

دهم ریاضی

حمیدرضا بیات
مرتضی خامی ابدی
کیان کریمی خراسانی



پیشگفتار

به نام خداوند جان و خرد
کزین برتر اندیشه برنگذرد

بسیار خرسندیم که کتاب ریاضی دهم را در اختیار دانش‌آموزان عزیز و دبیران گرامی قرار می‌دهیم. این کتاب در اصل برای دانش‌آموزان «مدارس استعدادهای درخشان» تألیف شده است؛ اما استفاده از آن‌ها، به دانش‌آموزان ممتاز سایر مدارس کشور و داوطلبان شرکت در مسابقات نیز توصیه می‌شود.

از ویژگی‌های این کتاب می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- آموزش پیشرفته کتاب درسی با مثال‌های متنوع؛
- تمرین‌های تفکیک شده براساس درس‌های هر فصل به همراه پاسخنامه تشریحی؛
- پرسش چهارگزینه‌ای برای هر فصل به همراه پاسخنامه تشریحی؛
- طبقه‌بندی تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای به کمی دشوار (☆)، دشوار (☆☆) و دارای نکته کلیدی (✉)؛

امیدواریم این کتاب مورد توجه دانش‌آموزان عزیز، دبیران گرامی و خانواده‌ها قرار گیرد و در ارتقای سطح علمی دانش‌آموزان مؤثر واقع شود. در پایان لازم می‌دانیم از مؤلفان محترم کتاب آقایان: حمیدرضا بیات، مرتضی خممامی‌ابدی و کیان کریمی خراسانی که این کتاب را زیر نظر آقای مهندس هادی عزیززاده تألیف کرده‌اند، تشکر کنیم.

هم‌چنین از خانم‌ها نوری، آهنگر و مرادی که زحمت حروفچینی و صفحه‌آرایی و خانم سربندی که زحمت ترسیم شکل‌ها و خانم بهاره خدایی که طراحی جلد را برعهده داشته‌اند، سپاسگزاریم.

انتشارات مبتکران

عنوان

صفحه

۷	فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله
۸	درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی
۱۵	درس دوم: متمم یک مجموعه
۱۸	درس سوم: الگو و دنباله
۲۷	درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی
۳۶	تمرین‌ها
۴۳	پاسخ تشریحی تمرین‌ها
۵۴	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۶۳	پاسخ تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۸۱	فصل دوم: مثلثات
۸۲	درس اول: نسبت‌های مثلثاتی
۹۲	درس دوم: دایره مثلثاتی
۱۰۲	درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی
۱۰۵	تمرین‌ها
۱۱۱	پاسخ تشریحی تمرین‌ها
۱۲۲	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۲۹	پاسخ تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۴۵	فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری
۱۴۶	درس اول: ریشه و توان
۱۵۲	درس دوم: ریشه n ام
۱۵۶	درس سوم: توان‌های گویا
۱۶۰	درس چهارم: عبارت‌های جبری
۱۷۰	تمرین‌ها
۱۷۷	پاسخ تشریحی تمرین‌ها
۱۹۰	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۹۸	پاسخ تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۱۳	فصل چهارم: معادلات و نامعادلات
۲۱۴	درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن
۲۲۳	درس دوم: سهمی
۲۳۶	درس سوم: تعیین علامت

صفحه

عنوان

۲۵۱	تمرین‌ها
۲۵۷	پاسخ تشریحی تمرین‌ها
۲۸۱	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۸۶	پاسخ تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲۹۹

فصل پنجم: تابع

۳۰۰	درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی آن
۳۰۷	درس دوم: دامنه و برد تابع
۳۱۷	درس سوم: انواع توابع
۳۳۶	تمرین‌ها
۳۴۵	پاسخ تشریحی تمرین‌ها
۳۶۷	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۳۷۳	پاسخ تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۳۸۳

فصل ششم: ترکیبیات

۳۸۴	درس اول: شمارش
۳۸۹	درس دوم: جایگشت
۳۹۴	درس سوم: ترکیب
۴۰۰	تمرین‌ها
۴۰۴	پاسخ تشریحی تمرین‌ها
۴۱۰	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۴۱۵	پاسخ تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۴۲۳

فصل هفتم: آمار و احتمال

۴۲۴	درس اول: احتمال یا اندازه‌گیری شانس
۴۳۳	درس دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه
۴۳۵	درس سوم: متغیر و انواع آن
۴۳۷	تمرین‌ها
۴۴۱	پاسخ تشریحی تمرین‌ها
۴۴۷	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۴۵۴	پاسخ تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۴۶۳

آزمون‌های کنکور سال ۹۶

۴۶۵

آزمون‌های کنکور سال ۹۷

۴۷۰

آزمون‌های کنکور سال ۹۸

۴۷۵

آزمون‌های کنکور سال ۹۹



فصل اول

مجموعه، الگو و دنباله



مجموعه‌های اعداد:

مجموعه اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

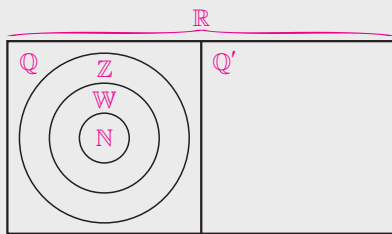
مجموعه اعداد حسابی: $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

مجموعه اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$

مجموعه اعدادی که نتوان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد: $\mathbb{Q}' =$

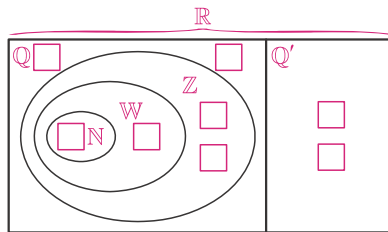
مجموعه اعداد حقیقی: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$



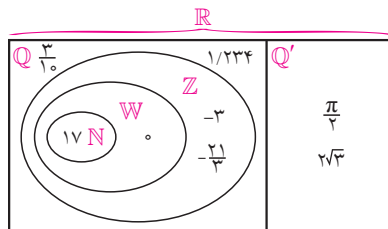
$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$$

مثال: اعداد $\frac{3}{10}$ ، -3 ، $\frac{\pi}{4}$ ، $1/234$ ، 0 ، $2\sqrt{3}$ ، 17 و $-\frac{21}{3}$ را در جاهای خالی نمودار ون زیر قرار دهید.



پاسخ:



مثال: هر یک از اعداد $\sqrt{3}$ ، $-2/7$ ، $\frac{7}{3}$ ، $-\frac{\pi}{4}$ ، $2/89$ و $-\frac{\sqrt{17}}{4}$ را در جاهای مشخص شده روی محور بنویسید و دور اعداد گنگ خط بکشید.



$$\sqrt{3} \approx 1,7$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 2,3$$

$$-\frac{\pi}{2} \approx -\frac{3,14}{2} = -1,57$$

$$-\frac{\sqrt{17}}{2} \approx -\frac{4,12}{2} = -2,06$$



بازه‌ها

زیرمجموعه‌هایی از \mathbb{R} که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص هستند را بازه یا فاصله می‌نامیم. اگر دو عدد ابتدایی و انتهایی بازه در زیرمجموعه باشند، آن را **بازه بسته** و اگر نباشند آن را **بازه باز** بین آن دو عدد می‌نامیم. اگر دقیقاً یکی از آن‌ها در زیرمجموعه باشند، آن را **بازه نیم‌باز** بین آن دو عدد می‌نامیم. بازه‌ها را به صورت زیر نمایش می‌دهیم: ($a < b$)

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
بازه	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
نیم‌باز	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
نیم‌باز	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	

مثال: درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\sqrt{2} \in (1, \frac{3}{4}]$

ب) $-\pi \in (-\pi, \frac{\pi}{4})$

ج) $[-\frac{1}{4}, 0) \subseteq (-\frac{1}{4}, 0]$

د) $[\sqrt{3}, \pi] \subseteq (1/6, \frac{7}{4})$


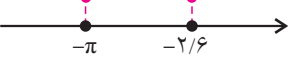
پاسخ: الف) $\sqrt{2}$ تقریباً برابر $1/4$ است که از 1 بزرگ‌تر و از $1/5$ کوچک‌تر است. پس در بازه $(1, \frac{3}{4}]$ قرار دارد و عبارت درست است.

ب) بازه $(-\pi, \frac{\pi}{4})$ باز است یعنی خود $-\pi$ و $\frac{\pi}{4}$ در این بازه قرار ندارد. پس عبارت نادرست است.





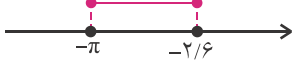

ج) $[-\frac{1}{4}, 0)$ در بازه $(-\frac{1}{4}, 0]$ وجود دارد و در بازه $(-\frac{1}{4}, 0]$ وجود ندارد. پس $[-\frac{1}{4}, 0) \subseteq (-\frac{1}{4}, 0]$ نیست و عبارت نادرست است.

د) $\sqrt{3}$ تقریباً برابر $1/7$ است که از $1/6$ بزرگ‌تر است و π تقریباً برابر $3/14$ است که از $\frac{7}{4}$ کوچک‌تر است، پس $[\sqrt{3}, \pi] \subseteq (1/6, \frac{7}{4})$ زیرمجموعه $(1/6, \frac{7}{4})$ است و عبارت درست است.

مثال: جدول زیر را کامل کنید:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
		$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$	
نیم باز			
	$[\frac{1}{4}, 7]$		
		$\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leq x < \sqrt{3}\}$	
			
	$(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}]$		

پاسخ:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	$(2, 5)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$	
نیم باز	$(-1, 4]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 4\}$	
بسته	$[\frac{1}{4}, 7]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} \leq x \leq 7\}$	
نیم باز	$[-\sqrt{2}, \sqrt{3})$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leq x < \sqrt{3}\}$	
بسته	$[-\pi, -2/6]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -\pi \leq x \leq -2/6\}$	
نیم باز	$(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} < x \leq -\frac{1}{3}\}$	





اگر بخواهیم اعداد حقیقی بزرگتر از یک عدد مشخص را نشان دهیم، باید از نماد $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت) و اگر بخواهیم اعداد حقیقی کوچکتر از یک عدد مشخص را نشان دهیم، باید از نماد $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) استفاده کنیم. این گونه از بازه‌ها را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
نیم‌باز	$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
باز	$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
نیم‌باز	$(-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
باز	$(-\infty, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R}\}$	

مثال: جدول زیر را کامل کنید:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
		$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6\}$	
	$(-\infty, -\sqrt{3}]$		
باز		$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\pi\}$	
	$(-\infty, 0)$		



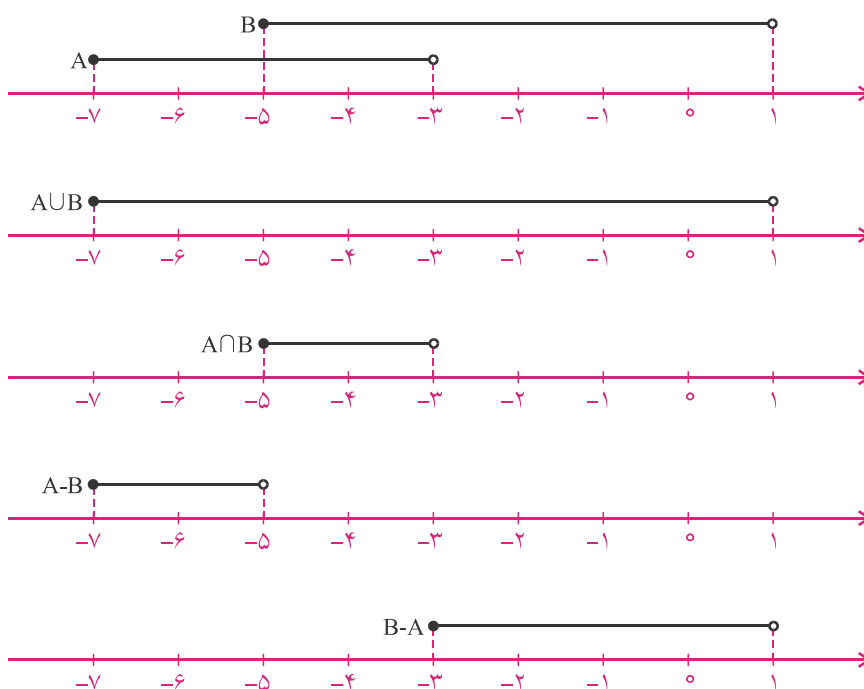
نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
نیم‌باز	$[6, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6\}$	
باز	$(-\infty, -2)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$	
نیم‌باز	$(-\infty, -\sqrt{3}]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\sqrt{3}\}$	
باز	$(-\pi, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\pi\}$	
نیم‌باز	$[\sqrt{5}, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \sqrt{5}\}$	
باز	$(-\infty, 0)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$	

برای به دست آوردن اجتماع، اشتراک و تفاضل دو بازه، ابتدا آن‌ها را روی یک محور اعداد رسم می‌کنیم. سپس با توجه به تعریف اجتماع، اشتراک و تفاضل دو مجموعه بازه حاصل را به دست می‌آوریم.



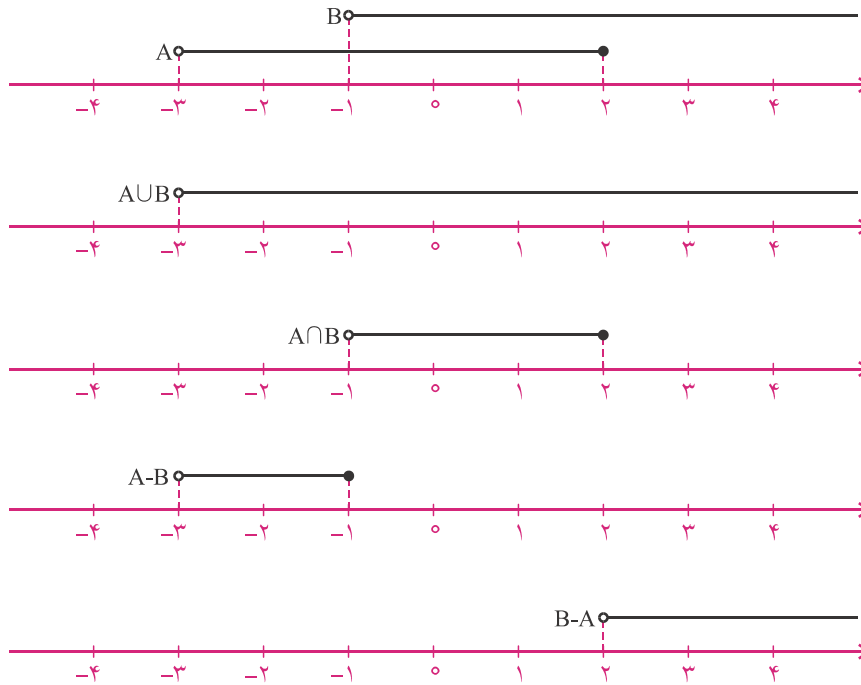
مثال: اگر $A = [-7, -3)$ و $B = [-5, 1)$ ، با استفاده از ترسیم هندسی آن‌ها، بازه‌های $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A - B$ و $B - A$ را تعیین کنید.

پاسخ:



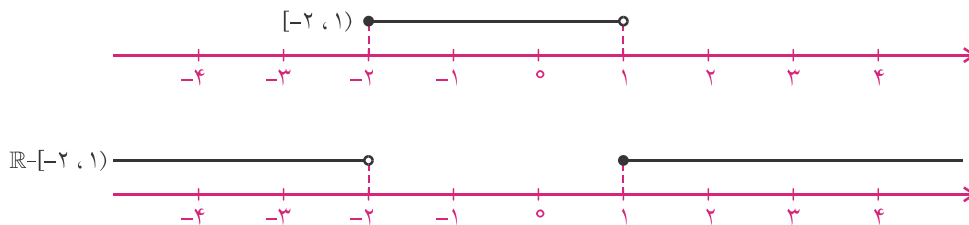
مثال: اگر $A = (-3, 2]$ و $B = (-1, +\infty)$ ، با استفاده از ترسیم هندسی آنها، بازه‌های $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A - B$ و $B - A$ را تعیین کنید.

پاسخ:



مثال: مجموعه $\mathbb{R} - [-2, 1)$ را روی محور اعداد نمایش دهید و آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

پاسخ: ابتدا نمودار $[-2, 1)$ را رسم می‌کنیم و سپس از روی آن نمودار $\mathbb{R} - [-2, 1)$ را رسم می‌کنیم.



با توجه به شکل داریم:

$$\mathbb{R} - [-2, 1) = (-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

به مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آنها عددی حسابی باشد، مجموعه‌های **متناهی** گفته می‌شود. به مجموعه‌هایی که متناهی نیستند، **نامتناهی** گفته می‌شود.

مثال: کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی و کدام یک نامتناهی هستند؟

(الف) مجموعه اعداد صحیح مضرب ۵

(ب) مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر از 2^0

(ج) مجموعه تمام مورچه‌های ساکن کره زمین

(د) بازه $[\frac{1}{3}, \frac{1}{4}]$

(ه) $A = \{x \in \mathbb{W} \mid 4 < x < 5\}$

(و) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{x}{3} > 1000\}$

پاسخ: الف) نامتناهی است.

(ب) این مجموعه شامل اعداد ۱ تا $2^0 - 1$ است که $2^0 - 1 - 1$ عضو دارد، پس متناهی است.

(ج) تعداد مورچه‌های ساکن کره زمین بسیار زیادند، اما به هر حال تعدادشان متناهی است.

(د) بین هر دو عدد حقیقی، بی‌شمار عدد حقیقی وجود دارد، پس این مجموعه نامتناهی است.

(ه) هیچ عدد حسابی بزرگ‌تر از ۴ و کوچک‌تر از ۵ وجود ندارد. پس این مجموعه عضوی ندارد، پس متناهی است.

(و) نمایش عضوی این مجموعه $\{3001, 3002, 3003, 3004, \dots\}$ است، پس نامتناهی است.

مثال: آیا ممکن است دو مجموعه نامتناهی باشند، ولی یکی زیرمجموعه دیگری باشد؟

پاسخ: بله، مثلاً مجموعه اعداد طبیعی و اعداد صحیح هر دو نامتناهی هستند و اعداد طبیعی زیرمجموعه اعداد صحیح هستند.

مثال: آیا ممکن است یک مجموعه نامتناهی، زیرمجموعه یک مجموعه متناهی باشد؟

پاسخ: خیر، تعداد عضوهای یک مجموعه متناهی را می‌توان با یک عدد حسابی نشان داد، می‌دانیم اگر یک مجموعه زیرمجموعه

دیگری باشد، تعداد عضوهایشان نمی‌تواند از آن مجموعه بیش‌تر باشد. امکان ندارد که یک مجموعه نامتناهی باشد و تعداد

عضوهایش از یک عدد حسابی بیش‌تر نباشد.



اگر مجموعه‌ای دارای یک زیرمجموعه نامتناهی باشد، آن‌گاه خود مجموعه نیز نامتناهی است.

مثال: اگر A مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۷ باشد،

الف) A را با نمایش اعضای آن بنویسید.

ب) A را با نماد ریاضی بنویسید.

ج) متناهی یا نامتناهی بودن A را مشخص کنید.

د) یک مجموعه متناهی به نام B بنویسید، به طوری که $B \subseteq A$.

ه) یک مجموعه نامتناهی به نام C بنویسید، به طوری که $C \subseteq A$.

و) یک مجموعه نامتناهی به نام D بنویسید، به طوری که $D \subseteq C$.

پاسخ:

الف) $A = \{7, 14, 21, 28, \dots\}$

ب) $A = \{x \mid \frac{x}{7} \in \mathbb{N}\}$

ج) $A = \{7, 14, 21, 28, \dots\} \Rightarrow$ نامتناهی است

د) $B = \{7, 14\} \Rightarrow B \subseteq A$

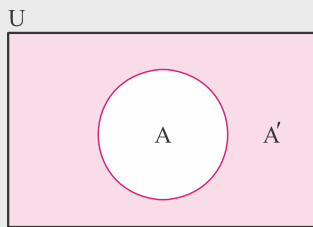
ه) $C = \{x \mid \frac{x}{14} \in \mathbb{N}\} = \{14, 28, 42, 56, \dots\} \Rightarrow C \subseteq A$

و) $D = \{x \mid \frac{x-14}{14} \in \mathbb{N}\} = \{28, 42, 56, 70, \dots\} \Rightarrow D \subseteq C$

درس دوم: متمم یک مجموعه

مجموعه‌ای که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث، زیر مجموعهٔ آن باشند را **مجموعهٔ مرجع** می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

هرگاه U مجموعهٔ مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آن‌گاه مجموعهٔ $U - A$ را **متمم** مجموعهٔ A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر A' مجموعهٔ عضوهایی از U است که در A نیستند.



$$A' = \{x \mid x \in U, x \notin A\}$$

مثال: اگر مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی را مجموعهٔ مرجع در نظر بگیریم و $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{3, 4, 5, 6\}$ ، مجموعه‌های A' ، B' ، $(A \cup B)'$ ، $(A \cap B)'$ ، $(A - B)'$ و $(B - A)'$ را با نوشتن اعضای آن‌ها مشخص کنید.

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

پاسخ:

$$A = \{1, 2, 3\} \Rightarrow A' = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6\} \Rightarrow B' = \{1, 2, 7, 8, 9\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow (A \cup B)' = \{7, 8, 9\}$$

$$A \cap B = \{3\} \Rightarrow (A \cap B)' = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A - B = \{1, 2\} \Rightarrow (A - B)' = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$B - A = \{4, 5, 6\} \Rightarrow (B - A)' = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$$

مثال: اگر مجموعهٔ مرجع \mathbb{Z} باشد، مجموعه‌های $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x < 5\}$ و A' را با نوشتن اعضای آن‌ها مشخص کنید.

$$U = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

پاسخ:

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$A' = \{\dots, -5, -4, -3, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

مثال: اگر \mathbb{Z} مجموعه مرجع باشد، مجموعه \mathbb{W}' را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.

پاسخ:

$$U = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

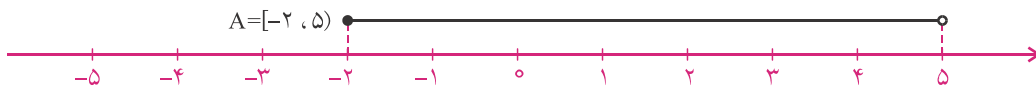
$$W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$W' = U - W = \{\dots, -3, -2, -1\}$$

مثال: اگر مجموعه مرجع \mathbb{R} باشد، مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 5\}$ را به صورت یک بازه بنویسید و اعضای A' را روی محور اعداد نشان دهید.

پاسخ:

$$A = [-2, 5)$$



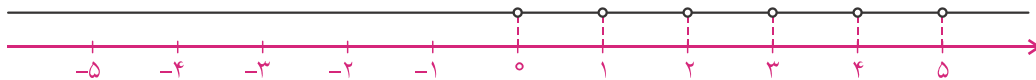
$$A' = \mathbb{R} - [-2, 5)$$



مثال: اگر \mathbb{R} مجموعه مرجع باشد، مجموعه \mathbb{W}' را روی محور اعداد نمایش دهید.

پاسخ:

$$W' = \mathbb{R} - W = \mathbb{R} - \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$



اگر U مجموعه مرجع باشد و A و B دو مجموعه در U باشند، داریم:

$$(A')' = A$$

$$\begin{cases} A \cup A' = U \\ A \cap A' = \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{cases} (A \cap B)' = A' \cup B' \\ (A \cup B)' = A' \cap B' \end{cases}$$

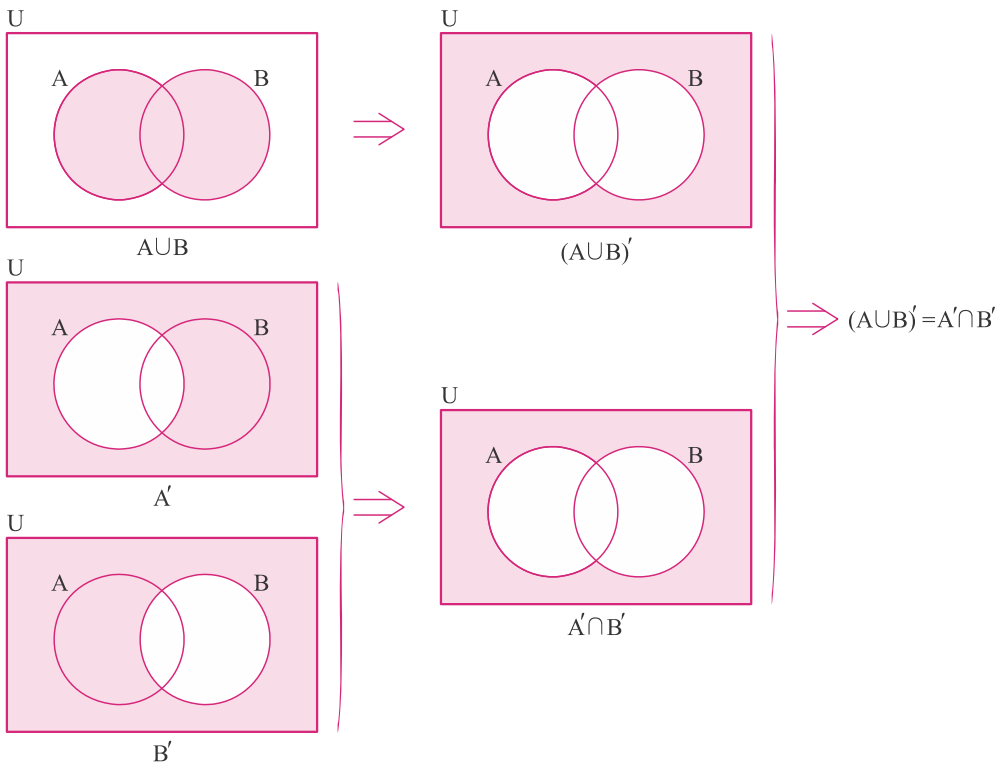
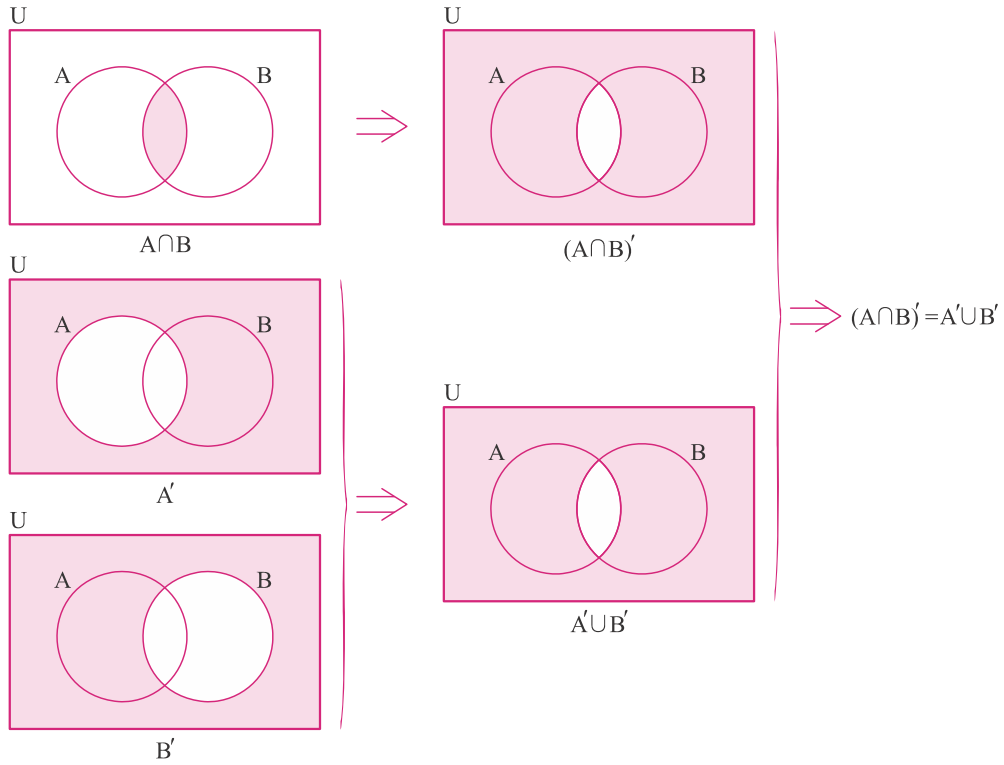
$$\begin{cases} \emptyset' = U \\ U' = \emptyset \end{cases}$$

$$A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$$

$$\begin{cases} A - B = A \cap B' \\ A - B = A - (A \cap B) \end{cases}$$



مثال: با استفاده از رسم نمودار ون، درستی $(A \cap B)' = A' \cup B'$ و $(A \cup B)' = A' \cap B'$ را نشان دهید.



به هر دو مجموعه که عضو مشترک نداشته باشند، دو مجموعه **جدا از هم** یا **مجزا** گفته می‌شود.

اگر A و B دو مجموعه متناهی باشند، داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$n(A') = n(U) - n(A)$$

مثال: در یک کلاس ۳۰ نفری، ۱۱ نفر عضو تیم فوتبال کلاس و ۱۴ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۴ نفر از آنها عضو هر دو تیم باشند:

الف) چند نفر عضو تیم فوتبال نیستند؟

ب) چند نفر فقط عضو تیم بسکتبال هستند؟

ج) چند نفر عضو تیم فوتبال یا بسکتبال هستند؟

د) چند نفر عضو هیچ کدام از دو تیم نیستند؟

پاسخ:

الف) $n(F') = n(U) - n(F) = 30 - 11 = 19$

ب) $n(B - F) = n(B) - n(B \cap F) = 14 - 4 = 10$

ج) $n(F \cup B) = n(F) + n(B) - n(F \cap B) = 11 + 14 - 4 = 21$

د) $n(F \cup B)' = n(U) - n(F \cup B) = 30 - 21 = 9$

مثال: اگر U مجموعه مرجع باشد و A و B زیرمجموعه‌های آن باشند، به طوری که $n(U) = 110$ ، $n(A) = 70$ ، $n(B) = 25$ و $n(A \cap B) = 15$ ، هر یک از موارد زیر را به دست آورید.

الف) $n(A \cup B)$

ب) $n(A \cap B')$

ج) $n(A' \cap B)$

د) $n(A' \cap B')$

الف) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 70 + 25 - 15 = 80$

ب) $n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 70 - 15 = 55$

ج) $n(A' \cap B) = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 25 - 15 = 10$

د) $n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 110 - 80 = 30$

پاسخ:

درس سوم: الگو و دنباله

- تعدادی عدد یا شکل که پشت سر هم قرار می‌گیرند، تشکیل یک الگو می‌دهند.

- معمولاً بین عددها یا شکل‌ها یک الگو وجود دارد.

- به هر عدد الگو، یک جمله گفته می‌شود.

- برای پیدا کردن جمله بعدی (یا جملات بعدی)، باید الگوی بین جمله‌ها را پیدا کرد.

مثال: عدد بعدی هر کدام از الگوهای زیر را حدس بزنید:

الف) ۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ?

ب) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, ?$

ج) -۱, ۲, -۳, ۴, -۵, ?

د) ۱, ۴, ۷, ۱۰, ۱۳, ?

ه) ۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ?

پاسخ: الف) هر جمله این الگو ۲ تا بیش تر از جمله قبلی است، پس جمله بعدی می شود $9+2=11$.

ب) مخرج کسر هر جمله یکی بیش تر از مخرج کسر جمله قبلی است و صورت همه کسرها ۱ است، پس جمله بعدی می شود $\frac{1}{6+1} = \frac{1}{7}$.

ج) جملات یکی در میان مثبت و منفی هستند و بدون علامت همان اعداد طبیعی هستند، پس جمله بعدی می شود ۶.

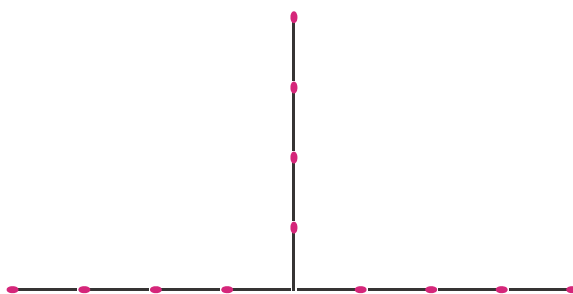
د) هر جمله این الگو ۳ تا بیش تر از جمله قبلی است، پس جمله بعدی می شود $13+3=16$.

ه) هر جمله این الگو مربع شماره آن جمله است، پس جمله ششم می شود $6^2 = 36$.

مثال: در شکل چهارم چند چوب کبریت وجود دارد؟



پاسخ: شکل چهارم به صورت زیر است و ۱۲ چوب کبریت دارد.



جمله عمومی



در الگوی اعداد زیر:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

- a_1, a_2, a_3, a_n به ترتیب جملات اول، دوم، سوم و n ام الگو هستند.
- a_n را **جمله عمومی الگو** می گویند.

- با ضابطه a_n ، ساختار جملات الگو مشخص می شود. مثلاً $a_n = 2n^2 + 1$.

مثال: جمله عمومی الگوهای زیر را به دست آورید:

الف) ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ...

ب) ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ...

ج) ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ...

د) ۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ...

ه) ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ۳۶, ...

پاسخ:

الف) ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ..., $a_n, \dots = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots \Rightarrow a_n = n$

ب) ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ..., $a_n, \dots = 2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2n, \dots \Rightarrow a_n = 2n$

ج) ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ..., $a_n, \dots = 2+1, 4+1, 6+1, 8+1, 10+1, \dots, 2n+1, \dots \Rightarrow a_n = 2n+1$

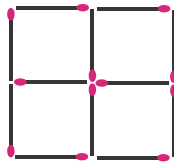
د) ۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ..., $a_n, \dots = 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots, n^2, \dots \Rightarrow a_n = n^2$

ه) ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ۳۶, ..., $a_n, \dots = (1+1)^2, (2+1)^2, (3+1)^2, (4+1)^2, (5+1)^2, \dots, (n+1)^2, \dots \Rightarrow a_n = (n+1)^2$

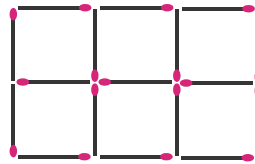
مثال: فرض کنید a_n برابر با تعداد چوب کبریت‌های شکل n ام در الگوی زیر باشد:



شکل اول



شکل دوم

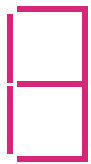


شکل سوم

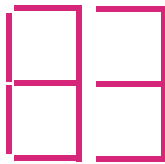
...

a_n و a_1 را به دست آورید.

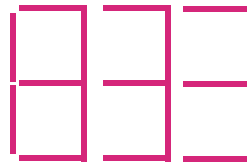
پاسخ: راه حل اول:



$$a_1 = 1(5) + 2$$



$$a_2 = 2(5) + 2$$



$$a_3 = 3(5) + 2$$

$$a_4 = 4(5) + 2 = 20 + 2 = 22$$

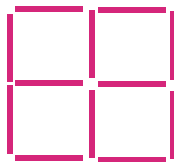
پس:

$$a_n = 5(n) + 2 = 5n + 2$$

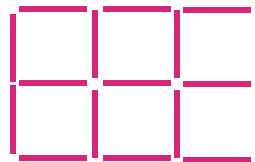
راه حل دوم: به صورت $\underbrace{2}_{\text{عمودی‌ها}} + \underbrace{3}_{\text{افقی‌ها}}$ در نظر می‌گیریم:



$$a_1 = 2(2) + 3(1)$$



$$a_2 = 2(3) + 3(2)$$



$$a_3 = 2(4) + 3(3)$$