کتاب‌های سه‌بعدی

آموزش کامل + تمرین + پرسش‌های چهارگزینه‌ای

ریاضی ۱ (دهم)

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی، نوید صفایی

نشر الگو

مقدمه‌ی مؤلفان

به نام خدا

این کتاب را براســاس محتوای ریاضیات ســال دهم و با هدف آموزش عمیق‌تر مفاهیم درســی نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است. به همین دلیل، تقریباً همه‌جا چارچوب‌های کتاب درسی را رعایت کرده‌ایم، هر چند که مواردی هم هست که برای بیان دقیق‌تر مفاهیم و درک بهتر آن‌ها پا را کمی فراتر گذاشته‌ایم.

هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است. در هر درس مفاهیم اصلی را با بیانی روشن و با آوردن مثال‌هایی متنوع معرفی کرده‌ایم و با حل کردن مســئله‌ها و تســت‌هایی که به دقت انتخاب شده‌اند، روش‌های استفاده از آن‌ها را در حل مسئله، آموزش داده‌ایم. آموختن ریاضیات بدون تمرین و تکرار، نشــدنی اســت. بنابراین، در انتهای هر درس در دو بخش «تمرین» و «پرسش‌های چهارگزینه‌ای» تعداد زیادی مسئله و تست آورده‌ایم.

راه‌حــل همــه‌ی تمرین‌ها و پرســش‌های چهارگزینه‌ای را در انتهــای هر فصل آورده‌ایم. بهتر اســت پیش از حل کردن تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای، مسئله‌ها و تست‌های حل شده در متن درس را کامل بخوانید.

وظیفه‌ی خود می‌دانیم که از همکاران عزیزمان در نشــر الگو، واحد حروف‌چینی خانم زهرا میرزایی و واحد ویراســتاری خانم‌ها مریم موحدی مهر و عاطفه ربیعی به سرپرســتی خانم ســکینه مختار که زحمات زیادی برای آماده‌ســازی و تولید کتاب کشیده‌اند تشکر و قدردانی کنیم. همچنین از آقای محمدصادق جوهری برای ارسال اشکالات کتاب در چاپ اول متشکریم.

فهرست

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

فصل دوم: مثلثات

فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها

فصل پنجم: تابع

فصل ششم: شمارش، بدون شمردن

فصل هفتم: آمار و احتمال

فصل هشتم: راه‌حل تمرین‌ها

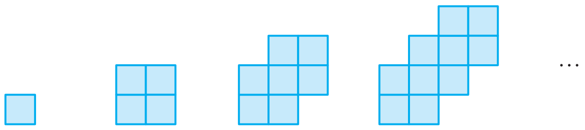
فصل نهم: پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل اول

درس سوم: الگو و دنباله

الگو

به شکل‌های زیر دقت کنید:



شکل (۱)   شکل (۲)   شکل (۳)   شکل (۴)

این شکل‌ها بر اساس یک الگو ساخته شده‌اند. در این‌جا منظورمان از این‌که این شکل‌ها الگو دارند، این است که هر شکل از شکل قبلی‌اش به‌دســت آمده، به طوری که با آن، اشــتراک‌ها و اختلاف‌هایی دارد. در مورد این شــکل‌ها می‌توان سؤال‌های مختلفی مطرح کرد. مثلاً شکل بیستم از چند مربع تشکیل شده است؟ محیط شکل بیستم چند است؟ مساحت شکل بیستم چند است؟ و سؤال‌هایی از این قبیل. برای یافتن پاسخ این سؤال‌ها، باید با مقایسهٔ شکل‌ها مشخص کنیم که چه ویژگی‌هایی ثابت می‌مانند و چه ویژگی‌هایی تغییر می‌کنند. این کار را **الگویابی** می‌نامند. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم تعداد مربع‌های کوچک در شــکل بیســتم را پیدا کنیم. الگوی این شــکل‌ها این‌طور اســت: شــکل اول ۱ مربع دارد. به شــکل اول ۳ مربع کوچک اضافه کرده‌ایم تا شــکل دوم درست شده است، به شکل دوم ۳ مربع کوچک اضافه کرده‌ایم تا شکل سوم به دست آمده است و همین طور این کار را ادامه داده‌ایم. هر بار ۳ مربع کوچک اضافه کرده‌ایم تا شکل بعدی درست شــود. تعداد مربع‌های کوچک در شــکل اول را $a_۱$، تعداد مربع‌های کوچک در شکل دوم را $a_۲$، ... و به‌طورکلی تعداد مربع‌های کوچک در شکل n اُم را a_n می‌گیریم. به جدول زیر توجه‌کنید:

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد مربع‌های کوچک	۱	$۱+۳$	$۱+۲\times۳$	$۱+۳\times۳$	...	$۱+(n-۱)\times۳$

از روی این جدول معلوم می‌شود که

$$a_n=۱+(n-۱)\times۳=۳n-۲$$

بنابراین، تعداد مربع‌های کوچک در شکل بیستم برابر است با $a_{۲۰}=۳\times۲۰-۲=۵۸$.

دستور $a_n=۳n-۲$ برای تعداد مربع‌های کوچک در این مثال را **جملهٔ عمومی الگو** می‌نامند. به کمک جملهٔ عمومی، می‌توانیم خیلی از ســؤال‌ها در مورد الگو را پاســخ دهیم. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم بدانیم شکل چندم از این الگو با ۶۷ مربع کوچک ساخته شده است. اگر شمارهٔ این شکل n باشد، آن‌گاه $a_n=۶۷$. بنابراین

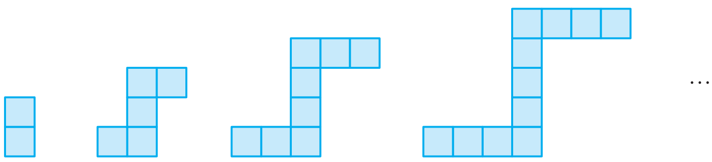
$$a_n=۳n-۲=۶۷$$

در نتیجه $n=۲۳$، یعنی شکل ۲۳ اُم با ۶۷ مربع کوچک درست شده است.

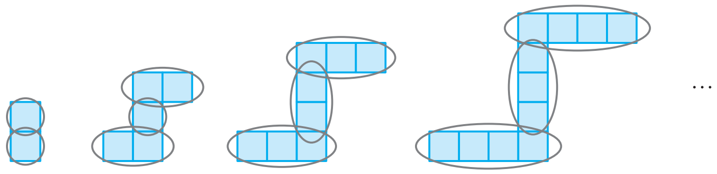
یک سؤال دیگر: آیا شکلی در الگوی بالا وجود دارد که با ۹۵ مربع کوچک ساخته شده باشد؟

در این‌صورت $a_n=۳n-۲=۹۵$، یعنی $n=\frac{۹۷}{۳}$. بنابراین، چون n طبیعی نمی‌شود، پس شکلی با ۹۵ مربع کوچک نداریم.

مسئله ۱ **در الگوی زیر، شکل n اُم از چند مربع کوچک درست شده است؟ شکل چندم از ۹۵ مربع کوچک درست شده است؟**

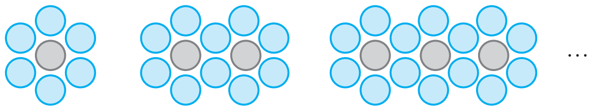


راه‌حل در این‌جا، از شکل اول چیز زیادی متوجه نمی‌شویم. به شکل دوم نگاه کنید. در هر دو قسمت افقی آن، دو مربع کوچک و بین قسمت‌های افقی، یک مربع کوچک وجود دارد. شکل سوم در هر دو قسمت افقی‌اش سه مربع کوچک و بین قسمت‌های افقی، دو مربع کوچک دارد. در شکل چهارم، در هر دو قسمت افقی، چهار مربع کوچک و بین قسمت‌های افقی، سه مربع کوچک وجود دارد.



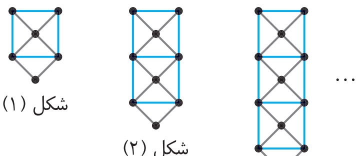
بنابراین، شکل n اُم از دو گروه n تایی و یک گروه $(n-1)$ تایی مربع کوچک درست شده است. به این ترتیب، اگر جملهٔ عمومی تعداد مربع‌ها را a_n بگیریم، معلوم می‌شود که $a_n = 2n+(n-1)=3n-1$. توجه‌کنید که تعداد مربع‌های کوچک شکل اول هم از این تساوی به‌دست می‌آید. برای این‌که بفهمیم شکل چندم از ۹۵ مربع کوچک درست شده است، باید معادلهٔ $a_n = 3n-1=95$ را حل کنیم، که از آن به‌دست می‌آید $n=32$، یعنی شکل ۳۲ اُم از ۹۵ مربع کوچک درست شده است.

مسئله ۲ **در الگوی زیر، در شکلی که ۲۰ دایرهٔ خاکستری دارد، چند دایرهٔ رنگی وجود دارد؟**



راه‌حل توجه‌کنید که در شکل اول ۶ دایرهٔ رنگی وجود دارد. در شکل دوم ۴ دایرهٔ رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود، در شکل سوم 2×4 دایرهٔ رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود، ... در شکل n اُم $4\times(n-1)$ دایرهٔ رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود. بنابراین اگر تعداد دایره‌های رنگی در شکل n اُم را a_n بگیریم، $a_n = 6+4(n-1)=4n+2$ (توجه کنید که شکل n اُم، n دایرهٔ خاکستری دارد). بنابراین $a_{20} = 4\times 20+2=82$.

تست ۱ **تعداد نقاط شکل n اُم در الگوی مقابل چندتا است؟**



شکل (۱)　شکل (۲)　شکل (۳)

۱) $n+5$

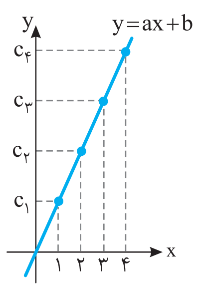
۲) $2n+4$

۳) $3n+3$

۴) $4n+2$

راه‌حل شکل اول دارای ۶ نقطه است و در شکل‌های بعدی، در هر مرحله ۳ نقطه به شکل اضافه می‌شود. پس در مرحلهٔ n اُم $3\times(n-1)$ نقطه به شکل اضافه شده است. یعنی تعداد نقاط شکل n اُم برابر است با $3(n-1)+6=3n+3$.

الگوی خطی



در همهٔ الگوهایی که تا این‌جا دیدیم، اختلاف هر دو جملهٔ متوالی، مقداری ثابت بوده و جملهٔ عمومی به شکل $c_n = an+b$ بود. این الگوها را **الگوهای خطی** می‌نامند، زیرا نقطه‌های $(1, c_1)$، $(2, c_2)$، ...، (n, c_n)، ... روی خط $y=ax+b$ قرار دارند.

تعریف **اگر جملهٔ عمومی دنباله‌ای به شکل $c_n = an+b$ باشد، که در این‌جا a و b عددهایی حقیقی و ثابت‌اند، این الگوها را الگوهای خطی می‌نامند.**

- اگر دو جملهٔ متوالی الگویی با جملهٔ عمومی $c_n = an + b$ را از هم کم کنیم، اختلاف آن‌ها برابر با a می‌شود:

$$c_{n+1} - c_n = a(n+1) + b - (an+b) = a$$

a در حقیقت شیب خط متناظر این الگو، یعنی $y = ax + b$ است.

- اگـر دو نقطـه از خطـی را بدانیم، می‌توانیم معادلهٔ آن را بنویسـیم. اگر دو جمله از الگویی خطی را هـم بدانیم، می‌توانیم جملهٔ عمومی آن را پیدا کنیم.

مسئله ۳ **در الگویی خطی، جمله‌های سوم و دوازدهم به ترتیب ۱۱ و ۴۷ هستند. جملهٔ عمومی این الگو را پیدا کنید.**

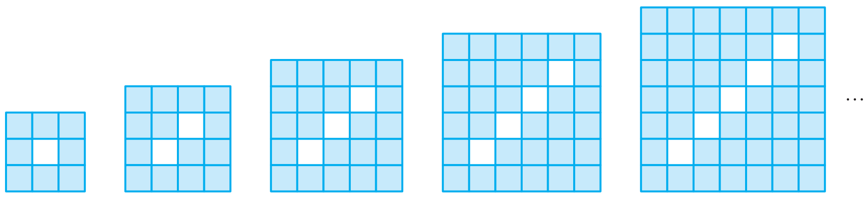
راه‌حل فـرض کنیـد جملـهٔ عمومی این الگو به شـکل $c_n = an + b$ باشـد. در این صـورت $c_3 = 11$ و $c_{12} = 47$. پس $\begin{cases} 3a + b = 11 \\ 12a + b = 47 \end{cases}$.

اگر این دستگاه معادلات را حل کنیم، به‌دست می‌آید $a = 4$ و $b = -1$. بنابراین جملهٔ عمومی الگو به صورت $a_n = 4n - 1$ است.

الگوهای غیرخطی

لزومی ندارد که جملهٔ عمومی هر الگویی خطی باشد. چند نمونه الگوی غیرخطی را در مسائل زیر مشاهده می‌کنید.

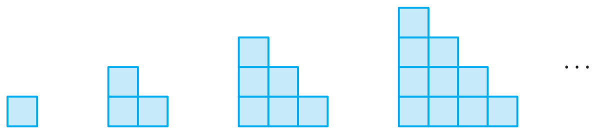
مسئله ۴ **تعداد مربع‌های کوچک رنگی در شکل n اُم الگوی زیر چند تا است؟**



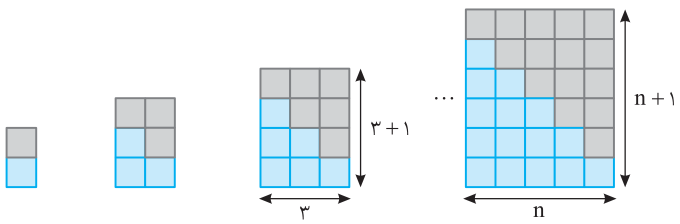
راه‌حل تعداد کل مربع‌های کوچک شـکل n اُم $(n+2)^2$ تا اسـت، که از این تعداد n تا سـفیدند. بنابراین اگر تعداد مربع‌های کوچک رنگی در شکل n اُم را a_n بگیریم، $a_n = (n+2)^2 - n = n^2 + 3n + 4$.

- به کمک الگوها می‌توان برخی مجموع‌ها را حساب کرد.

مثال: می‌خواهیم مقدار مجموع $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ را حساب کنیم. الگوی زیر را در نظر بگیرید که در آن تعداد مربع‌های کوچک در شکل n اُم $1 + 2 + \cdots + n$ است:



اکنون توجه‌کنید که اگر دو شکل یک‌جور از این‌ها را مانند زیر روی هم قرار دهیم، مستطیلی به‌دست می‌آید که مساحتش دو برابر تعداد مربع‌های کوچک آن شکل است.



مستطیل متناظر شکل n اُم، مستطیلی به طول $n+1$ و عرض n است، پس مساحتش $n(n+1)$ است و در نتیجه

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مسئله ۵ **مجموع‌های زیر را حساب کنید:**

الف) $۲+۴+۶+\cdots+۲n$ **ب)** $۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)$

راه‌حل **الف)** توجه‌کنید که

$$۲+۴+۶+\cdots+۲n=۲(۱+۲+\cdots+n)=۲(\frac{n(n+۱)}{۲})=n(n+۱)$$

ب) توجه کنید که برای جمع کردن عددهای فرد ۱، ۳، ۵، ... و $۲n-۱$ می‌توانیم همهٔ عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴، ... و $۲n$ را با هم جمع کرده، سپس عددهای زوج ۲، ۴، ۶، ... و $۲n$ را از این مجموع کم کنیم. بنابراین، با توجه به قسمت (الف)،

$$۱+۳+\cdots+۲n-۱=(۱+۲+۳+\cdots+۲n)-(۲+۴+۶+\cdots+۲n)=\frac{۲n(۲n+۱)}{۲}-n(n+۱)=۲n^۲+n-n^۲-n=n^۲$$

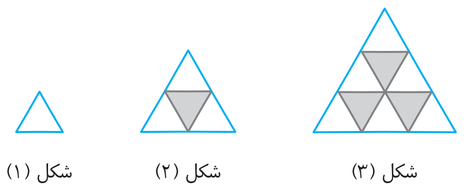
تست ۲ **تعداد مثلث‌های رنگ نشده در الگوی زیر، در شکل بیستم چند تا است؟**

۱) ۱۹۰

۲) ۲۰۰

۳) ۲۱۰

۴) ۲۲۰



راه‌حل تعداد مثلث‌های رنگ نشـده در شـکل nاُم برابر اسـت با $\frac{n(n+۱)}{۲}=۱+۲+۳+\cdots+n$. بنابراین در شـکل بیستم $\frac{۲۰\times۲۱}{۲}=۲۱۰$ مثلث رنگ نشده داریم.

مسئله ۶ **مجموع n جملهٔ اول یک الگوی خطی را که جملهٔ عمومی آن $c_n=an+b$ است، حساب کنید.**

راه‌حل اگر این مجموع را S بنامیم، S به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$S=(a+b)+(۲a+b)+(۳a+b)+\cdots+(na+b)=a(۱+۲+۳+\cdots+n)+\underbrace{(b+b+b+\cdots+b)}_{n\text{ تا}}$$

$$=\frac{an(n+۱)}{۲}+nb=\frac{n}{۲}(۲b+(n+۱)a)=\frac{n}{۲}(a+b+an+b)=\frac{n}{۲}(c_۱+c_n)$$

دنباله

در نمایش مجموعه‌های عددی، عددهایی را پشت سر هم می‌نویسیم و ترتیب نوشتن عددها مهم نیست. مثلاً، مجموعه‌های $\{۱,۲,۳\}$ و $\{۱,۳,۲\}$ برابرند. ردیف‌هایی از عددها که در آن‌ها ترتیب مهم است، نام خاصی دارند.

تعریف **دنباله، ردیفی از عددها است که ترتیب دارند. این عددها را جمله‌های دنباله می‌نامند.**

مثال: عددهای طبیعی را می‌توانیم به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم: $۱,۲,۳,۴,\ldots$. به این ردیف از عددها، دنبالهٔ عددهای طبیعی می‌گویند. در این‌جا ترتیب مهم است: اولین عدد ۱ است، دومین عدد ۲ است، سومین عدد ۳ است و همین‌طور در مورد بقیه عددها. بنابراین، دنبالهٔ $۲,۱,۳,۴,۵,\ldots$ دنبالهٔ عددهای طبیعی نیست.

- اگر جملهٔ اول دنباله را با $a_۱$، جملهٔ دوم آن را با $a_۲$، ... و جملهٔ nاُم آن‌را با a_n نشان دهیم، a_n را جملهٔ عمومی دنباله می‌نامند.
- اگر $a_n=an^۲+bn+c$ (که در این‌جا a، b و c عددهایی حقیقی و ثابت‌اند و $a\neq۰$) دنباله را دنبالهٔ درجهٔ ۲ می‌نامند.

مسئله ۷ **جملهٔ عمومی مناسبی برای دنبالهٔ $۲,۶,۱۲,۲۰,۳۰,\cdots$ پیدا کنید.**

راه‌حل جملهٔ عمومی این دنباله را a_n بنامید. توجه‌کنید که

$$a_۱=۲,\quad a_۲=۲+۴,\quad a_۳=۲+۴+۶,\quad a_۴=۲+۴+۶+۸,\quad a_۵=۲+۴+۶+۸+۱۰$$

بنابراین جملهٔ عمومی $a_n=۲+۴+۶+\cdots+۲n=۲(۱+۲+\cdots+n)=۲(\frac{n(n+۱)}{۲})=n^۲+n$ مناسب است.

مسئلهٔ ۸ **جملهٔ چندم دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=\frac{۳n-۱}{۵n+۷}$ برابر با $\frac{۷}{۱۲}$ است؟**

راه‌حل اگر معادلهٔ $\frac{۷}{۱۲}=\frac{۳n-۱}{۵n+۷}$ را حل کنیم، به‌دست می‌آید $n=۶۱$. بنابراین جملهٔ ۶۱ اُم این دنباله برابر با $\frac{۷}{۱۲}$ است.

تست ۳ **اعداد طبیعی زوج را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که عدد آخر هر دسته مربع کامل باشد. عدد اول دستهٔ یازدهم کدام است؟**

$$\underbrace{\{۲,۴\}}_{\text{دستهٔ اول}},\underbrace{\{۶,۸,۱۰,۱۲,۱۴,۱۶\}}_{\text{دستهٔ دوم}},\underbrace{\{۱۸,۲۰,۲۲,۲۴,۲۶,۲۸,۳۰,۳۲,۳۴,۳۶\}}_{\text{دستهٔ سوم}},\dots$$

۱) ۱۰۲ ۲) ۱۷۰ ۳) ۲۲۶ ۴) ۴۰۲

راه‌حل عدد آخر دستهٔ اول $۲^۲$، عدد آخر دستهٔ دوم $۴^۲$، عدد آخر دستهٔ سوم $۶^۲$ و ... عدد آخر دستهٔ n اُم برابر $(۲n)^۲$ است. پس عدد آخر دستهٔ دهم $۲۰^۲$ است. بنابراین عدد اول دستهٔ یازدهم ۴۰۲ است.

مثال: در دنباله‌ای $a_۱=۲$ و هر جمله به‌جز جملهٔ اول، از دو برابر جملهٔ قبل از آن، یک واحد بیشتر است. یعنی به ازای هر عدد طبیعی مانند n، $a_{n+۱}=۲a_n+۱$. توجه‌کنید که به این ترتیب

$$a_۲=۲a_۱+۱=۲\times۲+۱=۵,\quad a_۳=۲a_۲+۱=۲\times۵+۱=۱۱$$

و به همین ترتیب می‌توانیم مقدار هر جمله را از روی مقدار جملهٔ قبل از آن پیدا کنیم.

تست ۴ **در دنباله‌ای با جملهٔ اول ۱، مکعب هر جمله، ۹۹ برابر مکعب جملهٔ قبل از آن است. جملهٔ ۱۰۰اُم این دنباله کدام است؟**

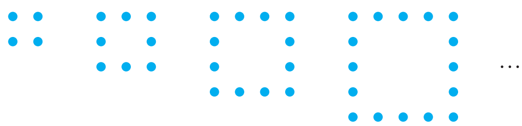
۱) $۳۳^{۳۳}$ ۲) $۳۳^{۹۹}$ ۳) $۹۹^{۳۳}$ ۴) $۹۹^{۹۹}$

راه‌حل فرض کنید جملهٔ عمومی دنباله، a_n باشد. در این‌صورت $a_n^۳=۹۹a_{n-۱}^۳$، پس $\frac{a_n^۳}{a_{n-۱}^۳}=۹۹$. اگر در این تساوی n را از ۲ تا ۱۰۰ جای‌گذاری کنیم و تساوی‌ها را در هم ضرب کنیم، معلوم می‌شود که $a_{۱۰۰}^۳=\frac{a_۲^۳}{a_۱^۳}\times\frac{a_۳^۳}{a_۲^۳}\times\dots\times\frac{a_{۱۰۰}^۳}{a_{۹۹}^۳}=۹۹^{۹۹}$ (توجه‌کنید که $a_۱=۱$).

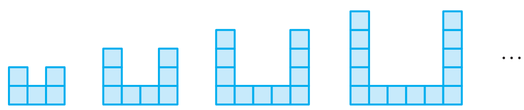
بنابراین $a_{۱۰۰}=۹۹^{۳۳}$.

تمرین

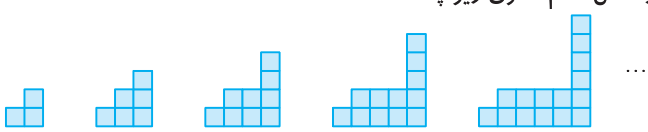
۴۵- در الگوی زیر، شکل n اُم از چند نقطهٔ رنگی درست شده است؟



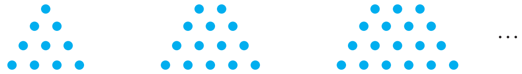
۴۶- در شکل n اُم الگوی زیر چند مربع وجود دارد؟



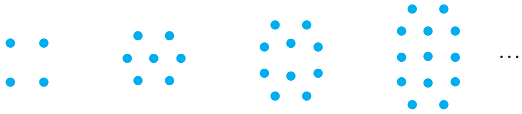
۴۷- تعداد مربع‌های کوچک در شکل n اُم الگوی زیر چند تا است؟



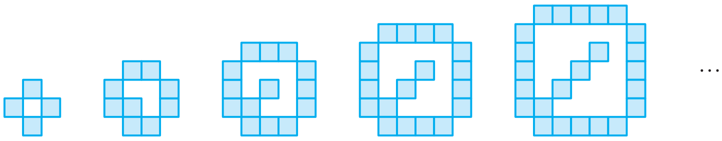
۴۸- شکل n اُم الگوی زیر از چند نقطهٔ رنگی درست شده است؟



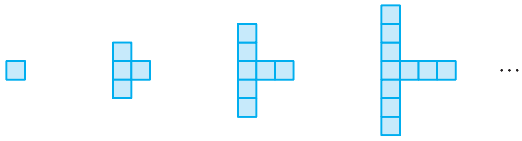
۴۹- تعداد نقطه‌ها در شکل n اُم الگوی زیر چند تا است؟



۵۰- شکل n اُم الگوی زیر از چند مربع کوچک درست شده است؟



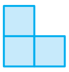
۵۱- برای ساختن شکل ۵۰ اُم در الگوی زیر چند مربع کوچک لازم داریم؟

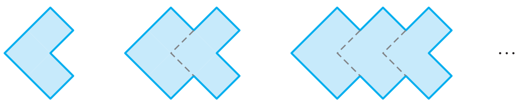


۵۲- دور یک نوع میز شش نفر می‌توانند بنشینند.

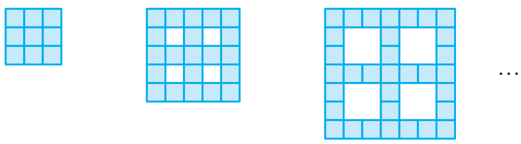
می‌توانید دو تا از این میزها را به هم بچسبانید تا چهار نفر دیگر هم بتوانند بنشینند.

برای این‌که ۳۴ نفر بتوانند بنشینند، دست‌کم چند میز را باید به هم بچسبانید؟

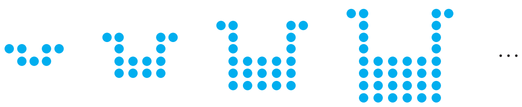
۵۳- شکل‌های زیر از چسباندن تعدادی کاشی به شکل  ساخته شده‌اند، که در آن طول ضلع هر مربع کوچک ۱ سانتی‌متر است. محیط شکل n اُم چقدر است؟



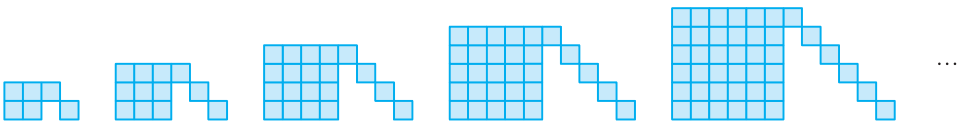
۵۴- تعداد مربع‌های رنگی در شکل n اُم الگوی زیر چند تا است؟



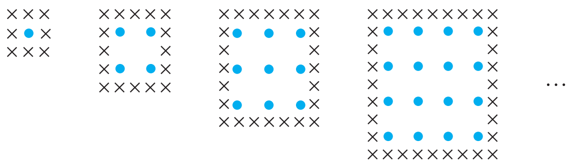
۵۵- در شکل n اُم الگوی زیر چند نقطه وجود دارد؟



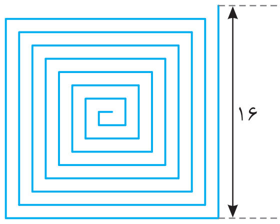
۵۶- تعداد مربع‌های کوچک در شکل n اُم الگوی زیر چند تا است؟



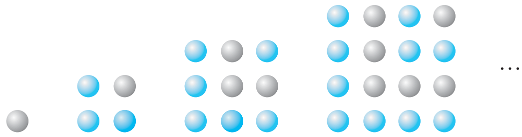
۵۷- آیا در الگوی زیر شکلی وجود دارد که در آن تعداد نقطه‌ها با تعداد ضربدرها برابر باشد؟



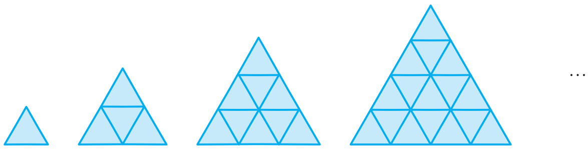
۵۸- در شکل زیر طول ریسمان رنگی چقدر است؟ (فاصلهٔ دو تکهٔ مجاور ۱ سانتی‌متر است.)



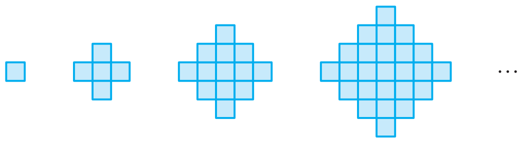
۵۹- به کمک الگوی زیر ثابت کنید $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.



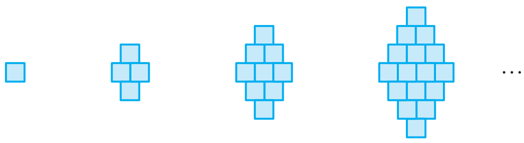
۶۰- در شکل n اُم الگوی زیر چند مثلث کوچک وجود دارد؟



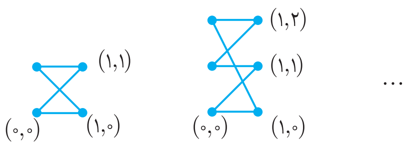
۶۱- شکل n اُم الگوی زیر از چند مربع کوچک درست شده است؟



۶۲- آیا می‌توان با ۱۲۳ مربع کوچک یکی از شکل‌های الگوی زیر را ساخت؟



۶۳- مطابق شکل، الگوی زیر روی صفحهٔ مختصات رسم شده است. طول رشتهٔ چندم برابر با $8+12\sqrt{2}$ است؟



۶۴- در هر مورد جملهٔ عمومی مناسبی برای دنباله‌ای که چند جملهٔ اول آن داده شده است، پیدا کنید.

الف) $1, 3, 5, \ldots$

ب) $-1, 3, -5, \ldots$

پ) $0, 3, 8, 15, \ldots$

ت) $2, 1, 4, 3, 6, 5, \ldots$

۶۵- در دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=20n-n^2$ چند جمله مثبت‌اند؟

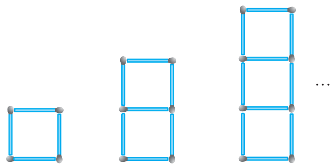
۶۶- جملهٔ چندم دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n=(-1)^n\frac{n-1}{4n+4}$ برابر با $-\frac{1}{6}$ است؟

فصل اول

درس سوم: الگو و دنباله

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۳۴- در الگوی مقابل که به کمک چوب کبریت ساخته شده است، تعداد چوب کبریت‌ها در شکل بیستم کدام است؟



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

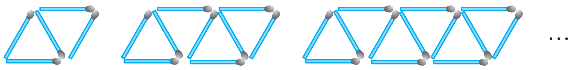
۱) ۵۹

۲) ۶۰

۳) ۶۱

۴) ۶۲

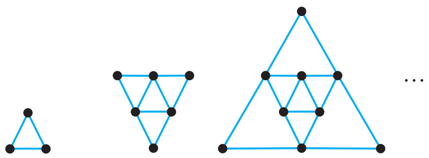
۳۵- تعداد چوب کبریت‌ها در شکل پانزدهم الگوی زیر چندتا است؟



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

۱) ۵۹ ۲) ۶۰ ۳) ۶۱ ۴) ۶۲

۳۶- در شکل n اُم از الگوی مقابل چند نقطه دیده می‌شود؟



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

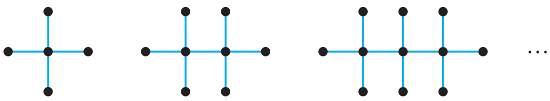
۱) $\frac{n(n+۱)}{۲}$

۲) $۳n$

۳) $n+۲$

۴) $n^{۲}+۲$

۳۷- تعداد نقاط شکل بیستم در الگوی مقابل چندتا است؟



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

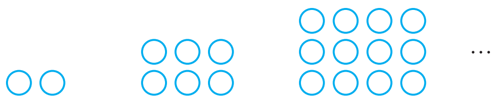
۱) ۶۰

۲) ۶۱

۳) ۶۲

۴) ۶۴

۳۸- در شکل بیستم الگوی مقابل چند دایره وجود دارد؟



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

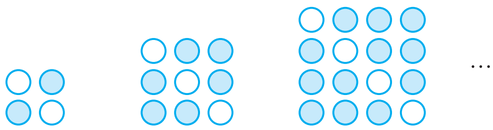
۱) ۴۰۰

۲) ۴۱۰

۳) ۴۲۰

۴) ۴۴۰

۳۹- تعداد دایره‌های رنگی در شکل n اُم الگوی مقابل کدام است؟



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

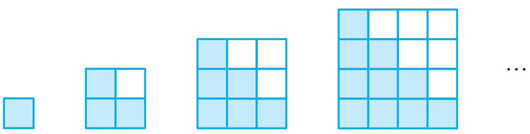
۱) $n^{۲}+۱$

۲) $۲n^{۲}$

۳) $۳n^{۲}-۱$

۴) $n^{۲}+n$

۴۰- در الگوی مقابل، اختلاف تعداد مربع‌های رنگ شده و رنگ نشده در شکل سی‌اُم چندتاست؟



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳) شکل (۴)

۱) ۱۵

۲) ۲۰

۳) ۳۰

۴) ۳۵

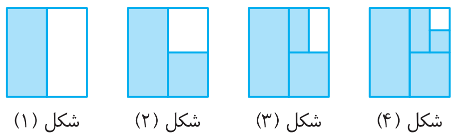
۴۱- مقدار عبارت $A=۱۰۰^{۲}-۹۹^{۲}+۹۸^{۲}-۹۷^{۲}+\cdots+۲^{۲}-۱^{۲}$ کدام است؟

۱) ۴۵۰۰ ۲) ۴۵۵۰ ۳) ۵۰۰۰ ۴) ۵۰۵۰

۴۲- مقدار عبارت $A=۱\frac{۱}{۲۰}+۲\frac{۲}{۲۰}+۳\frac{۳}{۲۰}+\cdots+۱۹\frac{۱۹}{۲۰}$ کدام است؟

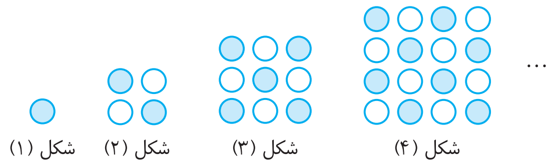
۱) ۱۹۰/۵ ۲) ۱۹۹/۵ ۳) ۱۹۰/۹۵ ۴) ۱۹۰/۹

۴۳- در الگوی زیر، مساحت مربع بزرگ یک واحد مربع است. کل مساحت رنگ شده در شکل n اُم چقدر از کل مساحت رنگ شده در شکل قبلی آن بیشتر است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲^n}$ ۳) $\frac{۱}{۲^{n-۱}}$ ۴) $\frac{۱}{۲^{n-۲}}$

۴۴- در الگوی زیر، در شکل چندم تعداد گوی‌های رنگی برابر با ۱۱۳ است؟

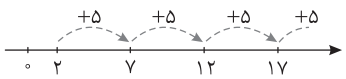


۱) ۱۷ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۴

۴۵- یک دنباله دارای الگوی خطی است. اگر جملهٔ اول آن ۳ و جملهٔ پنجم آن ۵- باشد، کدام جملهٔ آن برابر ۳۹- است؟

۱) $t_{۲۲}$ ۲) $t_{۲۱}$ ۳) $t_{۱۱}$ ۴) $t_{۱۲}$

۴۶- جملهٔ ۱۱۰ اُم الگوی زیر کدام است؟



۱) ۵۴۶ ۲) ۵۴۷ ۳) ۵۴۸ ۴) ۵۴۹

۴۷- کدام‌یک می‌تواند جملهٔ عمومی دنبالهٔ $۲,۳,۱۰,۱۵,\ldots$ باشد؟

۱) $n+۱$ ۲) $n^۲-(-۱)^n$ ۳) $۳n^۲-۸n+۷$ ۴) $۲n^۲-۵n+۵$

۴۸- در دنبالهٔ $a_n=\frac{۳n+۱}{n+۱۰}$ چند جملهٔ کوچک‌تر از ۲/۹۹ وجود دارد؟

۱) ۲۹۰۰ ۲) ۲۹۹۰ ۳) ۲۹۸۱ ۴) ۲۸۸۹

۴۹- در یک دنباله، هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) مربع جملهٔ قبلی است. اگر $a_۱=۲$، جملهٔ چهارم دنباله کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۵ ۳) ۶۴ ۴) ۲۵۶

۵۰- اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که عدد آخر هر دسته مضرب ۵ باشد. عدد اول دستهٔ پنجاهم کدام است؟

$$\underbrace{\{۱,۳,۵\}}_{\text{دستهٔ اول}},\underbrace{\{۷,۹,۱۱,۱۳,۱۵\}}_{\text{دستهٔ دوم}},\underbrace{\{۱۷,۱۹,۲۱,۲۳,۲۵\}}_{\text{دستهٔ سوم}},\ldots$$

۱) ۴۸۷ ۲) ۴۹۷ ۳) ۴۷۷ ۴) ۴۶۷

۵۱- کدام یک می‌تواند جملهٔ عمومی دنبالهٔ $۳,-۹,۲۷,-۸۱,\ldots$ باشد؟

۱) $(-۱)^{n-۱}۳^{n+۱}$ ۲) $(-۱)۳^n$ ۳) $(-۱)(-۳)^n$ ۴) $(-۱)^n۳^n$

۵۲- اگر جملهٔ عمومی دنبالهٔ d_n به صورت $d_n=an^۲+۲bn$ و جملات دوم و سوم این دنباله به ترتیب برابر با ۴ و ۱۵ باشند، جملهٔ پنجم دنباله کدام است؟

۱) ۵۰ ۲) ۵۵ ۳) ۴۰ ۴) ۴۵

۵۳- در دنبالهٔ $a_n=۱۴۰n-۵n^۲$، چند جملهٔ مثبت وجود دارد؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) صفر ۴) بی‌نهایت جمله

۵۴- در یک دنباله، جملهٔ اول برابر ۱ است و هر یک از جمله‌های بعدی دو واحد از جملهٔ قبلی‌اش بیشتر است. مجموع n جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) $(۲n+۱)^۲$ ۲) $(۲n-۱)^۲$ ۳) $n^۲$ ۴) $۲n^۲$

بنابراین،

الف) $n(A\cap B\cap C)=۶$

ب) تعداد کسانی که فقط به فیزیک علاقه دارند $=n(B)-x-۶-z$

$=۱۴-۱-۶-۰=۷$

پ) تعداد کسانی که فقط به ریاضی علاقه دارند $=n(A)-x-y-۶$

$=۱۵-۱-۲-۶=۶$

تعداد کسانی که فقط به شیمی علاقه دارند $=n(C)-y-z-۶$

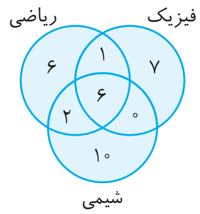
$=۱۸-۲-۰-۶=۱۰$

بنابراین تعداد کسانی که فقط به یک درس علاقه دارند، برابر است با

$۷+۶+۱۰=۲۳$

ت) تعداد دانش‌آموزانی که حداقل به دو درس علاقه دارند برابر است با

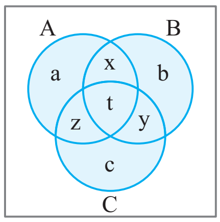
$x+y+z+۶=۹$



۴۴ چون هر عضو U عضو دست‌کم یکی از این مجموعه‌ها است، پس

$n(A\cup B\cup C)=n(U)=۵۰$

وضعیت مجموعه‌ها را در نمودار زیر نشان داده‌ایم.



هدفمان پیدا کردن بیشترین مقدار $a+b+c$ است. توجه‌کنید که

$n(A\cup B\cup C)=a+b+c+x+y+z+t=۵۰$

$$\begin{cases} n(A\cap B)=x+t=۱۱ \\ n(B\cap C)=y+t=۱۰ \Rightarrow x+y+z+t=۳۰-۲t \\ n(A\cap C)=z+t=۹ \end{cases}$$

در نتیجه $a+b+c=۲۰+۲t$. به این ترتیب، بیشترین مقدار $a+b+c$ وقتی پیش می‌آید که t بیشترین مقدار ممکن باشد. از تساوی‌های $x+t=۱۱$، $y+t=۱۰$ و $z+t=۹$ نتیجه می‌گیریم که بیشترین مقدار ممکن t برابر با ۹ است (به ازای $x=۲$، $y=۱$ و $z=۰$). در نتیجه، بیشترین مقدار $a+b+c$ برابر با ۳۸ است.

۴۵ توجه‌کنید که در شکل n اُم روی هر ضلع $n+۱$ نقطه وجود دارد. شکل n اُم چهار ضلع دارد، پس تعداد کل این نقطه‌ها می‌شود $۴(n+۱)$. اما در این نحوهٔ شمارش، نقطه‌های مشترک بین ضلع‌ها را دو بار شمرده‌ایم. بنابراین، اگر تعداد نقطه‌های شکل n اُم را با a_n نشان دهیم، $a_n=۴(n+۱)-۴=۴n$.

راه‌های دیگری هم برای حل این مسئله وجود دارد. مثلاً در شکل n اُم، به‌جز چهار گوشه، $n-۱$ نقطه وجود دارد. پس تعداد کل این نقطه‌ها می‌شود $۴(n-۱)$، که اگر چهار نقطهٔ رأس‌ها را هم حساب کنیم، نتیجه می‌شود

$a_n=۴(n-۱)+۴=۴n$

۴۶ توجه‌کنید که در هر شکل، تعداد مربع‌های ردیف پایین، از شمارهٔ شکل دو تا بیشتر است و در ستون‌های بالای هر ردیف به اندازهٔ شمارهٔ شکل، مربع وجود دارد. بنابراین، اگر تعداد مربع‌های شکل n اُم a_n باشد،

$a_n=n+۲+۲n=۳n+۲$

۴۷ توجه‌کنید که در شکل n اُم مستطیلی $۲\times n$ وجود دارد، که ستونی از $n-۱$ مربع به بالای آن چسبیده است و یک مربع هم در کنار آن قرار دارد. بنابراین، اگر تعداد مربع‌های شکل n اُم را a_n بگیریم،

$a_n=۲n+n-۱+۱=۳n$

۴۸ توجه‌کنید که شکل اول از ۱۰ نقطهٔ رنگی تشکیل شده است و در شکل‌های بعدی، هر شکل با اضافه شدن ۴ نقطه به شکل قبلی به‌دست آمده است. بنابراین، اگر تعداد نقطه‌های رنگی در شکل n اُم را a_n بگیریم،

$a_n=۱۰+۴(n-۱)=۴n+۶$

۴۹ توجه‌کنید که در بالا و پایین هر شکل دو نقطه داریم. نقطه‌های وسط (از شکل دوم به بعد) از چند ردیف سه تایی تشکیل شده‌اند: شکل اول ردیفی ندارد، شکل دوم ۱ ردیف دارد، شکل سوم ۲ ردیف دارد، ... و شکل n اُم $n-۱$ ردیف دارد. بنابراین اگر تعداد نقطه‌های شکل n اُم را a_n بگیریم،

$a_n=۲+۲+۳(n-۱)=۳n+۱$

۵۰ توجه‌کنید که شکل n اُم در هر ضلعش n مربع کوچک دارد و در درونش $n-۱$ مربع کوچک. بنابراین، اگر تعداد مربع‌های کوچک شکل n اُم را a_n بگیریم، $a_n=۴n+n-۱=۵n-۱$.

۵۱ به الگوی شکل‌ها دقت‌کنید. شکل اول از یک مربع کوچک ساخته شده است. در شکل دوم، از سه طرف یک مربع به شکل اول اضافه کرده‌ایم. در شکل سوم، از سه طرف دو مربع به شکل اول اضافه کرده‌ایم. در شکل چهارم، از سه طرف سه مربع به شکل اول اضافه کرده‌ایم. به این ترتیب، اگر تعداد مربع‌ها در شکل n اُم را a_n بنامیم، $a_n=۱+۳(n-۱)=۳n-۲$. در نتیجه $a_{۵۰}=۳\times ۵۰-۲=۱۴۸$، یعنی برای ساختن شکل ۵۰ اُم ۱۴۸ مربع کوچک لازم داریم.

۵۲ ابتدا جملهٔ عمومی تعداد صندلی‌ها را وقتی که n میز را به هم چسبانده‌ایم، پیدا می‌کنیم. دور میز اول ۶ صندلی وجود دارد. وقتی دو میز را می‌چسبانیم، به تعداد صندلی‌های اولیه ۴ تا اضافه می‌شود؛ وقتی سه میز را می‌چسبانیم، به تعداد صندلی‌های اولیه ۲×۴ تا اضافه می‌شود؛ ...؛ وقتی n میز را می‌چسبانیم، به تعداد صندلی‌های اولیه $۴(n-۱)$ تا اضافه می‌شود. بنابراین اگر تعداد صندلی‌های دور n میز a_n باشد، $a_n=۶+۴(n-۱)=۴n+۲$.

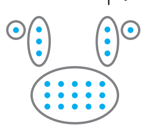
اگر $۴n+۲=۳۴$، آن‌گاه $n=۸$، یعنی باید ۸ میز را به هم بچسبانیم.

۵۳ محیط شکل اول ۸ سانتی‌متر است. با اضافه کردن هر کاشی ۴ سانتی‌متر به محیط شکل قبلی اضافه می‌شود. بنابراین، محیط شکل n اُم برابر است با $۸+۴(n-۱)=۴n+۴$.

۵۴ تعداد مربع‌های رنگی هر شکل برابر است با مساحت کل شکل منهای مساحت چهار مربع سفید که حذف شده‌اند. طول ضلع مربع بزرگ $۲n+۱$ است و طول ضلع هر یک از مربع‌های سفید $n-۱$ است. بنابراین اگر تعداد مربع‌های شکل n اُم را a_n بگیریم،

$a_n=(۲n+۱)^۲-۴(n-۱)^۲=۴n^۲+۴n+۱-۴(n^۲-۲n+۱)=۱۲n-۳$

۵۵ در کف شکل n اُم مستطیلی $n(n+۲)$ قرار دارد. دو ستون n تایی هم به کف این مستطیل چسبیده‌اند و در کنار هر ستون هم یک نقطه وجود دارد. بنابراین، اگر تعداد نقطه‌های شکل n اُم را a_n بگیریم،



$a_n=n(n+۲)+۲n+۲=n^۲+۴n+۲$

۵۶ توجه‌کنید که شکل n اُم از مربعی به طول ضلع $n+1$ و پلکانی از $n+1$ مربع کوچک درست شده است. بنابراین، اگر تعداد مربع‌های کوچک شکل n اُم را a_n بگیریم، $a_n=(n+1)^2+n+1=n^2+3n+2$.

۵۷ توجه‌کنید که در شکل n اُم تعداد نقطه‌ها n^2 است و تعداد ضربدرها $8n$ است. اگر $n^2=8n$، آن‌گاه $n=8$. پس در شکل هشتم، تعداد نقطه‌ها با تعداد ضربدرها برابر است.

۵۸ این ریسمان از تکه‌هایی به طول ۱ سانتی‌متر، ۲ سانتی‌متر و ... ۱۶ سانتی‌متر تشکیل شده است، که هر تکه دو بار آمده است. بنابراین طول کل ریسمان برابر است با $2(1+2+\cdots+16)=2(\frac{16\times17}{2})=272$ سانتی‌متر.

۵۹ توجه‌کنید که از یک طرف تعداد کل توپ‌ها برابر است با $n\times n=n^2$. از طرف دیگر اگر تعداد توپ‌ها را از طریق ردیف‌های L شکل حساب کنیم، می‌شود $1+3+5+\cdots+(2n-1)$. بنابراین

$$1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$$

۶۰ در کف شکل n اُم، $2n-1$ مثلث کوچک وجود دارد. هر ردیف بالایی، دو مثلث از ردیف پایینی‌اش کمتر دارد، تا اینکه در آخرین ردیف، یک مثلث کوچک وجود دارد. بنابراین، اگر تعداد مثلث‌های کوچک در شکل n اُم را a_n بگیریم، $a_n=(2n-1)+(2n-3)+\cdots+5+3+1=n^2$.

۶۱ **راه‌حل اول** در شکل n اُم، ردیف وسط از $2n-1$ مربع کوچک درست شده است. هر ردیف بالایی، دو مربع از ردیف پایینی‌اش کمتر دارد؛ تا اینکه در آخرین ردیف، یک مثلث وجود دارد. در مورد ردیف‌های پایین ردیف وسط، همین وضعیت وجود دارد. بنابراین اگر یک‌بار تعداد مربع‌های ردیف وسط را اضافه و کم کنیم، تعداد مربع‌ها در شکل n اُم برابر می‌شود با

$$a_n=2((2n-1)+(2n-3)+\cdots+5+3+1)-(2n-1)=2n^2-2n+1$$

راه‌حل دوم به همان راه‌حل اول معلوم می‌شود که تعداد مربع‌ها در ردیف وسط و ردیف‌های بالای آن برابر است با $(2n-1)+(2n-3)+\cdots+5+3+1=n^2$ و تعداد مربع‌ها در ردیف‌های زیر ردیف وسط برابر است با

$$(2n-3)+(2n-5)+\cdots+5+3+1=(n-1)^2$$

پس تعداد کل مربع‌ها برابر است با $n^2+(n-1)^2$.

۶۲ تعداد مربع‌های کوچک در این شکل‌ها به ترتیب ۱، ۴، ۹ و ۱۶ است، که همگی به شکل n^2 هستند. بنابراین به‌نظر می‌رسد که تعداد مربع‌های کوچک در هر یک از این شکل‌ها، عددی به شکل n^2 است و چون ۱۲۳ به این شکل نیست، پس نمی‌توان با این تعداد مربع، یکی از شکل‌ها را ساخت. اکنون جملهٔ عمومی این الگو را به‌دست می‌آوریم. توجه‌کنید که در شکل n اُم، ردیف وسط از n مربع درست شده است؛ در هر طرف آن، یک ردیف $(n-1)$ تایی داریم؛ یک ردیف $(n-2)$ تایی داریم؛ ...؛ یک ردیف ۲ تایی داریم و یک ردیف از یک مربع داریم. بنابراین، اگر تعداد مربع‌ها در شکل n اُم را با a_n نشان دهیم،

$$a_n=n+2((n-1)+(n-2)+\cdots+2+1)$$

$$=n+2(\frac{(n-1)n}{2})=n+n^2-n=n^2$$

۶۳ تعداد خط‌های افقی به طول ۱ در شکل n اُم برابر $n+1$ است. تعداد خط‌های مایل به طول $\sqrt{2}$ در شکل n اُم برابر n است. هم‌چنین هر شکل یک خط اریب دارد که میان ۲ نقطهٔ $(1,0)$ و $(0,n)$ رسم می‌شود و طول آن برابر $\sqrt{n^2+1}$ است.

در نتیجه طول رشتهٔ n اُم برابر است با

$$P_n=n+1+n\sqrt{2}+\sqrt{n^2+1}$$

اگر $n=7$، آن‌گاه $P_7=7+1+7\sqrt{2}+\sqrt{7^2+1}=8+12\sqrt{2}$. پس طول رشتهٔ هفتم برابر با $8+12\sqrt{2}$ است.

۶۴ الف) $a_n=2n-1$ ب) $a_n=(-1)^n(2n-1)$

پ) $a_n=n^2-1$ ت) $a_n=n+(-1)^{n+1}$

۶۵ توجه‌کنید که $a_n=n(20-n)$ و چون n عددی مثبت است، برای اینکه a_n عددی مثبت باشد، باید $20-n$ نیز مثبت باشد. بنابراین $20-n>0$، یعنی $n<20$. پس n می‌تواند عددهای ۱، ۲، ... و ۱۹ باشد، که تعداد آن‌ها ۱۹ تا است.

۶۶ ابتدا توجه‌کنید که اگر $a_n=(-1)^n\frac{n-1}{4n+4}=-\frac{1}{6}$، آن‌گاه n عددی فرد است، زیرا اگر n زوج باشد، $(-1)^n\frac{n-1}{4n+4}$ عددی مثبت می‌شود. اگر n عددی فرد باشد، $(-1)^n=-1$، پس $\frac{n-1}{4n+4}=\frac{1}{6}$. اگر این معادله را حل کنیم، به‌دست می‌آید $n=5$. پس جملهٔ پنجم دنباله، برابر با $-\frac{1}{6}$ است.

۶۷ باید تفاضل هر دو جملهٔ متوالی برابر باشد، بنابراین باید

$$7a+20-(2a-1)=(a+42)-(7a+20)$$

$$5a+21=-6a+22\Rightarrow 11a=1\Rightarrow a=\frac{1}{11}$$

۶۸ اگر قدرنسبت این دنباله d باشد، جملهٔ عمومی آن به شکل $a_n=a_1+(n-1)d$ است. بنابراین

$$a_8=a_1+7d\Rightarrow 25=4+7d\Rightarrow d=3$$

در نتیجه $a_{101}=a_1+(101-1)d=4+100\times3=304$.

۶۹ فرض کنید قدرنسبت این دنبالهٔ حسابی d باشد. توجه‌کنید که

$$a_{12}=a_1+11d=16$$

از طرف دیگر، $a_{10}=a_1+9d$ و $a_{14}=a_1+13d$. اگر این تساوی‌ها را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید

$$a_{10}+a_{14}=(a_1+9d)+(a_1+13d)=2a_1+22d=2(a_1+11d)=2(16)=32$$

۷۰ قدرنسبت این دنباله را با d نشان می‌دهیم. در این‌صورت

$$a_2+a_9=(a_1+d)+(a_1+8d)=2a_1+9d=-4 \qquad (1)$$

$$a_3+a_4=(a_1+2d)+(a_1+3d)=2a_1+5d=4 \qquad (2)$$

اگر تساوی (۲) را از تساوی (۱) کم کنیم، به‌دست می‌آید $d=-2$ و اگر این مقدار را در تساوی (۱) قرار دهیم، به‌دست می‌آید $a_1=7$.

۷۱ قدرنسبت این دنباله برابر است با $7=3-10-$. اکنون توجه‌کنیدکه

آخرین جمله $=444$

دومین جمله از آخر $=444-7$

سومین جمله از آخر $=444-7-7=444-2\times7$

چهارمین جمله از آخر $=444-3\times7$

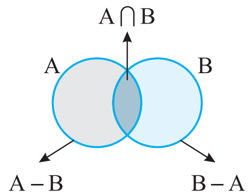
$\vdots \qquad \vdots$

دوازدهمین جمله از آخر $=444-11\times7=367$

۳۲- گزینهٔ ۱ به نمودار ون زیر توجه کنید.
می‌دانیم $A\cap B'=A-B$. حال با توجه به شکل، به‌دست می‌آید

$$n(A\cup B)=n(A-B)+n(A\cap B)+n(B-A)$$

$$۶=۲+۳+n(B-A)\Rightarrow n(B-A)=۱$$



۳۳- گزینهٔ ۱ با جایگذاری مقادیر داده شده در رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$$
$$-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

$$۱۱۰=۶۰+۶۰+۲۰-۱۴-۱۴-۲+n(A\cap B\cap C)\Rightarrow n(A\cap B\cap C)=۰$$

۳۴- گزینهٔ ۳ شکل اول دارای ۴ چوب کبریت است و هر شکل ۳ چوب کبریت بیش‌تر از قبلی دارد. پس شکل nاُم دارای $۴+۳(n-۱)$ چوب کبریت است. یعنی $۳n+۱$ چوب کبریت دارد. پس شکل بیستم ۶۱ چوب کبریت دارد.

۳۵- گزینهٔ ۳ شکل اول دارای ۵ چوب کبریت است و در هر مرحله ۴ چوب کبریت دیگر به شکل مرحلهٔ قبل اضافه می‌شود. پس در شکل nاُم $۵+۴(n-۱)$ چوب کبریت وجود دارد. یعنی $۴n+۱$ چوب کبریت در شکل nاُم وجود دارد. پس در شکل پانزدهم، ۶۱ چوب کبریت وجود دارد.

۳۶- گزینهٔ ۲ در شکل اول ۳ نقطه وجود دارد و هر شکل ۳ نقطه بیشتر از شکل قبلی دارد. پس در شکل nاُم، $۳+۳(n-۱)$ نقطه یعنی $۳n$ نقطه وجود دارد.

۳۷- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** تعداد نقاط شکل‌ها را در جدول زیر ملاحظه می‌کنید:

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	...	n
تعداد نقاط	۱+۳+۱	۲+۴+۲	۳+۵+۳	...	$n+(n+۲)+n$

بنابراین در شکل nاُم، $۳n+۲$ نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم.
راه‌حل دوم اگر ۴ نقطه به چهار گوشهٔ شکل‌ها اضافه کنیم، تعداد نقاط شکل nاُم برابر $۳(n+۲)$ خواهد بود. پس در شکل nاُم، $۳(n+۲)-۴$ نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم.

۳۸- گزینهٔ ۳ در شکل nاُم، تعداد سطرها n تا و تعداد ستون‌ها $(n+۱)$ تا است. پس $n(n+۱)$ دایره در شکل nاُم موجود است. یعنی در شکل بیستم ۲۰×۲۱ دایره وجود دارد.

۳۹- گزینهٔ ۴ در شکل nاُم، $(n+۱)^۲$ دایره وجود دارد که $n+۱$ تای آن رنگ نشده است. پس تعداد دایره‌های رنگی $(n+۱)^۲-(n+۱)$ می‌باشد که برابر است با $n^۲+n$.

۴۰- گزینهٔ ۳ تعداد مربع‌های رنگ شده در شکل nاُم برابر است با

$$۱+۲+۳+\cdots+n$$

تعداد مربع‌های رنگ نشده در شکل nاُم برابر است با $۰+۱+۲+\cdots+(n-۱)$.
بنابراین تعداد مربع‌های رنگ شده در شکل nاُم، n تا بیش‌تر از تعداد مربع‌های رنگ نشده است. پس در شکل سی‌اُم، اختلاف مربع‌های رنگ‌شده و رنگ‌نشده برابر ۳۰ تا است.

۴۱- گزینهٔ ۴ به کمک اتحاد مزدوج عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A=(۱۰۰-۹۹)(۱۰۰+۹۹)+(۹۸-۹۷)(۹۸+۹۷)+\cdots+(۲-۱)(۲+۱)$$
$$=۱۰۰+۹۹+۹۸+۹۷+\cdots+۲+۱$$

بنابراین $A=\frac{۱۰۰(۱۰۰+۱)}{۲}=۵۰۵۰$.

۴۲- گزینهٔ ۲ عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=۱+۲+۳+\cdots+۱۹+(\frac{۱}{۲۰}+\frac{۲}{۲۰}+\cdots+\frac{۱۹}{۲۰})$$
$$=۱+۲+۳+\cdots+۱۹+\frac{۱+۲+۳+\cdots+۱۹}{۲۰}$$

چون $۱+۲+\cdots+۱۹=\frac{۱۹\times(۱+۱۹)}{۲}=۱۹۰$، پس $A=۱۹۰+\frac{۱۹۰}{۲۰}=۱۹۹/۵$.

۴۳- گزینهٔ ۲ مقدار کل مساحت رنگ شده در مرحلهٔ nاُم برابر است با

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\cdots+\frac{۱}{۲^{n-۱}}+\frac{۱}{۲^n}$$

و مقدار کل مساحت رنگ شده در مرحلهٔ $(n-۱)$اُم برابر است با

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۲^{n-۱}}$$

بنابراین در مرحلهٔ nاُم، مقدار کل مساحت رنگ شده $\frac{۱}{۲^n}$ از مقدار کل مساحت رنگ شده در مرحلهٔ $(n-۱)$اُم، بیشتر است.

۴۴- گزینهٔ ۲ با توجه به الگو، در شکل‌هایی که شمارهٔ آنها زوج است، نصف تعداد گوی‌ها یعنی $\frac{n^۲}{۲}$ رنگ می‌شود. در شکل‌هایی که شمارهٔ آنها فرد است، تعداد گوی‌ها نیز فرد است. اگر گوی وسطی را کنار بگذاریم تعداد گوی‌ها $n^۲-۱$ خواهد بود که نصف آنها را رنگ می‌کنیم و سپس گوی وسطی را نیز رنگ می‌کنیم. پس $\frac{n^۲-۱}{۲}+۱$ گوی رنگ می‌شود. توجه کنید که اگر n عددی زوج باشد، $\frac{n^۲}{۲}$ نیز عددی زوج است. پس در شکل‌های با شمارهٔ زوج، تعداد گوی‌های رنگ شده زوج است. چون ۱۱۳ گوی رنگی در شکل nاُم وجود دارد، پس n باید فرد باشد. بنابراین

$$\frac{n^۲-۱}{۲}+۱=۱۱۳\Rightarrow n^۲-۱=۲۲۴\Rightarrow n^۲=۲۲۵\Rightarrow n=۱۵$$

۴۵- گزینهٔ ۱ جملهٔ عمومی دنباله $t_n=an+b$ است. بنابراین

$$t_۱=a+b=۳,\quad t_۵=۵a+b=-۵$$

از حل دستگاه $\begin{cases}a+b=۳\\ ۵a+b=-۵\end{cases}$ به‌دست می‌آید $a=-۲$ و $b=۵$. بنابراین $t_n=-۲n+۵$. برای به‌دست آوردن شمارهٔ جمله‌ای که برابر -۳۹ است، باید معادلهٔ $t_n=-۳۹$ را حل کنیم:

$$-۲n+۵=-۳۹\Rightarrow ۲n=۴۴\Rightarrow n=۲۲$$

پس $t_{۲۲}$ برابر -۳۹ است.

۴۶- گزینهٔ ۲ جملهٔ نخست این الگو ۲ است و پس از آن، هر جمله با اضافه کردن عدد ۵ به جملهٔ قبلی‌اش به‌دست می‌آید. بنابراین جملهٔ عمومی این الگو می‌شود $a_n=۲+۵(n-۱)=۵n-۳$. بنابراین، جملهٔ ۱۱۰ اُم دنباله برابر است با $۵\times۱۱۰-۳=۵۴۷$.

۴۷- گزینهٔ ۲ چند جملهٔ اول هر کدام از دنباله‌ها به شکل زیر است:

گزینهٔ (۱) $2,3,4,5,\dots$ — گزینهٔ (۲) $2,3,10,15,\dots$

گزینهٔ (۳) $2,3,10,23,\dots$ — گزینهٔ (۴) $2,3,8,17,\dots$

بنابراین فقط $n^2-(-1)^n$ می‌تواند جملهٔ عمومی دنباله باشد.

۴۸- گزینهٔ ۴ از شرط $a_n<2/99$ مقادیری از n را می‌یابیم که a_n به ازای آن‌ها کوچک‌تر از ۲/۹۹ باشد:

$$a_n<2/99\Rightarrow\frac{3n+1}{n+10}<2/99\Rightarrow\frac{3n+1}{n+10}<\frac{299}{100}$$

$$300n+100<299n+2990\Rightarrow n<2890\Rightarrow n\le 2889$$

بنابراین ۲۸۸۹ جملهٔ دنباله، کوچک‌تر از ۲/۹۹ هستند.

۴۹- گزینهٔ ۴ در این دنباله $a_{n+1}=a_n^2$ است، بنابراین

$$a_2=a_1^2=2^2=4,\quad a_3=a_2^2=4^2=16,\quad a_4=a_3^2=16^2=256$$

۵۰- گزینهٔ ۱ عدد آخر دستهٔ اول ۵، عدد آخر دستهٔ دوم 3×5، عدد آخر دستهٔ سوم 5×5، ... و عدد آخر دستهٔ n اُم برابر $5\times(2n-1)$ است. پس عدد آخر دستهٔ چهل و نهم $5\times(2\times49-1)=485$ است. پس عدد اول دستهٔ پنجاهم، برابر ۴۸۷ خواهد بود.

۵۱- گزینهٔ ۳ همان‌طور که مشاهده می‌کنیم جمله‌های دنباله توان‌هایی از ۳ هستند. یعنی $3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \dots$ که جملهٔ عمومی آن می‌تواند به صورت 3^n باشد. اما در دنبالهٔ داده شده، جمله‌ها یکی در میان مثبت و منفی هستند و اولین جمله، مثبت است. بنابراین به یک ضریب $(-1)^{n-1}$ برای 3^n نیاز داریم تا جملات دنباله به شکل دنبالهٔ داده شده درآیند. یعنی

$$(-1)^{n-1}(3)^n=(-1)(-1)^n(3)^n=(-1)(-3)^n$$

۵۲- گزینهٔ ۲ ابتدا باید با استفاده از جمله‌های داده شدهٔ دنباله، ضرایب a و b را که مجهول هستند بیابیم:

$$d_2=4\Rightarrow 4a+4b=4\Rightarrow a+b=1,\quad d_3=15\Rightarrow 9a+6b=15$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}a+b=1\\9a+6b=15\end{cases}$ به‌دست می‌آید $a=3$ و $b=-2$.

بنابراین جملهٔ عمومی دنبالهٔ d_n به صورت $d_n=3n^2-4n$ است. پس جملهٔ پنجم دنباله برابر است با $d_5=3(5)^2-4(5)=55$.

۵۳- گزینهٔ ۱ ابتدا با حل نامعادلهٔ $a_n>0$، مقادیری از n را که به ازای آن‌ها، جمله‌های دنباله مثبت هستند، پیدا می‌کنیم.

$$a_n>0\Rightarrow 140n-5n^2>0\Rightarrow n(140-5n)>0$$

حال از آنجایی که $n>0$، برای برقراری نامعادلهٔ فوق، بایستی $140-5n>0$. یعنی $n<28$. پس به ازای $n\le27$، جمله‌های دنباله مثبت هستند. در نتیجه بیست و هفت جملهٔ اول دنباله مثبت هستند.

۵۴- گزینهٔ ۳ با توجه به جمله‌های دنباله، به‌دست می‌آید

$$a_1=1,\quad a_2=1+2=3,\quad a_3=3+2=5,$$
$$a_4=5+2=7,\quad \dots,\quad a_n=2n-1$$

بنابراین مجموع مورد نظر برابر است با

$$S=1+3+5+7+\dots+(2n-1)=(2-1)+(4-1)+(6-1)+\dots+(2n-1)$$
$$=(2\times1-1)+(2\times2-1)+\dots+(2n-1)$$
$$=2(1+2+3+\dots+n)-(\underbrace{1+1+1+\dots+1}_{n\ \text{تا}})$$
$$=2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)-n=n^2+n-n=n^2$$

۵۵- گزینهٔ ۱ چون $a_1=-4$ و $d=-1-(-4)=3$، پس

$$a_n=a_1+(n-1)d=-4+3(n-1)=3n-7$$

۵۶- گزینهٔ ۲ جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی باید خطی باشد (برحسب n از درجهٔ اول باشد.) پس باید $2k-1=0$، یعنی $k=\frac{1}{2}$ و در نتیجه $a_n=-\frac{1}{2}n+2$. بنابراین جملهٔ دوم برابر $a_2=-1+2=1$ است.

۵۷- گزینهٔ ۱ قدرنسبت این دنباله را با d نشان می‌دهیم. در این‌صورت $d=\frac{a_{10}-a_4}{10-4}=\frac{24}{6}=4$. اکنون توجه کنید که $d=\frac{a_{19}-a_{95}}{19-95}=4$. بنابراین

$$a_{19}-a_{95}=-76\times4=-304$$

۵۸- گزینهٔ ۲ تعداد الوارها در هر ردیف، دنباله‌ای حسابی با جملهٔ نخست ۳ و قدرنسبت ۲ تشکیل می‌دهند. بنابراین تعداد الوارها در ردیف n اُم برابر است با $3+2(n-1)=2n+1$. در نتیجه اگر $2n+1=21$، آن‌گاه $n=10$.

۵۹- گزینهٔ ۱ از رابطهٔ داده شده $a_n=a_{n-1}-3$ به‌دست می‌آید. یعنی هر جملهٔ دنباله از جمع کردن ۳− با جملهٔ قبلی آن به‌دست می‌آید. پس یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۳− و جملهٔ اول ۴− داریم که جملهٔ بیستم آن برابر است با $a_{20}=a_1+19d=-4+19(-3)=-61$.

۶۰- گزینهٔ ۲ چون $a_1=2$ و $d=4$، پس جملهٔ عمومی دنباله به‌صورت $a_n=2+4(n-1)=4n-2$ است. برای این‌که جمله‌ها کوچک‌تر از ۵۰۰ باشند باید $a_n<500$ باشد. یعنی

$$4n-2<500\Rightarrow n<\frac{502}{4}\Rightarrow n\le125$$

پس ۱۲۵ جملهٔ اول دنباله کمتر از ۵۰۰ هستند.

۶۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $a_4=20$ و $a_{10}=50$، در نتیجه $d=\frac{a_{10}-a_4}{10-4}=\frac{50-20}{6}=5$. پس

$$a_4=a_1+3d=20\Rightarrow a_1+3(5)=20\Rightarrow a_1=5$$

بنابراین a_{100} به شکل $a_{100}=a_1+99d=5+99\times5=500$ محاسبه می‌شود.

۶۲- گزینهٔ ۳ چون $5a-11$ واسطهٔ حسابی دو جملهٔ دیگر است، پس $2(5a-11)=2a-3+3a+1$. در نتیجه $a=4$. بنابراین جملهٔ اول دنباله ۵ و قدرنسبت آن برابر با ۴ است و جملهٔ عمومی به صورت $a_n=5+4(n-1)=4n+1$ است. اگر $4n+1=2017$، آن‌گاه $n=504$.

۶۳- گزینهٔ ۴ چون قدرنسبت دنباله برابر با ۱۱ است، پس جملهٔ عمومی دنباله می‌شود $a_n=-102+11(n-1)=11n-113$. می‌دانیم $a_{10}=-3$ و $a_{11}=8$، پس نخستین جملهٔ مثبت دنباله جملهٔ ۱۱ اُم آن است.

۶۴- گزینهٔ ۳ جملهٔ عمومی دنباله به صورت $a_n=196-4(n-1)=200-4n$ است. بنابراین $a_{50}=0$، در نتیجه، چون قدرنسبت دنباله برابر ۴− است، پس

$$a_{47}=12,\quad a_{48}=8,\quad a_{49}=4,\quad a_{50}=0$$