1}{a}, -a) \cap (a, -\frac{1}{a})$ برابر با کدام است؟

- (۱) $(\frac{1}{a}, -\frac{1}{a})$ (۲) $(a, -a)$ (۳) $(a, -\frac{1}{a})$ (۴) $(-a, -\frac{1}{a})$



۴۵- اگر $[-2, 4] \cap [a+2, 5] = [3a-1, 4]$ ، کدام یک از اعداد زیر عضو بازه $(a-2, a)$ است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) ۴

۴۶- به ازای چند n طبیعی، $(\frac{2}{n+1}, \frac{5}{2n+1})$ نمایش یک بازه نیست؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۷- اگر $A_i = (-i, i)$ ، حاصل $(A_1 \cup A_2) \cap A_3$ کدام است؟

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-2, 2)$ (۳) $(-3, 3)$ (۴) $(-1, 2)$

۴۸- اگر $A_n = (-n, 1]$ ، مجموعه $A_4 - A_1$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۹- اگر $A_i = [-i, \frac{9-i}{4}]$ و $i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ، آن گاه مجموعه $(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7)$ به کدام صورت است؟

- (۱) $(-2, -1) \cup (1, 2)$ (۲) $[-2, -1] \cup [1, 2]$ (۳) $[-1, 1]$ (۴) $\emptyset$

۵۰- اگر n عدد طبیعی و A_n بازه $((-1)^n n, 2n)$ باشد، چند عدد صحیح به $\bigcup_{n=1}^4 A_n$ تعلق دارد؟ $(\bigcup_{n=1}^4 A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۵۱- اگر $A_n = [n-1, n+1]$ باشد، آن گاه مجموعه $\bigcup_{n=1}^4 A_n - \bigcap_{n=1}^4 A_n$ با کدام مجموعه برابر است؟

- (۱) $\{x: 1 \leq x \leq 5\}$ (۲) $\{x: 0 \leq x \leq 5\}$ (۳) $\{x: 0 \leq x \leq 5, x \neq 2\}$ (۴) $\{x: 1 \leq x \leq 5, x \neq 2\}$

درس ۳



مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

تعداد اعضای مجموعه A را با $n(A)$ نشان می‌دهیم.

اگر $n(A) = 0$ باشد، A تهی است.

اگر $n(A) = k$ باشد، مجموعه A را متناهی (k عضوی) می‌نامیم. گاهی به جای «متناهی» می‌گوییم «پایان».

اگر $n(A)$ از هر عددی بزرگ‌تر باشد، آن را نامتناهی می‌نامیم.

تعداد عضوهای یک مجموعه متناهی عددی حسابی است.

نمونه‌هایی از مجموعه‌های نامتناهی ببینید:

۱ $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}'$ نامتناهی‌اند.

۲ تمام بازه‌های اعداد حقیقی مثلاً $[1, 2]$ یا $(-\infty, 0)$ نامتناهی‌اند.

۳ مجموعه شکل‌های هندسی مختلف (مثلاً خط‌ها با شیب ۲ یا دایره‌ها به مرکز مبدأ) معمولاً نامتناهی‌اند.

کتاب درسی تأکید دارد که مجموعه درختان، اتم‌ها، مولکول‌ها، انسان‌ها و ... همیشه متناهی‌اند. با این که تعداد خیلی زیادی عضو دارند، اما با داشتن وقت کافی می‌توان اعضای آن‌ها را شمرد و به پایان رسید.

تست کدام متناهی است؟

- (۱) اعداد صحیح بازه $(-1, 4)$ (۲) اعداد گویای بازه $(-1, 4)$ (۳) اعداد گنگ در بازه $(-1, 4)$ (۴) اعداد حقیقی بازه $(-1, 4)$

پاسخ گزینه ۳ گفتیم که بازه‌ها همیشه نامتناهی‌اند. حالا به خاطر بسپارید که بین هر دو عدد حقیقی مختلف، بی‌شمار عدد گویا و بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد. پس ۱، ۲ و ۴ نامتناهی‌اند اما ۳ متناهی و فقط شامل چهار عضو ۰، ۱، ۲ و ۳ است.

این جدول را ببینید:

	$A \cup B$	$A \cap B$	$A - B$	$B - A$
متناهی A و B متناهی	متناهی	متناهی	متناهی	متناهی
متناهی A و B هر دو نامتناهی	نامتناهی	—	—	—
نامتناهی A و B نامتناهی	نامتناهی	متناهی	متناهی	نامتناهی

این طوری هم بگوییم: اشتراک یک مجموعه متناهی با هر مجموعه دیگری قطعاً متناهی است. اگر A متناهی باشد، $A - B$ قطعاً متناهی است.

تست اگر $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = [1, 3]$ ، $C \subseteq A$ ، $D \subseteq B$ و $B \subseteq E$ باشد، چنداناً از مجموعه‌های C ، D و E قطعاً متناهی‌اند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ

پاسخ گزینه ۱ C زیرمجموعه A است و چون A متناهی است C هم حتماً متناهی است.

D زیرمجموعه بازه B است، می‌تواند متناهی باشد، مثلاً $D = \{1\}$ یا نامتناهی باشد، مثلاً $D = (1, 2)$.

E زیرمجموعه B را دارد، پس تمام B را در خودش دارد و از یک مجموعه نامتناهی بیشتر است! پس نامتناهی است.

خلاصه فقط یکی از مجموعه‌ها یعنی E قطعاً نامتناهی شد و فقط مجموعه C قطعاً متناهی شد.

نتیجه این مثال را به خاطر بسپاریم:

۱ هر زیرمجموعه از یک مجموعه متناهی، متناهی است.

۲ اگر مجموعه‌ای یک زیرمجموعه نامتناهی دارد، حتماً نامتناهی است.

۳ زیرمجموعه‌های یک مجموعه نامتناهی، می‌توانند متناهی یا نامتناهی باشند.

تست کدام وجود ندارد؟

(۱) دو مجموعه نامتناهی A و B که $A - B$ یک‌عضوی و $B - A$ دوجوئی باشد.

(۲) سه زیرمجموعه از $\mathbb{N}$ که هر سه نامتناهی‌اند و دوبره اشتراک ندارند.

(۳) دو زیرمجموعه نامتناهی از $\mathbb{Z}$ که یکی زیرمجموعه دیگری است.

(۴) مجموعه متناهی که شامل تمام اعداد گویای بین $\frac{1}{7}$ و $\frac{1}{71}$ باشد.

پاسخ گزینه ۱ همین اول بگوییم که اعداد گویای بین $\frac{1}{7}$ و $\frac{1}{71}$ نامتناهی است. اما بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ دو مجموعه $A = \mathbb{N} \cup \{-1\}$ و $B = \mathbb{N} \cup \{-2, -3\}$ را در نظر بگیرید. $A - B = \{-1\}$ و $B - A = \{-2, -3\}$ است؛ پس وجود دارد.

۲ مجموعه‌های $\{1, 4, 7, \dots\}$ ، $\{2, 5, 8, \dots\}$ و $\{3, 6, 9, \dots\}$ را در نظر بگیرید که هر سه نامتناهی‌اند و اشتراک هم ندارند. یک مثال دیگر مجموعه‌های اعداد طبیعی با رقم یکان ۱، رقم یکان ۲ و رقم یکان ۳ هستند.

۳ $\mathbb{N}$ و $\mathbb{W}$ را ببینید. هر دو زیرمجموعه $\mathbb{Z}$ هستند و $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}$ است.

مثال دیگر می‌تواند مجموعه اعداد زوج و اعداد مضرب ۶ باشد. (کدام زیرمجموعه دیگری است!؟)

تست کدام متناهی است؟

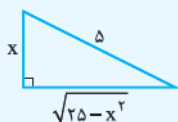
(۱) مجموعه مثلث‌های قائم‌الزاویه با وتر ۵

(۳) مجموعه اعداد ۸ رقمی

(۲) مجموعه کسرهای مثبت با صورت ۲

(۴) مجموعه دایره‌ها به مرکز $(1, 2)$

پاسخ گزینه ۱ نامتناهی است. این مثلث‌ها به شکل روبه‌رو هستند:



و x می‌تواند هر عدد حقیقی از صفر تا ۵ باشد.

۲ نامتناهی است. چون این مجموعه به صورت $\{\frac{2}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ بیان می‌شود و بی‌شمار عضو دارد.

۳ مجموعه اعداد ۸ رقمی از ۱۰۰۰۰۰۰۰ تا ۹۹۹۹۹۹۹۹ محدود است. بعداً خواهید دید که تعداد آن‌ها 9×10^7 تا است.

۴ دایره‌ها با مرکز $(1, 2)$ می‌توانند شعاع‌های مختلف در فاصله $(0, +\infty)$ داشته باشند؛ پس نامتناهی است!

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

(کتاب درسی)

(۲) اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۰

(۴) اعداد حقیقی بین ۱ و ۲

(کتاب درسی)

(۴) تمام دایره‌های قابل رسم به مرکز $(1, 2)$

(کتاب درسی)

(۳) حشرات ساکن زمین

(۲) درختان جنگل‌های ایران

۵۲- کدام مجموعه متناهی است؟

(۱) اعداد صحیح کمتر از ۱۰۰

(۳) اعداد گویای بین $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$

۵۳- کدام مجموعه نامتناهی است؟

(۱) اتم‌های کره زمین

۵۴- کدام مجموعه متناهی است؟

(۱) مثلث‌ها با مساحت ۶

(۳) خط‌ها با شیب ۲ و گذرنده از مبدأ

(۲) مربع‌ها با مساحت ۶ و یک رأس روی مبدأ

(۴) خط‌های گذرنده از مبدأ

۵۵- کدام مجموعه غیر تهی و باپایان (متناهی) است؟

- (۱) مضارب ۶ (۲) مضارب مشترک ۶ و ۷ (۳) مقسوم‌علیه‌های مشترک ۶ و ۷ (۴) مقسوم‌علیه‌های اول عدد ۱

(کتاب درسی)

۵۶- تعداد اعضای کدام مجموعه کم‌تر است؟

(کتاب درسی)

- (۱) اعداد اول کم‌تر از ۲۰ (۲) اعداد طبیعی مربع کامل کم‌تر از ۷۰ (۳) مقسوم‌علیه‌های صحیح ۶ (۴) کسرهای بین صفر و ۱ با مخرج ۷

۵۷- اگر $k \in \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه مجموعه اعداد به کدام صورت می‌تواند فرد باشد؟

- (۱) $2k-5$ (۲) $2k+6$ (۳) $3k-1$ (۴) $3k+1$

۵۸- کدام مجموعه دارای بزرگ‌ترین عضو است؟

- (۱) $\mathbb{Z}$ (۲) $(2, +\infty)$ (۳) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 4\}$ (۴) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < 3\}$

۵۹- کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

- (۱) $A = \{x \mid x = 2n-1, n \in \mathbb{N}\}$ (۲) $B = \{x \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ (۳) $C = \{x \mid x = \frac{(-1)^n}{2}, n \in \mathbb{N}\}$ (۴) $D = \{x \mid x = \frac{(-1)^n}{n^2}, n \in \mathbb{N}\}$

(کتاب درسی)

۶۰- کدام جمله نادرست است؟

- (۱) بین هر دو عدد طبیعی بی‌نهایت عدد گویا وجود دارد. (۲) بین هر دو عدد گنگ بی‌نهایت عدد گویا وجود دارد. (۳) بین هر دو عدد گنگ بی‌نهایت عدد صحیح وجود دارد. (۴) بین هر دو عدد صحیح بی‌نهایت عدد گنگ وجود دارد.

۶۱- مجموعه A متناهی و مجموعه B نامتناهی. دو زیرمجموعه از $\mathbb{N}$ هستند. چقدر تا از مجموعه‌های زیر قطعاً نامتناهی اند؟

- (الف) $A \cup B$ (ب) $A \cap B$ (پ) $A - B$ (ت) $B - A$
(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

(کتاب درسی)

۶۲- کدام جمله درست است؟ ($\mathbb{N}$ مجموعه مرجع است.)

- (۱) اگر A نامتناهی باشد، A' حتماً متناهی است. (۲) اگر $A \subseteq B$ و مجموعه B نامتناهی باشد، A هم نامتناهی است. (۳) اگر A و B هر دو نامتناهی باشند، $A \cup B$ برابر با $\mathbb{N}$ است. (۴) اگر $A \subseteq B$ و مجموعه A نامتناهی باشد، A نامتناهی است.

۶۳- کدام جمله نادرست است؟

- (۱) اگر مجموعه‌های A و B هر دو نامتناهی باشند، اشتراک آن‌ها ممکن است متناهی باشد. (۲) می‌توان سه زیرمجموعه نامتناهی از اعداد طبیعی یافت که هیچ کدام با هم اشتراک نداشته باشند. (۳) اگر $A \subseteq B$ و A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، ممکن است B متناهی باشد. (۴) اگر $A \cup B$ نامتناهی باشد، حداقل یکی از A یا B نامتناهی بوده است.

۶۴- اگر A مجموعه اعداد طبیعی فرد و B مجموعه اعداد اول باشند، کدام مجموعه متناهی و غیر تهی است؟

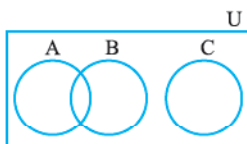
- (۱) $A - B$ (۲) $B - A$ (۳) $A \cap B$ (۴) $A - (A \cup B)$
۶۵- اگر A مجموعه اعداد صحیح مضرب ۳ و B مجموعه اعداد صحیح با قدرمطلق کم‌تر از ۱۰۰ باشد، کدام مجموعه در $\mathbb{Z}$ باپایان است؟
(۱) $A \cap B'$ (۲) $A' \cup B$ (۳) $A \cap B$ (۴) $A \cup B$

۶۶- کدام مجموعه متناهی است؟

- (۱) $Q' - Q$ (۲) $(Q - \mathbb{R}) \cap (Q' - \mathbb{Z})$ (۳) $(\mathbb{Z} - \mathbb{N}) \cap (Q - Q')$ (۴) $(\mathbb{N} - Q') \cap \mathbb{Z}'$

(درس ۴)

مجموعه مرجع و متمم



مجموعه مرجع، مجموعه‌ای است که تمام مجموعه‌های مسئله زیرمجموعه آن باشند. اسمش را مجموعه جهانی یا عام می‌گذاریم و با U نشان می‌دهیم. این شکل را ببینید:

می‌گوییم A, B, C سه زیرمجموعه از مرجع هستند و A با C و B با A اشتراک ندارد.

فایده اصلی مجموعه مرجع، تعریف متمم مجموعه A است. اگر $A \subseteq U$ باشد، $U - A$ را A' یا A^c می‌نامیم

که متمم مجموعه A است. احتمالاً این طوری راحت‌تر هستید که متمم یک مجموعه، شامل اعضای U است که آن مجموعه ندارد. به زبان ریاضی:

مثلاً متمم مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ را نسبت به مرجع‌های مختلف می‌نویسیم:

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow A' = U - A = \{0, 4, 5\}$$

$$U = [1, 4] \Rightarrow A' = [1, 4] - \{1, 2, 3\} = \{ \}$$

$$U = \mathbb{N} \Rightarrow A' = \mathbb{N} - \{1, 2, 3\} = \{4, 5, 6, \dots\}$$

$$U = \{2, 4, 5, 6\} \Rightarrow A' \text{ وجود ندارد، چون } A \not\subseteq U \text{ نیست.}$$

خاصیت‌های مجموعه متمم را با هم ببینیم:

۱ $(A')' = A, \emptyset' = U, U' = \emptyset$

۲ اگر $A \subseteq B$ باشد، $B' \subseteq A'$ است.

۳ متمم $A \cup B$ می‌شود $A' \cap B'$ ؛ یعنی تک تک مجموعه‌ها متمم می‌شوند و اجتماع به اشتراک تبدیل می‌شود.

۴ متمم $A \cap B$ می‌شود $A' \cup B'$ ؛ باز هم تک تک مجموعه‌ها متمم شده و علامت برعکس می‌شود.

اسم ۳ و ۴ قوانین دمورگان است.

۵ $A - B$ را به صورت $A \cap B'$ هم می‌توان نوشت (یادتان هست که $A - B$ یعنی در A هست و در B نیست).

۶ $B - A$ همان $B \cap A'$ است.

۷ A و A' اشتراکی ندارند $A \cap A' = \emptyset$ و اجتماعشان می‌شود $A \cup A' = U$.

۸ $A' - B'$ می‌شود $B - A$. خودتان بگید چرا!

مثال اگر $\mathbb{R}$ را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، متمم مجموعه‌های زیر را نشان دهید.

پ $(1, +\infty)$

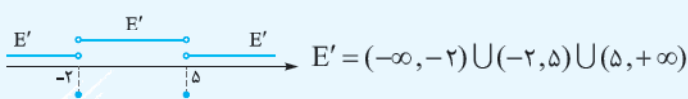
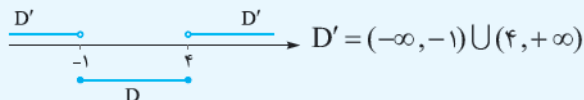
ب $(-\infty, -2]$

الف $\mathbb{W}$

ت $\{-2, 5\}$

ث $[-1, 4]$

پاسخ الف $\mathbb{W}'$ شامل اعداد حقیقی و غیرحسابی است:



ب) متمم بازه نیم باز $(-\infty, -2]$ به صورت $(-2, +\infty)$ است:

پ) متمم $(1, +\infty)$ به صورت $(-\infty, 1]$ بیان می‌شود:

ت) متمم بازه $[-1, 4]$ به صورت اجتماعی از دو بازه است:

ث) متمم مجموعه $\{-2, 5\}$ به صورت اجتماع ۳ بازه است:

مثال اگر $U = \{0, \pm 1, \pm 2, 3, 4\}$ مجموعه مرجع و $A = \{x | x^2 \leq 5\}$ و $B = \{x | 1 \leq x \leq 4\}$ دو زیرمجموعه از U باشند، مجموعه‌های A, B, A', B' را با اعضا مشخص کرده و درستی روابط زیر را بررسی کنید.

الف $(A' \cap B)' = B' \cup A$ ب $A' - B' = (A - B)'$ پ $A - B = A \cap B'$

پاسخ در مجموعه A باید اعدادی باشند که مربع آن‌ها از ۵ کمتر یا مساوی است؛ پس $A = \{0, \pm 1, \pm 2\}$. در مجموعه B هم اعداد بین ۱ و ۴ و خود آن‌ها را داریم؛ پس $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

حالا با توجه به مجموعه مرجع:

$A' = U - A = \{3, 4\}$

$B' = U - B = \{0, -1, -2\}$

و می‌توانیم روابط را کنترل کنیم:

الف چپ $(A' \cap B)' = (\{3, 4\} \cap \{1, 2, 3, 4\})' = (\{3, 4\})' = \{0, \pm 1, \pm 2\}$

الف راست $B' \cup A = \{0, -1, -2\} \cup \{0, \pm 1, \pm 2\} = \{0, \pm 1, \pm 2\}$

دو طرف برابر شدند، پس رابطه «الف» در این مسئله درست است. (همیشه درست است!)

ب چپ $A' - B' = \{3, 4\} - \{0, -1, -2\} = \{3, 4\}$

ب راست $(A - B)' = (\{0, \pm 1, \pm 2\} - \{1, 2, 3, 4\})' = (\{0, -1, -2\})' = (\{0, -1, -2\})' = \{1, 2, 3, 4\}$

پ چپ $A - B = \{0, -1, -2\}$

دو طرف مساوی نیستند پس این رابطه درست نیست.

پ راست $A \cap B' = \{0, \pm 1, \pm 2\} \cap \{0, -1, -2\} = \{0, -1, -2\}$

دو طرف برابرند. پس رابطه «پ» در این مجموعه‌ها درست است. (همواره درست است.)

تست اگر $\mathbb{R}$ مجموعه مرجع باشد، متمم مجموعه $(-\infty, 1) \cup [3, 4) \cup \{2\}$ به کدام شکل است؟

۴ دو بازه نیم باز و یک بازه باز

۳ دو بازه باز و یک بازه نیم باز

۲ یک بازه نیم باز و یک بازه باز

۱ دو بازه نیم باز



پاسخ گزینه ۲: خود این مجموعه روی محور به شکل روبه‌رو است:

پس متمم آن می‌شود:

که به صورت $[1, 2) \cup (2, 3) \cup [4, +\infty)$ بیان می‌شود و از دو بازه نیم‌باز و یک بازه باز ساخته شده است.

تست اگر $U = \{0, \pm 1, \pm 2, 3\}$ ، $A = \{1, 0, -1\}$ و $B = \{0, 1, 2, 3\}$ حاصل $((A' - B)' \cup A)'$ کدام است؟

- (۱) $\{-2\}$ (۲) $\{-1\}$ (۳) $\{-3\}$ (۴) $\{0\}$

پاسخ گزینه ۱ سعی می‌کنیم با خواص متمم و قواعدی که در بالا دیدیم عبارت را ساده کنیم.

$$((A' - B)' \cup A)' = ((A' \cap B')' \cup A)' = (A' \cap B') \cap A' = A' \cap B' = (A \cup B)'$$

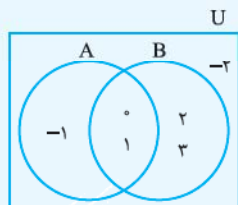
تبدیل
تفاضل
به اشتراک

پس جواب متمم $A \cup B$ است. $A \cup B$ می‌شود $\{0, 1, 2, 3, -1\}$ و متمم آن $\{-2\}$ است.

راه دوم مجموعه‌ها را بنویسیم: $(A' - B)' = \{0, \pm 1, 2, 3\}$ $\xrightarrow{\text{متمم}}$ $(A' - B)' = \{0, \pm 1, 2, 3\}$

$$\Rightarrow (A' - B)' \cup A = \{0, \pm 1, 2, 3\} \cup \{0, 1, -1\} = \{0, \pm 1, 2, 3\} \xrightarrow{\text{متمم}} ((A' - B)' \cup A)' = \{-2\}$$

این را هم ببینید:



اگر U متناهی باشد A و A' متناهی‌اند. اگر U نامتناهی باشد، A و A' هر دو متناهی نیستند! یا یکی نامتناهی است یا هر دو. مثلاً با مجموعه مرجع $\mathbb{N}$ ، متمم هر مجموعه متناهی، نامتناهی است اما متمم یک مجموعه نامتناهی می‌تواند متناهی باشد یا نباشد. مثلاً متمم $\{3, 4, 5, \dots\}$ می‌شود $\{1, 2\}$ و متمم $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$ می‌شود $\{2, 4, 6, \dots\}$. دیدید؟

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

(کتاب درسی)

۶۷- در مورد کدام دو مجموعه زیر، متمم A نسبت به B قابل تعریف است؟

(۱) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $B = \{1, 4\}$ (۲) $A = \{1, 5\}$ ، $B = \{1, 2, 3, 4\}$

(۳) $A = \{5, 6\}$ ، $B = \{1, 5, 6, 9\}$ (۴) $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ، $B = \{2, 5, 7, 9, 10\}$

(کتاب درسی)

۶۸- فرض کنیم $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4\}$. کدام عبارت نادرست است؟

(۱) $B' - A' = \{1, 3\}$ (۲) $A' \cap B' = (A \cup B)'$ (۳) $A - (A \cap B) = \{1, 3\}$ (۴) $A' \cup B' = \{5, 2\}$

۶۹- اگر $U = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$ مجموعه مرجع و $A = \{1, 3, 7, 8\}$ ، $B = \{3, 6\}$ و $C = \{5, 9\}$ باشد، مجموعه $(B' \cap C') \cap A$ چند عضو دارد؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

(کتاب درسی)

۷۰- اگر $\mathbb{R}$ مجموعه مرجع باشد، متمم مجموعه $A = \{2x + 3 \mid -1 \leq x < 7\}$ کدام است؟

(۱) $(-\infty, 1) \cup (17, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 1] \cup [17, +\infty)$ (۳) $(-\infty, 1) \cup [17, +\infty)$ (۴) $(-\infty, -1) \cup (17, +\infty)$

(کتاب درسی)

۷۱- اگر $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$ مجموعه مرجع باشد، متمم مجموعه $A = \{-1, -2, -3\}$ کدام است؟

(۱) $\{\dots, -6, -5, -4\}$ (۲) $\{\dots, -5, -4, 0, 1, 2, \dots\}$ (۳) $\{0, 1, 2, \dots\}$ (۴) $\{\dots, -5, -4, 1, 2, \dots\}$

۷۲- متمم مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ نسبت به مجموعه مرجع $[\frac{1}{4}, 4]$ از اجتماع حداقل چند بازه ساخته شده است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۳- اگر $A' = [-2, 3]$ و $B = (-1, 5]$ و مجموعه مرجع $\mathbb{R}$ باشد، بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌های $A' \cup B$ و $A \cap B$ چه قدر اختلاف دارند؟

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۳

۷۴- اگر $U = \{2, +\infty\}$ مجموعه مرجع و $B = \{x \mid x \geq 9, x \in U\}$ ، $A = \{3, 5\}$ و $C = \{x \mid x \geq 7\}$ باشد، حاصل $(A - C') \cap B'$ کدام است؟

(۱) $(7, 9]$ (۲) $[7, 9]$ (۳) $(5, 7]$ (۴) $\emptyset$

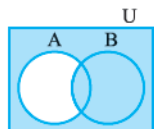
۷۵- اگر $U = \{0, \pm 1, \pm 2, 3, 4\}$ مجموعه مرجع و $A = \{x \mid x^2 \leq 5\}$ و $B = \{x \mid \sqrt{5} - \sqrt{x} \in \mathbb{W}\}$ ، آن‌گاه مجموعه $A' - (B - A)$ چند عضوی است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۶- کدام نادرست است؟

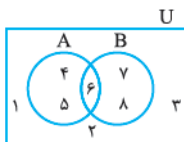
$A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$ (۴) $A \cap C = B \cap C \Rightarrow A = B$ (۳) $A - B = \emptyset \Rightarrow A \subset B$ (۲) $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$ (۱)

۷۷- نمودار ون مقابل مربوط به کدام مجموعه است؟



$A' \cup B$ (۲) $A' \cap B$ (۱)
 $A' \cup B'$ (۴) A' (۳)

۷۸- با توجه به نمودار مقابل، $A' \cap (B - A)$ کدام است؟



$\{1, 2, 3, 6\}$ (۲) $\{1, 2, 3\}$ (۱)
 $\{4, 5, 7, 8\}$ (۴) $\{1, 2, 3, 7, 8\}$ (۳)

۷۹- اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، $(A \cap B') - (B - A)$ برابر کدام مجموعه است؟

$A - B$ (۴) $A \cap B$ (۳) $\emptyset$ (۲) B' (۱)

۸۰- متمم مجموعه $A - (B - A)$ کدام است؟

B (۴) A (۳) $A \cap B$ (۲) $A \cup B$ (۱)

۸۱- مجموعه $(A - B)' \cap (A \cup B) \cap A'$ برابر کدام است؟

A' (۴) $\emptyset$ (۳) B (۲) $B - A$ (۱)

۸۲- متمم مجموعه $[A - (A - B)] \cup (A \cap B)'$ کدام است؟

$\emptyset$ (۴) $A' \cup B'$ (۳) B' (۲) A (۱)

۸۳- اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، مجموعه $[A \cup (A \cap B)]' \cap [(B \cap A) \cup (B - A)]$ برابر کدام است؟

$\emptyset$ (۴) A' (۳) $(A - B)'$ (۲) $A' - B'$ (۱)

۸۴- متمم مجموعه $C \cup A' \cup B'$ نسبت به مجموعه جهانی با کدام مجموعه برابر نیست؟

$(A \cap B) - C$ (۴) $A \cap (B - C)$ (۳) $(A - C) \cup (B - C)$ (۲) $(A \cap B) - (A \cap C)$ (۱)

۸۵- اگر $x \in (B - A) \cap (C \cup D)$ کدام گزاره می تواند نادرست باشد؟

$x \notin C' \cap D'$ (۴) $x \in D$ (۳) $x \in B$ (۲) $x \notin A$ (۱)

۸۶- اگر $\mathbb{N}$ مجموعه مرجع باشد، چندتا از عبارتهای زیر درست است؟

(الف) اگر مجموعه A نامتناهی باشد، A' نامتناهی است.
 (ب) اگر مجموعه B نامتناهی باشد، B' نامتناهی است.

(پ) اگر مجموعه A نامتناهی و مجموعه B نامتناهی باشد، مجموعه $A' \cup B'$ نامتناهی است.

۱ (۲) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵)

۸۷- اگر مجموعه A نامتناهی باشد و هر عضو B، عضوی از A نیز باشد، کدام دو مجموعه زیر اشتراکی ندارند؟

B , $A' \cup B'$ (۴) B' , A' (۳) B' , $A - B$ (۲) $A \cup B'$, $A \cap B$ (۱)

۸۸- اگر $\mathbb{N}$ مجموعه مرجع و $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2, 3\}$, $A_3 = \{4, 5, 6\}$, $A_4 = \{7, 8, 9, 10\}$, مجموعه A'_4 چند عضو دورقمی و مضرب ۵ دارد؟

۱۴ (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴)

(درس ۵)



تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

اگر A و B دو مجموعه باشند، تعداد اعضای $A \cup B$ معمولاً از جمع تعداد عضوهای A و B کمتر است! چون عضوهای مشترک A و B را در $A \cup B$ یک بار می نویسیم!

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

با کمی دقت داریم:

$n(A \cap B) = 0 \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

پس برای دو مجموعه جدا از هم (که اشتراک ندارند) می توان نوشت:

در صورت سؤال $A \cup B$ به صورت «اعضایی که در A یا B هستند» یا «عضو حداقل یکی از دو مجموعه» می آید.

تست در یک کلاس ۳۰ نفری ۱۷ نفر در فیزیک، ۲۰ نفر در ریاضی و ۱۱ نفر در هر دو درس به کلاس تقویتی می روند. چند نفر در حداقل یکی

از دو درس به کلاس تقویتی می روند؟

۲۸ (۴)

۲۷ (۳)

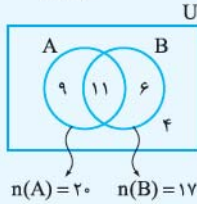
۲۶ (۲)

۲۵ (۱)

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cup B) = 20 + 17 - 11 = 26$$

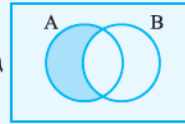
$\underbrace{\hspace{1cm}}$ $\underbrace{\hspace{1cm}}$ $\underbrace{\hspace{1cm}}$ $\underbrace{\hspace{1cm}}$
 حداقل یکی از ریاضی فیزیک هر دو

ون را ببینید:

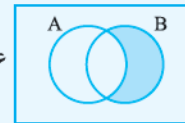


حالا به این‌ها دقت کنید:

تعداد افرادی که فقط به کلاس ریاضی می‌روند: $n(A - B) = 20 - 11 = 9$

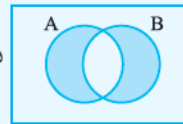


تعداد افرادی که فقط به کلاس فیزیک می‌روند: $n(B - A) = 17 - 11 = 6$

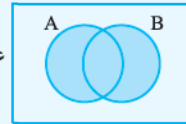


تعداد افرادی که فقط به یک کلاس می‌روند: $n(A - B) + n(B - A) = 9 + 6 = 15$

$\underbrace{\hspace{1cm}}$ $\underbrace{\hspace{1cm}}$
 فقط ریاضی فقط فیزیک

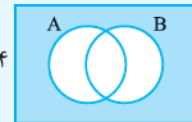


تعداد افرادی که حداقل به یک کلاس می‌روند: $n(A \cup B) = 26$

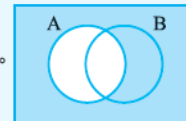


تعداد افرادی که به هیچ کلاسی نمی‌روند: $n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 30 - 26 = 4$

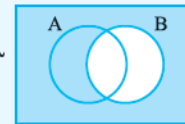
$\underbrace{\hspace{1cm}}$
 نه ریاضی
 و نه فیزیک



تعداد افرادی که به کلاس ریاضی نمی‌روند: $n(A') = n(U) - n(A) = 30 - 20 = 10$

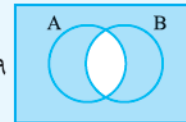


تعداد افرادی که به کلاس فیزیک نمی‌روند: $n(B') = n(U) - n(B) = 30 - 17 = 13$



تعداد افرادی که حداکثر به یک کلاس می‌روند: $n(A \cap B)' = n(U) - n(A \cap B) = 30 - 11 = 19$

$\underbrace{\hspace{1cm}}$
 به هر دو کلاس
 نمی‌روند.



کیف کردید؟ تمام این سؤال‌ها را با نمودار ون جواب دادیم، ولی اگر دوست دارید حفظ کنید، این‌ها هم هست:

$$n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B) \quad n(A') = n(U) - n(A) \quad n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

تست اگر A مجموعه اعداد زوج دورقمی و B مجموعه اعداد فرد کمتر از ۱۰۰ باشد، $A \cup B$ چند عضو دارد؟

۹۶ (۴)

۹۵ (۳)

۹۴ (۲)

۹۰ (۱)

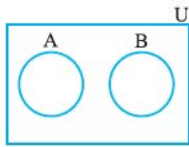
پاسخ گزینه A دارای ۴۵ عضو است (کلاً ۹۰ تا عدد دورقمی از ۱۰ تا ۹۹ داریم که ۴۵ تای آن‌ها زوج‌اند). B دارای ۵۰ عضو است (از ۱ تا ۱۰۰ پنجاه تا عدد فرد داریم).

اما مهم‌تر از هر چیز، A و B عضو مشترکی ندارند، چون اعضای A زوج و اعضای B فرد هستند. پس دو مجموعه مجزا داریم. پس:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 45 + 50 = 95$$

می‌شود از آن طرف هم به ماجرا نگاه کرد. اگر $A \cup B$ را بنویسیم اعداد زوج دورقمی و اعداد فرد کمتر از ۱۰۰ می‌آیند. پس از بین ۱ تا ۹۹، فقط اعداد زوج یک‌رقمی یعنی ۲، ۴، ۶ و ۸ غایب هستند. بنابراین تعداد اعضای اجتماع می‌شود:

$$99 - 4 = 95$$



برای دو مجموعه جدا از هم A و B داریم: $A \cap B = \emptyset$ $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
 $A - B = A$, $B - A = B$
 $A \subseteq B'$, $B \subseteq A'$

همچنین:
و نیز:

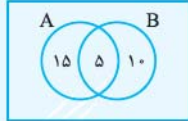
تست اگر اجتماع دو مجموعه A و B دارای ۳۰ عضو بوده و $n(A \cap B) = n(A) = n(B) + 5$ باشد، آن گاه چند عضو فقط به A تعلق دارند؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

پاسخ گزینه ۱: اگر تعداد اعضای $A \cap B$ را x بنامیم، داریم:

$$\begin{cases} n(A) = n(A \cap B) = x \\ n(B) + 5 = x \Rightarrow n(B) = x - 5 \end{cases}$$

 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $30 = x + x - 5 - x \Rightarrow 30 = x - 5 \Rightarrow x = 35$

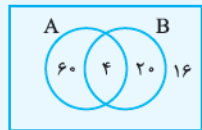
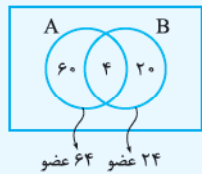


پس مجموعه A دارای $35 - 5 = 30$ عضو است که ۵ تایی آن ها با B مشترک اند و $n(A - B) = 30 - 5 = 25$ یعنی ۲۵ عضو فقط به A تعلق دارند.

تست اگر $n(U) = 100$ و $n(A \cap B) = 12$ ، $\frac{n(B)}{3} = \frac{n(A')}{2}$ ، آن گاه کدام نادرست است؟

- (۱) $n(A' \cap B) = 20$ (۲) $n(B' \cap A) = 60$ (۳) $n(A' \cap B') = 16$ (۴) $n(A' \cup B') = 86$

پاسخ گزینه ۲: اول برویم سراغ رابطه $\frac{n(B)}{3} = \frac{n(A')}{2}$ ، پس داریم:
 $\frac{n(B)}{3} = 12 \Rightarrow n(B) = 36$ $\frac{n(A')}{2} = 12 \Rightarrow n(A') = 24$ $n(A \cap B) = 12 \Rightarrow n(A \cup B) = 4$



اعداد را در نمودار ون می آوریم:
 پس در $A \cup B$ ، جمعاً $24 + 4 + 36 = 64$ یعنی ۸۴ عضو داریم. این جوری هم ببینید:
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 24 + 36 - 4 = 64$

بنابراین متمم $A \cup B$ یعنی $A' \cap B'$ دارای $100 - 64 = 36$ عضو است.
 پس تا این جا فهمیدیم:
 $n(A' \cap B') = 36$ $n(B' \cap A) = 60$ و $n(A' \cap B) = 20$
 همان $A - B$ همان $B - A$

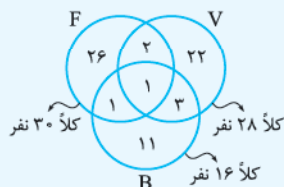
بنابراین حتماً (۲) نادرست است. ببینید:
 $n(A' \cup B') = n(U) - n(A \cap B) = 100 - 4 = 96$

در درس شما نیست، اما ببینید که: $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
 و در حالتی که مجموعه ها دوه دو مجزا هستند:

تست در میان دانش آموزان سال دهم ۲۸ نفر عضو تیم والیبال، ۱۶ نفر بسکتبال و ۳۰ نفر فوتبال هستند. اگر ۴ نفر در هر دو تیم بسکتبال و والیبال، ۳ نفر در فوتبال و والیبال و ۲ نفر در بسکتبال و فوتبال مشترک باشند و فقط ۱ نفر عضو هر سه تیم باشد، چند نفر عضو حداقل یک تیم هستند؟

- (۱) ۷۴ (۲) ۶۷ (۳) ۶۶ (۴) ۶۵

پاسخ گزینه ۳: سؤال این را می خواهد:
 $n(F \cup V \cup B) = n(F) + n(V) + n(B) - n(F \cap V) - n(B \cap V) - n(F \cap B) + n(F \cap V \cap B) = 30 + 28 + 16 - 3 - 4 - 2 + 1 = 66$



حوصله چالش بیشتر دارید؟ به ون نگاه کنید:
 به این سؤالات جواب دهید!

- چند نفر فقط عضو تیم فوتبال اند؟ ۲۶
- چند نفر فقط عضو یک تیم اند؟ $26 + 22 + 11 = 59$
- چند نفر عضو تیم والیبال هستند و در فوتبال نیستند؟ $21 + 3 = 24$
- چند نفر عضو دقیقاً ۲ تیم هستند؟ $1 + 2 + 3 = 6$
- چند نفر عضو حداقل ۲ تیم هستند؟ $1 + 1 + 3 + 2 = 7$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



(کتاب درسی)

۸۹- اگر $n(A) = 15$ ، $n(A \cap B) = 5$ و $n(A \cup B) = 30$ ، آن‌گاه $n(B)$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۹۰- در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر از آن‌ها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، چند نفر از دانش‌آموزان حداقل در یکی از دو گروه قرار دارند؟

(کتاب درسی)

- (۱) ۲۶ (۲) ۱۹ (۳) ۲۸ (۴) ۲۹

۹۱- اگر دو مجموعه A و B دارای تعداد عضو مساوی باشند و تعداد اعضای A ، چهار برابر تعداد اعضای مشترک A و B باشد، تعداد عضوهای $A \cup B$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۹۲- اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعه مرجع U باشند و بدانیم که: $n(A) = 10$ ، $n(A') = 12$ و $n(B) = 7$ ، آن‌گاه $n(B')$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴) ۱۵

۹۳- اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشند، به طوری که $n(U) = 100$ ، $n(A) = 60$ ، $n(B) = 40$ و $n(A \cap B) = 20$ ، تعداد اعضای مجموعه $A - B$ چه‌قدر بیشتر از تعداد اعضای مجموعه $A' \cap B'$ است؟

(کتاب درسی)

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۹۴- اگر $3n(A) = 2n(B) = 6n(A \cap B)$ باشد، حاصل $\frac{n(A-B)}{n(B \cap A')}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۹۵- اگر $n(A) = 32$ ، $n(A - B) = 14$ و $n(A \cup B) = 60$ ، مقدار $n(B - A)$ چند برابر $n(A \cap B)$ است؟

- (۱) تقریباً $1/33$ (۲) تقریباً $1/44$

- (۳) تقریباً $1/55$ (۴) تقریباً $1/66$

۹۶- مجموعه A دارای ۱۴ و مجموعه B دارای ۱۷ و مجموعه $A \cap B$ دارای ۵ عضو است، چند عضو فقط در یکی از این دو مجموعه هستند؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴) ۲۲

۹۷- در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آن‌ها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند؟

(کتاب درسی)

- (۱) ۶۳ (۲) ۷۷ (۳) ۹۵ (۴) ۱۰۳

۹۸- یک دوره جشنواره فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آن‌ها ۷ فیلم پویانمایی و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به طوری که ۳ تا از فیلم‌های پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. چند فیلم این جشنواره پویانمایی یا غیرطنز است؟

(کتاب درسی)

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۱۳

۹۹- در یک کلاس ۳۵ نفری، ۲۰ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۸ نفر عضو تیم والیبال و ۷ نفر عضو هر دو تیم هستند، چند نفر عضو هیچ تیمی نیستند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۰- در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ‌یک از این دو تیم نباشند، چند نفر از آن‌ها عضو هر دو تیم هستند؟

(کتاب درسی)

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

۱۰۱- در یک روز از بین ۱۰۴ مورد جرم گزارش شده به کلانتری، ۷۰ مورد در شب و ۶۱ مورد در حومه شهر بوده است. حداقل چند مورد جرم در شب و درون شهر گزارش شده است؟

- (۱) ۹ (۲) ۲۷ (۳) ۲۱ (۴) ۲۹

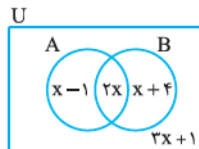
۱۰۲- اگر $n(A \cup B) = 75$ ، $n(A) = 3x + 10$ ، $n(B) = 2y + 5$ و $n(A \cap B) = x + y - 20$ ، چند عضو از مجموعه مرجع در A هست ولی در B نیست؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۵۰ (۴) ۵۵

۱۰۳- در نمودار ون مقابل تعداد اعضای هر قسمت درون آن نوشته شده است. اگر $n(A' - B) = 10$ باشد، چند

عضو حداقل به یکی از مجموعه‌های A و B تعلق دارند؟

- (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۱۳ (۴) ۱۵



۱۰۴- اگر $n(A-B) = 3$ و $n(B-A) = 7$ و تعداد اعضای B دقیقاً دو برابر تعداد اعضای A باشد، A و B چند عضو مشترک دارند؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۵- اگر مجموعه A دارای ۵ عضو، مجموعه B دارای ۶ عضو و مجموعه $A \cap B$ دارای ۲ عضو باشد، مجموعه $(A \cap B') \cup (A \cup B)'$ چند عضو دارد؟

- ۷ (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴)

۱۰۶- سارا می‌خواهد هم‌کلاسی‌های خود در مدرسه و کلاس زبان را به تولدش دعوت کند. اگر در مدرسه ۲۴ هم‌کلاسی داشته باشد و در کل ۴۷ نفر مهمان داشته باشد، تعداد هم‌کلاسی‌های کلاس زبان او حتماً در کدام بازه است؟

- ۱ (۰, ۲۳] ۲ (۰, ۴۷] ۳ (۲۳, ۴۷] ۴ (۲۳, ۲۴]

۱۰۷- اگر مجموعه مرجع دارای ۲۲ عضو و دو زیرمجموعه A و B در آن دارای ۱۷ و ۱۲ عضو باشند، $A-B$ حداکثر چند عضو دارد؟

- ۱۲ (۱) ۱۰ (۲) ۱۷ (۳) ۷ (۴)

۱۰۸- مجموعه A دارای ۳۶ عضو و مجموعه B دارای ۲۸ عضو است. اشتراک آن‌ها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعه A حذف شود، از اشتراک آن‌ها ۹ عضو حذف می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع مجموعه جدید با مجموعه B کدام است؟

- ۴۰ (۱) ۴۲ (۲) ۳۳ (۳) ۳۵ (۴)

۱۰۹- اجتماع دو مجموعه A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های $(A-B)$ و $(B-A)$ به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه‌های A و B ، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه‌های اشتراک آن‌ها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه جدید، کدام است؟

- ۲۲ (۱) ۲۳ (۲) ۲۴ (۳) ۲۶ (۴)

۱۱۰- در بیمارستانی با ۴۰۰ بیمار، بیماران ممکن است دارای سه بیماری A ، B و C باشند. اگر ۱۶۰ نفر مبتلا به A ، ۳۰۰ نفر مبتلا به B ، ۸۰ نفر مبتلا به

A و C ، ۹۰ نفر مبتلا به B و C ، ۱۰۰ نفر مبتلا به A و B و ۵۰ نفر مبتلا به A ، B و C باشند، چند بیمار فقط بیماری C را دارند؟

- ۱۶۰ (۱) ۹۰ (۲) ۶۰ (۳) ۴۰ (۴)

۱۱۱- دو مجموعه $A = \{1, 4, 7\}$ و $B = \{x \in U \mid x < 3\}$ جدا از هم هستند. U کدام نمی‌تواند باشد؟

- ۱ (۱) Q' ۲ (۲) $Z - W$ ۳ (۳) $Q - Z$ ۴ (۴) $Z \cap N$

۱۱۲- چند عدد طبیعی کم‌تر یا مساوی ۱۰۰ بر ۲ یا ۳ بخش پذیرند؟

- ۸۷ (۱) ۶۷ (۲) ۶۶ (۳) ۸۸ (۴)

درس ۶

الگوی خطی



به عبارت‌هایی مثل $a_1, a_2, \dots$ متغیر اندیس‌دار می‌گوییم. معمولاً وقتی چند مرحله متوالی از ۱ تا n داریم، سراغ متغیرهای اندیس‌دار می‌رویم.

به شکل‌های مقابل دقت کنید:

شماره شکل	۱	۲	۳	۴
تعداد علامت‌ها	۱	۳	۵	۷

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 3 \quad a_3 = 5 \quad a_4 = 7$$

داریم:

اگر دقت کنید می‌توانیم a_n را برای همه n ‌ها از فرمول $a_n = 2n - 1$ حساب کنیم.

این عبارت a_n را جمله عمومی الگو می‌نامند. مقدار a_n را جمله n ام الگو می‌نامند، مثلاً a_6 یعنی جمله ششم الگو که با قراردادن $n = 6$ به دست می‌آید.

تست در شکل بیستم چند چوب کبریت هست؟



۸۹ (۱)

۸۱ (۳)

پاسخ گزینه ۲

به شکل‌ها دقت کنیم. شکل اول ۵ تا چوب کبریت دارد، در شکل دوم ۴ تا به آن‌ها افزوده می‌شود و در شکل سوم دوباره ۴ تا افزوده می‌شود، پس در شکل بیستم $5 + 4 + 4 + \dots + 4$ یعنی $5 + 4 \times 19 = 81$ چوب کبریت هست.
 نوزده تا

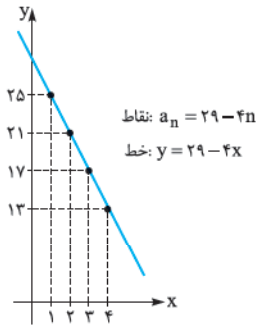
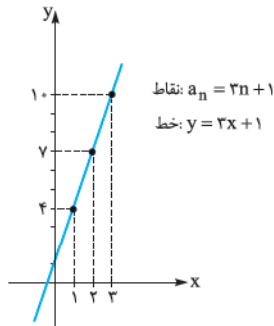
۱- الگوی خطی

در الگوهای خطی اختلاف هر دو جمله متوالی مقدار ثابتی است.

الف) ۴, ۷, ۱۰, ۱۳, ...	ب) ۲۵, ۲۱, ۱۷, ۱۳, ...	ج) ۳, ۵, ۸, ۱۲, ...
اختلاف هر دو جمله متوالی ۳ است، پس الگوی خطی است.	اختلاف هر دو جمله متوالی -۴ است، پس الگوی خطی است.	اختلاف ۵ و ۳ برابر ۲ و اختلاف ۸ و ۵ برابر ۳ است، پس اختلاف ثابت نیست و این الگو خطی نیست.

جمله عمومی یک الگوی خطی $a_n = an + b$ است. a همان اختلاف جمله‌های متوالی است و b را با جای گذاری مقدار یکی از a_n ها به دست می آوریم. مثلاً در (الف) $a = 3$ است و با قراردادن $a_1 = 4$ در عبارت $a_n = an + b = 3n + b$ داریم: $a_1 = 4 \Rightarrow 3 \times 1 + b = 4 \Rightarrow b = 1$ پس $a_n = 3n + 1$.

در (ب) هم داریم: $a_2 = 21 \Rightarrow 21 = -4(2) + b \Rightarrow b = 29 \Rightarrow a_n = 29 - 4n$.



اگر نقاط با طول n و عرض a_n یعنی (n, a_n) را در دستگاه مختصات رسم کنیم، همگی روی خط $y = ax + b$ قرار می گیرند.

اصلاً به همین دلیل اسم این‌ها الگوی خطی است. ببینید:

مقدار a یعنی همان اختلاف جملات متوالی، در واقع شیب خطی است که نقطه‌های دنباله خطی روی آن قرار می گیرند.

تست در یک الگوی خطی اگر جمله سوم ۶ و جمله دهم ۲۷ باشد، جمله یازدهم کدام است؟

۳۲ (۴)

۳۱ (۳)

۳۰ (۲)

۲۹ (۱)

پاسخ گزینه ۲: جمله عمومی را $a_n = an + b$ می گیریم، پس صورت سؤال این‌ها را گفته:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{n=3} a_3 = a(3) + b = 6 & \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 6 \\ 10a + b = 27 \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می کنیم}} 7a = 21 \Rightarrow a = 3 \xrightarrow{\text{جای گذاری}} 3(3) + b = 6 \Rightarrow b = 6 - 9 = -3 \\ \xrightarrow{n=10} a_{10} = a(10) + b = 27 & \end{aligned}$$

$$a_n = 3n - 3$$

و مقدار جمله یازدهم می شود:

در مورد الگوی خطی $a_n = 3n - 3$ به این سؤالات جواب می دهیم:

(الف) اولین جمله مضرب ۵ آن چیست؟ خب به جملات a_n نگاه کنیم:

پس $a_5 = 15$ اولین جمله مضرب ۵ است.

(ب) اولین جمله دورقمی آن کدام است؟ با توجه به جدول بالا $a_5 = 12$ اولین جمله دورقمی است.

(پ) کدام جمله برابر ۷۷۷ است؟ اگر $a_n = 3n - 3 = 777$ باشد، داریم:

یعنی جمله دویست و شصتم برابر ۷۷۷ است.

(ت) آیا جمله‌ای از آن برابر ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ می شود؟ اگر $3n - 3 = 100$ یا $3n - 3 = 1000$ را بگذاریم برای n به جواب طبیعی نمی رسیم، پس جمله‌ای برابر ۱۰۰۰ یا ۱۰۰ نداریم.

این طوری به موضوع نگاه کنید که $3n - 3$ همیشه مضرب ۳ است و ۱۰۰ و ۱۰۰۰ مضرب ۳ نیستند.

دوباره یادآوری کنیم که جمله عمومی الگوی خطی $a_n = an + b$ است، یعنی از درجه اول است.

تست کدام جمله عمومی الگوی خطی نیست؟

$$a_n = |3n - 5| \quad (۴) \quad a_n = \sqrt{(3n + 1)^2} \quad (۳) \quad a_n = n^2 - (n + 1)^2 \quad (۲) \quad a_n = \frac{4n^2 - n}{n} \quad (۱)$$

پاسخ گزینه ۱: جمله عمومی به صورت $a_n = 4n - 1$ ساده می شود، پس یک الگوی خطی و اختلاف جملاتش برابر ۴ است.

۲ جمله عمومی به صورت $n^2 - (n^2 + 2n + 1) = -2n - 1$ ساده می شود و این هم الگوی خطی با اختلاف جملات -۲ است.

$$a_n = 3n + 1$$

۳ حاصل a_n می شود $|3n + 1|$ که چون n طبیعی است، داریم:

(چون حاصل $3n + 1$ مثبت است) و این هم الگوی خطی با اختلاف ۳ است.

۴ این الگوی خطی نیست. جملاتش را ببینید:

n	۱	۲	۳	۴
a_n	۲	۱	۴	۷

اختلاف ثابت نیست.

گاهی اوقات باید جمله عمومی را ساده کرد تا به الگوی خطی برسیم. مثلاً: $a_n = kn^2 + 2n + 1$ خطی نیست مگر این که $k = 0$ باشد (که n^2 برود و به $2n + 1$ برسد).

هم خطی نیست مگر این که $k = \pm 1$ باشد (که ساده بشود و به $2n \pm 1$ برسد).

هم خطی نیست مگر این که $k = 1$ باشد (تا زیر رادیکال مربع کامل شود و به $3n + 1$ برسد).

$a_n = kn^2 + (2n - 1)^2$ نیز فقط به شرط $k = -4$ خطی است (که n^2 ها بروند و به $-4n + 1$ برسد).

پرسش های چهارگزینه ای

(کتاب درسی)

۱۱۳- جمله عمومی یک الگوی خطی که جمله اول و دوم آن به ترتیب ۱ و ۵ باشد، کدام است؟

$t_n = 4n + 1$ (۴) $t_n = 4n - 1$ (۳) $t_n = 4n - 3$ (۲) $t_n = 4n + 3$ (۱)

۱۱۴- دنباله $a_n = (3k - 1)n^2 + kn + 2$ خطی است. جمله سوم آن چه قدر است؟

۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

(کتاب درسی)

۱۱۵- جملات دوم و سوم در یک الگوی خطی ۳ و ۷ هستند. جمله هشتم چند برابر جمله پنجم است؟

$1/6$ (۴) $1/7$ (۳) $1/8$ (۲) $1/9$ (۱)

۱۱۶- یک الگوی خطی با جمله عمومی $t_n = kn^2 + 2n + (k + 1)$ مفروض است. جمله اول را ۲ واحد زیاد و فاصله جملات را ۳ برابر می کنیم تا دنباله C_n به وجود بیاید. C_1 کدام است؟

۷۷ (۴) ۶۹ (۳) ۶۴ (۲) ۵۹ (۱)

۱۱۷- اگر t_n جمله عمومی یک الگوی خطی باشد، کدام گزینه برابر t_{11} است؟ ($t_1 \neq t_2$)

$t_5 + t_6$ (۲) $t_{13} - t_2$ (۱)
 $\frac{t_{20} + t_5 + t_8}{3}$ (۴) $\frac{t_{22}}{2}$ (۳)

ردیف سوم 
ردیف دوم 
ردیف اول 

۱۱۸- در یک سالن سینما صندلی ها در ۱۱ ردیف قرار دارند. در الگوی مقابل افزایش صندلی ها در هر ردیف دیده می شود. در ردیف آخر چند صندلی هست؟

۲۹ (۱) ۲۵ (۲)
۲۷ (۳) ۲۶ (۴)

(کتاب درسی)

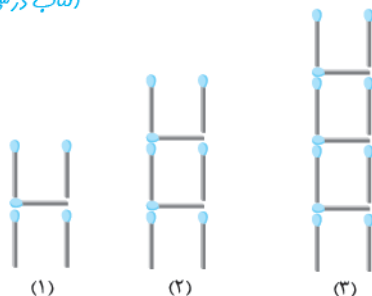
۱۱۹- در الگوی مقابل، شکل دهم چند پاره خط دارد؟



۳۰ (۱) ۴۰ (۲)
۳۹ (۳) ۳۱ (۴)

(کتاب درسی)

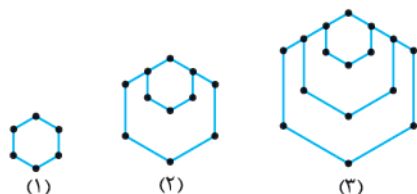
۱۲۰- با توجه به الگوی مقابل، شکل کدام مرحله از ۵۳ تا چوب کبریت ساخته می شود؟



۱۵ (۱)
۱۶ (۲)
۱۷ (۳)
۱۸ (۴)

(کتاب درسی)

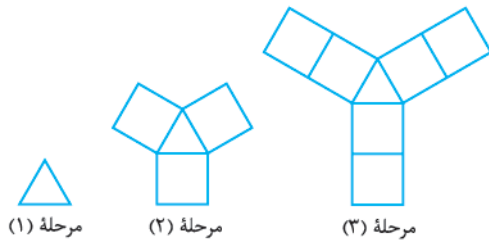
۱۲۱- با توجه به الگوی مقابل، در شکل پانزدهم چند رأس وجود دارد؟



۷۵ (۱)
۷۶ (۲)
۷۷ (۳)
۷۸ (۴)

۱۲۲- با توجه به الگوی مقابل، در کدام مرحله اختلاف تعداد

مربع‌ها و تعداد پاره‌خط‌ها، ۶۳ می‌شود؟



مرحله (۱)

مرحله (۲)

مرحله (۳)

۱۰ (۱)

۱۱ (۲)

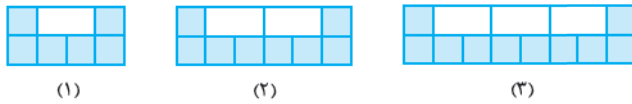
۱۲ (۳)

۱۳ (۴)

۱۲۳- با توجه به الگوی مقابل، در مرحله‌ای که ۱۶ کاشی سفید

استفاده شده، چند کاشی سیاه داریم؟

(کتاب درسی)



(۱)

(۲)

(۳)

۳۴ (۲)

۳۲ (۱)

۳۸ (۴)

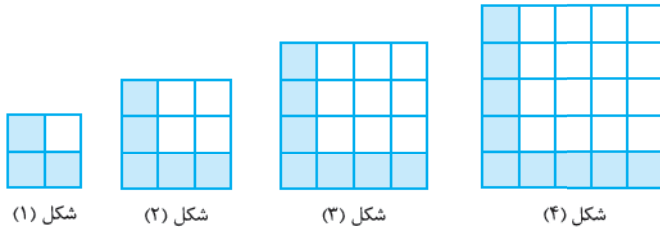
۳۶ (۳)

۱۲۴- در شکل‌های روبه‌رو، با توجه به ادامه روند شکل‌ها، اختلاف

تعداد مربع‌های کوچک سفید و رنگی در شکل بیستم چه قدر

(کتاب درسی)

است؟



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

شکل (۴)

۳۶۱ (۱)

۴۰۰ (۲)

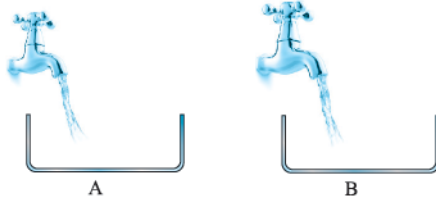
۳۵۹ (۳)

۳۲۴ (۴)

۱۲۵- در ظرف‌های A و B در شروع به ترتیب ۱۰ و ۶ لیتر آب هست. شیرهای آب در

هر دقیقه به ترتیب ۲ و ۳ لیتر آب وارد ظرف‌ها می‌کنند. اگر شیرها را با هم باز کنیم،

پس از چند دقیقه مقدار آب دو ظرف مساوی می‌شود؟



۵ (۲)

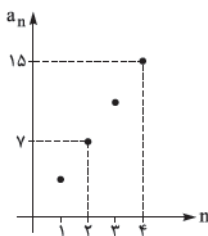
۶ (۱)

۳ (۴)

۴ (۳)

۱۲۶- شکل مقابل بخشی از نمودار یک الگوی خطی را نشان می‌دهد. جمله عمومی

دنباله‌ای که a_1 و a_3 جملات اول و دوم آن هستند، کدام است؟



$$b_n = 4n + 3 \quad (۱)$$

$$b_n = 8n - 5 \quad (۲)$$

$$b_n = 4n - 1 \quad (۳)$$

$$b_n = 8n + 3 \quad (۴)$$

(درس ۷)



الگوی درجه دوم

اگر در یک الگو، اختلاف جملات ثابت نباشد، اما اختلاف اختلاف‌ها ثابت باشد، الگوی درجه دوم داریم. ببینید:

(الف) ۱, ۲, ۴, ۷, ۱۱, ... اختلاف: ۱, ۲, ۳, ۴ اختلاف اختلاف: ۱, ۱, ۱ این الگو درجه دوم است.	(ب) ۵, ۹, ۱۵, ۲۳, ۳۳, ... اختلاف: ۴, ۶, ۸, ۱۰ اختلاف اختلاف: ۲, ۲, ۲ این هم الگوی درجه دوم است.	(ج) ۲, ۳, ۵, ۹, ۱۴, ... اختلاف: ۱, ۲, ۴, ۵ اختلاف اختلاف: ۱, ۲, ۱ این درجه دوم نیست.
---	--	---

پس در یک الگوی درجه دوم، اختلاف جملات متوالی، الگوی خطی می‌سازند.

جمله عمومی الگوی درجه دوم $a_n = an^2 + bn + c$ است. اول به خاطر بسپارید که a (یعنی ضریب n^2)، نصف اختلاف اختلاف‌ها (همان مقدار

ثابت) است. پس مثلاً در (الف) حتماً جمله عمومی $\frac{1}{2}n^2 + bn + c$ است و در (ب) حتماً جمله عمومی $n^2 + bn + c$ است.

برای پیدا کردن مقادیر b و c هم باید دوتا از مقدارهای جملات را در $an^2 + bn + c$ جای‌گذاری و دستگاه را حل کنیم.

تست در دنباله درجه دوم ...، ۱۸، ۱۰، ۵، ۳ جمله ششم کدام است؟

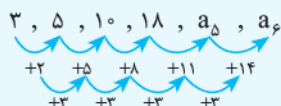
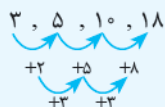
۳۷ (۲)

۳۳ (۱)

۴۷ (۴)

۴۳ (۳)

پاسخ گزینه ۳ به اختلاف‌ها نگاه کنید:

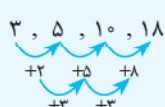


اختلاف‌های ردیف دوم همیشه +۳ است، پس ادامه می‌دهیم:

$$a_6 = 18 + 11 + 14 = 43$$

و داریم:

راه دوم با دقت، نوشتن جمله عمومی درجه ۲ را یاد بگیرید:



$$a_n = an^2 + bn + c = \frac{3}{2}n^2 + bn + c$$

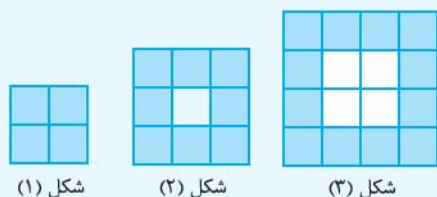
تفاضل تفاضل‌ها ۳ است، پس a نصف آن یعنی $\frac{3}{2}$ خواهد بود و داریم:

و برای رسیدن به b و c از دستگاه دو معادله دو مجهول می‌رویم:

$$\begin{cases} n=1 \rightarrow a_1=3 \rightarrow \frac{3}{2}(1)^2 + b(1) + c = 3 \\ n=2 \rightarrow a_2=5 \rightarrow \frac{3}{2}(2)^2 + b(2) + c = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{کم کنیم c ها بروند}} \frac{3}{2}(4) - \frac{3}{2}(1) + b = 2 \Rightarrow \frac{9}{2} + b = 2 \Rightarrow b = -\frac{5}{2}$$

$$\xrightarrow{n=6} a_6 = \frac{3}{2}(6)^2 - \frac{5}{2}(6) + 4 = \frac{3}{2}(36) - 15 + 4 = 54 - 11 = 43$$

پس $a_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 4$ و در نتیجه:



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

مرحله	۱	۲	۳
تعداد مربع سفید	صفر	۱	۴
تعداد مربع رنگی	۴	۸	۱۲
تعداد کل مربع‌ها	۴	۹	۱۶

تست در الگوی مقابل کدام نادرست است؟

(۱) تعداد مربع‌های رنگی در مرحله n م الگوی خطی دارد.

(۲) در ۵ شکل، تعداد مربع‌های رنگی از سفید بیشتر است.

(۳) شکلی که ۱۰۰ مربع سفید دارد، ۶۹ مربع رنگی خواهد داشت.

(۴) اختلاف تعداد مربع‌های سفید و رنگی هرگز ۱۱۱ نیست.

پاسخ گزینه ۳ به جدول توجه کنید.

خب با کمی دقت، الگوی تعداد کل مربع‌ها به صورت $(n+1)^2$ است. الگوی تعداد مربع‌های سفید هم $(n-1)^2$ است و از اختلاف این‌ها الگوی تعداد مربع‌های رنگی می‌شود $(n+1)^2 - (n-1)^2 = 4n$ پس (۱) درست است و تعداد مربع‌های رنگی الگوی خطی دارد. در (۲) باید تعداد مربع سفید و رنگی را مقایسه کنیم. اولی $(n-1)^2$ و دومی $4n$ است. دوباره به عددها دقت کنید:

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
سفید $((n-1)^2)$	۰	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶
رنگی $(4n)$	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰	۲۴	۲۸

می‌بینید که از مرحله ۶ و به بعد، تعداد مربع‌های سفید بیشتر است و فقط در ۵ مرحله تعداد مربع‌های رنگی بیشتر بود! یعنی (۲) هم درست است.

در (۳) دنبال شکلی هستیم که ۱۰۰ مربع سفید دارد؛ یعنی $(n-1)^2 = 100$ و در نتیجه $n = 11$ تعداد مربع‌های رنگی‌اش می‌شود $4n = 4 \times 11 = 44$ و (۳) غلط گفته.

(۴) هم می‌گوید اختلاف تعداد مربع‌های سفید و رنگی یعنی $(n-1)^2 - 4n$ هرگز ۱۱۱ نیست. ببینید:

$$(n-1)^2 - 4n = n^2 - 6n + 1 = 111 \Rightarrow n^2 - 6n = 110 \Rightarrow n(n-6) = 110$$

خب درست می‌گوید! این معادله جوابی برای n ندارد. حواستان هست که $(n \in \mathbb{N})$.

در الگوهای درجه دوم، دو شکل را زیاد می‌بینید و خوب است که جمله عمومی آن‌ها را بلد باشید:



دنباله مثلثی:






$$a_1 = 1 \quad a_2 = 1 + 2 \quad a_3 = 1 + 2 + 3 \quad a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 \quad a_n = 1 + 2 + \dots + n$$

جمله عمومی آن $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ است. این طوری هم یاد بگیرید که جمع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر است با $\frac{n(n+1)}{2}$.

تست حاصل $7 + 8 + 9 + \dots + 20$ کدام است؟

- (۱) ۲۱۰
(۲) ۱۹۰
(۳) ۱۸۹
(۴) ۱۷۹

پاسخ گزینه ۳: اگر از ۱ تا ۲۰ بود می‌شد $\frac{20(21)}{2} = 210$ ، اما الان $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ را ندارد، پس جواب می‌شود $210 - \frac{6(7)}{2}$ یعنی جمع اعداد ۱ تا ۶. $210 - 21 = 189$.

تست جمع اعداد زوج از ۱۰۲ تا ۴۴۴ چه قدر است؟

- (۱) ۴۶۶۱۲
(۲) ۴۶۹۵۶
(۳) ۴۶۷۸۴
(۴) ۴۶۸۵۴

پاسخ گزینه ۲: از ۲ فاکتور بگیریم: $102 + 104 + \dots + 444 = 2(51 + 52 + \dots + 222)$
پس باید مجموع از ۱ تا ۲۲۲ را منهای مجموع از ۱ تا ۵۰ کنیم. یادمان نرفته که مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n می‌شود $\frac{n(n+1)}{2}$ ، پس داریم:

$$2\left(\frac{222 \times 223}{2} - \frac{50(51)}{2}\right) = 2(111 \times 223 - 25 \times 51) = 2(24753 - 1275) = 2(23478) = 46956$$

گاه حفظ می‌کنند که:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1) \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 4 \quad a_3 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$$

جمله عمومی آن $a_n = n^2$ است. دنباله مربعی:





$$a_1 = 1 \quad a_2 = 4 \quad a_3 = 9$$

تست در الگوی مقابل:



(۱) (۲) (۳)

تعداد نقطه‌های سفید شکل دهم چند برابر تعداد نقطه‌های رنگی شکل نهم است؟

- (۱) ۹
(۲) ۱۰
(۳) ۱۱
(۴) ۱۲

پاسخ گزینه ۳: راه اول دقت کنید که تعداد کل نقطه‌ها دنباله مربعی دارد اما در شکل (۱) مربع 2×2 داریم، پس $a_n = (n+1)^2$ تعداد کل نقطه‌ها را نشان می‌دهد.

در شکل‌ها به ترتیب ۲، ۳ و ۴ نقطه رنگی داریم، پس $b_n = n+1$ تعداد نقاط رنگی را می‌دهد و بنابراین $c_n = a_n - b_n = (n+1)^2 - (n+1)$

$$c_n = n^2 + 2n + 1 - n - 1 = n^2 + n$$

دنباله تعداد نقاط سفید است.

راه دوم در زیر و بالای نقاط رنگی، برای نقاط سفید دنباله مثلثی داریم، پس تعداد نقاط سفید دو برابر حاصل دنباله مثلثی است.

$$c_n = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} = n^2 + n$$

بنابراین تعداد نقاط سفید شکل دهم $11^2 + 11 = 132$ و $c_9 = 10^2 + 10 = 110$ و تعداد نقاط رنگی شکل نهم $b_9 = 9 + 1 = 10$ است و نسبت آن‌ها می‌شود $\frac{c_9}{b_9} = \frac{110}{10} = 11$.

موافقت که همیشه $\frac{c_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{(n+1)} = n+2$ برقرار است؟

$t_n: 5, 14, 29, \dots$

(کتاب درسی)

۱۹۴ (۴)

$6, 9, 14, 21, 30, \dots$

(کتاب درسی)

۷ (۴)

(کتاب درسی)

$2, 6, 12, 18, 30, \dots$ (۴)

$t_n: 0, 8, 18, \dots$

(کتاب درسی)

۱۲۷- اگر جمله عمومی دنباله مقابل به صورت $t_n = An^2 + B$ باشد، t_8 کدام است؟

۱۵۱ (۳)

۱۹۰ (۲)

۱۸۴ (۱)

۱۲۸- جمله عمومی دنباله درجه دوم مقابل به صورت $t_n = An^2 + Bn$ است، $A+B$ کدام است؟

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۱۲۹- کدام یک از دنباله‌های زیر درجه دوم نیست؟

$0, 3, 8, 15, 24, \dots$ (۳)

$5, 12, 22, 35, 51, \dots$ (۲)

$5, 8, 13, 20, 29, \dots$ (۱)

۱۳۰- جمله عمومی الگوی درجه دوم مقابل کدام است؟

$t_n = n^2 + 3n - 4$ (۲)

$t_n = n^2 + 3n + 4$ (۱)

$t_n = n^2 - 4n + 3$ (۴)

$t_n = n^2 + 5n - 6$ (۳)

۱۳۱- سه جمله اول در یک دنباله درجه دوم -1 ، 1 و 7 هستند. جمله ششم کدام است؟

۴۹ (۴)

۴۷ (۳)

۵۱ (۲)

۵۳ (۱)

۱۳۲- چندتا از تساوی‌های زیر درست است؟

الف) $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ (الف) ب) $2+4+\dots+2n = n(n-1)$ (ب) پ) $1+3+5+\dots+(2n+1) = n^2$ (پ)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(۴) هر سه تساوی نادرست است.

۱۳۳- اگر $a_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$ باشد، آنگاه جمله صدم این دنباله کدام است؟

$0/5$ (۴)

$0/505$ (۳)

$0/05$ (۲)

$0/002$ (۱)

۱۳۴- حاصل عبارت $1/1 + 2/2 + 3/3 + 4/4 + \dots + 9/9$ کدام است؟

$51/25$ (۴)

$49/5$ (۳)

$48/75$ (۲)

$47/5$ (۱)

۱۳۵- مجموع اعداد طبیعی فرد از ۱ تا ۹۹ کدام است؟

۲۵۲۴ (۴)

۲۵۲۵ (۳)

۲۵۰۰ (۲)

۱۰۰۰۰ (۱)

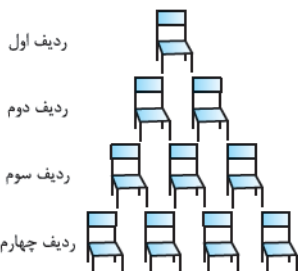
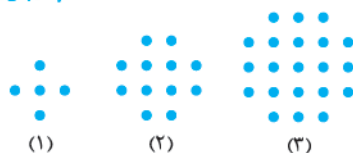
۱۳۶- در الگوی زیر، شکل هفتم از چند نقطه تشکیل خواهد شد؟

۷۹ (۱)

۷۷ (۲)

۷۵ (۳)

۷۳ (۴)



۱۳۷- صندلی‌های یک سالن به صورت روبه‌رو چیده شده‌اند. اگر سالن کلاً ۱۱ ردیف صندلی داشته

(کتاب درسی)

باشد، تعداد کل صندلی‌ها کدام است؟

۵۵ (۱)

۵۴ (۲)

۶۶ (۳)

۷۷ (۴)

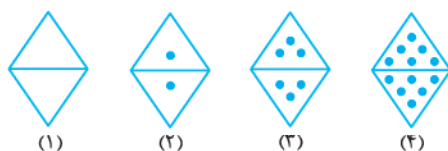
۱۳۸- با توجه به الگوی زیر تعداد نقطه‌های شکل نهم کدام است؟

۷۲ (۱)

۹۰ (۲)

۱۱۰ (۳)

۵۶ (۴)



۱۳۹- در الگوی مقابل، تعداد مثلث‌های کوچک شکل شماره (۸) چند برابر تعداد مثلث‌های کوچک در

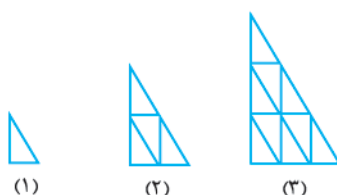
شکل شماره (۴) است؟

۲ (۲)

۴ (۱)

۸ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)





۱۴۰- در الگوی مقابل تعداد دایره‌های توپر شکل نوزدهم چه قدر است؟



۹۹ (۱)

۱۰۰ (۲)

۱۱۰ (۳)

۸۱ (۴)

۱۴۱- در سؤال قبل تعداد دایره‌های خالی شکل شانزدهم کدام است؟

۶۴ (۴)

۸۰ (۳)

۸۸ (۲)

۷۲ (۱)

۱۴۲- در الگوی زیر شکل دهم چند نقطه دارد؟

(کتاب درسی)



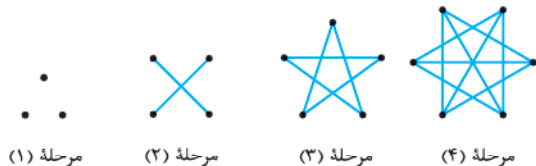
۱۹۸ (۲)

۱۹۰ (۱)

۲۰۲ (۴)

۲۱۰ (۳)

۱۴۳- در الگوی روبه‌رو، با چند نقطه تعداد پاره‌خط‌ها برابر ۲۰ است؟



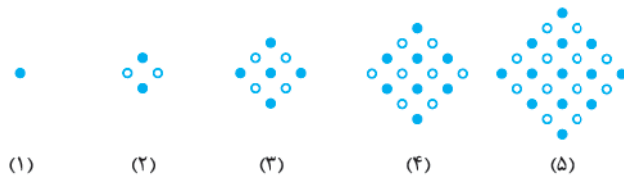
۶ (۱)

۸ (۲)

۱۰ (۳)

۱۲ (۴)

۱۴۴- در آرایه‌لوزی مقابل، تعداد صفرهای توپر در جمله یازدهم کدام است؟



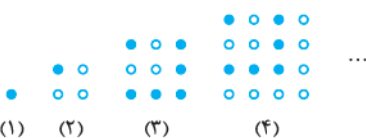
۶۱ (۱)

۶۲ (۲)

۶۳ (۳)

۶۴ (۴)

۱۴۵- در آرایه مربعی مقابل، تفاضل دایره‌های توپر در دو جمله دهم و یازدهم کدام است؟



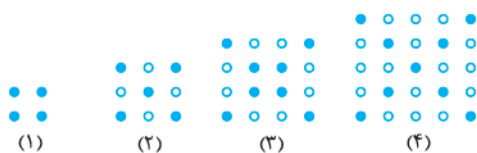
۱۷ (۲)

صفر (۱)

۲۱ (۴)

۱۹ (۳)

۱۴۶- با توجه به الگوی روبه‌رو، تعداد نقاط توخالی مرحله دوازدهم کدام است؟



۱۱۰ (۱)

۱۱۸ (۲)

۱۴۴ (۳)

۱۱۹ (۴)

درس ۸

دنباله و سایر الگوها

با الگوی خطی و درجه دوم که آشنا شدید!

حالا مفهوم عمومی‌تری را می‌بینیم:

هر تعداد عدد که پشت سر هم قرار می‌گیرند یک دنباله می‌نامیم. این اعداد جمله‌های دنباله هستند. مثلاً ۱۰، ۲۰، ۳، ۱۵، ۱۰۰۰، ۶۰، ۱۶ هستند. با ۷ عدد است که جمله سوم آن $a_3 = 3$ و جمله دوم آن $a_2 = 20$ است. اگر بتوانیم قانون a_n را بر حسب n بنویسیم، می‌گوییم جمله عمومی دنباله را نوشته‌ایم. کتاب درسی در تمرین از شما خواسته برای دنباله‌های زیر جمله عمومی بگوید:

(الف) $1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \dots$ اعداد فرد زیر رادیکال‌اند. $a_n = \sqrt{2n-1}$

(ب) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \dots$ هر بار بر ۱۰ تقسیم می‌شود. $a_n = \frac{2}{10^n}$

(پ) $1, 8, 27, 64, \dots$ اعداد مکعب کامل $a_n = n^3$

(ت) $-1, +1, -1, +1, \dots$ یک‌درمیان منفی و مثبت $a_n = (-1)^n$

(ث) $\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots$ عکس اعداد طبیعی $a_n = \frac{1}{n}$

(ج) $2, 1, 4, 1, 6, 1, \dots$ جمله‌ها شماره زوج، یک هستند. جمله‌های فرد، اعداد زوج‌اند. $a_n = \begin{cases} 1 & \text{زوج } n \\ n+1 & \text{فرد } n \end{cases}$

(چ) $2, 3, 5, 7, 11, \dots$ اعداد اول. جمله عمومی ندارد.

تست در دنباله با جمله عمومی $a_n = \frac{n-7}{n+1}$ مقدار جمله نهم چه قدر کم تر از جمله بیست و چهارم است؟

۰/۱۵ (۱) ۰/۴۸ (۲) ۰/۰۷ (۳) ۰/۱۳ (۴)

پاسخ گزینه ۲

$$a_n = \frac{n-7}{n+1} \begin{cases} \xrightarrow{n=9} a_9 = \frac{9-7}{9+1} = \frac{2}{10} = 0/20 \\ \xrightarrow{n=24} a_{24} = \frac{24-7}{24+1} = \frac{17}{25} \xrightarrow{\times 4} \frac{68}{25} = 0/68 \end{cases}$$

پس جمله نهم از جمله بیست و چهارم به اندازه ۰/۴۸ کم تر است.

به سؤالات دیگری درباره این دنباله پاسخ دهید.

$$\frac{n-7}{n+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2n-14=n+1 \Rightarrow n=15$$

الف) آیا جمله‌ای با مقدار $\frac{1}{2}$ دارد؟

بله، جمله پانزدهم برابر $\frac{1}{2}$ است.

$$\frac{n-7}{n+1} > \frac{2}{3} \Rightarrow 3n-21 > 2n+2 \Rightarrow n > 23$$

ب) چند جمله بیشتر از $\frac{2}{3}$ دارد؟

پس برای $n > 23$ یعنی از جمله بیست و چهارم به بعد، بی‌شمار جمله بیشتر از $\frac{2}{3}$ دارد.

پ) چند جمله منفی دارد؟

می‌دانیم n عددی طبیعی است، پس $n+1$ منفی نیست و $n-7$ هم برای $n \geq 7$ منفی نیست، پس فقط جملات اول تا ششم یعنی ۶ جمله منفی دارد.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶
a_n	$-\frac{6}{2}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{4}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{6}$	$-\frac{1}{7}$

ت) کم‌ترین مقدار در بین جملات آن کدام است؟

خب حتماً یکی از جمله‌های منفی (اول تا ششم) کم‌ترین است. ببینید:

پس $a_1 = -3$ از همه کم‌تر است.

مثال در دنباله $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = n + a_n$ ، جمله ششم کدام است؟

پاسخ به این نوع از جمله عمومی می‌گوییم «بازگشتی»، چون قانون مستقیم محاسبه جمله ششم را نداریم. ببینید:

$$a_1 = 1, a_{n+1} = n + a_n$$

$$n=1: a_2 = 1 + a_1 = 1 + 1 = 2$$

$$n=2: a_3 = 2 + a_2 = 2 + 2 = 4$$

$$n=3: a_4 = 3 + a_3 = 3 + 4 = 7$$

$$n=4: a_5 = 4 + a_4 = 4 + 7 = 11$$

$$n=5: a_6 = 5 + a_5 = 5 + 11 = 16$$

تحقیق کنید که دنباله a_n در این سؤال در جداول و جمله عمومی‌اش $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$ است!

تست اگر $a_{2n-1} = n^2$ و $a_{2n} = \frac{n}{3}$ ، مقدار $a_{14} + a_{15}$ کدام است؟

۶۴/۷۷ (۱) ۶۵/۳۳ (۲) ۶۵/۶۶ (۳) ۶۶/۳۳ (۴)

پاسخ گزینه ۲

این دنباله دوتا جمله عمومی دارد که یکی جملات شماره زوج و دیگری جمله‌های شماره فرد را تولید می‌کند.

$$a_{2n-1} = n^2 \Rightarrow \underbrace{a_1=1}_{n=1}, \underbrace{a_3=4}_{n=2}, \underbrace{a_5=9}_{n=3}$$

$$a_{2n} = \frac{n}{3} \Rightarrow \underbrace{a_2=\frac{1}{3}}_{n=1}, \underbrace{a_4=\frac{2}{3}}_{n=2}, \underbrace{a_6=1}_{n=3}$$

$$\xrightarrow{n=8} a_{15} = 8^2 = 64$$

برای رسیدن به a_{15} در a_{2n-1} باید $n=8$ بگذاریم؛

$$\xrightarrow{n=7} a_{14} = \frac{7}{3}$$

برای داشتن a_{14} هم باید در a_{2n} به جای n ۷ بگذاریم؛

$$a_{14} + a_{15} = \frac{7}{3} + 64 = 66 \frac{2}{3}$$

و جمع این‌ها می‌شود:

دنباله فیبوناتچی

این دنباله هم از نوع بازگشتی است. در آن $a_1 = 1$ و $a_2 = 1$ است و جمله‌های بعدی به صورت مجموع دو جمله قبل از خود هستند. این‌طوری:

۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ...

$$a_3 = a_1 + a_2$$

$$a_4 = a_2 + a_3$$

$$a_5 = a_3 + a_4$$

$$a_6 = a_4 + a_5$$

به زبان خارجی: $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

البته نوشتن جمله عمومی آن خیلی ساده نیست!



تست در دنباله فیبوناتچی $a_1 = a_2 = 1$ و هر جمله (از جمله سوم به بعد) جمع دو جمله مقابل است. اولین جمله مضرب ۷ و اولین جمله ۳ رقمی به ترتیب کدام جملات هستند؟

(۱) هشتم و یازدهم (۲) هشتم و یازدهم (۳) هفتم و دوازدهم (۴) هشتم و دوازدهم

پاسخ گزینه: جمله‌ها را بنویسیم تا به مضرب ۷ و عدد سه رقمی برسیم:
 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144$
 پس به ترتیب جملات هشتم و دوازدهم هستند.
 اولیه جمله سه رقمی $a_{12} = 144$ و اولیه جمله مضرب ۷ $a_8 = 21$

تست در دنباله $a_n = \frac{n}{n+1}$ حاصل ضرب جملات سوم تا نوزدهم چه قدر است؟

(۱) $\frac{3}{19}$ (۲) $\frac{4}{19}$ (۳) $\frac{3}{20}$ (۴) $\frac{1}{5}$

پاسخ گزینه: بیایید چندتا از جمله‌های سوم تا نوزدهم را کنار هم بنویسیم:

$$\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{17}{18} \times \frac{18}{19} \times \frac{19}{20}$$

نوزدهم هجدهم هفدهم پنجم چهارم سوم

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}$$

$$a_3 a_4 a_5 \dots a_{19} = \frac{3}{20}$$

خب مخرج هر کسر با صورت کسر بعدی ساده می‌شود:
 و فقط $\frac{3}{20}$ می‌ماند. یعنی:

تست در الگوی زیر جمله بعدی کدام است؟
 $\frac{12}{2}, \frac{22}{3}, \frac{32}{4}, \dots$

(۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{4}$ (۴) $\frac{4}{8}$

پاسخ گزینه: با کمی دقت الگوی جملات $\frac{n^2}{n+1}$ است و جمله بعدی می‌شود $\frac{4^2}{5}$ یعنی $\frac{16}{5}$ یا $\frac{3}{2}$.

تست اعداد طبیعی به شکل مقابل دسته‌بندی شده‌اند:

(۱) دسته اول (۲, ۳) دسته دوم (۴, ۵, ۶) دسته سوم (۷, ۸, ۹, ۱۰) دسته چهارم

مجموع اعداد دسته n ام کدام است؟

(۱) $\frac{n^2 + 2n}{2}$ (۲) $\frac{n^3 + n}{2}$ (۳) $\frac{n^3 + n^2}{2}$ (۴) $\frac{n^3 + 2n^2}{2}$

شماره دسته	۱	۲	۳	۴
جمع اعداد	۱	۵	۱۵	۳۴

پاسخ گزینه: به جمع اعداد دسته‌ها نگاه کنید:
 پس باید گزینه درست به ازای $n = 1, 2, 3$ به ترتیب ۱، ۵، ۱۵ و ۳۴ بدهد که فقط به (۲) می‌خورد.

اگر دوست دارید خودتان جمله عمومی را بسازید. باید دقت کنید که عدد آخر دسته n ام می‌شود $1 + 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ و عدد آخر

دسته قبلی می‌شود: $1 + 2 + \dots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۴۷- در دنباله $a_n = \frac{(-1)^n n}{3n-1}$ حاصل $a_1 + a_2$ کدام است؟

(۱) $\frac{0}{3}$ (۲) $\frac{-1}{3}$ (۳) $\frac{0}{7}$ (۴) $\frac{-1}{7}$

۱۴۸- در دنباله $b_n = \frac{3n+1}{5n-3}$ جمله چندم برابر $\frac{2}{3}$ است؟

(۱) هفتم (۲) هشتم (۳) نهم (۴) دهم

۱۴۹- اگر جمله هفتم از دنباله $a_n = \frac{An-5}{n^2+1}$ برابر $\frac{0}{88}$ باشد. جمله ششم این دنباله کدام است؟

(۱) $\frac{38}{37}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{39}{37}$ (۴) $\frac{41}{37}$



۱۵۰- اگر $a_n = \begin{cases} n^2 - 2 & n = 2k \\ 3n + 1 & n = 2k + 1 \end{cases}$ حاصل $a_7 + a_6$ کدام است؟

(۱) ۴۲ (۲) ۴۳ (۳) ۴۴ (۴) ۴۵

۱۵۱- در یک دنباله اعداد $a_1 = 1$ و برای هر عدد $n \geq 1$ داریم: $a_{n+1} = 2a_n + 1$. جمله هشتم کدام است؟

(۱) ۱۲۷ (۲) ۱۵۹ (۳) ۲۴۷ (۴) ۲۵۵

۱۵۲- جملات کدام دنباله همواره مثبت اند؟

(۱) $a_n = (-1)^n$ (۲) $b_n = n^2 - 6n + 7$ (۳) $c_n = n^2 + 4n - 2$ (۴) $d_n = \frac{n-6}{2n-5}$

۱۵۳- در دنباله $a_n = \frac{5n-2}{2n+3}$ چند جمله کوچک تر از ۲ داریم؟

(۱) شش (۲) هفت (۳) هشت (۴) نه

۱۵۴- در دنباله $a_n = \frac{n}{3n-1}$ کمترین جمله چه مقداری دارد؟

(۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{5}$

۱۵۵- بزرگترین و کوچکترین جمله دنباله $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ چه قدر اختلاف دارند؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۱۵۶- بزرگترین جمله دنباله $\frac{n^2}{3^n}$ چه عددی است؟

(۱) ۱ (۲) $1/1$ (۳) $1/125$ (۴) $1/2$

۱۵۷- اگر $t_{n-1} = 2n + 1$. آن گاه جمله بیستم دنباله t_n کدام است؟

(۱) ۴۱ (۲) ۱۳ (۳) ۱۷ (۴) ۱۵

۱۵۸- اگر $a_{n+1} = 3n - 2$. جمع جملات سوم تا ششم دنباله a_n کدام است؟

(۱) ۳۶ (۲) ۳۷ (۳) ۳۴ (۴) ۳۲

۱۵۹- در دنباله اعداد روبهرو جمله یازدهم کدام است؟

(۱) ۸۸ (۲) ۳۴ (۳) ۸۹ (۴) ۹۰

۱۶۰- در هر مرحله یک دایره و یک مربع درون مربع قبلی رسم می شود. مساحت

دایره مرحله چهارم چه قدر است؟

(۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) 2π (۳) π (۴) $\frac{\pi}{2}$

۱۶۱- بر طبق الگوی مقابل، حاصل سطر چهارم کدام است؟

(۱) ۲۷ (۲) ۲۸ (۳) ۲۹ (۴) ۳۰

۱۶۲- مجموع تمام جملات اول تا نود و نهم دنباله $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ کدام است؟

(۱) ۱۰ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۷

۱۶۳- در دنباله $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ مجموع جملات دوم تا نوزدهم کدام است؟

(۱) $0/55$ (۲) $0/95$ (۳) $0/45$ (۴) $0/85$

۱۶۴- اعداد طبیعی را به طریقی دسته بندی می کنیم که آخرین جمله هر دسته، مجذور کامل باشد: $(1), (2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9), \dots$. اختلاف جملات

اول و آخر در دسته دهم کدام است؟

(۱) ۱۹ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴) ۲۱

۱۶۵- اعداد طبیعی فرد را طوری دسته بندی می کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر شماره آن باشد. مجموع جملات در دسته دهم کدام است؟

(۱) دسته اول (۲) دسته سوم (۳) دسته دوم (۴) دسته اول

(۱) ۱۰۰۰ (۲) ۷۲۹ (۳) ۱۳۳۱ (۴) ۱۲۹۶

۱۶۶- در دنباله اعداد $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2n + 1$. جمله بیست و سوم کدام است؟

(۱) ۴۸۴ (۲) ۵۱۷ (۳) ۵۲۹ (۴) ۵۷۶

۱۶۷- در الگوی مقابل در شکل پنجم، چند نقطه وجود دارد؟

(۱) ۱۵۶

(۲) ۲۲۵

(۳) ۶۲۵

(۴) ۷۸۱

۱۶۸- شعاع بزرگ‌ترین دایره a است. در هر مرحله دو دایره جدید درون هر یک از دایره‌های

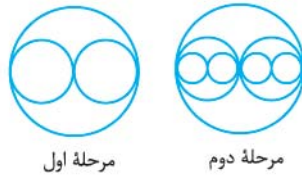
مرحله قبل رسم می‌شود. مجموع مساحت دایره‌های رسم شده در مرحله دهم کدام است؟

(۱) $\frac{10\pi a^2}{1024}$

(۲) $\frac{\pi a^2}{512}$

(۳) $\frac{\pi a^2}{1024}$

(۴) $\frac{5\pi a^2}{512}$



۱۶۹- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر شماره آن دسته باشد: $(1), (2, 3), (4, 5, 6), \dots$ جمله آخر در دسته

بیستم کدام است؟

(۱) ۱۹۰

(۲) ۲۱۰

(۳) ۲۰۱

(۴) ۱۹۱

۱۷۰- در دنباله $a_n = \frac{n+1}{n+3}$ ، حاصل ضرب $a_1 a_2 a_3 \dots a_{97}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{50}$

(۲) $\frac{3}{100}$

(۳) $\frac{1}{3300}$

(۴) $\frac{1}{1650}$

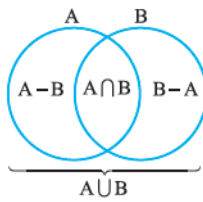
۱۷۱- اگر $a_n = \sqrt[n+1]{(n-7)^{n+1}}$ ، مجموع ۱۲ جمله اول دنباله a_n کدام است؟

(۱) ۳۶

(۲) ۶

(۳) ۲۴

(۴) ۱۸

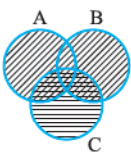


۸- **گزینه ۴** بایبید اول سؤال را با نمودار بررسی کنیم:
 $A - (A \cap B)$ می شود $A - B$. حالا سؤال تفاضل $A \cup B$ و این مجموعه را می خواهد، یعنی $(A \cup B) - (A - B)$ که با توجه به شکل می شود B . پس:
 $(A \cup B) - [A - (A \cap B)] = (A \cup B) - (A - B) = B = \{2, 4, 5, 6\}$
 و دارای ۴ عضو است.

۹- **گزینه ۴** $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ یعنی اعداد صحیحی که طبیعی نیستند که می شود مجموعه $\{0, -1, -2, \dots\}$ و $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$ یعنی اعداد صحیحی که حسابی نیستند که می شود مجموعه $\{-1, -2, \dots\}$. پس حاصل $(\mathbb{Z} - \mathbb{N}) - (\mathbb{Z} - \mathbb{W})$ برابر است با مجموعه $\{0\}$ که یک عضو دارد.

۱۰- **گزینه ۴** اعضای A عبارت اند از: $A = \{10, 11, 12, \dots, 98, 99\}$
 حالا B شامل ۷ برابر اعضای A است: $B = \{70, 77, 84, \dots, 693\}$
 7×99
 عضوهای مشترک A و B عبارت اند از اعداد دورقمی مضرب ۷ با شروع از ۷۰، یعنی $70, 77, 84, 91, 98$ یعنی $A \cap B$ پنج عضو دارد.

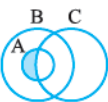
۱۱- **گزینه ۴** بدون شرح!



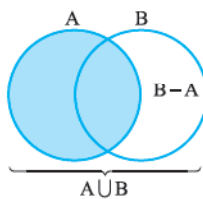
۱۲- **گزینه ۴** اگر $A \cup B$ را با هاشور (//) و C را با هاشور (≡) مشخص کنیم ناحیه مشخص شده می شود: $(A \cup B) \cap C$.



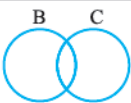
۱۳- **گزینه ۴** طبق نمودار روبه رو همان $B - (A \cap B)$ است. $B - A$ پس $A - (B - A) = A$ می خواهیم و چون A و $B - A$ اشتراکی ندارند، جواب تفاضل همان $A - (B - A) = A$ می شود.



۱۴- **گزینه ۴** اول یک نمودار را با توجه به شرایط سؤال می کشیم:
 دقت کنید که A زیرمجموعه B است و باید درون B قرار گیرد. حالا $A \cap (B - C)$ ناحیه سایه زده از A است و $A \cap B \cap C$ ناحیه سایه نخورده A است که اشتراکی ندارند، پس جواب می شود همان $A \cap (B - C)$ که با توجه به شکل $A \cap C'$ است (همان $A - C$).



۱۵- **گزینه ۴** $A \cup (B - A)$ همان $A \cup B$ است: پس سؤال گفته $A \cup B = B$ و در درس نامه دیدیم که این یعنی $A \subseteq B$.



۱۶- **گزینه ۴** A با هیچ کدام از مجموعه های B و C اشتراک ندارد. این شکلی: پس A با اجتماع آن ها هم اشتراکی ندارد: $A \cap (B \cup C) = \emptyset$

۱- **گزینه ۴** با توجه به شکل، $4 \in (A \cup B)$ و $A \subseteq C$ درست است، اما $3 \subseteq A$ درست نیست؛ چون ۳ عضو است و در رابطه $\subseteq$ باید مجموعه داشته باشیم و $2 \in (A \cup B)$ هم درست نیست، چون ۲ خارج از A و B است؛ پس می شود ۲ گزاره نادرست.

۲- **گزینه ۴** اگر گزینه ها را بررسی کنیم، می بینیم که $\{1\} \subseteq A$ نادرست است؛ چون $\{1\}$ عضوی از مجموعه A است. درستی بقیه گزینه ها را خودتان بررسی کنید!

۳- **گزینه ۴** B زیرمجموعه C نیست، چون ۲ عضو مجموعه B است که آن را در C نمی بینیم (به عنوان عضو نمی بینیم).

۴- **گزینه ۴** A زیرمجموعه B است، چون تنها عضو A را در B می بینیم: A عضو B هم هست، چون A را به صورت عضو در B داریم، ببینید: $B = \{2, \{2\}\} = \{2, A\}$ این A است.

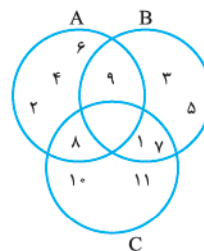
۵- **گزینه ۴** B عضو C است، چون خود B را به طور کامل در C داریم: $C = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\} = \{A, B\}$

۶- **گزینه ۴** تک تک گزینه ها را بررسی می کنیم:
 ۱) مجموعه $A - B$ شامل عضوهایی از A است که در B نباشند. فقط عضو سوم یعنی $\{1, 2, 3\}$ در مجموعه A در B نیست (اعضای ۱ و ۲ از A در B هم هستند)، پس $A - B = \{\{1, 2, 3\}\}$ که با C مساوی نیست.
 نکته: در واقع $A - B = \{C\}$ و C درست است.

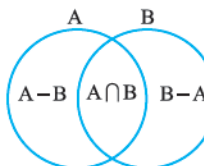
۲) $B - C$ مجموعه اعضایی است که در B هستند و در C نیستند که $\{1, 2\}$ این طور است، پس $B - C = \{\{1, 2\}\}$ و تهی نیست.
 ۳) همان طور که دیدیم $B - C = \{\{1, 2\}\}$ پس $B - C$ درست شد!

۵- **گزینه ۴** **راه اول** کافی است $A \cup B$ و $A \cap B$ را پیدا کنیم:
 $A = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$
 $B = \{2, 4, 6, 8\} \Rightarrow A \cap B = \{2, 4\}$
 $\Rightarrow (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 3, 6, 8\} \Rightarrow$ چهار عضو

راه دوم می دانیم $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$ ، پس:
 $A - B = \{1, 3\} \Rightarrow (A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} \Rightarrow$ چهار عضو
 $B - A = \{6, 8\}$



۶- **گزینه ۴** بهتر است مجموعه ها را با نمودار ون نشان دهیم که بررسی گزینه ها راحت تر باشد:
 حالا برویم سراغ گزینه ها: در ۱، $n((A \cup B) - C) = 6$ پس ۱ نادرست است. درستی بقیه گزینه ها را خودتان بررسی کنید.



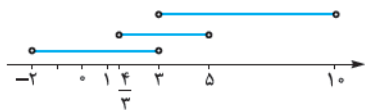
۷- **گزینه ۴** $A - (A - B)$ همان $A \cap B$ است. $B - (B - A)$ نیز همان $A \cap B$ است. علتش هم این نمودار، پس در واقع اجتماع $A \cap B$ با خودش را می خواهیم که همان $A \cap B = \{3, 6\}$ می شود که دو عضو دارد.

۴) $(1, 5) \cap (3, 7) = (3, 5)$

پس حاصل ۳) یک بازه نیست بلکه اجتماع دو بازه است.

۲۷- **گزینه ۴** مجموعه اعداد صحیح و مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{W}$ حسابی اند، پس $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$ شامل اعداد صحیح منفی است و اشتراک آن با بازه $[-5, 4]$ به صورت $\{-5, -4, -3, -2, -1\}$ است که ۵ عضو دارد.

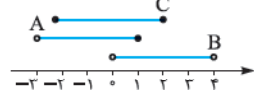
۲۸- **گزینه ۳** از محور اعداد کمک می گیریم:



داریم:

$$(-2, 3) \cup \left[\left(\frac{1}{3}, 5 \right) \cap (3, 10) \right] = (-2, 3) \cup (3, 5) = (-2, 5) - \{3\}$$

۲۹- **گزینه ۲** بازه ها را روی محور ببینید:



پس $A \cup C$ به صورت بازه $(-3, 4]$ است و اگر از آن B برداریم، تفاضل مورد نظر $[-3, 0)$ خواهد بود که ۳ عضو صحیح $\{-2, -1, 0\}$ را دارد.

۳۰- **گزینه ۳** اول محدوده X را در هر مجموعه تعیین می کنیم:

$$A = \{x \mid 1 < \frac{2x+1}{3} \leq 5, x \in \mathbb{Q}\} \Rightarrow 1 < \frac{2x+1}{3} \leq 5$$

$$\Rightarrow 3 < 2x+1 \leq 15 \Rightarrow 2 < 2x \leq 14 \Rightarrow 1 < x \leq 7$$

$$\Rightarrow A = \{x \mid 1 < x \leq 7, x \in \mathbb{Q}\}$$

$$B = \{x \mid 1 < \frac{x+5}{4} < 3, x \in \mathbb{N}\} \Rightarrow 1 < \frac{x+5}{4} < 3$$

$$\Rightarrow 4 < x+5 < 12 \Rightarrow 2 < x < 7$$

$$\Rightarrow B = \{x \mid 2 < x < 7, x \in \mathbb{N}\} = \{3, 4, 5, \dots, 14, 15\}$$

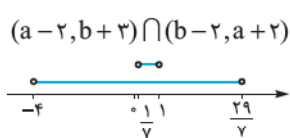
حالا چون اعضای B اعداد طبیعی هستند، پس $A \cap B = \{3, 4, \dots, 7\}$ و $A \cap B$ و C را پیدا می کنیم:

$$C = (-2, 8) - (-3, 4) \Rightarrow \text{Diagram showing } C = [4, 8)$$

پس $A \cap B = \{3, 4, \dots, 7\}$ و $C = [4, 8)$ ، پس $(A \cap B) \cap C = \{4, 5, 6, 7\}$ یعنی ۴ عضو مشترک داریم.

۳۱- **گزینه ۳** اجتماع $(b, 2) \cup (1, a)$ برابر $(-2, \frac{15}{7})$ شده است، پس کوچک ترین عدد یعنی b باید برابر -2 و بزرگ ترین عدد یعنی a باید برابر $\frac{15}{7}$ باشد. حالا مجموعه خواسته شده را روی محور نشان می دهیم:

$$(a-2, b+2) \cap (b-2, a+2) = (\frac{1}{7}, 1) \cap (-4, \frac{29}{7})$$



پس اشتراک دو بازه برابر $(\frac{1}{7}, 1)$ است که در ۱) نشان داده شد.

۳۲- **گزینه ۲** با توجه به شکل داده شده در سؤال $A \cap B$ به صورت $(-\sqrt{3}, \sqrt{5})$ است، پس داریم:

$$(A \cap B) - C = (-\sqrt{3}, \sqrt{5}) - (-2, 2] = (2, \sqrt{5})$$

که شامل هیچ عدد صحیحی نیست.

در مورد اشتراک B و C نظری نمی توان داد (۱) و (۲) نیستند و چون $B - C$ قسمتی از B است با A اشتراکی ندارد.

۱۷- **گزینه ۳** مجموعه های A_3 و A_4 را می نویسیم (به جای n اعداد ۳ و ۴ را می گذاریم):
 $A_3 = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq -3, 2^m \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$
 $A_4 = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq -4, 2^m \leq 4\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
 پس $A_3 \subseteq A_4$ و اشتراک آن ها می شود، A_3 که ۵ عضو و ۳۲ زیرمجموعه دارد.

۱۸- **گزینه ۳** $\sqrt{2}$ را که می دانیم گنگ است، اما سایر اعداد که نمایش اعشاری با ارقام مشخص دارند گویا هستند.

۱۹- **گزینه ۲** درستی (۲) را در درس نامه دیدیم.

۲۰- **گزینه ۳** تمام اعداد حسابی، صحیح هم هستند، پس $\mathbb{W} - \mathbb{Z}$ تهی است. تمام اعداد طبیعی، گویا هستند پس $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}'$ عضوی ندارد. عدد صحیح بین ۲ و ۳ هم نداریم. اما در (۳) اعداد طبیعی بین ۲ و ۳ عبارتند از: $\{1, 2\}$

۲۱- **گزینه ۲** با توجه به رابطه $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ و هر کدام از مجموعه های داده شده درستی هر کدام از گزاره ها را بررسی می کنیم:

۱) $\frac{\mathbb{Z} \cap \mathbb{W}}{\mathbb{W}} = \mathbb{N}$ نادرست ۲) $\frac{\mathbb{W} - \mathbb{Z}}{\emptyset} = \frac{\mathbb{Q} - \mathbb{Q}'}{\mathbb{Q}}$ نادرست

$\frac{\mathbb{W} \cap \mathbb{Q}}{\mathbb{W}} = \mathbb{N}$ نادرست $\frac{\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}}{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ نادرست

پس هر چهار گزاره نادرست اند.

۲۲- **گزینه ۲** درستی هر کدام از گزینه ها را بررسی می کنیم:

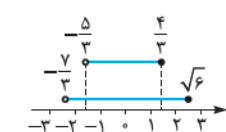
۱) $\frac{\mathbb{Q}' - \mathbb{Q}}{\mathbb{Q}'} \subseteq \mathbb{Q}'$ درست ۲) $\frac{\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}'}{\emptyset} \subseteq \mathbb{Q}'$ درست

۳) $\frac{\mathbb{Q} - \mathbb{Q}'}{\mathbb{Q}} \not\subseteq \mathbb{Q}'$ درست ۴) $\frac{\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'}{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{Q}$ نادرست

۲۳- **گزینه ۳** از بین گزاره های داده شده $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{7}, 2)$ و $\{0, 1\} \subseteq [-1, 2)$ درست اند. خودتان بگویید چرا بقیه نادرست اند!

۲۴- **گزینه ۲** $A - B$ شامل اعضای است که در A هستند و در B

نیستند. اگر محور را رسم کنیم، می بینیم اعداد ± 2 در A هستند و در B قرار نیستند؛ بنابراین ۲ عدد صحیح در $A - B$ هست.



۲۵- **گزینه ۳** اول حاصل هر کدام از گزینه ها را پیدا می کنیم:

۱) بازه $[2, 3]$ است:

۲) بازه $(-\infty, +\infty)$ یعنی کل $\mathbb{R}$ است:

۳) به صورت $[1, 2]$ است:

۴) بازه $(-3, 2)$ است:

پس (۲) بسته است.

۲۶- **گزینه ۳** اول حاصل هر کدام از گزینه ها را پیدا می کنیم:

۱) $(-3, 1) \cup (-2, 2) = (-3, 2)$

۲) $(-4, -2) - (-3, -2) = (-4, -3]$

۳) $(1, 5) - (3, 4) = (1, 3] \cup [4, 5)$

$\Rightarrow 5n + 5 \leq 4n + 4 \Rightarrow n \leq -3$
 حالا چون $n \leq -3$ شده است، مقدار طبیعی برای n وجود ندارد.

و جمع مقادیر n می شود $1+2+3=6$.

۴۷- گزینۀ ۱۱ اول A_1, A_2, A_3 را پیدا می‌کنیم. $A_1 = (-i, i)$ ؛

پس: $A_2 = (-1, 1), A_3 = (-2, 2), A_4 = (-3, 3)$

حالا حاصل عبارت خواسته شده را پیدا می‌کنیم:

$$(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = (-2, 2)$$

۴۸- گزینۀ ۱۱

۴۹- گزینۀ ۱۱ بازه‌های A_1, A_2, A_3 و A_4 را می‌نویسیم:

$$A_1 = [-i, \frac{9-i}{4}] \Rightarrow A_1 = [-1, 4], A_2 = [-2, \frac{7}{4}]$$

$$A_3 = [-5, 2], A_4 = [-7, 1]$$

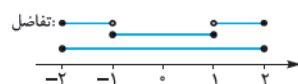
$$A_2 \cap A_3 = [-2, \frac{7}{4}] \cap [-5, 2] = [-2, 2]$$

پس:

$$A_1 \cap A_4 = [-1, 4] \cap [-7, 1] = [-1, 1]$$

$$[-2, 2] - [-1, 1] = [-2, -1) \cup (1, 2]$$

تفاضل آن‌ها برابر است با:

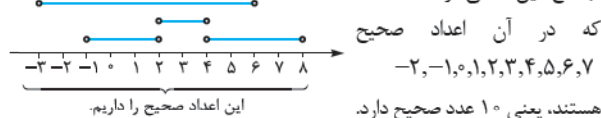


۵۰- گزینۀ ۱۱ بیا باید ۴ بازه اول را بنویسیم:

$$A_n = ((-1)^n n, 2n) \Rightarrow A_1 = (-1, 2), A_2 = (2, 4)$$

$$A_3 = (-3, 6), A_4 = (4, 8)$$

اجتماع این‌ها می‌شود $(-3, 8)$



که در آن اعداد صحیح

$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

هستند، یعنی ۱۰ عدد صحیح دارد.

۵۱- گزینۀ ۱۱ بیا باید مجموعه‌های A_1 تا A_4 را بنویسیم:

$$A_n = [n-1, n+1]$$

$$A_1 = [0, 2], A_2 = [1, 3], A_3 = [2, 4], A_4 = [3, 5]$$

اشتراک ۳ تایی اول برابر است با:

$$\bigcap_{n=1}^3 A_n = \{2\}$$

$$\bigcup_{n=1}^4 A_n = [0, 5]$$

اجتماع ۴ تایی اول هم برابر است با:

و تفاضل این‌ها $\{2\} - [0, 5]$ است که در $\{2\}$ آمده است.

۵۲- گزینۀ ۱۱ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

در ۱) اعداد صحیح کم‌تر از ۱۰۰ تا $-\infty$ می‌روند، پس نامتناهی است.

در ۲) اعداد گویای بین $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$ نامتناهی‌اند. چون بین هر دو عدد

گنگ، بی‌شمار عدد گویای دیگر وجود دارد، پس نامتناهی است. در ۳) هم

بی‌شمار عدد حقیقی در $(1, 2)$ وجود دارد، پس نامتناهی است؛ اما در ۴)

اعداد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰ دقیقاً از ۱ تا ۹۹ هستند که مجموعه‌ای متناهی

با ۹۹ عضو است.

۵۳- گزینۀ ۱۱ مجموعه اتم‌ها، درختان یا حشرات قطعاً انتها دارد و تعداد

اعضای آن‌ها عددی مشخص است (هر چه قدر بزرگ باشد باز هم محدود است)؛ اما

تعداد تمام دایره‌های قابل رسم به مرکز $(1, 2)$ تا بی‌نهایت می‌رود و متناهی نیست.

۵۴- گزینۀ ۱۱ فقط یک خط با شیب ۲ و گذرنده از مبدأ وجود دارد.

اما تعداد «مثلث‌ها با مساحت ۶»، «مربع‌ها با مساحت ۶ و رأس روی مبدأ و

خط‌های گذرنده از مبدأ» نامتناهی است.

۵۵- گزینۀ ۱۱ مضارب ۶، کلیه اعداد به صورت $6k$ (هم مثبت و هم

منفی) هستند. (نامتناهی)

مضارب مشترک ۶ و ۷، تمام اعداد به صورت $42k$ هستند. (نامتناهی)

مقسوم‌علیه‌های مشترک ۶ و ۷ اعداد ± 1 هستند. (متناهی است)

مجموعه مقسوم‌علیه‌های اول عدد ۱ هم تهی است. چون ۱ هیچ مقسوم‌علیه

اولی ندارد.

۵۶- گزینۀ ۱۱ مجموعه اعداد اول کم‌تر از 2^0 ، هشت‌عضوی است:

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

مجموعه اعداد طبیعی مربع کامل و کم‌تر از 7^0 نیز هشت‌عضوی است:

$$B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64\}$$

مجموعه مقسوم‌علیه‌های صحیح ۶ نیز هشت عضو دارد:

$$C = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

اما مجموعه کسرهای بین صفر و ۱ با مخرج ۷ دارای شش عضو است:

$$D = \{\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \dots, \frac{6}{7}\}$$

۵۷- گزینۀ ۱۱ اعداد $2k+6 = 2(k+3)$ همواره زوج‌اند. اعداد

$3k+1$ یا $3k-1$ می‌توانند زوج یا فرد باشند. اما اعداد $2k-5$ همیشه

فرد هستند، چون:

$$2k-5 = 2k-6+1 = 2(k-3)+1 = 2k'+1$$

۵۸- گزینۀ ۱۱ بزرگ‌ترین عدد صحیح یا بزرگ‌ترین عدد بازه $(2, +\infty)$

وجود ندارد، پس ۱) و ۲) نادرست است. بزرگ‌ترین عدد گویای کم‌تر از

۳ هم وجود ندارد، پس ۳) نادرست است. بزرگ‌ترین عدد گویای کم‌تر

یا مساوی ۴، برابر ۴ است و وجود دارد!

۵۹- گزینۀ ۱۱ $A = \{x \mid x = 2n-1, n \in \mathbb{N}\}$ یعنی مجموعه اعداد

فرد که نامتناهی است، پس ۱) نادرست است.

$B = \{x \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ به صورت $B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ و نامتناهی

است، پس ۲) نادرست است. $C = \{x \mid x = \frac{(-1)^n}{2}, n \in \mathbb{N}\}$ برابر است

با $C = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ که دو عضو دارد، پس متناهی است، یعنی جواب، ۳)

است. در مورد ۴) هم خودتان بررسی کنید.

۶۰- گزینۀ ۱۱ درست است، چون دو عدد طبیعی، دو عدد گویا

هم هستند و بینشان بی‌شمار عدد گویا وجود دارد. ۲) را هم در درس‌نامه

دیدیم که درست است، یعنی بین دو عدد گنگ بی‌نهایت عدد گویا وجود

دارد. ۳) نادرست است. چون مثلاً بین دو عدد گنگ $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ هیچ عدد

صحیحی وجود ندارد. در مورد درستی ۴) هم خودتان توضیح دهید!

۶۱- گزینۀ ۱۱ A متناهی و B نامتناهی است. پس $A \cup B$ و $B - A$

نامتناهی‌اند چون اولی شامل تمام B می‌شود و دومی دقیقاً قسمتی از B را دارد که

در A نیست. اما $A - B$ و $A \cap B$ حتماً متناهی‌اند چون قسمتی از A هستند.

۶۲- گزینۀ ۱۱ نادرست است. مثلاً اگر A مجموعه اعداد زوج باشد،

A' مجموعه اعداد فرد است و هر دو نامتناهی‌اند.

در ۲) اگر B نامتناهی باشد، زیرمجموعه آن یعنی A می‌تواند متناهی

باشد. مثلاً B اعداد فرد ولی $A = \{1\}$ زیرمجموعه آن متناهی است.

۳) نیز نادرست است. مثلاً A مجموعه مضارب ۵ و B مجموعه اعداد اول

است و هر دو نامتناهی‌اند و اجتماع آن‌ها $\mathbb{N}$ نیست.

۴) درست است. وقتی A نامتناهی می‌شود حتماً B هم نامتناهی است

چون B تمام عضوهای A را دارد!

۶۳- **گزینه ۱** درست است، مثلاً مجموعه $A = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ و $B = \{0, -1, -2, \dots\}$ هر دو نامتناهی اند، اما اشتراکشان برابر $\{0\}$ و متناهی است.

۶۴- **گزینه ۲** هم درست است، چون مجموعه‌های $A = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$ و $B = \{2, 5, 8, 11, \dots\}$ هر سه نامتناهی اند و هیچ کدام با هم اشتراک ندارند.

۶۵- **گزینه ۳** نادرست است، چون اگر $A \subseteq B$ و A نامتناهی باشد، حتماً B هم نامتناهی است. در مورد درستی **گزینه ۴** هم خودتان توضیح دهید.

۶۶- **گزینه ۲** مجموعه A یعنی اعداد فرد برابر است با $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ و مجموعه B یعنی اعداد اول برابر است با $B = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ $A - B = \{1, 9, 15, \dots\}$ نامتناهی است، $B - A = \{2\}$ که هم متناهی است و هم غیرتهی، پس جواب **گزینه ۲** است. در مورد **گزینه ۳** و **گزینه ۴** هم خودتان توضیح دهید.

۶۵- **گزینه ۳** A شامل تمام اعداد صحیح صفر، ± 3 ، ± 6 ، ± 9 و... است و در B اعداد صحیح بین -99 تا 99 را داریم. پس $A \cap B$ شامل اعداد صحیح مضرب ۳ بین -99 تا 99 است که تعدادشان محدود می‌شود (۶۷ تا هستند).

در بررسی گزینه‌ها، $A \cap B'$ نامتناهی است (مضارب بزرگ‌تر از ۱۰۰ عدد ۳ را دارد)؛ همچنین $A' \cup B$ نامتناهی است (اعداد صحیح خیلی بزرگ که مضرب ۳ نیستند و در A هستند)؛ $A \cup B$ نیز همین‌طور است.

۶۶- **گزینه ۲** هر کدام از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ نامتناهی $Q' - Q = Q'$

۲ متناهی $(Q - \mathbb{R}) \cap (Q' - \mathbb{Z}) = \emptyset \cap Q' = \emptyset$

۳ نامتناهی $(\mathbb{Z} - \mathbb{N}) \cap (Q - Q') = \{\dots, -3, -2, -1, 0\} \cap Q = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$

۴ نامتناهی $\overbrace{(\mathbb{N} - Q')}^{\emptyset = U} \cap \mathbb{Z}' = U \cap \mathbb{Z}' = \mathbb{Z}'$

حواسمان باشد که **گزینه ۲** برابر است با تهی و مجموعه تهی صفر عضو دارد و متناهی است.

۶۷- **گزینه ۳** وقتی متمم مجموعه A نسبت به مجموعه B قابل تعریف است که $A \subseteq B$ باشد، که از بین گزینه‌ها فقط **گزینه ۳** چنین است.

۶۸- **گزینه ۲** با توجه به $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4\}$ ، $A' = \{4, 5\}$ ، $B' = \{1, 3, 5\}$ بررسی می‌کنیم.

۱ $B' - A' = \{1, 3\}$ ✓

۲ $A' \cap B' = (A \cup B)' \Rightarrow$ همواره درست است. ✓

۳ $A - (A \cap B) = A - B = \{1, 3\}$ ✓

۴ $A' \cup B' = \{1, 3, 4, 5\}$ نادرست

۶۹- **گزینه ۲** داریم: $U = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ، $A = \{1, 3, 7, 8\}$ و $B = \{3, 6\}$ ، پس:

$B' = \{1, 2, 5, 7, 8, 9\}$ و $C' = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$ $\Rightarrow B' \cap C' = \{1, 2, 7, 8\}$

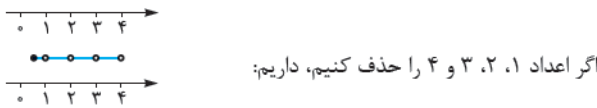
حالا $(B' \cap C') \cap A$ را پیدا می‌کنیم: $\{1, 2, 7, 8\} \cap \{1, 3, 7, 8\} = \{1, 7, 8\}$ سه عضو دارد

۷۰- **گزینه ۳** اول محدوده اعضای مجموعه A را پیدا می‌کنیم.

$A = \{2x + 3 \mid -1 \leq x < 7\}$
 $-1 \leq x < 7 \Rightarrow -2 \leq 2x < 14 \Rightarrow 1 \leq 2x + 3 < 17 \Rightarrow A = [1, 17)$
 پس A' برابر است با: $(-\infty, 1) \cup [17, +\infty)$

۷۱- **گزینه ۳** $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$ برابر است با: $\{-1, -2, -3, -4, \dots\}$
 پس متمم مجموعه $A = \{-1, -2, -3\}$ برابر است با: $\{-4, -5, \dots\}$
 (حواسمان باشد که نوع نوشتن $\{-4, -5, \dots\}$ یا $\{-4, -5, \dots\}$ با هم فرقی ندارد!)

۷۲- **گزینه ۲** اول بازه $[\frac{1}{4}, 4]$ را رسم می‌کنیم:



اگر اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ را حذف کنیم، داریم:

این مجموعه از اجتماع ۴ بازه $(\frac{1}{4}, 1)$ ، $(1, 2)$ ، $(2, 3)$ ، $(3, 4)$ ساخته شده است.

۷۳- **گزینه ۳** اول بازه‌ها را روی محور رسم می‌کنیم:

$A' \cup B = [-2, 3] \cup (-1, 5] = [-2, 5]$ ، $A \cap B = (3, 5]$
 پس بزرگ‌ترین عنصر هر دو مجموعه، ۵ است و اختلاف آن‌ها صفر می‌شود.

۷۴- **گزینه ۲** اول با توجه به $U = (2, +\infty)$ ، $B = (3, 5]$ ، $A = \{x \mid x \leq 9, x \in U\} = (2, 9]$ و $C = \{x \mid x \geq 7\} = [7, +\infty)$ مجموعه‌های $B' = (2, 3] \cup (5, +\infty)$ و $C' = (2, 7)$ را پیدا می‌کنیم:

پس حاصل عبارت خواسته‌شده برابر است با:
 $(A - C') \cap B' = ((2, 9] - (2, 7)) \cap ((2, 3] \cup (5, +\infty))$
 $= ([7, 9] \cap ((2, 3] \cup (5, +\infty))) = [7, 9]$

۷۵- **گزینه ۲** عضوهای A ، اعدادی هستند که مربعشان از ۵ بیشتر نباشد، پس با توجه به مجموعه مرجع داریم: $A = \{0, 1, -1, 2, -2\}$

در مجموعه B هم باید x های مثبت قرار دهیم که $5 - \sqrt{x}$ مربع کامل شود، پس:

$B = \{1\}$

بنابراین: $A' = U - A = \{3, 4\}$

$B - A = \emptyset \Rightarrow A' - (B - A) = \{3, 4\} - \emptyset = \{3, 4\}$

یعنی دوعضوی است.

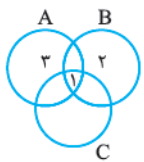
۷۶- **گزینه ۱** درست است. می‌دانیم اگر در رابطه زیرمجموعه بودن، مجموعه‌ها را متمم کنیم جهت، برعکس می‌شود یعنی از رابطه $A \subset B$ نتیجه می‌شود $B' \subset A'$. (خیلی هم مهم است، حتماً یادمان بماند!)

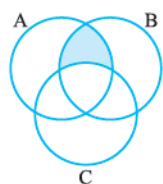
گزینه ۲ درست است. اگر $A - B$ تهی باشد، تمام اعضای A در B هستند و در نتیجه A زیرمجموعه B خواهد بود.

گزینه ۳ نادرست است. اگر $A \cap C = B \cap C$ باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت A با B برابر است. مثلاً این را ببینید: $A \neq B$ اما $A \cap C = B \cap C = \{1\}$

گزینه ۴ درست است. اگر اشتراک A و B برابر A باشد

یعنی تمام اعضای A با B مشترک‌اند، پس A زیرمجموعه B است.





۸۴- گزینه

$$C \cup A' \cup B'$$

می شود $(C \cup A' \cup B')' = C' \cap A \cap B$. حالا

برویم سراغ نمودار:

(ناحیه مورد نظر در A و B هست و در C نیست).

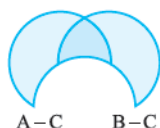
حالا گزینه ها:

$$(A \cap B) - (A \cap C) \quad 1$$

$A \cap B$



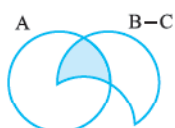
$A \cap C$



$A-C$

$B-C$

$$(A-C) \cup (B-C) \quad 2$$



$A \cap (B-C)$

$$A \cap (B-C) \quad 3$$



$A \cap B$

$A \cap (B-C)$

$$(A \cap B) - C \quad 4$$

۸۵- گزینه باید x عضو هر دو مجموعه $B-A$ و $C \cup D$ باشد، پس حتماً در B هست و در A نیست و در حداقل یکی از دو مجموعه C و D هم هست و $x \in D$ می تواند نادرست باشد. در مورد ۴ دقت کنید که:

$$x \in C \cup D \Rightarrow x \notin (C \cup D)' = C' \cap D'$$

۸۶- گزینه الف نادرست است، چون مثلاً اگر A مجموعه اعداد فرد باشد A' می شود مجموعه اعداد زوج و A و A' هر دو نامتناهی اند. (ب) درست است، چون وقتی B متناهی است، یعنی تعداد اعضای B اعداد مشخص است (با پایان) پس از آن جا که $\mathbb{N}$ بی شمار عضو دارد، تعداد اعضای B' هم می شود بی شمار، یعنی B' نامتناهی است. (پ) درست است، چون ممکن است A نامتناهی و A' متناهی باشد، ولی B متناهی است، پس B' نامتناهی است و در نتیجه $A' \cup B'$ به علت نامتناهی بودن B' ، حتماً نامتناهی است.

۸۷- گزینه وقتی هر عضو B ، عضوی از A هست، پس $B \subseteq A$. حالا گزینه ها را بررسی می کنیم:

$$1 \quad A \cap B = B, A \cup B' = U \Rightarrow \text{اشتراک دارند.}$$

$$2 \quad A - B = A \cap B', B' \Rightarrow \text{اشتراک دارند.}$$

$$3 \quad A', B' \xrightarrow{A' \subseteq B'} A' \Rightarrow \text{اشتراک دارند.}$$

$$4 \quad A' \cup B' = (A \cap B)' = B', B \Rightarrow \text{اشتراک ندارند.}$$

۸۸- گزینه اگر به $A_1 = \{1\}$ ، $A_2 = \{2, 3\}$ ، $A_3 = \{4, 5, 6\}$ و $A_4 = \{7, 8, 9, 10\}$ توجه کنیم، می بینیم که مجموعه A_n اولاً عضو (عدد متوالی طبیعی) دارد و ثانیاً بزرگ ترین عضو برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است، پس: $A_1 = \{46, 47, \dots, 55\}$ بنابراین A_1' برابر مجموعه اعداد طبیعی است که با اعضای دورقمی اش کار

۷۷- گزینه در شکل رویهرو A' با هاشور (//) و B را با هاشور (\ /) مشخص کرده ایم، پس ناحیه سایه خورده می شود $A' \cup B$.

در واقع این متمم $(A-B)$ است که می شود:

$$(A-B)' = (A \cap B)' = A' \cup B$$

۷۸- گزینه اول در شکل مقابل U $A' = \{1, 2, 3, 7, 8\}$ و $B-A = \{7, 8\}$ پس: $A' \cap (B-A)' = \{1, 2, 3, 7, 8\} \cap (\{7, 8\})' = \{1, 2, 3, 7, 8\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3\}$ راه دوم اول از قوانین مجموعه استفاده می کنیم:

$$A' \cap (B-A)' = A' \cap (B \cap A)' = A' \cap (B' \cup A)$$

$$= A' \cap B' = (A \cup B)'$$

حالا از روی شکل $(A \cup B)'$ برابر است با: $\{1, 2, 3\}$.

۷۹- گزینه $A \cap B'$ همان $A-B$ است، پس $(A-B) - (B-A)$ را می خواهیم، چون $A-B$ و $B-A$ اشتراک ندارند، تفاضل آن ها همان $A-B$ خواهد بود.

۸۰- گزینه اول نمودار ون دو مجموعه را رسم می کنیم: ناحیه $B-A$ ناحیه ۳ است؛ پس $(B-A)'$ نواحی ۱، ۲، ۴ است؛ حالا $(B-A)' - A$ می شود $\{1, 2\} - \{1, 2, 4\}$ ، یعنی ۴.

صورت سؤال متمم این را می خواهد، متمم ناحیه ۴ می شود نواحی ۱، ۲ و ۳ یعنی $A \cup B$.

راه دوم از روابط مجموعه ها داریم:

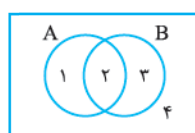
$$(B-A)' - A \xrightarrow{\text{تعریف تفاضل}} = (B \cap A)' \cap A'$$

$$\xrightarrow{\text{دمورگان}} = (B' \cup A) \cap A'$$

$$\xrightarrow{\text{بخشی}} = (B' \cap A') \cup (A \cap A') = B' \cap A' \quad \emptyset$$

$$\xrightarrow{\text{متمم}} = B \cup A$$

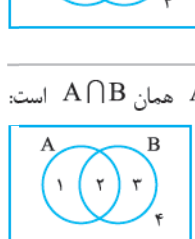
۸۱- گزینه نمودار ون دو مجموعه را رسم می کنیم:



$A-B$ ناحیه ۱ است، پس $(A-B)'$

نواحی ۲، ۳، ۴ است. $A \cup B$ نواحی ۱، ۲، ۳ و ۴ است و A' ناحیه ۴ است، بنابراین اشتراک این ها می شود ناحیه ۳ که همان $B-A$ است.

۸۲- گزینه طبق نمودار ون، $A - (A-B)$ همان $A \cap B$ است:



پس متمم $(A \cap B) \cup (A \cap B)'$ را

این برابر مجموعه مرجع است.

می خواهیم و جواب می شود $U' = \emptyset$.

۸۳- گزینه می دانیم $A \cup (A \cap B)$ همان A است. اجتماع $B \cap A$ و $B-A$ هم خود B است. پس $A' \cap B$ را می خواهیم که می شود $B-A$ یا $A'-B'$.

۹۶- گزینه: اول نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم:

۵ عضو در ناحیه مشترک اند، پس $14 - 5 = 9$

عضو فقط در A قرار دارند و $17 - 5 = 12$

عضو فقط در B هستند:

بنابراین $9 + 12 = 21$ عضو فقط در یکی از دو مجموعه هستند.

۹۷- گزینه: نمودار ون دو مجموعه A و B را رسم می‌کنیم:

$\Rightarrow n(A - B) + n(B - A)$ دقیقاً یکی

$= 70 - 32 + 57 - 32 = 127 - 64 = 63$

۹۸- گزینه: اگر فرض کنیم A مجموعه فیلم‌های پویانمایی و B مجموعه فیلم‌های طنز است. طبق داده‌های سؤال داریم:

$n(A \cap B) = 3, n(B) = 8, n(A) = 7$

حالا نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم:

$4 + 3 + 5 + x = 21 \Rightarrow x = 9$

تعداد فیلم‌های پویانمایی یا غیرطنز می‌شود $n(A \cup B')$ که طبق شکل برابر است با:

$7 + x = 7 + 9 = 16$

۹۹- گزینه: نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم:

۱۱ نفر فقط در تیم والیبال، ۷ نفر در هر دو تیم و ۱۳ نفر فقط در تیم فوتبال هستند. جمع این‌ها می‌شود ۳۱ نفر. پس $35 - 31 = 4$ نفر عضو هیچ تیمی نیستند.

راه دوم: تعداد دانش‌آموزانی که در هیچ تیمی نیستند برابر $n(F' \cap V')$

است:

$n(F' \cap V') = n(U) - n(F \cup V)$

$= n(U) - (n(F) + n(V) - n(F \cap V))$

$= 35 - (20 + 18 - 7) = 35 - 31 = 4$

۱۰۰- گزینه: نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم، داریم:

$n(F) = 15, n(B) = 11, n(U) = 25$

$n(F \cup B)' = 5$

$15 - x + x + 11 - x + 5 = 25 \Rightarrow x = 6$

۱۰۱- گزینه: اگر شب را با A و درون شهر را با B نشان دهیم، داریم:

$n(A) = 70, n(B') = 61 \Rightarrow n(B) = n(U) - n(B')$

$= 104 - 61 = 43$

حالا به $n(A \cup B)$ دقت کنید:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 70 + 43 - x = 113 - x$

این تعداد جرم‌هایی است که در شب یا درون شهر انجام شده و باید از 104 بیشتر نباشد:

$113 - x \leq 104 \Rightarrow x \geq 9$

یعنی تعداد جرم‌های درون شهر و در شب (مشترک A و B) حداقل ۹ است.

۱۰۲- گزینه: کافی است رابطه زیر را بنویسیم:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

و سپس با معادله $3y = 2x$ در یک دستگاه حل کنیم:

$75 = 3x + 10 + 2y + 5 - (x + y - 20)$

$\Rightarrow 2x + y = 40 \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 40 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 4y = 40$

داریم. تعداد مضارب دورقمی ۵ برابر است با ۱۸، چون داریم $10 \leq 5k \leq 95$ و در نتیجه $2 \leq k \leq 19$ ؛ از این اعضا عدد ۵۰ و ۵۵، هستند، پس A' دارای شانزده عدد دورقمی مضرب ۵ است.

۹۹- گزینه: می‌دانیم $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ، پس:

$30 = 15 + n(B) - 5 \Rightarrow n(B) = 20$

راه دوم: نمودار ون را رسم می‌کنیم:

$10 + 5 + x = 30 \Rightarrow x = 15$

$n(B) = x + 5 = 15 + 5 = 20$

۹۰- گزینه: از نمودار ون استفاده می‌کنیم:

$n(S) = 14$ سرود

$n(T \cup S) =$ عضو حداقل یکی از این گروه $\Rightarrow n(T) = 19$ تئاتر

$n(S \cap T) = 5$

۹۱- گزینه: نمودار دو مجموعه را رسم می‌کنیم:

تعداد اعضای A و B برابر $n(A) = n(B) = 4x$ ، پس داریم:

$n(A \cup B) = 3x + x + 3x = 7x$

یعنی جواب، مضرب ۷ است که در بین گزینه‌ها فقط مناسب است.

۹۲- گزینه: وقتی $n(A) = 10$ و $n(A') = 12$ است، چون A و A' هیچ عضو مشترکی ندارند، پس:

$n(U) = n(A \cup A') = n(A) + n(A') = 10 + 12 = 22$

پس حالا که $n(B) = 7$ است، در نتیجه:

$n(B') = n(U) - n(B) = 22 - 7 = 15$

۹۳- گزینه: نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم:

$n(A) = 60, n(B) = 40, n(A \cap B) = 20$

$40 + 20 + 20 + x = 100 \Rightarrow x = 20$

حالا تعداد اعضای $A - B$ برابر است با ۴۰ و تعداد اعضای $A' \cap B' = (A \cup B)'$ برابر است با ۲۰، پس تعداد اعضای $A - B$ تا از تعداد اعضای $(A \cup B)'$ بیشتر است.

۹۴- گزینه: اول فرض می‌کنیم $n(A \cap B) = x$ و نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم:

$2n(A) = 2n(B) = 6n(A \cap B) = 6x$

$\Rightarrow \begin{cases} n(A) = 2x \\ n(B) = 3x \\ n(A \cap B) = x \end{cases}$

پس حاصل عبارت داده‌شده برابر است با:

$\frac{n(A - B)}{n(B \cap A')} = \frac{n(A - B)}{n(B - A)} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

۹۵- گزینه: تعداد عضوهای هر قسمت را در نمودار ون می‌نویسیم:

$n(A \cap B) = n(A) - n(A - B) = 32 - 14 = 18$

$n(B - A) = 60 - 32 = 28$

پس نسبت تعداد عضوهای $B - A$ به $A \cap B$ برابر است با:

$\frac{n(B - A)}{n(A \cap B)} = \frac{28}{18} = \frac{14}{9} \approx 1/55$

۱۰۹- گزینه: به نمودار دقت کنید:

پس در ناحیه وسط یعنی $A \cap B$ باید $40 - 12 - 18 = 10$ عضو باشد.

حالا از هر یک از مجموعه‌های A و B نه عضو برداشته شده و از اشتراک آن‌ها ۴ تا کم شده است. پس از قسمت غیرمشتراک هر کدام ۵ تا کم می‌شود.

$n(A \cup B) = 7 + 6 + 13 = 26$

۵ تا کمتر ۴ تا کمتر ۵ تا کمتر

نکته: اجتماع دو مجموعه اولیه ۴۰ عضو دارد. ۹ + ۹ یعنی ۱۸ را برداشته‌ایم که ۴ تایش مشترک بوده، پس $40 - 18 + 4$ یعنی ۲۶ تا می‌ماند.

۱۱۰- گزینه: نمودار ون سه مجموعه را رسم می‌کنیم و برای پرکردن ناحیه‌ها از اشتراک هر سه مجموعه شروع می‌کنیم:

برای پیدا کردن تعداد بیمارانی که فقط بیماری C را دارند باید x را پیدا کنیم، پس:

$$30 + 50 + 50 + 30 + 40 + 160 + x = 400 \Rightarrow 360 + x = 400 \Rightarrow x = 40$$

۱۱۱- گزینه: باید به ازای هر کدام از گزینه‌ها مجموعه $A = \{1, 4, 7\}$ و $B = \{x \in U \mid x < 3\}$ را پیدا کنیم و ببینیم آیا $B = \{x \in Q' \mid x < 3\}$ جدا از هم هستند یا نه.

چون اعضای B همگی گنگ هستند A و B جدا از هم‌اند.

۱۱۲- گزینه: $Z - W \Rightarrow B = \{x \in Z - W \mid x < 3\}$

جدا از هم‌اند. $\Rightarrow \{-1, -2, -3, \dots\}$

۱۱۳- گزینه: $Q - Z \Rightarrow B = \{x \in Q - Z \mid x < 3\}$

B شامل اعداد گویای غیرصحیح کوچک‌تر از ۳ است، پس A و B عضو مشترکی ندارند. با این حساب جواب **۲** است، اما بگذارید **۲** را هم بررسی کنیم:

۱۱۴- گزینه: $Z \cap N \Rightarrow B = \{x \in Z \cap N \mid x < 3\} = \{2, 1\}$

A و B عضو مشترک ۱ دارند و جدا از هم نیستند.

این طوری به موضوع نگاه کنید که شرط B ، کم‌تر از ۳ را می‌پذیرد و در A فقط عضو ۱ این شرط را دارد، پس A و B وقتی جدا از هم هستند که در B عدد ۱ نباشد، پس مرجع B یعنی U شامل ۱ نیست.

$Q' - N$ و $Z - W$ خوب هستند اما $Z \cap N$ خوب نیست چون ۱ را دارد.

۱۱۴- گزینه: اگر A و B به ترتیب مجموعه مضارب ۲ و مضارب ۳ باشند، تعداد عضوهای $A \cup B$ را می‌خواهیم:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(مضارب مشترک ۲, ۳) - (مضارب ۳) + (مضارب ۲) =

تعداد عضوهای A یعنی تعداد مضارب ۲ در بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ برابر است با:

تعداد عضوهای B یعنی تعداد مضارب ۳ برابر است با:

مجموعه‌های A و B را ببینید:

$A = \{2, 4, 6, \dots, 100\}$

$B = \{3, 6, 9, \dots, 99\}$

اعضای مشترک A و B ، اعداد مضرب ۶ هستند. تعداد آن‌ها برابر است با:

$A \cap B = \{6, 12, 18, \dots, 96\} \Rightarrow n(A \cap B) = 16$

پس داریم:

$n(A \cup B) = 50 + 33 - 16 = 67$

$\Rightarrow y = 10 \Rightarrow x = 15$

حالا داریم:

$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

$= (3x + 10) - (x + y - 20) \xrightarrow[y=10]{x=15} 55 - 5 = 50$

۱۰۳- گزینه: $A' - B$ عضوهایی است که در A' هستند و در B نیستند. پس عضوهایی را می‌خواهیم که نه در A و نه در B باشند که تعداد آن‌ها $3x + 1$ است. بنابراین:

$n(A' - B) = n(A' \cap B') = 3x + 1 = 10 \Rightarrow x = 3$

حالا $x = 3$ را قرار دهیم:

بنابراین تعداد عضوهایی که به حداقل یکی از دو مجموعه تعلق دارند، یعنی $n(A \cup B)$ برابر است با:

$n(A \cup B) = 2 + 6 + 7 = 15$

۱۰۴- گزینه: نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم:

$n(A - B) = 3$, $n(B - A) = 7$

$n(B) = 2n(A) \Rightarrow 7 + x = 2(3 + x) \Rightarrow x = 1$

۱۰۵- گزینه: نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم: پس $A - B$ دارای ۳ و $B - A$ دارای ۴ عضو است. حالا خواسته سؤال:

$(A \cap B') \cup (A \cup B)'$

$= (A - B) \cup (A' \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

که با توجه به شکل، $3 + 4 = 7$ عضو دارد.

۱۰۶- گزینه: مهمان‌های سارا، هم‌کلاسی‌های مدرسه یا زبان هستند، پس $n(A \cup B) = 47$ و $n(A) = 24$ ، پس داریم:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$47 = 24 + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(B) - n(A \cap B) = 23$

$\Rightarrow n(B) = n(A \cap B) + 23$

پس تعداد هم‌کلاسی‌های زبان حداقل ۲۳ نفر است.

از طرف دیگر چون تعداد هم‌کلاسی‌های مدرسه ۲۴ نفر بود، تعداد مهمان‌های مشترک یعنی $n(A \cap B)$ نمی‌تواند بیشتر از ۲۴ باشد. پس $n(B) = 24 + 23 = 47$ حداکثر برابر است با:

یعنی تعداد هم‌کلاسی‌های زبان حتماً در فاصله $[23, 47]$ است.

۱۰۷- گزینه: $A - B$ یعنی عضوهایی از A که در B نباشند. برای این که تعداد عضوهای $A - B$ حداکثر شود باید تا حد امکان A و B کم‌ترین اشتراک را داشته باشند. اگر تعداد عضوهای مشترک را x بگیریم، داریم:

$17 - x + x + 12 - x \leq 22$

$\Rightarrow 29 - x \leq 22 \Rightarrow x \geq 7$

یعنی حداقل ۷ عضو مشترک لازم است؛ پس $A - B$ حداکثر ۱۰ عضو دارد.

۱۰۸- گزینه: اجتماع دو مجموعه در حالت اول $26 + 28 - 15 = 39$ عضو دارد. حالا ۱۶ عضو از A کم شده که ۹ تا از آن‌ها از اشتراک حذف شده‌اند. پس الان A دارای $36 - 16 = 20$ عضو است و اشتراک جدید هم $9 - 6 = 3$ عضو دارد. مجموعه B هم که به اندازه تعداد کم‌شده از اشتراک A و B یعنی ۹ عضو، از دست می‌دهد، یعنی تعداد اعضای B برابر ۱۹ تا است، پس تعداد اعضای اجتماع مجموعه A جدید با B برابر است با:

$20 + 19 - 3 = 36$

۱۱۳- گزینۀ ۲۲: جمله عمومی الگوی خطی $t_n = an + b$ است، پس:

$$\begin{cases} t_1 = 1 \Rightarrow a + b = 1 \\ t_7 = 5 \Rightarrow 7a + b = 5 \end{cases} \xrightarrow{(-)} a = 4 \Rightarrow b = -3$$

$$\Rightarrow t_n = 4n - 3$$

۱۱۴- گزینۀ ۲۳: می‌دانیم دنباله خطی نباید n^2 داشته باشد، پس

$$k = \frac{1}{3} \quad \text{و در نتیجه: } 3k - 1 = 0$$

$$a_n = \frac{1}{3}n + 2 \quad \text{پس داریم:}$$

$$a_7 = 1 + 2 = 3 \quad \text{و در نتیجه:}$$

۱۱۵- گزینۀ ۲۴: راه اول می‌دانیم در یک الگوی خطی میزان افزایش جملات، مقدار ثابتی است:

$$a_1, 3, 7, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$$

$$\quad \quad \quad +4 \quad +4 \quad +4 \quad +4 \quad +4 \quad +4 \quad +4 \quad +4 \quad +4$$

$$a_5 = 7 + 2 \times 4 = 15$$

$$a_8 = 7 + 5 \times 4 = 27$$

$$\frac{a_8}{a_5} = \frac{27}{15} = \frac{9}{5} = 1/8$$

راه دوم: با استفاده از $a_7 = 3$ و $a_7 = 7$ جمله عمومی را پیدا می‌کنیم، داریم $a_n = an + b$ ، پس:

$$\begin{cases} a_7 = 3 \Rightarrow 7a + b = 3 \\ a_7 = 7 \Rightarrow 7a + b = 7 \end{cases} \xrightarrow{(-)} a = 4$$

$$\Rightarrow b = -5 \Rightarrow a_n = 4n - 5$$

حالا نسبت جمله هشتم به پنجم را به دست می‌آوریم:

$$\frac{a_8}{a_5} = \frac{4(8) - 5}{4(5) - 5} = \frac{27}{15} = \frac{9}{5} = 1/8$$

۱۱۶- گزینۀ ۲۵: اولاً چون $t_n = kn^2 + 2n + k + 1$ یک دنباله خطی

است، پس نباید n^2 داشته باشیم، یعنی $k = 0$ و در نتیجه $t_n = 2n + 1$.

جمله اول این دنباله ۳ و فاصله بین جملاتش ۲ است پس باید الگوی خطی

دیگری تشکیل دهیم که جمله اولش $3 + 2 = 5$ و فاصله جملاتش $2 \times 3 = 6$

$$c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \dots$$

$$5 \quad 11 \quad 17 \quad \dots$$

باشد:

$$c_n = an + b \Rightarrow c_1 = 5 \Rightarrow a + b = 5$$

$$c_7 = 11 \Rightarrow 7a + b = 11$$

$$\xrightarrow{(-)} a = 6 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow c_n = 6n - 1$$

و حالا که داریم $c_n = 6n - 1$ ؛ پس c_{10} برابر است با: $6(10) - 1 = 59$

۱۱۷- گزینۀ ۲۶: اگر جمله عمومی دنباله خطی را $t_n = an + b$ فرض کنیم،

باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که حاصلش $t_{11} = 11a + b$ باشد:

$$\textcircled{1} \quad t_{13} - t_7 = (13a + b) - (7a + b) = 6a \quad \times$$

$$\textcircled{2} \quad t_5 + t_6 = (5a + b) + (6a + b) = 11a + 2b \quad \times$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{t_{22}}{2} = \frac{22a + b}{2} = 11a + \frac{b}{2} \quad \times$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{t_{10} + t_5 + t_8}{3} = \frac{10a + b + 5a + b + 8a + b}{3}$$

$$= \frac{23a + 3b}{3} = 11a + b \quad \checkmark$$

۱۱۸- گزینۀ ۲۷: اگر به الگوی صندلی‌ها نگاه کنیم می‌بینیم که در ردیف

اول ۷ صندلی داریم ($a_1 = 7$) و در هر ردیف ۲ تا اضافه می‌شود ($d = 2$).

$$a_{11} = a_1 + (10 \times 2) = 7 + 2 \times 10 = 27 \quad \text{پس:}$$

۱۱۹- گزینۀ ۲۸: راه اول در شکل اول ۴ پاره‌خط داریم، سپس در هر

شکل ۳ تا به آن اضافه می‌شود، پس در شکل دهم $4 + 3 + 3 + \dots + 3$ تا ۹ یعنی ۳۱ پاره‌خط وجود دارد.

راه دوم: مرحله اول را می‌نویسیم و سعی می‌کنیم جمله عمومی را حدس بزنیم:

شماره شکل	۱	۲	۳
تعداد پاره‌خطها	۴	۷	۱۰
الگو	$3(1) + 1$	$3(2) + 1$	$3(3) + 1$

با این حساب جمله عمومی دنباله برابر است با $a_n = 3n + 1$ ، پس در شکل

$$\text{دهم } a_{10} = 3(10) + 1 = 31 \text{ پاره‌خط داریم.}$$

۱۲۰- گزینۀ ۲۹: تعداد چوب‌کبریت‌ها را در هر شکل می‌نویسیم:

شماره شکل	۱	۲	۳
تعداد چوب‌کبریت‌ها	۵	۸	۱۱
الگو	$3(1) + 2$	$3(2) + 2$	$3(3) + 2$

با توجه به جدول جمله عمومی دنباله $t_n = 3n + 2$ است، پس:

$$3n + 2 = 53 \Rightarrow 3n = 51 \Rightarrow n = 17$$

راه دوم: تعداد چوب‌کبریت‌ها در سه شکل داده‌شده برابر است

با $5, 8, 11, \dots$ پس با یک الگوی خطی سروکار داریم، یعنی

$$\begin{cases} t_1 = 5 \Rightarrow a + b = 5 \\ t_7 = 8 \Rightarrow 7a + b = 8 \end{cases} \xrightarrow{(-)} a = 3 \quad \text{و: } t_n = an + b$$

$$\Rightarrow b = 2 \Rightarrow t_n = 3n + 2$$

و بقیه راه‌حل هم مثل راه اول.

۱۲۱- گزینۀ ۳۰: تعداد رأس‌ها در شکل‌ها می‌نویسیم:

شماره شکل	۱	۲	۳
تعداد رأس T	۶	۱۱	۱۶
الگو	$5(1) + 1$	$5(2) + 1$	$5(3) + 1$

با توجه به جدول $t_n = 5n + 1$ است، پس تعداد رأس‌های شکل پانزدهم

$$\text{برابر است با: } t_{15} = 5(15) + 1 = 75 + 1 = 76$$

راه دوم: تعداد رأس‌ها در سه شکل اول برابر است با $6, 11, 16, \dots$ پس

با یک الگوی خطی سروکار داریم:

$$\begin{cases} t_1 = 6 \Rightarrow a + b = 6 \\ t_7 = 11 \Rightarrow 7a + b = 11 \end{cases} \xrightarrow{(-)} a = 5 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow t_n = 5n + 1$$

و بقیه راه‌حل هم مثل راه اول.

۱۲۲- گزینۀ ۳۱: اگر به شکل‌ها نگاه کنیم، می‌بینیم در هر

مرحله، به شکل قبلی ۳ مربع و ۹ پاره‌خط اضافه می‌شود. پس تعداد مربع‌ها

$3(n-1)$ و تعداد پاره‌خطها $3 + 9(n-1)$ است که اختلاف این‌ها می‌شود:

$$(9n - 6) - (3n - 3) = 6n - 3$$

$$6n - 3 = 63 \Rightarrow 6n = 66 \Rightarrow n = 11 \quad \text{پس داریم:}$$

یعنی در مرحله یازدهم این اتفاق می‌افتد.

۱۲۷- گزینه: همان‌طور که در درس‌نامه دیدیم در یک دنباله درجه دوم، ضریب جمله n^2 نصف عدد ثابتی است که به اختلاف جمله‌ها اضافه می‌شود، یعنی:

$$5, 14, 29, \dots$$

در جمله عمومی $t_n = An^2 + B$ ضریب n^2 برابر است با $A = \frac{6}{2} = 3$ حالا با استفاده از مقدار جمله اول مقدار B را پیدا می‌کنیم:

$$t_n = 3n^2 + B, t_1 = 5 \Rightarrow 3(1)^2 + B = 5 \Rightarrow B = 2$$

$$\Rightarrow t_n = 3n^2 + 2$$

پس $t_n = 3n^2 + 2$ و در نتیجه t_8 برابر است با:

$$3(8)^2 + 2 = 3(64) + 2 = 194$$

۱۲۸- گزینه: مثل سؤال قبل، مقدار A را از روی مقدار ثابت اضافه‌شده به اختلاف جمله‌ها پیدا می‌کنیم:

$$6, 9, 14, 21, 30, \dots$$

پس $A = \frac{3}{2} = 1.5$ و در نتیجه:

$$\Rightarrow (1)^2 + B = 6 \Rightarrow B = 5$$

پس مقدار $A + B$ برابر است با:

راه دوم: چون $t_n = An^2 + Bn$ پس به ازای $n = 1$ داریم $t_1 = A + B$ و چون $t_1 = 6$ پس $A + B = 6$.

۱۲۹- گزینه: کافی است اختلاف جمله‌ها را در هر کدام از گزینه‌ها پیدا کنیم و ببینیم آیا اختلاف جمله‌ها یک الگوی خطی ایجاد می‌کنند یا نه:

$$5, 8, 13, 20, 29, \dots \checkmark$$

$$5, 12, 22, 35, 51, \dots \checkmark$$

$$0, 3, 8, 15, 24, \dots \checkmark$$

$$2, 6, 12, 18, 30, \dots \times$$

۱۳۰- گزینه: با توجه به گزینه‌ها الگوی داده‌شده درجه دوم است، پس اگر فرض کنیم $t_n = an^2 + bn + c$ داریم:

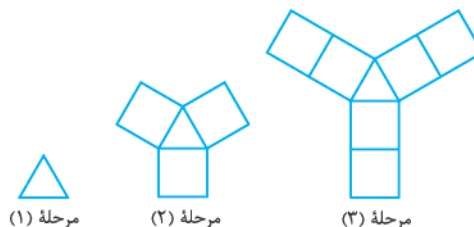
$$0, 8, 18, \dots \Rightarrow a = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow t_n = n^2 + bn + c$$

حالا از روی جمله اول و دوم مقدار b و c را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow 1 + b + c = 0 \\ t_2 = 8 \Rightarrow 4 + 2b + c = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = -1 \\ 2b + c = 4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)} b = 5 \Rightarrow c = 6$$

پس جمله عمومی دنباله برابر است با:



راه دوم: اختلاف بین تعداد مربع‌ها و تعداد پاره‌خط‌ها را در سه شکل اول

می‌نویسیم:

شماره شکل	۱	۲	۳
تعداد مربع‌ها	۰	۳	۶
تعداد پاره‌خط‌ها	۳	۱۲	۲۱
اختلاف	۳	۹	۱۵
الگو	$6(1) - 3$	$6(2) - 3$	$6(3) - 3$

با توجه به جدول الگوی اختلاف تعداد مربع‌ها و پاره‌خط‌ها برابر است با $t_n = 6n - 3$ و بقیه راه‌حل هم مثل راه اول.

۱۳۲- گزینه: می‌بینیم که اگر تعداد کاشی‌های سیاه و سفید را در هر

مرحله بنویسیم:

شماره شکل	۱	۲	۳	n
کاشی‌های سیاه	۶	۸	۱۰	$2n + 4$
کاشی‌های سفید	۱	۲	۳	n

پس وقتی ۱۶ کاشی سفید داریم در مرحله $n = 16$ هستیم و تعداد کاشی‌های سیاه می‌شود $2 \times 16 + 4 = 36$.

۱۳۴- گزینه: تعداد مربع‌های سفید و سیاه را در هر مرحله می‌نویسیم:

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	$\dots$	n^2
تعداد مربع‌های سفید	۱	۴	۹	۱۶	$\dots$	n^2
تعداد مربع رنگی	۳	۵	۷	۹	$\dots$	$2n + 1$

پس اختلاف موردنظر برابر است با $n^2 - (2n + 1)$ که در شکل بیستم می‌شود:

۱۳۵- گزینه: اگر پس از n دقیقه، مقدار آب ظرف‌های A و B را به ترتیب a_n و b_n بنامیم، داریم:

$$a_n = 10 + 2n$$

$$b_n = 6 + 3n$$

پس برای مساوی شدن مقدار آب دو ظرف باید $a_n = b_n$ باشد:

$$10 + 2n = 6 + 3n \Rightarrow n = 4$$

یعنی پس از ۴ دقیقه مقدار آب دو ظرف برابر می‌شود.

۱۳۶- گزینه: در شکل داده‌شده $a_2 = 7$ و $a_4 = 15$ است،

پس:

$$\begin{cases} a_2 = 7 \Rightarrow 2a + b = 7 \\ a_4 = 15 \Rightarrow 4a + b = 15 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

پس $a_1 = 3$ و $a_3 = 11$ یعنی در دنباله b_n داریم $b_1 = 3$ و $b_2 = 11$:

$$\begin{cases} b_1 = 3 \Rightarrow a + b = 3 \\ b_2 = 11 \Rightarrow 2a + b = 11 \end{cases} \xrightarrow{(1)} a = 8, b = -5 \Rightarrow b_n = 8n - 5$$

۱۳۱- گزینه ۴ راه اول

$$-1, 1, 7$$

$$\begin{array}{c} \swarrow +2 \searrow \\ +6 \end{array}$$

گفتیم در دنباله‌های درجه دوم، میزان افزایش جملات، یک دنباله حسابی می‌سازد. پس ادامه افزایش‌ها به صورت زیر است:

$$-1, 1, 7, a_4, a_5, a_6$$

$$\begin{array}{c} \swarrow +2 \searrow \swarrow +6 \searrow \swarrow +10 \searrow \swarrow +14 \searrow \\ +2 \quad +6 \quad +10 \quad +14 \quad +18 \end{array}$$

و بنابراین:

$$a_6 = 7 + 10 + 14 + 18 = 49$$

راه دوم طبق درس‌نامه با توجه به سه جمله اول اگر فرض کنیم

$$t_n = an^2 + bn + c$$

$$-1, 1, 7, \dots \Rightarrow a = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow a_n = 2n^2 + bn + c$$

$$\begin{array}{c} \swarrow +2 \searrow \\ +6 \end{array}$$

حالا می‌رویم سراغ جمله اول و دوم که b و c را پیدا کنیم:

$$\begin{aligned} t_1 = -1 &\Rightarrow 2 + b + c = -1 \Rightarrow \begin{cases} b + c = -3 \\ 2b + c = -7 \end{cases} \\ t_7 = 1 &\Rightarrow 8 + 2b + c = 1 \Rightarrow \begin{cases} b + c = -3 \\ 2b + c = -7 \end{cases} \\ \xrightarrow{(-)} &b = -4 \Rightarrow c = 1 \end{aligned}$$

$$a_6 = 2(6)^2 - 4(6) + 1 = 49 \quad \text{پس } a_n = 2n^2 - 4n + 1 \text{ و در نتیجه:}$$

۱۳۲- گزینه ۴ درستی رابطه (الف) یعنی

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

و (پ) که مجموع اعداد طبیعی زوج و فردند هم می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \dots + 2n &= 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{2n(n+1)}{2} = n(n+1) \\ 1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) &= 2 - 1 + 4 - 1 + 6 - 1 + \dots + (2n+2) - 1 \\ &= (2 + 4 + 6 + \dots + 2(n+1)) - \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n+1} \\ &= 2(1 + 2 + 3 + \dots + (n+1)) - (n+1) = \frac{2(n+1)(n+2)}{2} - (n+1) \\ &= (n+1)(n+2-1) = (n+1)^2 \end{aligned}$$

پس (ب) و (پ) هر دو نادرست‌اند. برای این که این سؤال‌ها را راحت‌تر حل کنیم بهتر است هر سه رابطه مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n و مجموع اعداد زوج از ۲ تا $2n$ و مجموع اعداد فرد از ۱ تا $(2n-1)$ را یاد بگیریم:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ 2 + 4 + \dots + 2n &= n(n+1) \\ 1 + 3 + \dots + (2n-1) &= n^2 \end{aligned}$$

۱۳۳- گزینه ۴ در درس‌نامه گفتیم که:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

پس داریم:

$$a_n = \frac{n(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{n} \xrightarrow{n=100} S_{100} = \frac{101}{100}$$

$$\frac{\times 5}{\times 5} \rightarrow \frac{505}{1000} = 0.505$$

۱۳۴- گزینه ۴ همه اعداد داده شده مضرب ۱/۱ هستند، پس از ۱/۱ فاکتور می‌گیریم:

$$1/1 + 2/2 + \dots + 9/9 = 1/1(1 + 2 + \dots + 9)$$

حالا با استفاده از رابطه $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ داریم:

$$1/1(1 + 2 + \dots + 9) = 1/1 \times \frac{9 \times 10}{2} = \frac{99}{2} = 49.5$$

۱۳۵- گزینه ۴ راه اول در حل سه سؤال قبل‌تر دیدیم که

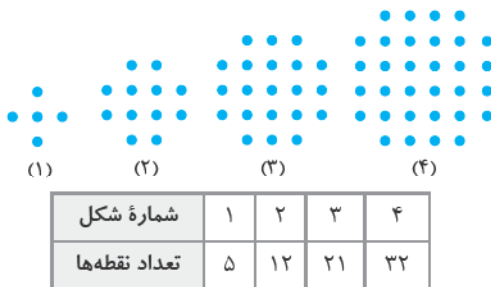
$$1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2 \text{ پس:}$$

$$1 + 3 + \dots + 99 = 1 + 3 + \dots + (2 \times 50 - 1) = 50^2 = 2500$$

راه دوم هر عدد طبیعی فرد به صورت $2n-1$ است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \dots + 99 &= 2 - 1 + 4 - 1 + \dots + 100 - 1 \\ &= (2 + 4 + \dots + 100) - \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{50} = 2(1 + 2 + \dots + 50) - 50 \\ &= \frac{2(50)(51)}{2} - 50 = 50(51) - 50 = 50(51-1) = 50 \times 50 = 2500 \end{aligned}$$

۱۳۶- گزینه ۴ راه اول اگر تعداد نقطه‌ها را در هر شکل بنویسیم:



می‌بینیم که:

$$5, 12, 21, 32, \dots$$

$$\begin{array}{c} \swarrow +7 \searrow \swarrow +9 \searrow \swarrow +11 \searrow \\ +7 \quad +9 \quad +11 \end{array}$$

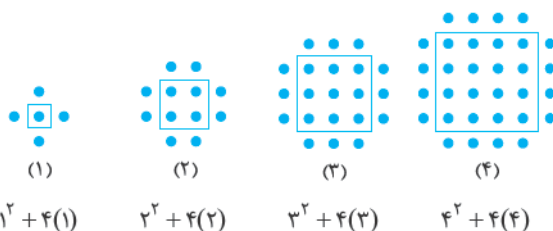
یک دنباله درجه دوم $t_n = an^2 + bn + c$ داریم که در آن $a = \frac{2}{2} = 1$ پس با استفاده از جمله اول و دوم داریم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} t_1 = 5 \Rightarrow 1 + b + c = 5 \Rightarrow b + c = 4 \\ t_2 = 12 \Rightarrow 4 + 2b + c = 12 \Rightarrow 2b + c = 8 \end{cases} \\ \xrightarrow{(-)} b = 4 \Rightarrow c = 0 \end{aligned}$$

پس $t_n = n^2 + 4n$ و در نتیجه تعداد نقطه‌های شکل هفتم برابر است با:

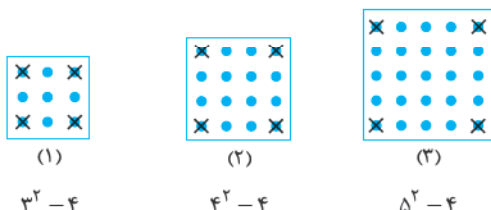
$$t_7 = 7^2 + 4(7) = 49 + 28 = 77$$

راه دوم از نقطه‌های هر شکل را به صورت زیر دسته‌بندی کنیم:



می‌بینیم که در شکل n ام $n^2 + 4n$ نقطه داریم، پس در شکل هفتم $7^2 + 4(7) = 77$ نقطه داریم.

راه سوم اگر نقطه‌های شکل‌ها به صورت زیر دسته‌بندی کنیم:

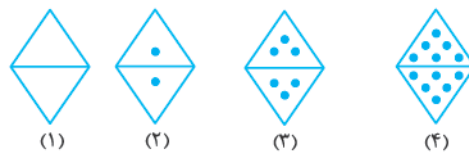


می‌بینیم که در شکل n ام $(n+2)^2 - 4$ نقطه داریم، پس در شکل هفتم $(7+2)^2 - 4 = 81 - 4 = 77$ نقطه داریم.

گزینه ۱۳۷ در ردیف اول ۱، در ردیف دوم ۲، در ردیف سوم ۳ و ... و در ردیف یازدهم ۱۱ صندلی وجود دارد. پس مجموع $۱+۲+...+۱۱$ را می‌خواهیم:

$$۱+۲+۳+...+۱۱ = \frac{۱۱ \times ۱۲}{۲} = ۱۱ \times ۶ = ۶۶$$

گزینه ۱۳۸ تعداد نقطه‌های هر شکل را می‌نویسیم و سعی می‌کنیم یک الگو پیدا کنیم:



شماره شکل	۱	۲	۳	۴
تعداد نقطه‌ها	۰	۲	۶	۱۲
الگو	$۲(۰)$	$۲(۱)$	$۲(۱+۲)$	$۲(۱+۲+۳)$

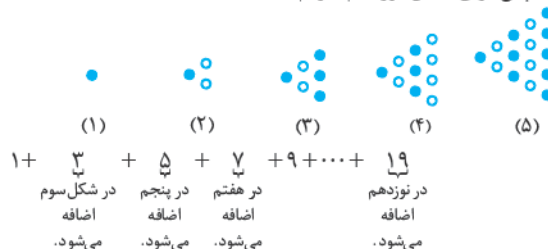
پس در شکل n ام $۲ \times (۰+۱+۲+...+n-1)$ نقطه داریم. حالا با توجه به رابطه مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n یعنی $۱+۲+...+n = \frac{n(n+1)}{۲}$ داریم:

$$t_n = ۲(۰+۱+۲+...+(n-1)) = ۲ \times \frac{(n-1)n}{۲} = (n-1)n$$

پس تعداد نقطه‌های شکل نهم برابر است با: $(۹-۱)(۹) = ۸ \times ۹ = ۷۲$

گزینه ۱۳۹ در شکل (۱) دقیقاً ۱ مثلث داریم. در شکل (۲) چهارتا مثلث کوچک داریم. در شکل (۳) نه‌تا مثلث کوچک داریم. الگوی این‌ها n^2 است. پس تعداد مثلث‌های کوچک در شکل‌های (۸) و (۴) به ترتیب $۶۴ = ۸^2$ و $۱۶ = ۴^2$ است و نسبت آن‌ها می‌شود ۴.

گزینه ۱۴۰ اگر تعداد دایره‌های توپر در شکل‌ها را به ترتیب بنویسیم می‌بینیم که ۱، ۱+۳، ۱+۳+۵، ۱+۳+۵+۷ و ... است. یعنی تعداد نقطه‌های توپر در دو شکل متوالی ثابت می‌ماند و سپس به اندازه عدد بعدی اضافه می‌شود. پس برای شکل نوزدهم داریم:

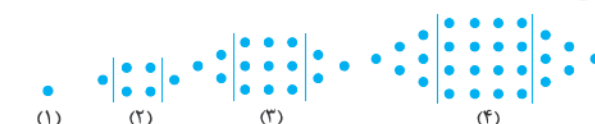


$$۱+۳+۵+۷+۹+...+۱۹ = \frac{۱+۱۹}{۲} \times ۱۰ = ۱۰ \times ۱۰ = ۱۰۰$$

گزینه ۱۴۱ در شکل اول دایره خالی نداریم؛ در شکل دوم ۲ تا اضافه می‌شود؛ شکل سوم همان قبلی است؛ در شکل چهارم ۴ تا اضافه می‌شود و ... پس در شکل شانزدهم $۲+۴+۶+۸+۱۰+۱۲+۱۴+۱۶$ دایره توخالی داریم که مجموع آن‌ها می‌شود:

$$(۲+۱۶) + (۴+۱۴) + (۶+۱۲) + (۸+۱۰) = ۴ \times ۱۸ = ۷۲$$

گزینه ۱۴۲ اگر به تعداد نقطه‌ها در شکل‌ها دقت کنیم، می‌توانیم بنویسیم:



$$۱^2 + ۲(۰) + ۲^2 + ۲(۱) + ۳^2 + ۲(۱+۲) + ۴^2 + ۲(۱+۲+۳)$$

پس در شکل n ام $n^2 + ۲(۱+۲+...+(n-1))$ نقطه داریم و چون $۱+۲+...+(n-1) = \frac{(n-1)n}{۲}$ پس در شکل n ام $n^2 + ۲ \times \frac{(n-1)n}{۲} = n^2 + n^2 - n = ۲n^2 - n$ نقطه‌های شکل دهم برابر است با: $۲(۱۰)^2 - ۱۰ = ۲۰۰ - ۱۰ = ۱۹۰$

راه دوم اگر تعداد نقطه را در چهار شکل اول بنویسیم:



می‌بینیم با یک الگوی درجه دوم سروکار داریم، پس $t_n = an^2 + bn + c$ و $a = \frac{۴}{۲} = ۲$ حالا می‌رویم سراغ جمله اول و دوم تا b و c را پیدا کنیم:

$$t_n = ۲n^2 + bn + c$$

$$\begin{cases} t_1 = ۱ \Rightarrow ۲ + b + c = ۱ \\ t_2 = ۶ \Rightarrow ۸ + ۲b + c = ۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = -۱ \\ ۲b + c = -۲ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} b = -۱ \Rightarrow c = ۰$$

پس جمله عمومی دنباله برابر است با $t_n = ۲n^2 - n$ و بقیه راه‌حل مثل راه اول.

گزینه ۱۴۳ اول تعداد پاره‌خط‌های شکل‌ها را می‌نویسیم.

مرحله	۱	۲	۳	۴
تعداد نقطه‌ها	۳	۴	۵	۶
تعداد پاره‌خط	۰, ۲, ۵, ۹	$+۲, +۳, +۴$		

پس تعداد نقطه‌ها در مرحله n ام برابر است با $a_n = n + ۲$ و تعداد پاره‌خط‌ها هم یک الگوی درجه دوم دارند. اگر الگوی تعداد پاره‌خط‌ها $b_n = an^2 + bn + c$ باشد، داریم $a = \frac{۱}{۲}$ و با استفاده از $b_1 = ۰$ و $b_2 = ۲$ مقدار b و c را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} b_1 = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲} + b + c = ۰ \\ b_2 = ۲ \Rightarrow ۲ + ۲b + c = ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = -\frac{۱}{۲} \\ ۲b + c = ۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} b = \frac{۱}{۲} \Rightarrow c = -۱$$

پس جمله عمومی تعداد پاره‌خط‌ها برابر است با $b_n = \frac{۱}{۲}n^2 + \frac{۱}{۲}n - ۱$ حالا تعداد پاره‌خط‌ها را برابر ۲۰ قرار می‌دهیم:

$$\frac{۱}{۲}n^2 + \frac{۱}{۲}n - ۱ = ۲۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}(n)(n+۱) = ۲۱ \Rightarrow n(n+۱) = ۴۲ \Rightarrow n = ۶$$

حالا چون $n = ۶$ شده است، پس تعداد نقاط برابر است با: $a_6 = ۶ + ۲ = ۸$

راه دوم اگر جدول را به همین ترتیب ادامه دهیم:

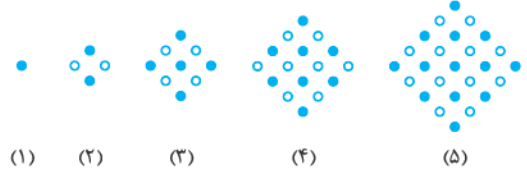
مرحله	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد نقطه‌ها	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
تعداد پاره‌خط	۰, ۲, ۵, ۹, ۱۴, ۲۰	$+۲, +۳, +۴, +۵, +۶$					

می‌بینیم که وقتی ۲۰ پاره‌خط داریم که تعداد نقطه‌ها برابر ۸ است.

۱۴۴- گزینه ۲ در شکل‌های شماره فرد (یعنی اولی و سومی) تعداد نقطه‌های توپر یکی بیشتر از توخالی است و در شکل‌های زوج شماره زوج تعداد نقطه‌های پر و خالی مساوی‌اند. پس با توجه به الگوی مربعی برای تعداد کل نقاط داریم:

$$\text{شکل فرد} \begin{cases} \text{تعداد پر} = \frac{n^2+1}{2} \\ \text{تعداد خالی} = \frac{n^2-1}{2} \end{cases} \quad \text{شکل زوج} \begin{cases} \text{تعداد پر} = \frac{n^2}{2} \\ \text{تعداد خالی} = \frac{n^2}{2} \end{cases}$$

پس در شکل یازدهم تعداد صفرهای توپر برابر است با: $\frac{11^2+1}{2} = \frac{122}{2} = 61$



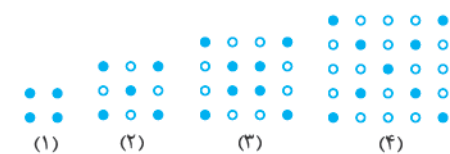
۱۴۵- گزینه ۲ در این آرایش، شکل n^2 ام دارای n^2 دایره است. شکل‌های فرد نسبت به شکل قبل از خود، به اندازه یک طول و عرض بیشتر دایره توپر دارند:



شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
تفاضل دایره‌های توپر	—	۰	۵	۰	۹
الگو	—	۰	$2(3)-1$	۰	$2(5)-1$

پس در شکل یازدهم نسبت به دهم، به تعداد $2 \times 11 - 1$ یعنی ۲۱ دایره توپر بیشتر دارد. توجه کنید که تعداد دایره‌های توخالی شکل‌های دهم و یازدهم برابر است.

۱۴۶- گزینه ۲ در هر مرحله یک مربع $(n+1) \times (n+1)$ داریم که دو قطر آن رنگ شده‌اند. از بین کل $(n+1)^2$ نقطه، برای n ‌های فرد، $(n+1)$ تا رنگ می‌شوند و برای n ‌های زوج، یک نقطه در وسط قرار دارد که دو بار به حساب می‌آید، پس $2n+1$ تا رنگ شده است. در مرحله دوازدهم $144 = (2 \times 12 + 1) - 13^2$ یعنی ۱۴۴ نقطه توخالی داریم.



۱۴۷- گزینه ۲ برای پیدا کردن a_1 و a_2 کافی است به جای n بگذاریم ۱ و ۲:

$$a_n = \frac{(-1)^n n}{2n-1} \Rightarrow a_1 = \frac{(-1)^1 \times 1}{2(1)-1} = -\frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{(-1)^2 \times 2}{2(2)-1} = \frac{2}{5}$$

$$a_1 + a_2 = -\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{-5+4}{10} = -\frac{1}{10}$$

پس:

۱۴۸- گزینه ۲ جمله عمومی دنباله یعنی $b_n = \frac{3n+1}{\Delta n-3}$ را برابر $\frac{2}{3}$

قرار می‌دهیم و n را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{3n+1}{\Delta n-3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 9n+3 = 10n-6 \Rightarrow n = 9$$

۱۴۹- گزینه ۲ اول با استفاده از $a_7 = 0/88$ مقدار A را در $\frac{7A-5}{7^2+1} = \frac{7A-5}{50} = \frac{88}{100} = \frac{44}{50}$ پیدا می‌کنیم:

$$\Rightarrow 7A-5 = 44 \Rightarrow 7A = 49 \Rightarrow A = 7$$

حالا جمله ششم را پیدا می‌کنیم:

$$A = 7 \Rightarrow a_n = \frac{7n-5}{n^2+1} \xrightarrow{n=6} a_6 = \frac{7 \times 6 - 5}{6^2+1} = \frac{37}{37} = 1$$

۱۵۰- گزینه ۲ در دنباله $a_n = \begin{cases} n^2-2 & n=2k \\ 3n+1 & n=2k+1 \end{cases}$ باید a_3 را از

ضابطه پایینی و a_6 را از ضابطه بالایی پیدا کنیم، پس:

$$\begin{cases} a_3 = 3(3)+1 = 10 \\ a_6 = 6^2-2 = 34 \end{cases} \Rightarrow a_3 + a_6 = 10 + 34 = 44$$

۱۵۱- گزینه ۲ اگر چند جمله دنباله را بنویسیم:

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1 \Rightarrow 1 \xrightarrow{\times 2 + 1} 3 \xrightarrow{\times 2 + 1} 7 \xrightarrow{\times 2 + 1} 15 \xrightarrow{\times 2 + 1} 31$$

می‌بینیم که هر کدام از جمله‌ها به شکل $2^n - 1$ است، یعنی $a_n = 2^n - 1$

$$\text{حالا جمله هشتم را پیدا می‌کنیم: } a_8 = 2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$$

۱۵۲- گزینه ۲ هر کدام از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) تکلیف $a_n = (-1)^n$ که مشخص است. جمله‌های یک‌درمیان مثبت و منفی‌اند.

در ۲) جمله عمومی را به صورت $b_n = n^2 - 6n + 7 = (n-3)^2 - 2$

می‌نویسیم، جمله دوم، سوم و چهارم دنباله منفی‌اند. در ۳) جمله عمومی

برابر است با $c_n = n^2 + 4n - 2 = (n+2)^2 - 6$ و چون $n \geq 1$ است،

پس $(n+2)^2 \geq 9$ و در نتیجه تمام جمله‌های دنباله مثبت‌اند. پس جواب،

۲) است. را هم خودتان بررسی کنید.

۱۵۳- گزینه ۲ جمله عمومی دنباله یعنی $a_n = \frac{\Delta n - 2}{2n + 3}$ را کوچک‌تر از ۲ قرار می‌دهیم و حدود n را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{\Delta n - 2}{2n + 3} < 2 \xrightarrow{(2n+3) > 0} \Delta n - 2 < 4n + 6 \Rightarrow n < 8$$

چون n عدد طبیعی است، پس از $n < 8$ نتیجه می‌گیریم $1, 2, \dots, 7$

یعنی هفت جمله کوچک‌تر از ۲ داریم.

۱۵۴- گزینه ۲ صورت کسر $a_n = \frac{n}{3n-1}$ همیشه مثبت و منفرجه

کسر به ازای $n = 1, 2, 3$ منفی و از آن به بعد مثبت است، پس از جمله

چهارم به بعد، مقادیر a_n مثبت هستند؛ پس کم‌ترین جمله در بین ۳ جمله

$$a_1 = \frac{1}{3-1} = -\frac{1}{2} \quad \text{اولی است:}$$

$$a_2 = \frac{2}{6-1} = \frac{2}{5} \quad a_3 = \frac{3}{9-1} = \frac{3}{8}$$

و از بین این سه جمله -3 از همه کوچک‌تر است.

۱۵۵- گزینه ۲ اول چند جمله اول دنباله را می‌نویسیم:

$$-\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

می‌بینیم با زیاد شدن n در جملات بعدی، مقادیر اعداد کم می‌شوند؛ پس

بیشترین مقدار (مثبت‌ترین و کم‌ترین مقدار (منفی‌ترین) در همین جملات

اول هستند: $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} - (-\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ ، حداقل $= -\frac{1}{4}$ ، حداکثر $= +\frac{1}{4}$

۱۵۶- گزینه: بیابید چند جمله اول دنباله را بنویسیم:

$$\frac{1}{2}, \frac{4}{4}, \frac{9}{8}, \frac{16}{16}, \frac{25}{32}, \dots$$

از جمله پنجم به بعد، در هر جمله مخرج دو برابر می شود ولی صورت دو برابر نمی شود؛ پس جمله ها کاهش می یابند و حتماً از ۱ کم تر هستند، یعنی

$$\frac{1}{2} \nearrow \frac{4}{4} \nearrow \frac{9}{8} \searrow \frac{16}{16} \searrow \frac{25}{32}$$

داریم:

پس بیشترین جمله در بین همین جمله ها است، یعنی $a_7 = \frac{9}{8}$ که برابر است با $\frac{1}{125}$.

۱۵۷- گزینه: چون t_{3n-1} را داریم، پس برای پیدا کردن t_7 باید در عبارت t_{3n-1} به جای n ، ۷ قرار دهیم:

$$t_{3n-1} = 2n + 1 \xrightarrow{n=7} t_7 = 2 \times 7 + 1 = 15$$

۱۵۸- گزینه: برای به دست آوردن a_5, a_4, a_3 باید در $a_{n+1} = 3n - 2$ به جای n مقادیر ۲، ۳، ۴ و ۵ را قرار دهیم:

$$\xrightarrow{n=2} a_3 = 3 \times 2 - 2 = 4$$

$$\xrightarrow{n=3} a_4 = 3 \times 3 - 2 = 7$$

$$\xrightarrow{n=4} a_5 = 3 \times 4 - 2 = 10$$

$$\xrightarrow{n=5} a_6 = 3 \times 5 - 2 = 13$$

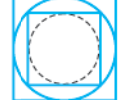
پس جمع جملات سوم تا ششم برابر است با: $4 + 7 + 10 + 13 = 34$

۱۵۹- گزینه: اگر به جمله ها دقت کنیم: $1, 1, 2, 3, 5, \dots$ می بینیم که بعد از دو جمله اول، هر جمله برابر جمع دو جمله قبلی اش است، پس جمله ها با همین الگو می نویسیم تا به جمله یازدهم برسیم:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

بد نیست بدانیم به این دنباله که در آن $a_1 = a_2 = 1$ و بعد از آن $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ است می گوئیم دنباله فیبوناتچی! (فیبوناتچی اسم یک ریاضی دان ایتالیایی است!)

۱۶۰- گزینه: اندازه قطر مربع و قطر دایره های



رسم شده برابر است و در مرحله اول به دوم داریم:

$$\text{قطر مربع} = 4 \Rightarrow \text{قطر دایره} = 4$$

پس اگر ضلع مربع دوم را a فرض کنیم:

$$\text{قطر} = a\sqrt{2} = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

پس قطر دایره دوم برابر است با $\frac{4}{\sqrt{2}}$ یعنی در هر مرحله از مرحله دوم به

بعد قطر دایره قبلی در $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ضرب می شود، پس قطر دایره مرحله چهارم برابر است با:

شماره مرحله	۱	۲	۳	۴
قطر دایره	۴	۴	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{\sqrt{2}}$

پس قطر دایره مرحله چهارم برابر ۲ و شعاعش برابر ۱ و در نتیجه مساحتش برابر $\pi(1)^2 = \pi$ است.

۱۶۱- گزینه: در سطر سوم $3^2 - 4^2 + 5^2$

داریم و در سطر چهارم $4^2 - 5^2 + 6^2$ خواهیم داشت که می شود $27 = 3^2 + 4^2 - 5^2$.

۱۶۲- گزینه: جمله های اول تا نود و نهم

$$b_1 = \sqrt{2} - \sqrt{1}$$

$$b_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$b_3 = \sqrt{4} - \sqrt{3}$$

...

$$b_{98} = \sqrt{99} - \sqrt{98}$$

$$b_{99} = \sqrt{100} - \sqrt{99}$$

حالا اگر این ها را جمع کنیم، رادیکال اول در هر جمله با رادیکال دوم در جمله بعدی حذف می شود:

$$(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3})$$

$$+ \dots + (\sqrt{99} - \sqrt{98}) + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) = -\sqrt{1} + \sqrt{100} = -1 + 10 = 9$$

۱۶۳- گزینه: مثل سؤال قبل، اول جمله ها را می نویسیم:

$$S = u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_{18} + u_{19}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{19}\right) + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{20}\right)$$

کسر سمت راست هر پرانتز با کسر سمت چپ پرانتز بعدی ساده می شود:

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{18} - \frac{1}{19} + \frac{1}{19} - \frac{1}{20}$$

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20} = 0.45 \quad \text{پس فقط } \frac{1}{2} - \frac{1}{20} \text{ باقی ماند:}$$

۱۶۴- گزینه: اگر دسته بندی داده شده را بنویسیم:

$$(1), (2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9), \dots$$

می بینیم اعداد دسته n ام عبارت اند از $1 + (n-1)^2$ تا n^2 ، پس دسته دهم عبارت است از $(1^2 + 1, \dots, 10^2)$ یعنی $(81, 83, \dots, 100)$ ، پس اختلاف جمله اول و آخر دسته دهم برابر است با $100 - 81 = 19$.

۱۶۵- گزینه: راه اول: بیابید مجموع جملات ۴ دسته اول را حساب

$$\underbrace{(1)}_1, \underbrace{(3, 5)}_8, \underbrace{(7, 9, 11)}_{27}, \underbrace{(13, 15, 17, 19)}_{64}$$

کنیم:

پس به نظر می آید مجموع جملات دسته n ام برابر n^3 باشد. یعنی مجموع جملات دسته دهم ۱۰۰۰ است.

راه دوم: تا پایان دسته دهم به تعداد ۵۵ = $1 + 2 + 3 + \dots + 10$ تا عدد فرد نوشته شده است. پس آخرین عدد در دسته دهم، پنجاه و پنجمین عدد فرد یعنی ۱۰۹ است و داریم:

$$109 + 107 + 105 + 103 + 101 + 99 + 97 + 95 + 93 + 91 = 1090$$

در این مجموع، جمع اعداد اول و آخر برابر ۲۰۰ است و داریم:

$$200 + 200 + 200 + 200 + 200 = 1000$$

۱۶۶- گزینه: داریم $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$. چند جمله اول

$$a_2 = a_1 + 3 = 1 + 3 = 4 = 2^2$$

دنباله را می نویسیم:

$$a_3 = a_2 + 5 = 4 + 5 = 9 = 3^2$$

$$a_4 = a_3 + 7 = 9 + 7 = 16 = 4^2$$

می بینیم که مقدار هر جمله، برابر مربع شماره آن است، یعنی $a_n = n^2$.

$$a_{23} = 23^2 = 529$$

پس:

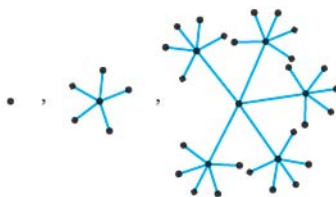
$$a_7 = \sqrt[7]{0^7} = 0, a_8 = \sqrt[8]{1^8} = 1, a_9 = \sqrt[9]{2^9} = 2$$

$$a_{10} = \sqrt[10]{3^{10}} = 3, a_{11} = \sqrt[11]{4^{11}} = 4, a_{12} = \sqrt[12]{5^{12}} = 5$$

و جمع آن‌ها برابر است با: ۱۸.

۱۶۷- گزینه

تعداد نقطه‌های هر کدام از شکل‌ها را می‌نویسیم تا الگو را حدس بزنیم:

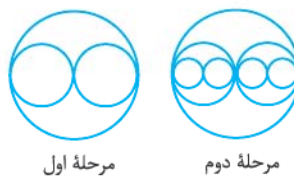


شماره شکل	۱	۲	۳
تعداد نقطه‌ها	۱	۶	۳۱
الگو	۱	۱+۵	۱+۵+۲۵

پس در شکل n ام به تعداد $a_n = 1 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^{n-1}$ نقطه داریم، بنابراین تعداد نقطه‌های شکل پنجم برابر است با:

$$a_5 = 1 + 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 = 1 + 5 + 25 + 125 + 625 = 781$$

۱۶۸- گزینه



مرحله اول

مرحله دوم

در مرحله اول دو دایره رسم می‌شود که شعاع هر کدام $\frac{a}{4}$ است. در مرحله دوم ۴ دایره رسم می‌شود که شعاع هر کدام

$\frac{a}{4}$ است. پس با توجه به دنباله، در هر مرحله تعداد دایره‌ها دو برابر می‌شود و شعاع هر دایره نصف می‌شود. بنابراین در مرحله n ام، 2^n دایره رسم می‌شود که شعاع هر کدام $\frac{a}{2^n}$ است. در مرحله دهم، 2^{10} دایره رسم می‌شود که شعاع هر کدام $\frac{a}{2^{10}}$ است و مجموع مساحت این دایره‌ها برابر است با:

$$S = 2^{10} \times \left(\pi \left(\frac{a}{2^{10}} \right)^2 \right) = 2^{10} \times \pi \frac{a^2}{2^{20}} = \frac{\pi a^2}{1024}$$

۱۶۹- گزینه

در دسته‌بندی $(1), (2, 3), (4, 5, 6), \dots$ در هر دسته به تعداد شماره دسته عدد داریم، پس:

$$\begin{matrix} (1), & (2, 3), & (4, 5, 6), & (7, 8, 9, 10), & \dots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ 1 & 1+2 & 1+2+3 & 1+2+3+4 & \end{matrix}$$

پس عدد آخر دسته n ام برابر است با $1 + 2 + 3 + \dots + n$ ، بنابراین عدد آخر دسته بیستم برابر است با: $1 + 2 + 3 + \dots + 20 = \frac{20 \times 21}{2} = 210$

۱۷۰- گزینه

اول جمله‌های دنباله را می‌نویسیم:

$$a_1 = \frac{2}{4}, a_2 = \frac{3}{5}, a_3 = \frac{4}{6}, \dots, a_{96} = \frac{97}{99}, a_{97} = \frac{98}{100}$$

با کمی دقت، جملات فرد به صورت $\frac{2}{4}, \frac{4}{6}, \frac{6}{8}, \dots, \frac{96}{98}$ و جملات زوج هم به صورت $\frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \dots, \frac{97}{99}$ هستند. در هر قسمت با ساده‌کردن اعداد از صورت و مخرج هر کسر با کسر بعدی، فقط صورت کسر اول و مخرج کسر آخر می‌مانند. پس:

$$\begin{cases} \text{ضرب جملات زوج} = \frac{2}{100} \\ \text{ضرب جملات فرد} = \frac{3}{99} \end{cases} \Rightarrow \text{جواب} = \frac{2}{100} \times \frac{3}{99} = \frac{1}{50 \times 33} = \frac{1}{1650}$$

۱۷۱- گزینه

بیابید جمله‌ها را بنویسیم:

$$a_1 = \sqrt[3]{(-6)^3} = -6, a_2 = \sqrt[4]{(-5)^4} = -5, a_3 = \sqrt[5]{(-4)^5} = -4$$

$$a_4 = \sqrt[6]{(-3)^6} = -3, a_5 = \sqrt[7]{(-2)^7} = -2, a_6 = \sqrt[8]{(-1)^8} = -1$$