



## مجموعه، الگو و دنباله

### مجموعه‌های اعداد

برخی از مجموعه اعدادی را که کاربرد زیادی در ریاضیات دارند، در جدول زیر مشاهده می‌کنید.

نام مجموعه	نماد مجموعه	اعضای مجموعه
اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$	{1, 2, 3, 4, ...}
اعداد حسابی	$\mathbb{W}$	{0, 1, 2, 3, 4, ...}
اعداد صحیح	$\mathbb{Z}$	{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...}
اعداد طبیعی فرد	$\mathbb{O}$	{1, 3, 5, 7, ...}
اعداد طبیعی زوج	$\mathbb{E}$	{2, 4, 6, 8, ...}
اعداد گویا	$\mathbb{Q}$	$\left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$
اعداد گنگ	$\mathbb{Q}'$	اعدادی که امکان ندارد به صورت نسبت دو عدد صحیح نوشته شوند.
اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$	اجتماع دو مجموعه گویا و گنگ

با دقت در این جدول نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}' \quad \text{۲}$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' \quad \text{۲}$$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \quad \text{۱}$$

رتذکر! وضعیت مجموعه‌های  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  و  $\mathbb{Q}'$  در نمودار ون به صورت مقابل است:



نکته مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و حاصل تقسیم دو عدد گویا (به جز تقسیم بر صفر) عددی است گویا ولی در مورد اعداد گنگ نمی‌توان چنین اظهارنظری کرد. هم‌چنان حاصل جمع هر عدد گویا با هر عدد گنگ حتماً عددی گنگ است.

به طور مثال، حاصل جمع دو عدد گنگ  $1 + \sqrt{2}$  و  $\sqrt{2} - 2$  گویاست و یا حاصل ضرب دو عدد گنگ  $\sqrt{2}$  و  $3\sqrt{2}$  عددی است گویا.

نکته! اگر  $\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$  آن‌گاه کدام عدد زیر گویاست؟

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4$$

$$\alpha^2 - 3\alpha + 3$$

$$\alpha^2 - 2\alpha + 2$$

$$\alpha^2 - \alpha + 1$$

پاسخ! گزینه «۱» سعی می‌کنیم به کمک توان رسانی  $\sqrt{3}$  را از بین ببریم.

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2\alpha = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow 2\alpha - 1 = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (2\alpha - 1)^2 = (\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow 4\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 3 \Rightarrow \alpha^2 - \alpha = \frac{1}{2}$$

پس  $\alpha^2 - \alpha$  یک عدد گویاست.

نکته! اگر  $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+n} < \frac{m}{n}$  آن‌گاه  $\frac{a}{b} < \frac{m}{n}$

نتجه! اگر  $a$ ,  $b$ ,  $m$ ,  $n$  اعداد طبیعی باشند، آن‌گاه  $\frac{a+m}{b+n}$  یک عدد گویا بین دو عدد گویای  $\frac{a}{b}$  و  $\frac{m}{n}$  می‌باشد. به طور مثال اگر بخواهیم

بین  $\frac{2}{3}$  و  $\frac{4}{5}$  یک عدد گویا مثال بزنیم، کافی است  $\frac{4+2}{5+3} = \frac{6}{8}$  را مثال بزنیم.



$$\begin{aligned} \frac{1}{3} < \frac{2}{3} &\Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1+2}{3+3} < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} < \frac{3}{6} &\Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1+3}{3+6} < \frac{3}{6} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{4}{9} < \frac{3}{6} \\ \frac{1}{3} < \frac{4}{9} &\Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1+4}{3+9} < \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{4}{9} \end{aligned}$$

**مثال** بین  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{2}{3}$  سه عدد گویا مثال بزنید.

**پاسخ** ابتدا بین  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{2}{3}$  یک عدد مثال می‌زنیم.

حال بین  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{3}{6}$  یک عدد مثال می‌زنیم.

و بالآخره بین  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{4}{9}$  یک عدد مثال می‌زنیم.

پس سه عدد  $\frac{4}{9}$  و  $\frac{5}{12}$  را بین  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{2}{3}$  پیدا کردیم.

### محور اعداد حقیقی

تمام مجموعه اعدادی که در دبیرستان می‌خوانیم، زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی‌اند. هر عدد دلخواه حقیقی را می‌توان روی محور اعداد حقیقی نمایش داد و بر عکس، هر نقطه روی این محور نشان‌دهنده یک عدد حقیقی است. به طور مثال اعداد  $\pi$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $-\frac{\pi}{5}$  و  $-2$  روی محور به صورت رو به رو می‌باشند:



### بازه‌ها

زیرمجموعه‌هایی از  $\mathbb{R}$  که مشخص‌کننده یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشند را «بازه» یا «فاصله» می‌نامیم. به طور مثال مجموعه تمام اعداد حقیقی بین  $-1$  و  $2$  به همراه خود این دو عدد است که آن را به صورت  $[-1, 2]$  نشان می‌دهیم و به آن بازه بسته از  $-1$  تا  $2$  می‌گوییم. اعضای این مجموعه به صورت زیر روی محور نمایش داده می‌شوند:

در جدول زیر، انواع بازه‌ها را مشاهده می‌کنید:

نام بازه	نماد بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش محوری
باز	$(a, b)$	$\{x \in \mathbb{R}   a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R}   a \leq x \leq b\}$	
نیم‌باز	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R}   a \leq x < b\}$	
نیم‌باز	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R}   a < x \leq b\}$	
باز	$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R}   a < x\}$	
باز	$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R}   x < a\}$	
نیم‌باز	$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R}   a \leq x\}$	
نیم‌باز	$(-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R}   x \leq a\}$	
باز	$(-\infty, +\infty)$	$\mathbb{R}$	

**مثال** اگر  $A = [2, 5]$  و  $B = (3, +\infty)$  دو بازه باشند، حاصل  $B - A$ ,  $A \cap B$ ,  $A \cup B$  و  $A - B$  را بیابید.  
**پاسخ** نمایش هندسی هر دو بازه مطابق شکل مقابل است:

با توجه به شکل داریم:



$$A \cup B = [2, 5] \cup (3, +\infty) = [2, +\infty)$$



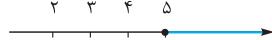
$$A \cap B = [2, 5] \cap (3, +\infty) = (3, 5)$$



$$A - B = [2, 5] - (3, +\infty) = [2, 3]$$

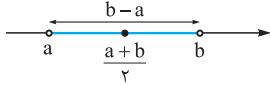


$$B - A = (3, +\infty) - [2, 5] = (5, +\infty)$$





**تذکرہ** طول بازه‌های  $(a, b)$ ،  $[a, b]$ ،  $[a, b)$  و  $(a, b]$  همگی برابر  $b - a$  است و در ضمن نقطه وسط تمام این بازه‌ها  $\frac{a+b}{2}$  است.



**تست** در بازه  $(2-a, 2+a)$  دقیقاً پنج عدد صحیح وجود دارد. حداقل مقدار  $a$  کدام است؟

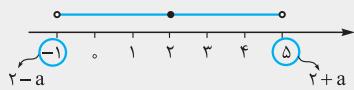
۴ (۴)

۲ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

**پاسخ** گزینه «۳» نمایش محوری بازه به صورت زیر است:



به ازای  $a = 3$  بازه به صورت  $(-1, 5)$  خواهد بود که شامل ۵ عدد صحیح است؛ اگر  $a > 3$  انتخاب شود، آن‌گاه بازه، شامل ۷ عدد صحیح  $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$  خواهد بود.

**تست** اجتماع تمام بازه‌های به فرم  $[1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$  کدام است؟ ( $n \in \mathbb{N}$ )

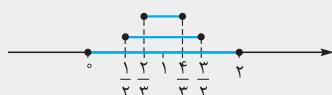
{ } (۴)

[ ] (۳)

[ ] (۲)

[ ] (۱)

**پاسخ** گزینه «۱» با انتخاب  $\dots, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$  و نمایش هندسی این بازه‌ها، معلوم می‌شود که اجتماع تمام آن‌ها برابر بازه  $[0, 2]$  است.



## مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی است، مجموعه متناهی می‌نامیم. اما اگر تعداد اعضای مجموعه‌ای از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر باشد (بی‌نهایت باشد) آن را مجموعه نامتناهی می‌نامیم. به طور مثال، مجموعه اعداد طبیعی یک‌رقمی (که ۹ عضو دارد) و یا مجموعه اعداد اول زوج (که یک عضو دارد) متناهی می‌باشند. اما مجموعه‌های  $\mathbb{N}$ ،  $\mathbb{Z}$ ،  $\mathbb{W}$  و  $\mathbb{Q}$  نامتناهی‌اند.

**تذکرہ** مجموعه تهی، متناهی است.

**تذکرہ** هر بازه به شکل  $(a, b)$  یک مجموعه نامتناهی است. ( $a < b$ )

**تست** اگر  $A$  مجموعه‌ای متناهی و  $B$  مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه کدام مجموعه زیر الزاماً متناهی است؟

B ∩ N (۴)

A - B (۳)

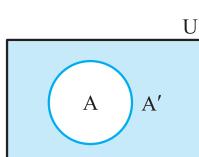
B - A (۲)

A ∪ B (۱)

**پاسخ** گزینه «۳» تعداد اعضای  $A - B$  یا برابر تعداد اعضای  $A$  است و یا کمتر از آن. پس  $A - B$  متناهی است.

## نمیم بک مجموعه

مجموعه مرجع: در هر مبحث، مجموعه‌ای که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند، مجموعه مرجع نامیده می‌شود و آن را با  $U$  (گاهی اوقات با  $M$ ) نشان می‌دهند.

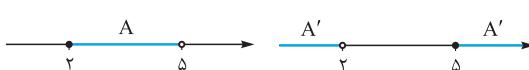


تمتم  $A$ : اگر  $U$  مجموعه مرجع باشد و  $A \subseteq U$ ، آن‌گاه مجموعه  $U - A$  را (که با  $A'$  نشان می‌دهیم) تمتم  $A$  می‌نامیم.

در واقع  $A'$  شامل تمام عضوهایی از  $U$  است که در  $A$  نیستند.

به طور مثال اگر  $\mathbb{W}$  مجموعه مرجع باشد، آن‌گاه  $\mathbb{N}' = \mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$  و یا

اگر  $\mathbb{R}$  مجموعه مرجع و  $A = [2, 5)$  آن‌گاه  $A' = (-\infty, 2) \cup [5, +\infty)$



**نکته** اگر  $U$  مجموعه مرجع و  $A$  زیرمجموعه دلخواه آن باشد، آن‌گاه:

 $A \cap A' = \emptyset$  $A \cup A' = U$  $A' = U$  $U' = \emptyset$



**تست** اگر  $(A \cap B') \cup (B \cap A')$  نامتناهی باشد، آن‌گاه کدام مجموعه زیر حتماً نامتناهی است؟

A (۴)

$A'$  (۳)

$A \cup B$  (۲)

$A - B$  (۱)

**پاسخ** گزینه «۲» اگر  $A$  متناهی باشد، آن‌گاه  $A \cap B'$  هم متناهی است. به طور مشابه اگر  $B$  نیز متناهی باشد، آن‌گاه  $A' \cap B$  هم متناهی است. در این صورت اجتماع دو مجموعه  $A \cap B'$  و  $A' \cap B$  نیز متناهی است که این با فرض سوال تناقض دارد. پس حتماً حداقل یکی از مجموعه‌های  $A$  و  $B$  نامتناهی است که در نتیجه  $A \cup B$  نیز نامتناهی است.

**تست** کدام گزینه برای مجموعه‌های دلخواه  $A$  و  $B$  صحیح نیست؟

(۱) اگر  $A \subset B$  و  $A$  نامتناهی باشد، آن‌گاه  $B$  نیز نامتناهی است. (۲) اگر  $A' \subset B'$  و  $A'$  متناهی باشد، آن‌گاه  $B$  نیز متناهی است.

(۳) اگر  $A \cap B \subset A'$  و  $A \cup B \subset A'$  متناهی باشد، آن‌گاه  $A$  نیز نامتناهی است. (۴) اگر  $A \cap B \subset B'$  و  $A \cup B \subset B'$  متناهی باشد، آن‌گاه  $B$  نیز نامتناهی است.

**پاسخ** گزینه «۴» ۱ صحیح است زیرا اگر  $A$  که یک مجموعه نامتناهی است، زیرمجموعه  $B$  باشد، پس  $B$  نمی‌تواند متناهی باشد، زیرا تمام اعضای  $A$  در  $B$  خواهند بود و در نتیجه  $B$  نیز نامتناهی است.

۲ صحیح است، زیرا اگر  $B \subset A'$  باشد و اگر  $A$  متناهی باشد، قطعاً  $B$  نیز متناهی است.

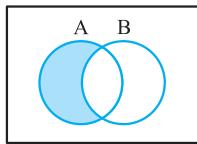
۳ صحیح است. اگر  $A \subset B$  باشد، آن‌گاه  $A \cap B = A$  است؛ در نتیجه  $A$  مجموعه‌ای نامتناهی است.

۴ صحیح نیست، زیرا اگر  $A' \subset B'$  باشد،  $A \cup B = A$ . اگر  $A$  نامتناهی باشد،  $B$  می‌تواند متناهی باشد، مثلاً اگر  $A = \{1, 2\}$  و  $B = \mathbb{N}$  باشد.

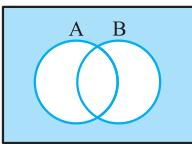
**نکته** روابط زیر در مورد متمم یک مجموعه برقرار است:

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad ۱ \quad (A \cup B)' = A' \cap B' \quad ۲ \quad A - B = A \cap B' \quad ۳ \quad (A')' = A \quad ۴$$

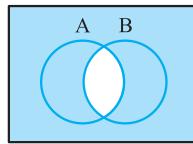
روابط ۲ و ۴ را روابط دمورگان می‌نامند. درستی روابط بالا را می‌توانید در نمودارهای ون که در زیر آمده است، تحقیق کنید.



$A - B$



$(A \cup B)'$



$(A \cap B)'$

**تذکر**

به کمک رابطه توزیع پذیری که در زیر آمده است، می‌توانید بسیاری از روابط بین مجموعه‌ها را اثبات کنید.

$$۱ \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$۲ \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = B \end{cases}$$

**تذکر**

**تست** با فرض  $B - A = B$  حاصل  $((B - A) \cup A')' = ((A \cup B') - B)$  کدام است؟

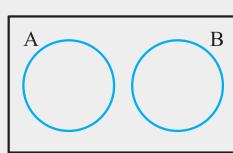
B (۴)

A (۳)

$A'$  (۲)

$A \cup B'$  (۱)

**پاسخ** گزینه «۳» از  $B - A = B$  نتیجه می‌گیریم  $A \cap B = \emptyset$  است، یعنی دو مجموعه  $A$  و  $B$  از هم جدا هستند:



$$A - B = A \Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow B - A = B$$

$$((B - A) \cup A')' = ((A \cup B') - B)' = (B' \cap A) - ((A \cup B') \cap B')'$$

پس:

$$(A \cap B') \cap ((A \cup B') \cap B') = (A - B) \cap B' = A \cap B' = A - B = A$$

## نعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

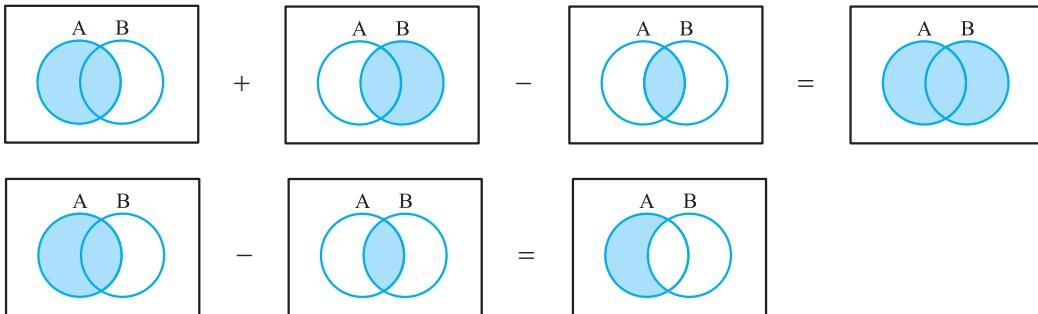
تعداد عضوهای مجموعه متناهی  $A$  را با  $n(A)$  (و یا  $|A|$ ) نشان می‌دهند. در این صورت روابط زیر برقرار است:

$$۱ \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$۲ \quad n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$



نمودار ون‌های زیر، درستی این روابط را به طور شهودی نشان می‌دهند:



**تعریف** اگر  $A \cap B = \emptyset$  آن‌گاه  $A$  و  $B$  را دو مجموعهٔ جدا از هم می‌نامیم.

**مثال** اگر تعداد اعضای  $A$  دو برابر تعداد اعضای  $B$  باشد، آن‌گاه تعداد اعضای  $A \cup B$  نصف تعداد اعضای  $B$  چند برابر تعداد اعضای  $A$  است؟

**پاسخ** با فرض  $x = n(A)$  داریم:

$$\begin{cases} n(A \cap B) = \frac{1}{2}n(A) = \frac{1}{2}x \\ n(B) = 2n(A) = 2x \end{cases} \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = x + 2x - \frac{1}{2}x = \frac{5}{2}x$$

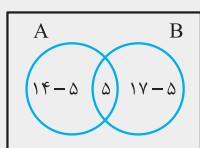
پس تعداد اعضای  $A \cup B$   $\frac{5}{2}$  برابر تعداد اعضای  $A$  است.

**تست** مجموعه‌های  $A$ ,  $B$  و  $A \cap B$  به ترتیب ۱۴، ۱۷ و ۵ عضو دارند. چند عضو فقط در یکی از این دو مجموعه است؟

۲۲ (۴)

۲۰ (۳)

۱۹ (۱)



**پاسخ** گزینهٔ «۳» در نمودار مقابل تعداد اعضای هر بخش نوشته شده است. تعداد اعضای

$A - B$  و  $B - A$  به ترتیب ۹ و ۱۲ است. پس ۲۱ عضو فقط در  $A$  یا فقط در  $B$  قرار دارند.

**روش دوم** هدف یافتن  $n((A - B) \cup (B - A))$  است.

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$\Rightarrow n((A - B) \cup (B - A)) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B) = 14 + 17 - 10 = 21$$

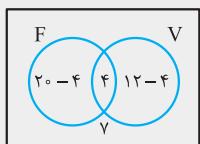
**تست** ۲۰ نفر از دانشآموزان یک کلاس در تیم فوتبال، ۱۲ نفر در هر دو تیم ثبت‌نام کرده‌اند. اگر ۷ نفر در هیچ‌کدام از دو تیم ثبت‌نام نکرده باشند، تعداد افراد کلاس کدام است؟

۳۵ (۴)

۳۴ (۳)

۳۳ (۲)

۳۲ (۱)



**پاسخ** گزینهٔ «۴» در نمودار مقابل، تعداد دانشآموزان ثبت‌نامی در هر تیم نوشته شده است. تعداد

کل دانشآموزان برابر  $35 = 20 + 4 + 12 + 4$  می‌باشد.

**تست** برای سه مجموعهٔ دلخواه  $A$ ,  $B$  و  $C$  تعداد اعضای مجموعه‌های  $C - B$ ,  $A - C$ ,  $C - A$ ,  $B - C$ ,  $A - B$  و  $B - A$  به ترتیب برابر ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ است. تعداد اعضای  $B - A$  کدام است؟

۶ (۴)

۷ (۳)

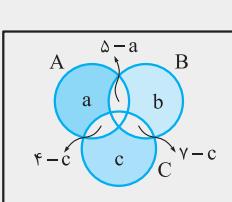
۸ (۲)

۹ (۱)

**پاسخ** گزینهٔ «۲» تعداد اعضای ناحیه‌های رنگی را،  $a$ ,  $b$  و  $c$  می‌گیریم (مطابق شکل)، سپس با توجه به اطلاعات مسئله، تعداد اعضای سایر مجموعه‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} 5-a=6-b \\ 4-c=4-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b-a=1 \\ a=c \end{cases} \Rightarrow b-c=1$$

با توجه به شکل داریم:



هدف محاسبه  $b - c = 1$  است. با توجه به رابطه  $b - c = 1$  حاصل  $b + 7 - c = b + 7 - 1 = b + 6$  برابر ۸ است.



## الگو و دنباله

دنباله: هر عدد را که پشت سر هم قرار می‌گیرند، یک دنباله می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند.

جمله عمومی: جمله  $t_n$  دنباله که با  $t_n$  نمایش می‌دهیم را جمله عمومی دنباله می‌نامیم.

به مثال‌های زیر توجه کنید.

$$1 \quad 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots \Rightarrow t_n = 2^n$$

$$2 \quad 1, 4, 7, 10, \dots, 3n - 2, \dots \Rightarrow t_n = 3n - 2$$

تست

$$\text{مجموع } 20 \text{ جمله اول دنباله‌ای با جمله عمومی } t_n = \frac{1+(-1)^n}{2} \text{ چه قدر است؟}$$

۴۰ (۴)

۱۰ (۳)

۲۰ (۲)

۱) صفر

**پاسخ گزینه ۳:** اگر در جمله عمومی به جای  $n$  اعداد طبیعی  $1, 2, 3, \dots, 20$  را جایگزین کنیم،  $20$  جمله اول به صورت زیر به دست می‌آید:

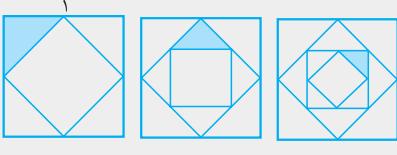
مجموع این  $20$  جمله برابر  $10$  است.

الگو: در بعضی دنباله‌ها، بین جملات الگوی وجود دارد که این الگو با جمله عمومی دنباله قابل بیان است.  
به طور مثال در الگوی مقابل، تعداد نقاط را می‌توان به صورت دنباله  $\dots, 4, 8, 12, \dots$  نشان داد.  
جمله عمومی این الگو به صورت  $t_n = 4n$  می‌باشد.



تست

در الگوی مقابل، مساحت مثلث رنگی در شکل هفتم چه قدر است؟ (در هر مرحله، وسط اضلاع مربع به هم وصل شده‌اند).



$$\frac{1}{1024} \quad (2)$$

$$\dots$$

$$\frac{1}{512} \quad (1)$$

$$\frac{1}{256} \quad (3)$$

شکل ۱      شکل ۲      شکل ۳

$$S_1 = \frac{1}{8} : \text{مساحت شکل ۱}$$

**پاسخ گزینه ۱:**

$$S_2 = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} : \text{مساحت شکل ۲}$$

$$S_3 = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 : \text{مساحت شکل ۳}$$

$$S_7 = \frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{512} : \text{مساحت شکل ۷}$$

## الگوی خطی

الگوهایی که جمله عمومی آن‌ها به صورت  $t_n = an + b$  است، الگوی خطی می‌نامند.

**نکته** در یک الگوی خطی، اختلاف هر دو جمله متوالی، برابر ضریب  $n$  است.

**مثال** در یک الگوی خطی، جمله ششم،  $14$  واحد از جمله دوم بیشتر است. در این الگو، جمله سیزدهم، چه قدر از جمله هشتم بیشتر است؟

**پاسخ** جمله عمومی الگو را  $t_n = an + b$  فرض می‌کنیم.

$$t_6 = 14 + t_2 \Rightarrow 6a + b = 14 + 2a + b \Rightarrow a = \frac{7}{2}$$

$$t_{13} - t_8 = (13a + b) - (8a + b) = 5a = \frac{35}{2} = 17.5$$

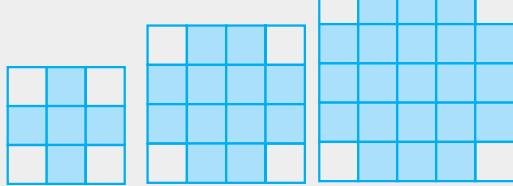


## الگوی درجه دوم

اگر جمله عمومی یک دنباله، چندجمله‌ای درجه دوم باشد، این دنباله را یک دنباله درجه ۲ می‌نامیم.

**تست** در الگوی زیر، تعداد مربع‌های رنگ‌شده، جملات یک دنباله درجه ۲

هستند. مجموع ضرایب جمله عمومی این دنباله چقدر است؟



$$3^2 - 4, 4^2 - 4, 5^2 - 4, \dots$$

**پاسخ** گزینه «۱» تعداد مربع‌های رنگ‌شده، جملات دنباله مقابل می‌باشند:

$$\text{پس } t_n = (n+2)^2 - 4 \text{ یعنی } t_n = n^2 + 4n + 4 - 4 = n^2 + 4n \text{ مجموع ضرایب } t_n \text{ برابر } 5 \text{ است.}$$

## دنباله‌های حسابی و هندسی

## دنباله حسابی

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه‌شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست آید، یک دنباله حسابی نامیده می‌شود. به آن عدد ثابت، قدرنسبت دنباله می‌گویند که با نماد  $d$  نمایش می‌دهند.

$$t_1, t_1 + d, t_1 + 2d, \dots$$

**نکته** جملات دنباله حسابی را به صورت مقابل نشان می‌دهیم:  
جمله عمومی: جمله  $t_n = t_1 + (n-1)d$  یا همان جمله عمومی دنباله حسابی با جمله اول  $t_1$  و قدرنسبت  $d$  به صورت مقابل است:

**مثال** تعداد جملات مثبت دنباله حسابی  $\dots, 63, 5, 25, x, y, 63$  را تعیین کنید.

$$t_4 = t_1 + 3d \Rightarrow 63 = 25 + 3d \Rightarrow d = -4$$

**پاسخ** جمله اول دنباله، ۷۵ و جمله چهارم آن ۶۳ است.

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = 75 + (n-1)(-4) \Rightarrow t_n = -4n + 79$$

پس باید  $-4n + 79 > 0$  باشد، در نتیجه  $n < \frac{79}{4}$ . تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از  $\frac{79}{4}$  برابر ۱۹ است.

**تست** در یک دنباله حسابی  $t_4 = 75$  و  $t_8 = 13$  است. اولین جمله بزرگ‌تر از  $50$  در این دنباله کدام است؟

$$t_{34} (۴)$$

$$t_{22} (۳)$$

$$t_{21} (۲)$$

$$t_{21} (۱)$$

**پاسخ** گزینه «۳» قدرنسبت را  $d$  فرض کنید.

$$\begin{cases} t_4 = 7 \\ t_8 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 3d = 7 \\ t_1 + 7d = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \frac{3}{2} \\ t_1 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$t_n > 50 \Rightarrow t_1 + (n-1)d > 50 \Rightarrow \frac{5}{2} + \frac{3}{2}(n-1) > 50 \Rightarrow n > \frac{98}{3}$$

اولین عدد طبیعی،  $n = 33$  است.

**تست** دهمین جمله مشترک دو دنباله حسابی  $\{1, 3, 7, \dots\}$  و  $\{2, 5, 8, \dots\}$  کدام است؟

$$132 (۴)$$

$$130 (۳)$$

$$118 (۲)$$

$$119 (۱)$$

**پاسخ** گزینه «۱» قدرنسبت دنباله‌ها برابر ۴ و ۳ است. پس جملات مشترک آن‌ها دارای قدرنسبتی برابر ۱۲ است. در واقع جملات مشترک (که اولین آن‌ها ۱۱ است)، خود یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۱۲ است.

$$11, 23, 35, \dots \Rightarrow t_{10} = t_1 + 9d = 11 + 9 \times 12 = 119$$

**نکته** اگر  $c$  و  $b$  و  $a$  سه جمله متولی یک دنباله حسابی باشند، آن‌گاه  $b$  را واسطه حسابی  $a$  و  $c$  می‌نامیم؛ در این صورت  $b = \frac{a+c}{2}$

در حالت کلی تر اگر  $a$  و  $c$  از نظر شماره جمله، از  $b$  به فاصله یکسان باشند، باز هم رابطه بالا برقرار است. به طور مثال:

$$t_1, t_5, t_9 \Rightarrow t_5 = \frac{t_1 + t_9}{2}$$



## درج واسطه حسابی

اگر بخواهیم بین دو عدد  $a$  و  $b$  عدد  $n$  چنان قرار دهیم که  $n+2$  عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدهند، گوییم بین  $a$  و  $b$  واسطه حسابی درج کردہایم، در این صورت داریم:

$$\begin{cases} t_1 = a \\ t_{n+2} = b \end{cases} \Rightarrow b = a + (n+1)d$$

**تست** بین ۵ و ۱۲، پنج واسطه حسابی درج کردہایم. مجموع واسطه‌های دوم و چهارم درج شده کدام است؟

۱۷ (۴)

۱۶ (۳)

۱۵ (۲)

۱۴ (۱)

**پاسخ** **گزینه ۴** روش اول جملات دنباله را به صورت  $5, a, b, c, e, f, 12$  می‌نویسیم:

$$t_7 = 12 \Rightarrow 5 + 6d = 12 \Rightarrow d = \frac{7}{6} \Rightarrow \begin{cases} b = t_2 = 5 + 2d = 5 + \frac{7}{3} = \frac{22}{3} \\ e = t_5 = 5 + 4d = 5 + \frac{14}{3} = \frac{29}{3} \end{cases}$$

پس حاصل  $e + b$  برابر ۱۷ است.

**روش دوم** هم واسطه حسابی ۵ و ۱۲ است و هم واسطه حسابی  $b$  و  $e$ ، پس:

$$c = \frac{e+b}{2} = \frac{5+12}{2} \Rightarrow e+b = 5+12 = 17$$

## دنباله هندسی

دنباله‌ای را که در آن، هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیرصفر به دست آید، دنباله هندسی می‌نامیم. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم. جمله اول هم باید غیرصفر باشد.

**نکته** جملات دنباله هندسی را به صورت  $t_1, t_1r, t_1r^2, \dots$

$t_n = t_1r^{n-1}$

جمله عمومی: جمله  $n$ ام یا همان جمله عمومی دنباله هندسی با جمله اول  $t_1$  و قدرنسبت  $r$  برابر است با:

**تذکر** اگر  $a, b, c$  سه جمله متولی یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه  $b^2 = ac$  و  $b$  را واسطه هندسی  $a$  و  $c$  می‌نامیم.

**تست** در یک دنباله هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از یک، جمله پنجم مربع جمله  $n$ ام است. اگر جمله پانزدهم این دنباله برابر ۱ باشد، مقدار  $n$  کدام است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

**پاسخ** **گزینه ۳** جمله اول را  $t_1$  و قدرنسبت را  $r$  فرض کنید.

$$\begin{cases} t_5 = (t_n)^2 \\ t_{15} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1r^4 = (t_1r^{n-1})^2 = t_1^2 r^{2n-2} \\ t_1r^{14} = 1 \end{cases} \Rightarrow t_1r^{2n-6} = 1$$

از مقایسه دو رابطه بالا نتیجه می‌گیریم  $2n - 6 = 14 - n$  پس  $n = 10$ .

**تست** جملات دوم، ششم و هشتم یک دنباله حسابی، سه جمله متولی یک دنباله هندسی‌اند. جمله چندم دنباله حسابی برابر صفر است؟

۱) دهم

۲) یازدهم

۳) سیزدهم

۴) چهاردهم

**پاسخ** **گزینه ۱** جملات دنباله حسابی را به صورت  $t + 7d$  و  $t + 5d$  و  $t + d$  در نظر می‌گیریم. باید  $t + 5d$  واسطه هندسی بین  $t + 7d$  و  $t + d$  باشد.

$$(t + 5d)^2 = (t + d)(t + 7d)$$

$$\Rightarrow t^2 + 10td + 25d^2 = t^2 + 8td + 7d^2 \Rightarrow 2td + 18d^2 = 0 \Rightarrow t + 9d = 0 \Rightarrow t_1 = 0$$



### مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

۱) اگر  $t_1$ ، جمله اول و  $d$ ، قدرنسبت یک دنباله حسابی باشد؛ آن‌گاه مجموع  $n$  جمله اول آن از روابط زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(t_1 + t_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2t_1 + (n-1)d)$$

۲) اگر  $t_1$ ، جمله اول و  $r$ ، قدرنسبت یک دنباله هندسی باشد، آن‌گاه مجموع  $n$  جمله اول آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{t_1(1-r^n)}{1-r}$$

تست مجموع ۶ جمله اول یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۲، چند برابر مجموع ۳ جمله اول آن است؟

۱۸) ۴

۱۵) ۳

۹) ۲

۱۶) ۱

پاسخ گزینه «۲» با توجه به فرمول  $S_n$  در دنباله هندسی داریم:

$$S_n = \frac{t_1(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow \begin{cases} S_6 = \frac{t_1(1-2^6)}{1-2} = 63t_1 \\ S_3 = \frac{t_1(1-2^3)}{1-2} = 7t_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{S_6}{S_3} = 9$$

تست در یک دنباله حسابی شامل  $n$  جمله، مجموع سه جمله اول برابر ۷، مجموع سه جمله آخر برابر ۴۳ و مجموع کل جملات برابر ۱۲۵ است. مقدار  $n$  کدام است؟

۱۵) ۴

۱۲) ۳

۱۰) ۲

۲۵) ۱

پاسخ گزینه «۴» ابتدا دقت کنید که  $t_1 + t_n = t_1 + t_{n-1} + t_n - d = t_1 + t_{n-2} + t_n - d$ . حال با توجه به فرمول  $S_n$  در دنباله حسابی داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(t_1 + t_n) = \frac{n}{2}(t_1 + t_{n-1}) = \frac{n}{2}(t_1 + t_{n-2}) \Rightarrow ۳S_n = \frac{n}{2}(\underbrace{t_1 + t_2 + t_3}_{۱۲۵} + \underbrace{t_{n-2} + t_{n-1} + t_n}_{۴۳})$$

$$\Rightarrow ۳ \times ۱۲۵ = \frac{n}{2}(7 + 43) \Rightarrow n = 15$$

## پرسش‌های حل‌هارگزینه‌ای

۱- اگر برای مجموعه‌های  $A$ ,  $B$ ,  $C$  و  $D$  که هر کدام معرف یکی از مجموعه‌های اعداد طبیعی، اعداد صحیح، اعداد گویا و اعداد حقیقی است رابطه  $A \subset B \subset C \subset D$  برقرار باشد، مجموعه اعداد گنگ کدام است؟

$D - B$  (۴)

$D - C$  (۳)

$C - B$  (۲)

$B \cup C$  (۱)

۲- حاصل  $\alpha^7 + 2\alpha^5$  به ازای کدام عدد زیر، گویاست؟

$\sqrt{2} - 1$  (۴)

$\sqrt{2} - 2$  (۳)

$\sqrt{2} + 2$  (۲)

$\sqrt{2} + 1$  (۱)

۳- مجموعه  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \frac{3n+21}{n+2} \in \mathbb{N}\}$  چند عضو دارد؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۴- اگر  $\alpha$  یک عدد حقیقی گنگ و به ازای هر  $\alpha$ ،  $\frac{3\alpha+k}{2\alpha-3}$  یک عدد حقیقی گویا باشد، آن‌گاه  $k$  کدام می‌تواند باشد؟

$-\frac{3}{2}$  (۴)

$\frac{3}{2}$  (۳)

$-\frac{9}{2}$  (۲)

$\frac{9}{2}$  (۱)



-۲ (۴)

۵- اگر  $\{1, 2, m+1\} \cap \{3, m-1, n-2\} = \{1, 2, m+1\}$  کدام است؟

۳ (۳) -۱ (۲)

(۱) صفر

۴- بی شمار مقدار

۶- به ازای چند مقدار  $a$  دو مجموعه  $\{a, a^2\}$  و  $\{b, b^2\}$  با یکدیگر برابرند؟

۳ (۳) (۱) یک مقدار

(۲) دو مقدار

۷- اجتماع کدام دو بازه زیر، خود یک بازه است؟

(۱, ۴), (-۲, ۰) (۴)

(۲, ۴), (۵, ۷) (۳)

(۱, ۳), (-۱, ۱) (۲)

(۲, ۵), (-۳, ۳) (۱)

۳۱ (۴)

۳۰ (۳)

۶۱ (۲)

۶۰ (۱)

۸- عدد گویای  $\frac{3}{n}$  عضو بازه  $(2, 2/5)$  است. حداقل مقدار طبیعی  $n$  کدام است؟

۳۲ (۴)

۳۱ (۳)

۶۲ (۲)

۶۱ (۱)

۹- اگر  $\frac{1}{n\sqrt{2}} + 2 + 2$  عددی گنگ در بازه  $(2, \frac{9}{4})$  باشد، آن‌گاه  $n$  چند مقدار طبیعی را اختیار نمی‌کند؟

۴- چهار

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۱۰- اگر  $a+1$  عضوی از بازه  $(13-2a, 2a-3)$  باشد،  $a$  کدام است؟

۶ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)

۵ (۴)

۷ (۲)

۸ (۱)

۷ (۴)

۲ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۱۱- در بازه  $(-\frac{2}{3} - n, \frac{2}{3} + n)$  دقیقاً سه عدد صحیح قرار دارد. حداقل  $n$  کدام است؟۱۲- اگر  $A \cap B$  یک مجموعه با تعداد اعضای متناهی باشد، کدام صحیح است؟۱۳- اگر  $A = [2, 4]$  و  $B = [a, +\infty)$  باشند، کدام صحیح است؟

۴- یافت نمی‌شود.

۴ (۳)

۴ (۲)

۴ (۱)

۲ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۴- اگر  $A = (-\infty, 4]$  و  $B = (a, +\infty)$  باشند، کدام  $a$  عدد صحیح باشد؟۱۵- اگر  $A = (-6, 2]$  و  $B = [-1, 4]$  باشند، کدام مجموعه است؟۱۶- اگر  $A = (-\infty, 5]$  و  $B = (-3, +\infty)$  باشند، کدام  $a$  عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟۱۷- اگر  $a+b$  مقدار  $a+6$  کدام می‌تواند باشد؟۱۸- اگر  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = [\frac{1-n}{2}, \frac{1+n}{4}]$  آن‌گاه کدام است؟۱۹- اگر  $M = \{1, 2, \dots, 9\}$  و  $B = \{4, 5\}$  برای  $B-A = \{1, 2, 3\}$  چند جواب به دست می‌آید؟ (مرجع است)۲۰- اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$  باشد، آن‌گاه چند مجموعه مانند  $M$  در رابطه  $(A \cap B) \subset M \subset (A \cup B)$  صدق می‌کند؟۲۱- با کدام شرط دو مجموعه  $A$  و  $B$  متمم یکدیگر هستند؟۲۲- اگر  $A-B \subseteq A$  و  $B \subseteq A$  یک مجموعه غیرتنهی و متناهی باشد،  $A$  و  $B$  کدام می‌تواند باشد؟۲۳- اگر  $A$  مجموعه‌ای نامتناهی و  $B$  مجموعه‌ای متناهی باشد، کدام مجموعه حتماً متناهی است؟۲۴-  $A' \cup B' = \emptyset$ ۲۵-  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A' \cup B' = \emptyset$ ۲۶-  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \cup B = M$ ۲۷-  $A = \{2, 5\}$ ,  $B = \{2, 5\}$ ۲۸-  $A = \{2, 5\}$ ,  $B = \{2, 5\}$ ۲۹-  $A = \{2, 5\}$ ,  $B = \{2, 5\}$ ۳۰-  $A' \cap B' = \emptyset$ ۳۱-  $B \cap A' = \emptyset$ ۳۲-  $A' \cap B' = \emptyset$ ۳۳-  $B' \cap A = \emptyset$



-۲۴ اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه غیرتپی و متناهی باشند، کدام مجموعه می‌تواند نامتناهی باشد؟

$$(A - B')' \quad (4)$$

$$(A' - B)' \quad (3)$$

$$B' - A' \quad (2)$$

$$A - B' \quad (1)$$

-۲۵ اگر  $A \subset B \subset C$  به طوری که  $A$  متناهی و  $C$  نامتناهی باشد، کدام گزینه صحیح است؟

$$C - A \quad (4)$$

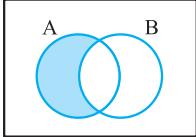
$$B - A \quad (2)$$

$$C' \quad (3)$$

$$B' \quad (1)$$

نامتناهی است.

M



-۲۶ متمم شکل زنگ شده کدام است؟

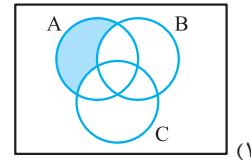
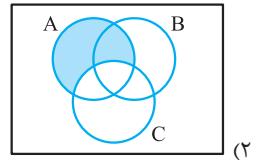
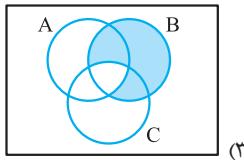
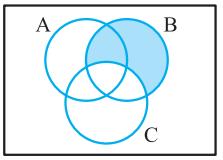
$$A' \cup B' \quad (1)$$

$$(A \cup B) - A' \quad (2)$$

$$B \cup A' \quad (3)$$

$$(A \cup B) - A \quad (4)$$

-۲۷ در کدام گزینه زیر، مجموعه  $(A - B)' \cap (B - C)$  درست سایه زده شده است؟



$$B' \cup A \quad (4)$$

$$B \cup A' \quad (3)$$

-۲۸ متمم مجموعه  $(A - B)' - A'$  کدام است؟

$$A' \cup B' \quad (2)$$

$$A \cap B \quad (1)$$

-۲۹ متمم مجموعه  $((A \cup B) - A) \cap A$  کدام است؟

$$B \cap A' \quad (2)$$

$$B' \cap A \quad (1)$$

-۳۰ ساده‌شده  $(A - B)' \cup (B - A)'$  کدام است؟

$$A \cup B \quad (2)$$

$$M \quad (1)$$

-۳۱ اگر  $A \subset B$  و  $B \subset C$ ، حاصل  $A' \cup C'$  کدام است؟

$$A' \quad (2)$$

$$A \quad (1)$$

-۳۲ اگر  $A \cup B = A \cup C$ ، کدام گزینه الزاماً درست است؟

$$A - B' = A - C' \quad (2)$$

$$B = C \quad (1)$$

$$(A \cup B)' \quad (4)$$

$$A' \cup B' \quad (3)$$

$$C' \quad (4)$$

$$C \quad (3)$$

$$C \subset A \quad (2)$$

$$C \subset A \quad (2)$$

$$A - B = \emptyset \quad (1)$$

$$A - B = D, B - C = E, D - E = F$$

-۳۴ برای سه مجموعه دلخواه  $A$  و  $B$  و  $C$  داریم:

در این صورت کدام گزینه حتماً صحیح است؟

$$A \cap C \subseteq F \quad (4)$$

$$D \cap C \subseteq F \quad (3)$$

$$F \subseteq A \cap C \quad (2)$$

$$F \subseteq C \quad (1)$$

-۳۵ اگر مجموعه مرجع  $\{1, 2, \dots, 20\}$  و  $B = \{5, 6, \dots, 15\}$  و  $A = \{1, 2, \dots, 15\}$ ،  $M = \{1, 2, \dots, 20\}$ ، کدام مجموعه عضو کمتری دارد؟

$$(A - B)' \quad (4)$$

$$A' - B \quad (3)$$

$$A - B' \quad (2)$$

$$A \cup B' \quad (1)$$

-۳۶ اگر  $\{1, 2, \dots, 20\} - X = \{1, 2, \dots, 30\} - X$ ، مجموعه  $X$  کدام ویژگی را دارد؟

(۱) حداقل ۱۰ و حداقل ۲۰ عضو دارد.

(۲) حداقل ۱۰ و حداقل ۲۰ عضو دارد.

(۳) می‌تواند حداقل ۱۰ عضو داشته باشد و می‌تواند نامتناهی باشد.

(۴) می‌تواند حداقل ۲۰ عضو داشته باشد و می‌تواند نامتناهی باشد.

$$7 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$5 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

-۳۷ اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه دلخواه باشند، حاصل  $\frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)}$  کدام است؟

$$3 \quad (4)$$

$$1 / 25 \quad (3)$$

$$1 / 25 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

-۳۸ اگر  $B$  دو مجموعه دلخواه باشند، حاصل  $\frac{n(A) + n(B)}{n(A \cap B)}$  برابر کدام عدد می‌تواند باشد؟

$$7 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$5 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

-۳۹ اگر بدانیم  $n((A - B) \cup (B - A)) = 5n(A \cap B)$  کدام است؟

$$7 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$5 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$



۴۰- از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه، ۷۰ نفر محصولات شرکت A و ۵۷ نفر محصولات شرکت B را انتخاب کرده‌اند. اگر ۳۲ نفر از هر دو شرکت خرید کرده باشند، تعداد کسانی که از هیچ شرکتی خرید نکرده باشند چند نفر است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۲۰ (۴) ۳۰ (۵) ۱۵

۴۱- اگر مجموعه‌های A و B و A - B به ترتیب ۱۵ و ۱۰ و ۱۲ عضو داشته باشند، مجموعه  $A \cup (A \cap B)$  چند عضو دارد؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۴۲- اگر  $n(A) = 9$  و  $n(A \cap B) = 2$  آن‌گاه تعداد اعضای مجموعه  $'A \cap (A \cap B)$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) صفر

۴۳- اگر اعداد طبیعی دورقمری را مرجع در نظر بگیریم و اعداد مضرب ۴ را A و اعداد مضرب ۵ را B فرض کنیم،  $n(A \cup B)$  و  $n((A \cup B)')$  چه قدر اختلاف دارند؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۳ (۳) ۳۵ (۴) ۳۹

۴۴- در یک کلاس ۷۰ نفری، ۴۰ نفر در المپیاد شیمی و ۵۵ نفر در المپیاد فیزیک شرکت کرده‌اند. لاقل چند نفر در هر دو المپیاد شیمی و فیزیک شرکت کرده‌اند؟ (ممکن است برخی افراد کلاس در هیچ المپیادی نباشند).

- (۱) ۳۰ (۲) ۲۵ (۳) ۳۵ (۴) ۲۰

۴۵- هرگاه  $n(A \cap B) = 10$ ،  $n(A - B) = 13$  و  $n(B - A) = 1$ ، به طوری که از  $n(A \cup B)$ ، ۳ واحد کم کنیم و به  $n(A \cap B)$  واحد اضافه کنیم به  $n(A \cup B)$ ، ۲۰ واحد اضافه می‌شود، عدد k کدام است؟

- (۱) ۱۷ (۲) ۲۰ (۳) ۲۳ (۴) ۲۶

۴۶- فرض کنید  $n(A \cup B) = 20$ ، اگر از A عضو  $n(A \cap B) = 5$  باشد و بعده از A عضو برداریم از A، ۵ عضو و از B، ۶ عضو کم می‌شود. در این حالت جدید  $n((A - B) \cup (B - A))$  کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۴۷- در یک مدرسه، ۵۵ نفر در رشته فوتبال، ۵۰ نفر در رشته والیبال و ۵۰ نفر در رشته بسکتبال شرکت کرده‌اند. اگر ۱۵ نفر فوتبال و والیبال، ۱۳ نفر والیبال و بسکتبال، ۱۱ نفر فوتبال و بسکتبال بازی کنند و کل ورزشکاران ۱۲۴ نفر باشند، چند نفر در هر سه رشته فعالیت می‌کنند؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۴۸- از بین ۳۸ دانشآموز، ۱۳ نفر عضو گروه A، ۱۰ نفر عضو گروه B و ۲۱ نفر عضو گروه C می‌باشند. اگر تعداد اعضای مشترک گروه‌های A، C، برابر تعداد اعضای مشترک گروه B و C باشند و هیچ دانشآموزی عضو مشترک A و B نباشد، آن‌گاه چند نفر تنها عضو گروه A هستند؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۷

۴۹- در یک الگوی خطی، اختلاف جملات دهم و هفتم برابر ۱۲ است. اختلاف جمله ششم این دنباله از جمله اول آن چه قدر است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۸

۵۰- در یک الگوی خطی  $a_n = n + 20$ . مقدار  $a_{n+2} - a_n$  چه عددی است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۵۱- اگر  $a_n = (k - 2)n^2 + (2k + 1)n - k$  یک الگوی خطی باشد، حاصل  $a_2 - a_1$  کدام است؟

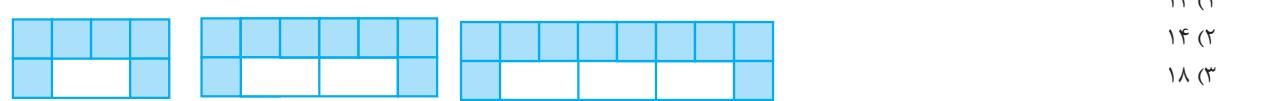
- (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۳۸ (۴) ۲۴

۵۲- در الگوی مقابل، محیط نیم‌دایرهٔ شکل هفتم چه قدر است؟

- (۱)  $\frac{64\pi}{243}$  (۲)  $\frac{128\pi}{243}$  (۳)  $\frac{64\pi}{81}$  (۴)  $\frac{128\pi}{81}$

۵۳- با توجه به الگوی زیر، در شکل دهم اختلاف تعداد کاشی سفید و رنگی چه عددی است؟

- (۱) ۱۲



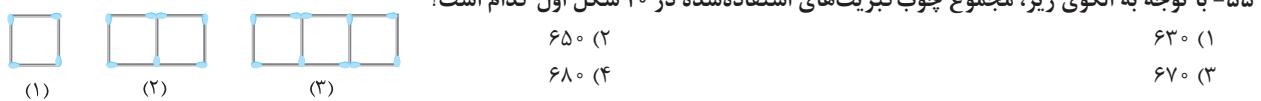
- (۲) ۱۴ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

۵۴- در یک دنباله،  $a_1 = 1$  و  $a_2 = a_1 + a_n$  است. اگر  $b_n = (a_{n+1})^2 - a_n a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$  برابر کدام گزینه است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳)  $(-1)^{n+1}$  (۴)  $(-1)^n$

۵۵- با توجه به الگوی زیر، مجموع چوب‌کبریت‌های استفاده شده در ۲۰ شکل اول کدام است؟

- (۱) ۶۳۰ (۲) ۶۵۰ (۳) ۶۷۰ (۴) ۶۸۰





-۵۶- در الگوی زیر، جمع اعداد داخل مستطیل شکل دهم چه قدر است؟

۴۹۵ (۲)

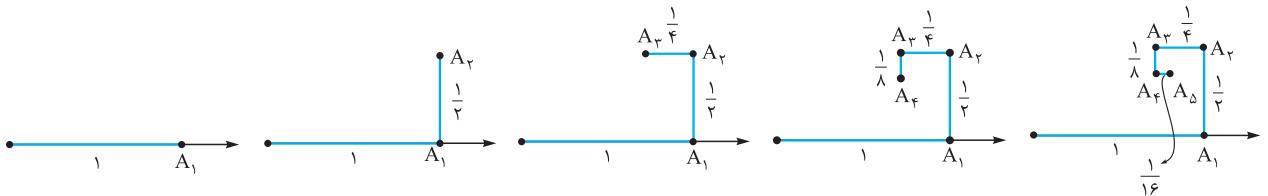
۵۰۵ (۱)

۴۷۵ (۴)

۴۸۵ (۳)

-۵۷- در الگوی زیر، طول تصویر نقطه  $A_1$  روی محور چه قدر است؟

- |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ |
|---|---|---|---|---|---|



$\frac{225}{512}$  (۴)

$\frac{225}{256}$  (۳)

$\frac{205}{256}$  (۲)

$\frac{205}{512}$  (۱)

-۵۸- در یک الگو با جمله عمومی  $a_n = \frac{1}{n^2 + n}$ ، جمع صد جمله ابتدایی چه عددی است؟

$\frac{99}{100}$  (۴)

$\frac{101}{100}$  (۳)

$\frac{100}{101}$  (۲)

$\frac{99}{101}$  (۱)

-۵۹- در یک دنباله حسابی،  $a_{n+1} = 17$  و  $a_{n-1} = 35$  میباشد. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۵ (۱)

-۶۰- جمله چندم دنباله حسابی با جمله عمومی  $a_n = \frac{4n^2 + 11n + a}{n + 2}$  برابر ۸۳ میباشد؟

۱۹ (۴)

۲۳ (۳)

۲۱ (۲)

۲۰ (۱)

-۶۱- اگر جمله اول دنباله عددی  $a_n = 3 - 12n$  را ۳ واحد اضافه کنیم و از قدرنسبت ۲ واحد کم کنیم، جمله بیستم دنباله جدید با چه قدر اختلاف دارد؟

۲۵ (۴)

۲۸ (۳)

۳۸ (۲)

۳۵ (۱)

-۶۲- در دنباله حسابی ...-۲, a, b, 7, ..., ۲- چند جمله کمتر از ۱۰۰ وجود دارد؟

۳۵ (۴)

۳۴ (۳)

۳۱ (۲)

۳۰ (۱)

-۶۳- اگر  $a_n = 4n$  و  $b_n = 3n - 4$  دو دنباله حسابی باشند، جمله شانزدهم  $b_n$  با چندمین جمله  $a_n$  برابر است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

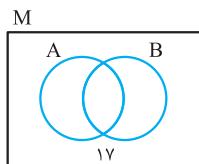
-۶۴- اگر x, y و z به ترتیب معرف تعداد اعضای مجموعه های  $B - A$ ,  $A \cap B$ ,  $A - B$ ,  $A \cup B$  باشند و  $n(M) = 44$  به طوری که  $x, y, z, 17$  دنباله عددی تشکیل دهند، تعداد اعضای  $A \cap B$  چه عددی است؟

۸ (۲)

۴ (۴)

۹ (۱)

۶ (۳)



-۶۵- در یک دنباله حسابی  $a_7 = 30$  اگر جمله اول نصف جمله چهارم باشد، حاصل  $a_7 + a_8 + a_9$  کدام است؟

۳۶۵ (۴)

۲۴۵ (۳)

۲۸۵ (۲)

۳۰۲ (۱)

-۶۶- اضلاع یک مثلث قائم الزاویه سه جمله متولی یک دنباله حسابی اند. نسبت محیط این مثلث به طول کوچکترین ضلع آن کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

$\frac{5}{2}$  (۲)

$\frac{7}{2}$  (۱)

-۶۷- سه جمله اول یک دنباله حسابی به صورت  $a - b, b - c, c - a$  میباشد. جمله چهاردهم این دنباله، چند برابر جمله ششم آن است؟

(۱) پنج برابر

(۲) شش برابر

(۳) سه برابر

(۴) چهار برابر

-۶۸- اضلاع و قطر یک مستطیل، دنباله عددی تشکیل می‌دهند. اگر محیط آن ۶۵ باشد، مساحت مستطیل چه عددی است؟

۲۵۶ (۴)

۱۹۲ (۳)

۹۶ (۲)

۶۴ (۱)

-۶۹- در یک دنباله هندسی با جملات مثبت اگر  $\frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} = 9$  و  $a_1 = 1$ ، مقدار  $a_{10}$  کدام است؟

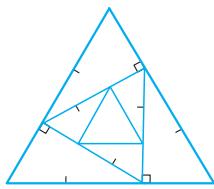
$3^{-10}$  (۴)

$3^{10}$  (۳)

$3^9$  (۲)

$3^{-9}$  (۱)

۷۰- در شکل زیر، ضلع بزرگ‌ترین مثلث متساوی‌الاضلاع برابر ۹ می‌باشد. هر ضلع را به ۳ قسمت برابر تقسیم می‌کنیم و مثلث متساوی‌الاضلاع جدیدی پدید می‌آوریم. اگر همین عمل تکرار شود، ضلع پنجمین مثلث متساوی‌الاضلاع کدام است؟  
 در هر مرحله سه مثلث کناری به وجود آمده قائم‌الزاویه‌اند.



$$\frac{81}{16} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\frac{9}{16} \quad (1)$$

$$1 \quad (3)$$

۷۱- جمعیت یک شهر در ابتدای سال ۹۰، ۱۰۰۰۰۰ نفر بوده است. اگر سالانه ۲۰ درصد جمعیت شهر کاهش یابد، در ابتدای سال ۹۵ جمعیت شهر به چند نفر خواهد رسید؟

$$2^{14} \quad (4)$$

$$2^{16} \quad (3)$$

$$2^{12} \quad (2)$$

$$2^{15} \quad (1)$$

۷۲- اگر به اعداد ۲ و ۴ و ۲۲ عدد  $k$  را اضافه کنیم، سه عدد حاصل یک دنباله هندسی تشکیل می‌دهند. کدام است؟

$$7 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$5 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

۷۳- بین دو عدد ۲ و ۱۶، پنج واسطه هندسی درج کردہ‌ایم. حاصل ضرب ۵ واسطه کدام است؟

$$2048 \quad (4)$$

$$1024\sqrt{2} \quad (3)$$

$$4096\sqrt{2} \quad (2)$$

$$4096 \quad (1)$$

۷۴- حاصل ضرب ۵ جمله ابتدایی ... ۸۱، ۷۲، ۶۹، ... چند برابر جمله پنجم آن است؟

$$\frac{1}{81} \quad (4)$$

$$81 \quad (3)$$

$$\frac{1}{243} \quad (2)$$

$$243 \quad (1)$$

۷۵- حاصل ضرب پنجاه جمله ابتدایی ... ۲، ۴، ۸، ۱۶، ... چه توانی از ۸ می‌باشد؟

$$435 \quad (4)$$

$$460 \quad (3)$$

$$425 \quad (2)$$

$$415 \quad (1)$$

۷۶- در یک دنباله هندسی جمله هفتم برابر  $\sqrt[13]{2}$  است. حاصل ضرب ۱۳ جمله اول این دنباله کدام است؟

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

۷۷- در یک دنباله اگر  $a_3 = 3$  و  $a_7 = 2a_{n-1} + 3$ ، مقدار  $a_8 - a_7$  کدام است؟

$$384 \quad (4)$$

$$192 \quad (3)$$

$$256 \quad (2)$$

$$128 \quad (1)$$

۷۸- در یک دنباله،  $a_1 = 1$  و  $a_n + 1 = \frac{3}{4}a_{n+1}$ . در این صورت  $a_{15} - a_{16}$  کدام است؟

$$(\frac{3}{4})^{15} \quad (4)$$

$$(\frac{3}{4})^{14} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4}(\frac{3}{4})^{15} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4}(\frac{3}{4})^{14} \quad (1)$$

۷۹- اگر در یک دنباله هر جمله از ۲ برابر جمله قبل ۲ واحد بیشتر باشد به طوری که جمله اول ۴ باشد، جمله چهلم چه عددی است؟

$$6 \times 3^4 - 2 \quad (4)$$

$$6 \times 2^4 - 2 \quad (3)$$

$$3 \times 2^4 - 2 \quad (2)$$

$$2 \times 3^4 - 2 \quad (1)$$

۸۰- اگر  $x^y, 8\sqrt{2}, 2^{2x}, 8\sqrt[4]{2}, 2^y$  جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، واسطه عددی بین  $x$  و  $y$  کدام است؟

$$\frac{7}{8} \quad (4)$$

$$\frac{7}{4} \quad (3)$$

$$\frac{7}{2} \quad (2)$$

$$7 \quad (1)$$

۸۱- واسطه عددی  $\frac{1}{x+3}$  و  $\frac{1}{x}$  عدد  $\frac{1}{4}$  است، واسطه هندسی  $x+9$  و  $x$  کدام است؟

$$\sqrt{24} \quad (4)$$

$$\sqrt{18} \quad (3)$$

$$4\sqrt{2} \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

۸۲- اگر  $3, a, b+3$  سه جمله متوالی یک دنباله حسابی و  $2, a-1, 2b+2$  سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه  $a+b$  کدام است؟

$$15 \quad (4)$$

$$14 \quad (3)$$

$$13 \quad (2)$$

$$12 \quad (1)$$

۸۳- اختلاف واسطه‌های حسابی و هندسی دو عدد مثبت برابر ۲ و مجموع آن دو عدد برابر ۳۴ است. اختلاف این دو عدد کدام است؟

$$16 \quad (4)$$

$$15 \quad (3)$$

$$14 \quad (2)$$

$$13 \quad (1)$$

۸۴- جملات سوم، نهم و نهم از یک دنباله حسابی تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. چندمین جمله این دنباله حسابی صفر است؟

$$9 \quad (4)$$

$$10 \quad (3)$$

$$11 \quad (2)$$

$$12 \quad (1)$$



# پاسخ نامه نشوب ریاضی

$$\begin{cases} n+2=1 \Rightarrow n=-1 & \text{(چون } k \in \mathbb{N} \text{)} \\ n+2=3 \Rightarrow n=1 \\ n+2=5 \Rightarrow n=3 \\ n+2=15 \Rightarrow n=13 \end{cases}$$

**روش اول** از صورت و مخرج کسر، ضریب  $\alpha$  را فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{3\alpha+k}{2\alpha-3} = \frac{3(\alpha + \frac{k}{3})}{2(\alpha - \frac{3}{3})}$$

اگر به ازای هر  $\alpha$  که عددی گنگ است، کسر فوق عدد گویایی باشد، کافی است  $\frac{k}{3} = -\frac{3}{3} \alpha + \frac{k}{3}$  باشد؛ در نتیجه  $\alpha$  است و  $\alpha = -\frac{9}{2}$  برابر خواهد بود. در این حالت حاصل کسر به ازای هر مقدار  $\alpha$  برابر  $\frac{3}{2}$  است.

**روش دوم** اگر فرض کنیم  $\frac{3\alpha+k}{2\alpha-3}$  برابر عدد گویای  $\beta$  است، داریم:

$$\frac{3\alpha+k}{2\alpha-3} = \beta \Rightarrow 2\alpha\beta - 3\beta = 3\alpha + k$$

اگر  $\beta$  عدد گویای غیرصفر باشد،  $2\alpha\beta - 3\beta = 3\alpha$  عددی گنگ است. از طرفی  $3\alpha$  نیز عددی گنگ است. اعداد گویا را به یک سمت تساوی و اعداد گنگ را به سمت دیگر تساوی می‌بریم و داریم:  $2\alpha\beta - 3\alpha = k + 3\beta \Rightarrow \alpha \underbrace{(2\beta - 3)}_{\text{گویا}} = k + \underbrace{3\beta}_{\text{گویا}}$

می‌دانیم حاصل ضرب هر عدد گویای غیرصفر در هر عدد گنگ، عددی گنگ است. با توجه به آن که فرض کردیم  $\beta$  عددی گویا است، پس  $2\beta - 3$  عدد غیرصفر باشد، حاصل  $\alpha(2\beta - 3)$  گنگ است که با توجه به تساوی فوق این تناقض است؛ زیرا  $\alpha(2\beta - 3) = k + 3\beta$  عددی گویا است و اگر  $2\beta - 3 \neq 0$  باشد، یک سمت تساوی عددی گنگ و سمت دیگر عددی گویا داریم. پس لازم است:

$$2\beta - 3 = 0 \Rightarrow \beta = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha \underbrace{(2\beta - 3)}_{\frac{3}{2}} = k + 3\beta$$

$$\Rightarrow k + \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow k = -\frac{9}{2}$$

- ۱ **گزینه ۳** می‌دانیم  $\mathbb{N}$  مجموعه اعداد طبیعی،  $\mathbb{Z}$  مجموعه اعداد صحیح،  $\mathbb{Q}$  مجموعه اعداد گویا و  $\mathbb{R}$  مجموعه اعداد

حقیقی است که در آن  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  است؛ پس  $C = \mathbb{Q}$ ,  $B = \mathbb{Z}$ ,  $A = \mathbb{N}$  و  $D = \mathbb{R}$  است. به صورت مقابل می‌توان این مجموعه‌ها را نشان داد:

می‌دانیم  $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$  است. پس با توجه به آن که  $D = \mathbb{R}$  و  $C = \mathbb{Q}'$  است؛ پس  $D - C = \mathbb{Q}'$  برابر مجموعه اعداد گنگ است.

- ۲ **گزینه ۴** **روش اول** با توجه به آن که اعداد همه گزینه‌ها

به صورت  $K + \sqrt{2}$  است، پس  $K$  را طوری تعیین می‌کنیم که عبارت  $\alpha^2 + 2\alpha$  به ازای  $K + \sqrt{2}$  گویا باشد:

$$\begin{aligned} \alpha = \sqrt{2} + K &\Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha = (\sqrt{2} + K)^2 + 2(\sqrt{2} + K) \\ &= 2 + 2\sqrt{2}K + K^2 + 2\sqrt{2} + 2K \end{aligned}$$

اگر  $K$  عدد صحیح باشد، لازم است  $K = -1$  باشد تا عبارت فوق برابر عدد گویا باشد:

$$\alpha^2 + 2\alpha = \underbrace{K^2 + 2K + 2}_{\text{گویا}} + \underbrace{2\sqrt{2}K + 2\sqrt{2}}_{\text{باید صفر باشد}} \Rightarrow K = -1$$

**روش دوم** به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای داریم:

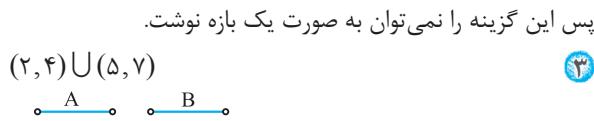
$$\begin{aligned} (\alpha + 1)^2 &= \alpha^2 + 2\alpha + 1 \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha = (\alpha + 1)^2 - 1 \\ \text{پس عبارت } \alpha^2 + 2\alpha &= (\alpha + 1)^2 - 1 \text{ است که به ازای } -\sqrt{2} \text{ برابر عدد صحیح ۱ است.} \end{aligned}$$

- ۳ **گزینه ۵** به کمک تقسیم صورت کسر بر مخرج کسر، کسر

$$\frac{3n+21}{n+2} \text{ را به صورت زیر می‌نویسیم:}$$

$$\frac{3n+21}{n+2} = \frac{3(n+2)+15}{n+2} = \frac{3(n+2)}{n+2} + \frac{15}{n+2} = 3 + \frac{15}{n+2}$$

با توجه به آن که  $3$  عدد طبیعی است، برای آن که عدد فوق، عددی طبیعی باشد، لازم است  $\frac{15}{n+2}$  عددی صحیح باشد. با توجه به آن که  $n \in \mathbb{N}$  است، مخرج کسر یعنی  $n+2$  باید مقسوم‌علیه مثبتی از  $15$  باشد. می‌دانیم مقسوم‌علیه‌های  $15$  اعداد  $1, 3, 5$  و  $15$  هستند. در نتیجه برای  $n$   $3$  مقدار قابل قبول است.



با توجه به شکل، نمی‌توان این مجموعه را به صورت یک بازه نوشت.

**۴**  $(-2, 0) \cup (1, 4)$

با توجه به شکل، نمی‌توان این مجموعه را به صورت یک بازه نوشت.  
در نتیجه **۱** صحیح است.

چون  $\frac{3}{n} + 2 > 0$  عضو بازه  $(2, 5)$  است، پس **-۸**

$$2 < 2 + \frac{3}{n} < 5 \quad \text{داریم:}$$

از نامساوی بالا می‌توان نتیجه گرفت:

$$0 < \frac{3}{n} < \frac{5}{100} \Rightarrow 0 < \frac{3}{n} < \frac{1}{20}$$

می‌دانیم  $\frac{1}{n} = \frac{3}{60}$  است، پس باید  $n > 60$  باشد تا  $\frac{1}{20} < \frac{1}{n}$

باشد. پس حداقل مقدار  $n$  طبیعی، برابر ۶۱ است.

باید داشته باشیم: **-۹**

$$2 < 2 + \frac{1}{n\sqrt{2}} < \frac{9}{4}$$

$$0 < \frac{1}{n\sqrt{2}} < \frac{1}{4} \quad \text{پس باید:}$$

اعداد ۱ و ۲ در نامعادله فوق صدق نمی‌کند؛ زیرا:

$$n=1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{4}$$

$$n=2 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} > \frac{1}{4}$$

$$n=3 \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{18}} < \frac{1}{4}$$

در نتیجه  $n \geq 3$  است و مقادیر ۱ و ۲ را اختیار نمی‌کند.

اگر  $x \in (a, b)$  باشد، داریم: **-۱۰**

$$13 - 2a < a + 1 < 2a - 3 \quad \text{نتیجه:}$$

برای حل نامعادله فوق آن را به صورت دستگاه نامعادلات زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} 13 - 2a < a + 1 \Rightarrow 12 < 3a \Rightarrow 4 < a \\ a + 1 < 2a - 3 \Rightarrow 4 < a \end{cases} \Rightarrow 4 < a$$

پس  $a$  باید عددی بزرگ‌تر از ۴ باشد که در بین گزینه‌ها فقط **۴** بزرگ‌تر از ۴ است.

**-۵ گزینه ۴** دو مجموعه  $A$  و  $B$  زمانی با یکدیگر برابرند که هر عضو مجموعه  $A$  عضوی از مجموعه  $B$  باشد و برعکس هر عضو مجموعه  $B$  عضوی از مجموعه  $A$  نیز باشد. به عبارت دیگر باید  $B \subset A$  و  $A \subset B$  باشد.

با توجه به تساوی دو مجموعه  $A = \{1, 2, m+1\}$  و  $B = \{3, m-1, n-2\}$  چون  $3 \in A$  است، باید  $3 \in B$  نیز باشد؛ پس لازم است  $m+1 = 3$  باشد. در نتیجه  $m = 2$  است.

$$m=2 : \begin{cases} A = \{1, 2, 3\} \\ B = \{3, 1, n-2\} \end{cases}$$

حال چون  $2 \in A$  است پس باید  $2 \in B$  باشد؛ پس باید  $n-2 = 2$  باشد؛ در نتیجه  $n = 4$  است. در نتیجه  $m-n = -2$  است.

**-۶ گزینه ۲** اگر دو مجموعه با تعداد عضوهای متناهی با هم برابر باشند، حتماً تعداد اعضای این دو مجموعه با هم برابر است. از طرفی می‌دانیم در هر مجموعه ۲ عدد یکسان، یک عضو حساب می‌شود. چون مجموعه  $A = \{a, a^2\}$  و  $B = \{1, b, b^2\}$  برابرند، پس هر دو مجموعه حداقل ۲ عضو دارند. چون  $1 \in B$  است، پس باید  $1 \in A$  نیز باشد؛ پس یکی از اعداد  $a$  و  $a^2$  برابر ۱ هستند.

اگر  $a = 1$  باشد، داریم:

یعنی مجموعه  $A$  یک مجموعه تک‌عضوی با عضو یک است. پس  $B$  نیز باید همین شرایط را داشته باشد:

$$B = \{1, b, b^2\} = \{1\} \Rightarrow b = b^2 = 1 \Rightarrow b = 1 \quad \text{اگر } a = -1 \text{ باشد، داریم:}$$

$A = \{-1, (-1)^2\} = \{-1, 1\}$  یعنی مجموعه  $A$  یک مجموعه ۲ عضوی با اعضای ۱ و -۱ است.

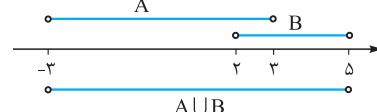
پس  $B$  نیز باید همین شرایط را داشته باشد:

$$B = \{1, b, b^2\} = \{-1, 1\} \quad \text{چون } b^2 > 0 \text{ است، پس } b = -1 \text{ است.}$$

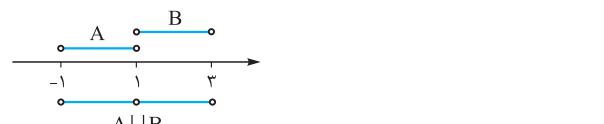
در نتیجه به ازای ۲ مقدار  $a$  مجموعه  $A$  و  $B$  برابرند.

**-۷ گزینه ۱** گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$(2, 5) \cup (-3, 3) = (-3, 5)$$



$$(1, 3) \cup (-1, 1) = (-1, 3) - \{1\}$$

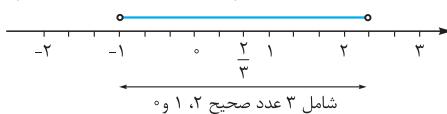




پس تعداد نقاط در بازه  $(\frac{2}{3} - n, \frac{2}{3} + n)$  حداقل برابر ۴ خواهد بود.

پس  $\frac{2}{3} - n$  حداکثر برابر ۱ است و در نتیجه:

$$\frac{2}{3} - n = -1 \Rightarrow n = \frac{5}{3}$$



اگر  $a < 4$  باشد، مطابق شکل زیر **گزینه ۱۳**

یک بازه خواهد بود. با توجه به آن که تعداد اعضای بازه‌ها نامتناهی است، پس نباید  $a < 4$  باشد:

$$\begin{array}{ccc} \text{---} & \text{---} & \\ | & | & \\ A & B & \\ \text{---} & \text{---} & \\ 2 & a & 4 \\ & & \end{array} \Rightarrow A \cap B = [a, 4]$$

پس باید  $a \geq 4$  باشد تا مطابق شکل زیر  $A \cap B$  یک مجموعه متناهی باشد:

$$\begin{array}{ccc} \text{---} & \text{---} & \\ | & | & \\ A & B & \\ \text{---} & \text{---} & \\ 2 & 4 & \\ & & \end{array} \Rightarrow A \cap B = \{4\}$$
  

$$\begin{array}{ccc} \text{---} & \text{---} & \\ | & | & \\ A & B & \\ \text{---} & \text{---} & \\ 2 & 4 & \\ & & \end{array} \Rightarrow A \cap B = \{\}$$

مطابق شکل زیر، اگر  $a < 4$  باشد **گزینه ۱۴**

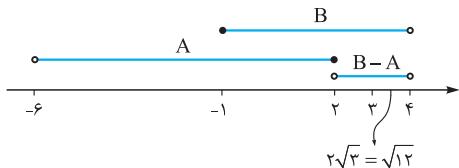
مجموعه  $A \cap B$  غیرتمی است و در نتیجه:

$$\begin{array}{ccc} \text{---} & \text{---} & \\ | & | & \\ A & B & \\ \text{---} & \text{---} & \\ a & 4 & \\ & & \end{array} \Rightarrow A \cap B = (a, 4]$$

اگر  $a = 0$  باشد،  $A \cap B$  به صورت بازه  $[0, 4)$  است که شامل عضو ۱، ۲، ۳ و ۴ خواهد بود.

بازه‌های  $A$  و  $B$  و عدد  $2\sqrt{3}$  را بر روی محور **گزینه ۱۵**

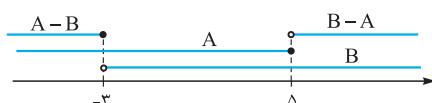
اعداد حقیقی نمایش می‌دهیم:



پس  $2\sqrt{3}$  عضوی از مجموعه  $B$  است که در مجموعه  $A$  وجود ندارد. پس  $2\sqrt{3}$  عضو مجموعه  $B - A$  است.

بازه‌های  $A$  و  $B$  و سپس مجموعه‌های **گزینه ۱۶**

را بر روی محور اعداد حقیقی نمایش می‌دهیم:



اگر  $x \in (a, b)$  باشد،  $a < x < b$  است. پس:

$$-\frac{1}{n} < \frac{3}{1} < \frac{12n}{4n-1}$$

از طرفی چون  $n$  طبیعی است، پس نامساوی  $\frac{3}{1} < \frac{12n}{4n-1}$  همواره

$$\frac{3}{1} < \frac{12n}{4n-1}$$

برقرار است، پس باید:

برای حل نامعادله بالا دو روش داریم:

**روش اول** با تقسیم  $12n$  بر  $4n-1$  داریم:

$$\frac{12n}{4n-1} > \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{12n}{4n-1} = \frac{3(4n-1)+3}{4n-1}$$

$$= 3 + \frac{3}{4n-1} \Rightarrow \frac{3}{1} < 3 + \frac{3}{4n-1} \Rightarrow \frac{1}{1} < \frac{3}{4n-1}$$

پس اگر  $\frac{3}{1} < \frac{3}{4n-1}$  باشد،  $\frac{3}{4n-1}$  بزرگ‌تر از  $\frac{1}{10}$  است:

$$4n-1 < 30 \Rightarrow 4n < 31 \Rightarrow n < \frac{31}{4} \approx 7 \dots$$

پس  $n$  شامل اعداد طبیعی ۱ تا ۷ است.

**روش دوم** چون  $n$  طبیعی است  $4n-1$  عددی مثبت است. با ضرب

طرفین نامساوی در  $4n-1$  داریم:

$$\frac{3}{1}(4n-1) < 12n \Rightarrow 12/4n-3/1 < 12n$$

$$\Rightarrow 0/4n < 3/1 \xrightarrow{\times 10} 4n < 31 \Rightarrow n < \frac{31}{4}$$

$$\xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

مرکز بازه  $(\frac{2}{3} - n, \frac{2}{3} + n)$  عدد  $\frac{2}{3}$  است که **گزینه ۱۲**

فاصله دو سر بازه از آن برابر  $n$  است. با توجه به شکل، چون فاصله  $\frac{2}{3}$  از

اولین عدد صحیح بعد از آن یعنی ۱ کمتر از فاصله آن از اولین عدد

صحیح قبل از آن یعنی صفر کمتر است؛ پس بسته به انتخاب  $n$  تعداد

اعداد صحیح در بازه  $(\frac{2}{3} - n, \frac{2}{3} + n)$  یا برابر تعداد اعداد صحیح در

بازه  $(\frac{2}{3} - n, \frac{2}{3} + n)$  است یا ۱ واحد بیشتر است. پس با توجه به شکل اگر

از  $\frac{2}{3}$  تا حداکثر ۱- به عقب برویم، در بازه  $(\frac{2}{3} - n, \frac{2}{3} + n)$  فقط ۱ عدد

صحیح قرار می‌گیرد؛ اما اگر بیشتر عقب برویم، بیشتر از یک عدد صحیح

در این بازه قرار می‌گیرد و با توجه به این که در بازه  $(\frac{2}{3} - n, \frac{2}{3} + n)$  تعداد

اعداد صحیح حداقل برابر بازه  $(\frac{2}{3} - n, \frac{2}{3} + n)$  است.



$$A \cap B = \{2, 3, 4\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\Rightarrow \{2, 3, 4\} \subset M \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

مجموعه  $M$  حداقل دارای سه عضو ۲، ۳ و ۴ خواهد بود. از طرفی هر یک از اعداد ۱، ۵ و ۶ می‌توانند عضو مجموعه  $M$  باشند یا نباشند. در نتیجه حالات زیر را داریم:

$$M = \{2, 3, 4\} \Rightarrow 1 \text{ حالت} \quad M \text{ عضوی باشد:}$$

$$M = \{2, 3, 4, 1, 5\} \text{ یا } M = \{2, 3, 4, 5\} \quad M \text{ عضوی باشد:}$$

$$M = \{2, 3, 4, 6\} \Rightarrow 3 \text{ حالت} \quad M \text{ عضوی باشد:}$$

$$M = \{2, 3, 4, 1, 5, 6\} \text{ یا } M = \{2, 3, 4, 1, 6\} \quad M \text{ عضوی باشد:}$$

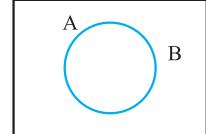
$$M = \{2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow 3 \text{ حالت} \quad M \text{ عضوی باشد:}$$

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow 1 \text{ حالت} \quad M \text{ عضوی باشد:}$$

پس در نتیجه برای  $M$   $1 + 3 + 3 + 1 = 8$  مجموعه قابل تعریف است.

**گزینه ۲۱** دو مجموعه  $A$  و  $B$  متمم یکدیگرند هرگاه اولاً اشتراکی نداشته باشند و ثانیاً اجتماع آنها برابر مجموعه مرجع باشد:

M



$$\begin{cases} A \cap B = \emptyset \\ A \cup B = M \end{cases}$$

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$5 \in B, 5 \notin A \Rightarrow B \not\subset A \Rightarrow \text{نادرست است} \quad 1$$

$$B \subset A \quad 2$$

$$B \subset A \quad 3$$

$$A - B = \{2, 5\} \Rightarrow \text{متناهی} \quad 4$$

$$A \subset B \Rightarrow \text{نادرست است} \quad 5$$

$$A - B = \{2, 5\} - \{2, 5\} = \emptyset \quad 6$$

$$\text{نادرست است} \Rightarrow \text{نامتناهی است} \quad 7$$

**گزینه ۲۲** می‌دانیم اشتراک یک مجموعه متناهی با هر

مجموعه دیگر (چه متناهی و چه نامتناهی) یک مجموعه متناهی است؛ زیرا باید مجموعه اشتراک، زیرمجموعه هر دو مجموعه باشد و

از آنجا که مجموعه اشتراک زیرمجموعه مجموعه متناهی است؛

پس خود نیز متناهی است. از طرفی اگر  $A$  یک مجموعه نامتناهی باشد،  $A'$  می‌تواند یک مجموعه متناهی یا نامتناهی باشد. مثلاً اگر

$A = \mathbb{Q}$  باشد،  $A' = \mathbb{Q}'$  است که نامتناهی است.

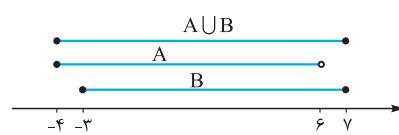
### گزینه ۲۰

با توجه به شکل، مجموعه  $(A - B) \cup (B - A)$  شامل اعداد صحیح عضو بازه  $[-3, 5]$  نمی‌شوند که تعداد آنها ۸ عدد است. این اعداد عبارت‌اند از:

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

### گزینه ۲۱

اگر  $A = [-a, 6]$  و  $B = [-3, 7]$  باشد، چون  $A \cup B \in \mathbb{Z}$  است و این عضو، کوچک‌ترین عضو مجموعه  $A$  برابر  $-4$  است؛ پس  $a = -4$  است. در نتیجه  $a = 4$  است. از طرفی با توجه به آن که  $7 \in B$  است و اعضای مجموعه  $A$  از ۶ کم‌ترند، پس  $b = 7$  است. در نتیجه  $a + b = 11$  است.



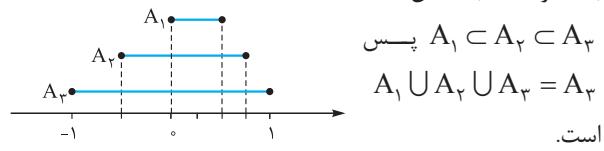
### گزینه ۲۲

$$n=1 \Rightarrow A_1 = \left[ \frac{1-1}{2}, \frac{1+1}{4} \right] = [0, \frac{1}{2}]$$

$$n=2 \Rightarrow A_2 = \left[ \frac{1-2}{2}, \frac{1+2}{4} \right] = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$$

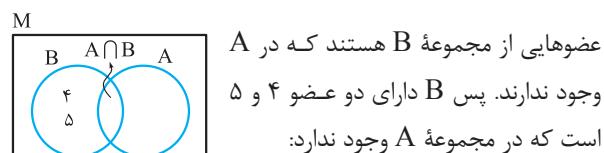
$$n=3 \Rightarrow A_3 = \left[ \frac{1-3}{2}, \frac{1+3}{4} \right] = [-1, 1]$$

با توجه به آن که



### گزینه ۲۳

طبق تعریف، اعضای مجموعه  $B - A$



عضویابی از مجموعه  $B$  هستند که در  $B - A$  وجود ندارند. پس  $B$  دارای دو عضو ۴ و ۵ است.

است که در مجموعه  $A$  وجود ندارد:

مجموعه  $B$  از اجتماع دو مجموعه  $B - A$  و  $A - B$  به دست می‌آید. پس مجموعه  $A \cap B$  می‌تواند هر عضوی به جز ۴ و ۵ را داشته باشد. چون  $\{1, 2, 3\} = A = \{1, 2, 3\}$  پس  $A \cap B$  فقط می‌تواند حداقل سه عضو، ۱، ۲، ۳ داشته باشد. هر کدام از این سه عدد می‌توانند عضوهای  $A \cap B$  باشند یا نباشند؛ پس  $2 \times 2 \times 2 = 8$  حالت برای  $A \cap B$  وجود دارد. در نتیجه مجموعه  $B$  می‌تواند ۸ مجموعه مختلف داشته باشد.



از آن جا که دو مجموعه  $A'$  و  $B'$  می‌توانند نامتناهی باشند، در صورتی که یکی از آن‌ها نامتناهی باشد، اجتماع آن‌ها نامتناهی است. در نتیجه ۴ می‌تواند یک مجموعه نامتناهی باشد.

$$(B')' = B \quad A - B = A \cap B'$$

**رتذکر**

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

**۲۵ گزینه** اگر  $A$  یک مجموعه متناهی و  $C$  یک مجموعه نامتناهی باشد، مجموعه  $B$  می‌تواند هم نامتناهی و هم متناهی باشد. به عنوان مثال اگر  $A$  مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی و  $C$  مجموعه اعداد صحیح باشد،  $B$  می‌تواند مجموعه اعداد طبیعی و یا مجموعه اعداد کمتر از  $10^0$  باشد. پس  $B$  می‌تواند یک مجموعه متناهی و یا یک مجموعه نامتناهی باشد. با این توضیح به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱ چون  $C$  یک مجموعه نامتناهی است و از متناهی و نامتناهی بودن مجموعه  $B$  مطلع نیستیم، از روی  $C \subset B$  نمی‌توان نتیجه گرفت  $B$  متناهی است یا نامتناهی. در نتیجه  $B'$  نیز

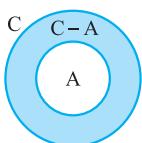
مشخص نیست مجموعه‌ای است متناهی یا نامتناهی.

۲ می‌دانیم  $B - A = B \cap A'$ . از آن جا که مجموعه‌های  $B$  می‌توانند متناهی باشد، پس  $B \cap A'$  ممکن است متناهی باشد. پس ۲ نادرست است.

۳ اگر مجموعه‌ای نامتناهی باشد، متمم آن نیز ممکن است نامتناهی باشد، مثل مجموعه اعداد گویا که نامتناهی است و متمم آن مجموعه اعداد گنگ است و آن هم نامتناهی است. پس ۳ نادرست است.

۴ اگر از یک مجموعه نامتناهی تعداد مشخصی عضو حذف کنیم، آن مجموعه همچنان نامتناهی است. از آن جا که  $C \subset A$  است، پس مجموعه  $C - A$  یک مجموعه نامتناهی است؛ زیرا  $C$  یک مجموعه نامتناهی است که با حذف اعضایی از  $C$  که در  $A$  هستند، همچنان مجموعه نامتناهی است؛ زیرا تعداد اعضای  $A$  تعدادی نامتناهی هستند. این مطلب را می‌توان به صورت دقیق نیز اثبات کرد. با توجه به شکل مشخص است.

$$C = (C - A) \cup A$$



اگر فرض کنیم  $C - A$  متناهی است، با

توجه به متناهی بودن  $A$ ، مجموعه  $(C - A) \cup A$  که برابر  $C$  است، نیز متناهی است. در صورتی که می‌دانیم  $C$  نامتناهی است.

از طرف دیگر اگر  $B$  متناهی باشد، ممکن است  $B'$  نامتناهی باشد، اگر  $\{1, 2, 3\} = B$  باشد، مجموعه متمم آن در مجموعه اعداد حقیقی نامتناهی است.

پس مجموعه‌های  $B'$  و  $A'$  می‌توانند نامتناهی باشند و اشتراک آن‌ها فقط با یک مجموعه متناهی قطعاً متناهی است، پس ۲ صحیح است.

۱ ممکن است نامتناهی باشد.  $\downarrow$   
 $B' \cap A$   
 $\downarrow$   
 نامتناهی ممکن است  
 نامتناهی باشد.

۲ ممکن است نامتناهی باشد.  $\Rightarrow$   
 $A' \cap B'$   
 $\downarrow$   
 هر دو ممکن است  
 نامتناهی باشند.

۳ اگر یک مجموعه، نامتناهی باشد، اجتماع آن با هر مجموعه‌ای نامتناهی است:

۴ ممکن است نامتناهی باشد.  $\Rightarrow$   
 $A' \cup B'$   
 $\downarrow$   
 هر دو ممکن است  
 نامتناهی باشند.

۵ ممکن است نامتناهی باشد.  $\Rightarrow$   
 $B \cap A'$   
 $\downarrow$   
 ممکن است متناهی  
 نامتناهی باشد.

**۲۴ گزینه** می‌دانیم اشتراک هر مجموعه متناهی با هر مجموعه دیگری (چه متناهی و چه نامتناهی) یک مجموعه متناهی است. هم‌چنین اجتماع دو مجموعه متناهی یک مجموعه متناهی است. اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه متناهی باشند  $A'$  و  $B'$  ممکن است مجموعه‌ای نامتناهی باشند.

از طرفی می‌دانیم  $A - B = A \cap B'$  در نتیجه به کمک این رابطه به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$1 \quad A - B = A \cap (B')' = A \cap B$$

اشتراک دو مجموعه متناهی، مجموعه‌ای متناهی است، پس  $A \cap B$  یک مجموعه متناهی است.

$$2 \quad B' - A' = B' \cap (A')' = B' \cap A$$

چون  $A$  یک مجموعه متناهی است، اشتراک آن با هر مجموعه‌ای، یک مجموعه متناهی است.

$$3 \quad \text{بر طبق رابطه } (A \cap B)' = A' \cup B' \quad (\text{داریم})$$

$$(A' - B)' = (A' \cap B')' = (A')' \cup (B')' = A \cup B$$

از طرفی اجتماع دو مجموعه متناهی، یک مجموعه متناهی است.

$$4 \quad \text{بر طبق رابطه } (A \cap B)' = A' \cup B' \quad (\text{داریم})$$

$$(A - B)' = (A \cap (B')')' = (A \cap B)' = A' \cup B'$$



بر طبق قوانین (۱) و  $A - B = A \cap B'$  (۲)  
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  (۳)  
 $(A \cap B)' = A' \cup B'$  (۴) داریم:

$$(A \cup B) - A \stackrel{(1)}{=} (A \cup B) \cap A' \stackrel{(2)}{=} \underbrace{(A \cap A')}_{\emptyset} \cup (B \cap A')$$

$$= B \cap A' \stackrel{(3)}{\Rightarrow} ((A \cup B) - A)' = (B \cap A')' = B' \cup (A')'$$

$$= B' \cup A \Rightarrow \boxed{((A \cup B) - A)'} \cap A = (B' \cup A) \cap A$$

$\downarrow$   
 $B' \cup A$

از طرفی می‌توان نشان داد  $A \cap (A \cup C) = A$  است؛ زیرا همه اعضای  $A$  در مجموعه  $A \cup C$  وجود دارند؛ پس اشتراک مجموعه  $A$  با مجموعه‌ای که شامل همه اعضای  $A$  است، همان مجموعه  $A$  است. پس:

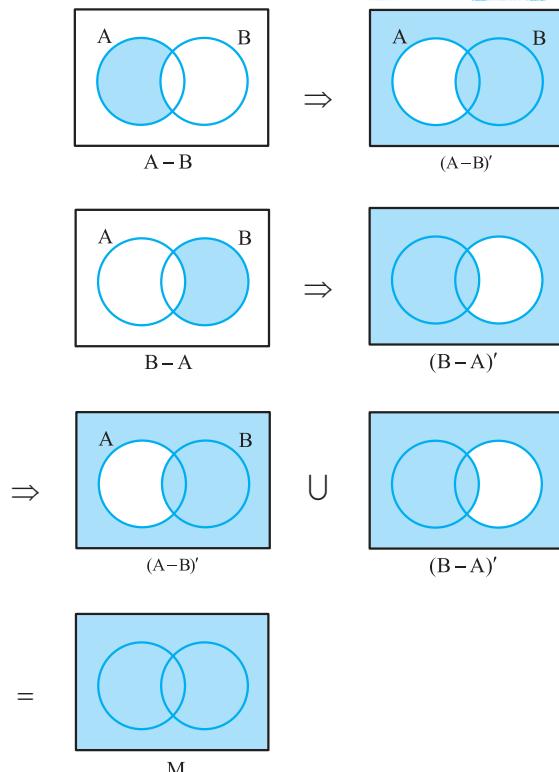
$$\boxed{(B') \cup A} \cap A = A$$

$\downarrow$   
C

پس متمم مجموعه  $A$  یعنی  $A'$  جواب است.

در حالت کلی  $\begin{cases} A \cap (A \cup B) = A \\ A \cup (A \cap B) = A \end{cases}$  (تذکر) که به این قوانین،  
 قوانین جذب گوییم.

روش اول به کمک نمودار ون داریم:



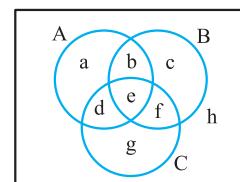
گزینه ۱۰

شکل سایه‌خورده مجموعه  $A - B$  را نشان می‌دهد. از طرفی می‌دانیم  $A - B = A \cap B'$  پس باید متمم مجموعه  $A \cap B'$  را به دست آوریم. طبق خاصیت  $(A \cap B)' = A' \cup B'$  (دمورگان) داریم:  
 $(A \cap B)' = A' \cup (B')' = A' \cup B$

تذکر

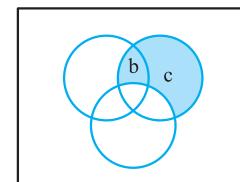
$$\begin{cases} A - B = A \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \\ (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (B')' = B \end{cases}$$

برای راحت‌تر شدن درک این مجموعه مطابق



شکل، مجموعه‌های جدا از هم را (مجموعه‌هایی که اشتراک ندارند) اسامی‌گذاری می‌کنیم.

پس مجموعه مرجع ما از ۸ زیرمجموعه‌ای که دویسه‌دو اشتراکی ندارند، تشکیل شده است. در نتیجه به کمک این نام‌گذاری داریم:  
 $A - B = a \cup d \Rightarrow (A - B)' = b \cup c \cup e \cup f \cup g \cup h$   
 $B - C = b \cup c \Rightarrow (B - C)' = a \cup d \cup e \cup f \cup g \cup h$   
 $= (b \cup c \cup e \cup f \cup g \cup h) \cap (b \cup c) = b \cup c$



پس اجتماع دو مجموعه  $b$  و  $c$  جواب نهایی است.

گزینه ۱۱

طبق قوانین (۱) و  $A - B = A \cap B'$  (۲)  $(A \cap B)' = A' \cup B'$  (۳) (دمورگان) داریم:

$$(A - B)' \stackrel{(1)}{=} (A \cap B')' \stackrel{(2)}{=} A' \cup (B')' = A' \cup B = C$$

$$\Rightarrow (A - B)' - A' = \underbrace{(A' \cup B)}_C - A' = C - A' \stackrel{(3)}{=} C \cap (A')'$$

$$= C \cap A = (A' \cup B) \cap A$$

بنابر خاصیت پخشی (A ∩ (B ∪ C)) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C) داریم:  
 $(A' \cup B) \cap A = \cancel{(A' \cap A)} \cup (B \cap A) = \emptyset \cup (B \cap A)$   
 $= B \cap A$

پس متمم  $A \cap B$  را باید به دست آوریم:  
 $(A \cap B)' = A' \cup B'$



**تذکرہ** اگر بخواهیم بین دو مجموعه عمل تفیریق را به اشتراک تبدیل کنیم، متمم یکی از مجموعه‌ها را از مجموعه دیگر کم می‌کنیم. مثلاً:

$$\begin{aligned} A \cap B &= A - B' \\ &\text{تبديل به متمم} \\ A \cap B &= B \cap A = B - A' \\ &\text{تبديل به متمم} \\ &\text{در حالت کلی } A - B' = B - A' \text{ است.} \end{aligned}$$

**روش اول** می‌توان به راحتی نشان داد **گزینه ۱** - ۳۳

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cup C \Rightarrow B \cup (A \cap B) = B \cup (B \cup C) \\ \Rightarrow B \cup C &= B \Rightarrow C \subset B \\ A \cap B &= B \cup C \Rightarrow B \cap (A \cap B) = B \cap (B \cup C) \\ \Rightarrow A \cap B &= B \Rightarrow B \subset A \end{aligned}$$

از طرفی اگر  $C \subset B$  باشد، داریم  $C \subset A$ . پس  $B \subset A$  و **صحیح‌اند.**

**گزینه ۳۴**

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} A - B = D \Rightarrow A \cap B' = D \\ B - C = E \Rightarrow B \cap C' = E \end{array} \right. \\ \xrightarrow{\cap} (A \cap B') \cap (B \cap C') = D \cap E \\ \Rightarrow A \cap (\underbrace{B' \cap B}_{\emptyset}) \cap C' = D \cap E \\ \Rightarrow A \cap \underbrace{C' \cap \emptyset}_{\emptyset} = D \cap E \Rightarrow D \cap E = \emptyset (*) \end{aligned}$$

از طرفی می‌دانیم  $A - B = A - (A \cap B)$  پس:

$$\begin{aligned} D - E &= D - (D \cap E) \xrightarrow{(*)} D - \emptyset \Rightarrow D - E = D \\ D \cap C &= F \cap C \subseteq F \quad \text{است؛ پس: } D = F \end{aligned}$$

تعداد عضوهای هر گزینه را به دست می‌آوریم:

**۱**

$$A = \{1, 2, \dots, 15\}$$

$$B' = \{1, 2, 3, 4, 16, 17, 18, 19, 20\} \Rightarrow n(A \cup B') = 20$$

**روش دوم** به کمک قوانین (۱)  $A - B = A \cap B'$  و (۲)  $(A \cap B)' = A' \cup B'$  داریم:

$$\begin{aligned} (A - B)' &\stackrel{(1)}{=} (A \cap B')' \stackrel{(2)}{=} A' \cup (B')' = A' \cup B \\ (B - A)' &\stackrel{(1)}{=} (B \cap A')' \stackrel{(2)}{=} B' \cup (A')' = B' \cup A \\ \Rightarrow (A - B)' \cup (B - A)' &= (A' \cup B) \cup (B' \cup A) \\ = \underbrace{(A' \cup A)}_M \cup \underbrace{(B \cup B')}_M &= M \cup M = M \end{aligned}$$

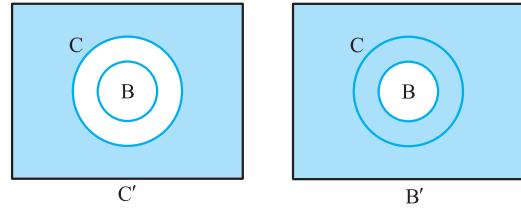
**روش سوم**

$$(A - B)' \cup (B - A)' = ((A - B) \cap (B - A))' = \emptyset' = M$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A' \cup B' = (A \cap B)' \\ A \cup A' = M \quad \text{و } (B')' = B \end{array} \right.$$

**تذکرہ**

**گزینه ۳۱** اگر  $C' \subset B'$  باشد، پس  $B \subset C$  است. درستی این نتیجه را می‌توان در شکل زیر نمایش داد:



$$\Rightarrow B \subset C \Leftrightarrow C' \subset B'$$

سپس  $A \subset C$  و  $A \subset B$  است؛ در نتیجه  $B \subset C$  است:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \subset B \\ B \subset C \end{array} \right. \Rightarrow A \subset C$$

با توجه به آن‌که  $A \subset C$  باشد، پس  $C' \subset A'$  است، پس اجتماع دو مجموعه  $A'$  و  $C'$  مجموعه  $A'$  است.

$$\Rightarrow C' \cup A' = A'$$

**تذکرہ** اگر  $A \subset B$  باشد، نتایج زیر را داریم:

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \quad \text{۲} \\ A \cap B &= A \quad \text{۱} \\ B' &\subset A' \quad \text{۳} \end{aligned}$$

**گزینه ۳۲** می‌دانیم  $(A \cup B)' = A' \cap B'$  در نتیجه:

$$A \cup B = A \cup C \Rightarrow (A \cup B)' = (A \cup C)'$$

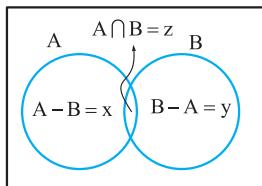
$$\Rightarrow A' \cap B' = A' \cap C'$$

از طرفی می‌دانیم  $A - B = A \cap B'$  پس:

$$\left\{ \begin{array}{l} A' \cap B' = A' - (B')' = A' - B \\ A' \cap C' = A' - (C')' = A' - C \end{array} \right. \Rightarrow A' - B = A' - C$$



**روش اول** مطابق نمودار ون زیر مشخص است  
که تعداد اعضای مجموعه  $(A \cup B) - (A \cap B)$  برابر است با  
جمع تعداد اعضای مجموعه های  $B - A$  و  $A - B$ .



از طرفی مطابق شکل، تعداد اعضای مجموعه  $A \cup B$  برابر است با جمع تعداد اعضای مجموعه های  $x$  و  $y$ . پس:

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) \\ &= \frac{n(A \cap B) + n(A \cap B)}{n(A \cap B)} = \frac{6n(A \cap B)}{n(A \cap B)} = 6 \end{aligned}$$

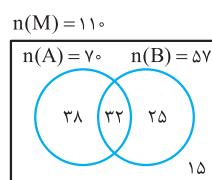
**روش دوم** می دانیم  $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$  در نتیجه:

$$\begin{aligned} n((A \cup B) - (A \cap B)) &= n(C) - n(C \cap D) \\ &= n(A \cup B) - n((A \cup B) \cap (A \cap B)) \\ &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) - n(A \cap B) \\ &= n(A) + n(B) - 2n(A \cap B) \\ &= n((A \cup B) - (A \cap B)) = 6n(A \cap B) \\ n(A) + n(B) - 2n(A \cap B) &= 6n(A \cap B) \\ \Rightarrow \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(A \cup B)} &= \frac{6n(A \cap B)}{n(A \cap B)} = 6 \\ \Rightarrow n(A \cup B) &= 6n(A \cap B) \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)} = 6 \end{aligned}$$

**گزینه ۱۹** اگر  $C$  و  $D$  به ترتیب مجموعه افرادی باشند که شرکت  $A$  و  $B$  را انتخاب کرده باشند، داریم:

$$n(A \cup B) = ۳۲ \quad n(C \cap D) = ۵۷ \quad n(C) = ۷۰ \quad n(D) = ۵۷$$

$$n(C \cup D) = n(C) + n(D) - n(C \cap D) = ۷۰ + ۵۷ - ۳۲ = ۹۵$$



پس تعداد افرادی که از هیچ شرکتی خرید نکرده اند  $= ۱۵$  است.

**روش اول** **گزینه ۲۰**

می دانیم  $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$ ؛ پس:  
 $15 - n(A \cap B) = ۱۲ \Rightarrow n(A \cap B) = ۳$

$$\begin{cases} A - B' = A \cap B \Rightarrow n(A - B') = n(\underbrace{A \cap B}_{B}) = ۱۱ \\ B \subset A \Rightarrow A \cap B = B \end{cases}$$

$$A' = \{16, 17, 18, 19, 20\}$$

$$B = \{5, 6, \dots, 15\}$$

$$A' - B = A' \Rightarrow n(A' - B) = n(A') = ۵$$

$$A - B = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow n(A - B) = ۴$$

$$n((A - B)') = 20 - 4 = 16$$

پس **۲۱** تعداد عضوهای کمتری دارد.

**گزینه ۲۶** اگر  $A = \{1, 2, \dots, ۳۰\}$  و  $B = \{1, 2, \dots, ۲۰\}$  است و با توجه به آن که داریم  $A - X = A - (A \cap X)$  می توان نتیجه گرفت  $A \cap X = \{21, 22, \dots, ۳۰\}$ . از طرفی مطابق شکل مشخص است  $A \cap X \subset X$  است.

پس  $X$  حداقل ۱۰ عضو دارد و در مورد عضوهایی از  $X$  که در  $X$  نیستند، اطلاعاتی نداریم. پس  $X$  می تواند بی شمار عضو داشته باشد.

$$X = (A \cap X) \cup (\underbrace{X - A}_{\text{۱۰ عضوی}})$$

**گزینه ۲۷** اگر  $n(A) = ۲n(B) = 4n(A \cap B)$  باشد، داریم:  $n(A) = 4n(A \cap B)$  و  $n(B) = 2n(A \cap B)$  از طرفی می دانیم:  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$  پس:  $n(A \cup B) = \underbrace{n(A)}_{4n(A \cap B)} + \underbrace{n(B)}_{2n(A \cap B)} - n(A \cap B) = 5n(A \cap B)$

$$\Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)} = \frac{5n(A \cap B)}{n(A \cap B)} = 5$$

**گزینه ۲۸** می دانیم  $A \cap B \subset A$  است، یعنی تعداد عضوهای مجموعه  $A \cap B$  کوچکتر یا مساوی تعداد عضوهای مجموعه  $A$  و  $B$  است. (اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه متناهی باشند)  $n(B) \geq n(A \cap B)$  و  $n(A) \geq n(A \cap B)$  پس:

$$\frac{n(A) + n(B)}{n(A \cap B)} = \frac{\frac{n(A)}{n(A \cap B)} + \frac{n(B)}{n(A \cap B)}}{\frac{n(A \cap B)}{n(A \cap B)}} \geq 2$$

↓                      ↓  
بزرگتریا          مساوی ۱

در بین گزینه ها فقط **۲۱** عددی بزرگتر از ۲ است.



**روش اول** تعداد اعداد طبیعی مضرب K، از ۱

- ۴۳ گزینه ۱

تا n برابر است با بزرگترین عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی  $\frac{n}{K}$ .

یعنی از ۱ تا ۹۹، ۲۴ عدد مضرب ۴ داریم:

$$\frac{99}{4} = 24 \dots$$

= تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰ مضرب ۴

$\Rightarrow 24$   
پس ۲۴ عدد یک رقمی و دو رقمی مضرب ۴ داریم که دو تای آنها یک رقمی هستند.

$$\frac{9}{4} = 2 \dots \Rightarrow 2$$

$$\Rightarrow 24 - 2 = 22$$

$$\Rightarrow n(A) = 22$$

$$\frac{99}{5} = 19 \dots$$

= تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰ مضرب ۵

$$\frac{9}{5} = 1 \dots$$

= تعداد اعداد طبیعی یک رقمی مضرب ۵

$$\Rightarrow 19 - 1 = 18$$

$$\Rightarrow n(B) = 18$$

از طرفی  $n(A \cap B)$  برابر تعداد اعداد دورقمی مضرب ۴ و ۵ یعنی مضرب ۲۰ است. در نتیجه:

$$\frac{99}{20} = 4 \dots \Rightarrow 4$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 4$$

از طرفی  $A' \cup B' = (A \cap B)'$  دانیم

$$n(A') = n(M) - n(A)$$

مجموعه مرجع است که در آن مسئله برابر تعداد اعداد دورقمی

است. پس  $n(M) = 90$  است. در نتیجه:

$$n(A' \cup B') = n((A \cap B)') = n(M) - n(A \cap B)$$

$$= 90 - 4 = 86$$

$$\text{از طرفی } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{ پس:}$$

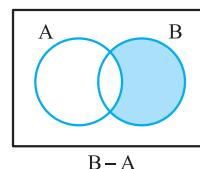
$$n((A \cup B)') = n(M) - n(A \cup B)$$

$$= n(M) - (n(A) + n(B) - n(A \cap B)) = 90 - 86 = 54$$

$$\Rightarrow 86 - 54 = 32$$

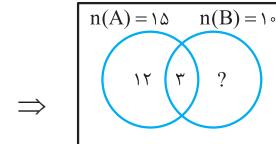
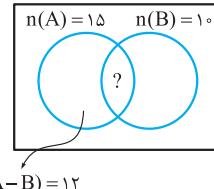
از طرفی مجموعه  $(A \cup B) - A$  برابر مجموعه  $B - A$  است:

$$(A \cup B) - A =$$

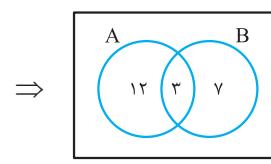


$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 10 - 3 = 7$$

**روش دوم** به کمک نمودار ون، تعداد اعضای هر یک از مجموعه‌های  $A \cap B$  و  $B - A$  را به دست می‌آوریم:

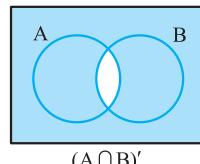


$$n(A - B) = 12$$

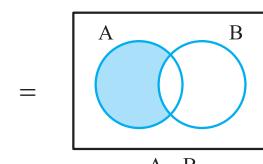
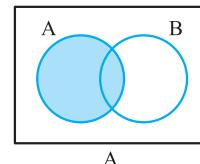


$$\Rightarrow n((A \cup B) - A) = n(B - A) = 7$$

مطابق شکل زیر، مجموعه  $A \cap (A \cap B)'$  است:



∩



A - B

پس باید  $n(A - B)$  را به دست آوریم:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 9 - 2 = 7$$

**تذکر** به کمک قوانین مجموعه‌ها نیز می‌توان اثبات نمود مجموعه  $A \cap (A \cap B)'$  برابر  $A \cap (A \cap B)'$  است:

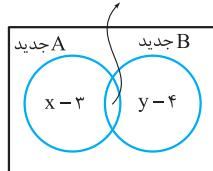
$$A \cap (A \cap B)' = A \cap (A' \cup B')$$

$$= (A \cap A') \cup (A \cap B') = A \cap B' = A - B$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

**تذکر**

پس ۲ عضو از اعضای حذف شده مشترک بوده‌اند. پس تعداد اعضای مشترک A و B از ۵ عضو به ۳ عضو می‌رسد. پس با توجه به آن که از مجموعه A، ۵ عضو کم شده و ۲ عضو آن مشترک با B است،  $A - B = 3$



مجموعه A-B را با x و تعداد اعضای اولیه مجموعه B-A را با y نمایش دهیم، با توجه به نمودار ون داریم:

با توجه به آن که  $n(A \cup B) = 20$  داریم:

$$x + y + 5 = 20 \Rightarrow x + y = 15$$

پس تعداد عضوهای مجموعه‌های A-B و B-A به ترتیب  $x = 3$  و  $y = 4$  است. در نتیجه:

$$(B-A) \cup (A-B)$$

$$= x - 3 + y - 4 = x + y - 7$$

$$= 15 - 7 = 8$$

**روش دوم** زمانی که از مجموعه A و B به ترتیب ۵ و ۶ عضو حذف می‌شود و تنها ۹ عضو از اجتماع آن‌ها کم می‌شود، پس ۲ عضو از اعضای حذف شده از اعضای مشترک دو مجموعه بوده است. پس:

$$n(A \cup B) = 20 - 9 = 11$$

$$n(A \cap B) = 5 - 2 = 3$$

از طرفی می‌دانیم:

$$n((A-B) \cup (B-A)) = n(A \cup B) - n(A-B)$$

$$n((A-B) \cup (B-A)) = 11 - 3 = 8$$

پس:

اگر فرض کنیم A و B و C به ترتیب

**گزینه ۴۷**

مجموعه شرکت‌کننده‌های رشته‌های فوتیال، والیبال و بسکتبال

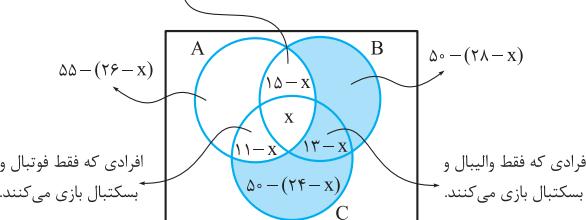
$$n(A) = 55, n(B) = 50, n(C) = 50$$

$$n(A \cap B) = 15, n(B \cap C) = 13, n(A \cap C) = 11$$

**روش اول** اگر فرض کنیم  $n(A \cap B \cap C) = x$  به کمک نمودار

ون داریم:

افرادی که فقط فوتیال و والیبال بازی می‌کنند.



**روش دوم** از آن‌جا که  $n((A \cap B)') = n(M) - n(A \cap B)$

$n((A \cup B)') = n(M) - n(A \cup B)$

عدد برابر است با:

$$\begin{aligned} & (n(M) - n(A \cap B)) - (n(M) - n(A \cup B)) \\ &= n(A \cup B) - n(A \cap B) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B) \\ &= 22 + 18 - 8 = 32 \end{aligned}$$

در واقع محاسبه تعداد اعداد دورقمی در این سؤال لازم نبود.

**گزینه ۴۸**

اگر A و B به ترتیب مجموعه افرادی باشند که در المپیاد شیمی و فیزیک شرکت می‌کنند، داریم:  $n(A) = 40$  و  $n(B) = 55$ .

از طرفی تعداد کل افرادی که حداقل در یکی از دو المپیاد شرکت می‌کنند ( $n(A \cup B)$ ) کوچک‌تر مساوی ۷۰ است؛ زیرا تعداد افراد کلاس ۷۰ نفر است؛ پس با توجه به رابطه  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$  داریم:

$$\underbrace{n(A)}_{40} + \underbrace{n(B)}_{55} - n(A \cap B) \leq 70 \Rightarrow n(A \cap B) \geq 25$$

پس لازم است حداقل ۲۵ نفر در هر دو المپیاد شرکت کرده باشند.

**گزینه ۴۹**

در نمودار ون زیر، تعداد اعضای هر یک از  $A \cap B$  و  $B - A$ ،  $A - B$  و  $A - B$  نوشته شده است:

$$\begin{aligned} & A \cap B = 13 \\ & A - B = 7 \\ & B - A = 10 \\ & B - B = 40 \quad \text{نفر} \\ & A - A = 13 \quad \text{نفر} \end{aligned}$$

حالا اگر از  $n(A - B) = 3$  واحد کم کنیم و به  $n(A \cap B) = k$  واحد اضافه کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} & n(A \cup B) = 4 + 13 + k + 10 \\ & = 27 + k \end{aligned}$$

با توجه به آن که در این حالت تعداد اعضای  $A \cup B = 20$  واحد بیشتر است، داریم:  $(27 + k) - 30 = 20 \Rightarrow k = 23$

**گزینه ۵۰**

**روش اول** اگر از اجتماع دو مجموعه A و B ۹ عضو برداریم و از مجموعه A و B به ترتیب ۵ و ۶ عضو کم شود؛ پس ۲ عضو از اعضای مشترک دو مجموعه A و B برداشته شده است؛ زیرا حاصل جمع اعضای حذف شده از دو مجموعه A و B ۱۱ عضو است. در حالی که از اجتماع آن‌ها ۹ عضو حذف شده است،

می‌دانیم جمله عمومی یک الگوی خطی به

صورت  $t_n = an + b$  است. در نتیجه:

$$t_1 - t_2 = (1 \cdot a + b) - (2 \cdot a + b) = -a$$

$$\frac{t_1 - t_2 = 1}{\Rightarrow t_1 - t_2 = 12} \Rightarrow t_1 - t_2 = 12 \Rightarrow a = 4$$

در نتیجه:

$$a_6 - a_1 = (5a + b) - (a + b) = 4a = 20$$

**رتندگ** در یک الگوی خطی با جمله عمومی  $t_n = an + b$  داریم:

$$t_m - t_n = (m - n)a$$

می‌دانیم هر الگوی خطی دارای جمله عمومی

**گزینه ۴۹**

است که در آن  $m \in \mathbb{N}$  است. در نتیجه:

$$a_2 = 2a + b = n \quad \text{تفاضل} \quad (2 - n)a = n - 2$$

$$a_n = an + b = 20$$

$$\Rightarrow a = \frac{n - 2}{2 - n} = -1$$

با توجه به آن که  $a_2 = 2a + b = n$  داریم:

$$-20 + b = n \Rightarrow b = n + 20$$

$$\Rightarrow a_m = -m + n + 20$$

اگر  $m = n + 20$  باشد، داریم:

$$a_{n+20} = -(n + 20) + n + 20 = 0$$

درجه یک الگوی خطی باید ۱ باشد، یعنی به

**گزینه ۵۰**

صورت کلی  $a_n = an + b$  باشد، پس باید ضریب  $n$  صفر باشد

تا یک الگوی خطی باشد:

$$a_n = (k - 2)n^2 + (2k + 1)n - k \Rightarrow k - 2 = 0$$

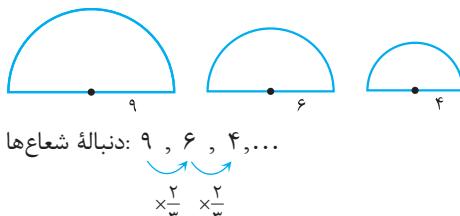
$$\Rightarrow k = 2 \Rightarrow a_n = 5n - 2$$

$$\begin{cases} a_6 = 5 \times 6 - 2 = 28 \\ a_2 = 5 \times 2 - 2 = 8 \end{cases} \Rightarrow a_6 - a_2 = 28 - 8 = 20$$

با توجه به الگوی شعاع‌های نیم‌دایره‌ها، در هر

**گزینه ۵۲**

مرحله شعاع نیم دایره  $\frac{2}{3}$  مرحله قبلی است. در نتیجه:



باید تعداد کل افراد در ۳ دایره نمودار ون رسم شده ۱۲۴ نفر باشد. با

توجه به شکل در دایره A می‌دانیم ۵۵ نفر حاضرند، پس باید تعداد

افراد مناطق سایه خورده با تعداد افراد درون A برابر ۱۲۴ شود:

$$55 + (50 - (28 - x)) + (13 - x) + (50 - (24 - x)) = 124$$

$$55 + 50 - 28 + x + 13 - x + 50 - 24 + x = 124$$

$$\Rightarrow x = 124 - 116 = 8$$

**روش دوم** اگر A و B و C سه مجموعه باشند، داریم:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B)$$

$$-n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

پس در این سؤال می‌خواهیم  $n(A \cap B \cap C)$  را حساب کنیم.

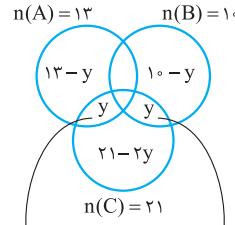
پس داریم:

$$124 = 55 + 50 + 50 - 15 - 13 - 11 + n(A \cap B \cap C)$$

$$\Rightarrow n(A \cap B \cap C) = 8$$

**گزینه ۴۸** **روش اول** به کمک نمودار ون در هر یک از

مجموعه‌های مجزا در نمودار تعداد اعضای آنها را می‌نویسیم. با



توجه به آن که مجموعه

عضوی ندارد، پس مجموعه

$A \cap B \cap C$  نیز عضوی ندارد. پس

با توجه به آن که تعداد اعضای

مشترک گروه‌های A و C برابر اعضای

مشترک گروه‌های B و C است؛ پس

تعداد عضوهای این دو مجموعه باید

برابر باشند تا تعداد عضوهای مجموعه‌های

$B \cap C$  و  $A \cap C$  برابر باشند.

برابر  $y$  داده‌ایم.

باشد، پس:

$$13 - y + y + 10 - y + y + 21 - 2y = 38$$

$$44 - 2y = 38 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$$

با توجه به شکل، تعداد اعضایی که فقط در A

است، پس این مجموعه دارای  $13 - 3 = 10$  عضو است.

**روش دوم** اگر A، B و C سه مجموعه باشند، داریم:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B)$$

$$-n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

در این مسئله داریم:  $n(A) = 13$ ,

$n(B) = 10$ ،  $n(C) = 21$ ،  $n(A \cap B \cap C) = y$  و در نتیجه

$n(A \cap B \cap C) = 0$ : پس

$$38 = 13 + 10 + 21 - 2y + 0 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$$

$$\Rightarrow n(A - ((A \cap B) \cup (A \cap C))) = 13 - 3 = 10$$



**-۵۴ گزینه ۱** جملات دنباله  $a_n$  را بر طبق رابطه داده شده می‌نویسیم. دنباله با جمله عمومی  $a_n$ , دنباله‌ای است که دو جمله ابتدایی آن ۱ و جملات بعدی از حاصل جمع دو جمله قبلی حاصل می‌شوند. در نتیجه:

$$a : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

دنباله‌ای با جمله عمومی  $b_n$ , دنباله‌ای است که جملات آن از تفاضل مریع هر جمله دنباله  $a$  از حاصل ضرب دو جمله قبل و بعد آن ایجاد می‌شود. یعنی:

$$b_1 = 1^2 - 1 \times 2 = -1 = (-1)^1$$

$$b_2 = 2^2 - 1 \times 3 = 4 - 3 = 1 = (-1)^2$$

$$b_3 = 3^2 - 2 \times 5 = 9 - 10 = -1 = (-1)^3$$

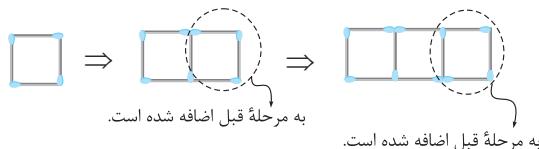
$$b_4 = 5^2 - 3 \times 8 = 25 - 24 = 1 = (-1)^4$$

با توجه به گزینه‌ها پس جمله عمومی برابر  $b_n = (-1)^n$  باید باشد. البته می‌توان نشان داد جمله عمومی دنباله به صورت

$$b_n = (-1)^n \text{ است که البته اثبات آن ساده نیست!}$$

**-۵۵ گزینه ۲** با توجه به الگوی زیر، هر بار به تعداد ۳ چوب

کبریت به مرحله قبل اضافه می‌شود:



پس الگوی فوق یک الگوی خطی است که دنباله آن به صورت زیر است:

$$4, 7, 10, 13, \dots, 1 + 20 \times 3$$

↑  
+3    +3    +3  
+3    +3    +3  
تعداد چوب‌کبریت‌های  
شکل بیستم

می‌توانیم به صورت زیر جملات را بنویسیم و باهم جمع کنیم:

$$a_1 = 1 + 3$$

$$a_2 = 1 + 2 \times 3$$

$$a_3 = 1 + 3 \times 3$$

⋮

$$a_{20} = 1 + 20 \times 3$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = 20 \times 1 + 3 \underbrace{(1 + 2 + 3 + \dots + 20)}_{\frac{20 \times 21}{2} = 210}$$

$$= 20 + 630 = 650$$

**تذکرہ** مجموع  $n$  عدد اول طبیعی برابر است با:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

پس اگر جمله عمومی شاعرها را  $a_n$  بنامیم داریم:

$$a_1 = 9, a_2 = 9 \times \frac{2}{3}, a_3 = 9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2, \dots, a_7 = 9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

پس شاعر نیم‌دایره مرحله هفتم برابر  $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \times 9$  است. در نتیجه

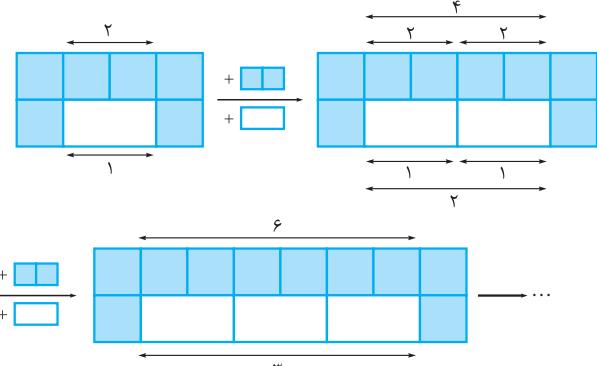
محیط آن برابر است با:

$$\pi a_7 = \pi \times 9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \pi \times 3^2 \times \frac{2^6}{3^6}$$

$$= \frac{2^6 \pi}{3^4} = \frac{64\pi}{81}$$

**-۵۶ گزینه ۲** با توجه به شکل زیر مشخص است در هر

مرحله دو کاشی به صورت به کاشی‌های وسطی اضافه می‌شوند و به ازای آن در زیر آن یک کاشی سفید که طول آن برابر ۲ کاشی رنگی است، اضافه می‌شود.



دنباله تعداد کاشی‌های رنگی:

$$6, 8, 10, 12, \dots \xrightarrow{\text{دنباله خطی}} a_n = 2n + 4$$

↑  
+2    +2    +2

تعداد کاشی‌های سفید:

$$1, 2, 3, 4, \dots \xrightarrow{\text{دنباله خطی}} b_n = n$$

↑  
+1    +1    +1

پس اختلاف تعداد کاشی‌های هر مرحله نیز یک دنباله خطی می‌سازند:

$$c_n = a_n - b_n = (2n + 4) - n = n + 4$$

$$c_1 = 1 + 4 = 14$$



می توانیم عبارت  $\frac{1}{n^2 + n}$  را به صورت زیر بنویسیم:

گزینه ۲۸

$$a_n = \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$a_1 = 1 - \frac{1}{2}$$

پس:

$$a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

⋮

$$a_{100} = \frac{1}{100} - \frac{1}{101}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101}$$

$$= 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}$$

اگر  $a_q$  و  $a_p$  دو جمله از یک دنباله حسابی

گزینه ۲۹

باشند، داریم:

$$a_p - a_q = (p - q)d$$

$$a_{n+2} - a_{n-1} = ((n+2) - (n-1))d = 3d \quad \text{در نتیجه:}$$

$$\frac{a_{n+2} = 35}{a_{n-1} = 17} \rightarrow 35 - 17 = 3d \Rightarrow 3d = 18 \Rightarrow d = 6$$

جمله عمومی یک دنباله حسابی از درجه یک

گزینه ۶۰

است (اگر قدرنسبت صفر نباشد) و به صورت  $t_n = an + b$  است

که در آن  $a$  همان قدرنسبت است.

برای آن که  $a_n$  یک چندجمله‌ای از درجه یک باشد،

باید  $4n^2 + 11n + a$  بر  $n+2$  بخش پذیر باشد؛ یعنی باقی‌مانده

تقسیم  $4n^2 + 11n + a$  بر  $n+2$  صفر باشد:

$$\begin{array}{r} 4n^2 + 11n + a \\ \underline{- 4n^2 + 8n} \qquad \qquad \qquad 4n + 3 \\ \hline 3n + a \\ \underline{- 3n + 6} \\ a - 6 \end{array} \Rightarrow a - 6 = 0 \Rightarrow a = 6$$

$$a_n = \frac{4n^2 + 11n + 6}{n+2} = 4n + 3 \quad \text{پس:}$$

پس باید بینیم به ازای چه مقداری از  $n$   $a_n$  برابر  $83$  است:

$$a_n = 83 \Rightarrow 4n + 3 = 83 \Rightarrow 4n = 80 \Rightarrow n = 20$$

اولین عدد نوشته شده داخل مربع، در مرحله،

برابر تعداد مربع‌های به کار رفته در مراحل قبل به اضافه ۱ است.

مثلثاً در مرحله ۳ اولین عدد نوشته شده ۴ است؛ زیرا تعداد مربع‌های

مرحله ۱ و ۲ برابر  $1 + 2 = 3$  است. پس اولین عدد در این مرحله ۴

است. یا در مرحله ۴ اولین عدد نوشته شده ۷ خواهد بود که به

صورت  $7 = 1 + 2 + 3 + 1$  به دست می‌آید.

پس اولین عدد نوشته شده در مرحله ۱۰ برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 9 + 1 = \frac{9 \times 10}{2} + 1 = 46$$

و آخرین عدد هر مرحله برابر مجموع  $n$  عدد طبیعی ابتدایی است.

پس آخرین عدد مرحله دهم برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

پس باید حاصل جمع ده عدد طبیعی متولی از ۴۶ تا ۵۵ را حساب کنیم.

$$46 + 47 + 48 + \dots + 55 = \frac{10(46 + 55)}{2} = 5 \times 101 = 505$$

رتکبر حاصل جمع تعدادی عدد طبیعی متولی برابر است با:

$$\frac{\text{(عدد آخر} + \text{عدد اول}) \times \text{تعداد}}{2}$$

مطابق الگوی داده شده، طول نقطه  $A_1$

است. از نقطه  $A_1$  به  $A_2$  طول تصویر ثابت می‌ماند. از  $A_2$  به  $A_3$  طول نقطه  $\frac{1}{4}$  کاهش می‌یابد و از ۱ به  $\frac{3}{4}$  می‌رسد. سپس از  $A_3$  به

$A_4$  دوباره طول نقطه ثابت می‌ماند و از  $A_4$  به  $A_5$   $\frac{1}{4}$  مسافت طی شده قبلی در راستای محور  $x$  به طول نقطه، اضافه می‌شود. در نتیجه مختصات نقطه  $A_n$  که در آن  $n$  عددی فرد است، دنباله زیر را ایجاد می‌کند:

$$\downarrow, 1 - \frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16}, 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64}, \dots$$

$$x_{A_1}, \quad x_{A_2}, \quad x_{A_3}, \quad x_{A_4}, \quad x_{A_5}, \quad x_{A_6}, \dots$$

از طرفی مطابق الگوی داده شده طول نقطه  $A_n$  که در آن  $n$  زوج است،

با طول نقطه  $A_{n-1}$  برابر است، یعنی  $x_{A_2} = x_{A_4}$ ،  $x_{A_1} = x_{A_3}$ ، ... و  $x_{A_{n-1}} = x_{A_n}$  پس طول نقطه  $A_1$  برابر طول نقطه  $A_n$  است.

در نتیجه مطابق الگوی فوق داریم:

$$x_{A_1} = 1 - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4$$

$$= \frac{4^4 - 4^3 + 4^2 - 4 + 1}{4^4} = \frac{256 - 64 + 16 - 4 + 1}{256} = \frac{205}{256}$$



چون  $x + z = 2y$  است، پس:

$$x + y + z = 3y = 27 \Rightarrow y = 9$$

پس  $n(A \cap B) = 9$  است.

می‌دانیم اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  سه جمله متوالی از گزینه ۱۶۵

یک دنباله حسابی باشند، داریم:

$$\frac{a+c}{2} = b \Rightarrow a+c=2b$$

چون  $a_7$  و  $a_8$  و  $a_9$  سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی‌اند، پس:

$$a_7 + a_9 = 2a_8 \Rightarrow a_7 + a_8 + a_9 = 3a_8 = 30 \Rightarrow a_8 = 10$$

$\downarrow a_8$

با توجه به آن که جمله اول، نصف جمله چهارم است، داریم:

$$a_1 = \frac{a_4}{2} \Rightarrow 2a_1 = a_4 \Rightarrow 2a_1 = a_1 + 3d \Rightarrow a_1 = 3d$$

از طرفی  $a_8 = 10$  است، پس:

$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_1 = 3d \end{cases} \Rightarrow a_1 + 7d = 10 \xrightarrow{a_1 = 3d} 10d = 10 \Rightarrow d = 1$$

می‌دانیم  $a_9 = a_8 + d$  و  $a_7 = a_8 - d$  پس:

$$a_7 + a_8 + a_9 = (a_8 - d)^2 + a_8^2 + (a_8 + d)^2 = a_8^2 - 2a_8d + d^2 + a_8^2 + 2a_8d + d^2 = 3a_8^2 + 2d^2$$

با توجه به آن که  $a_8 = 10$  و  $d = 1$  است، پس:

$$a_7 + a_8 + a_9 = 3a_8^2 + 2d^2 = 3 \times 10^2 + 2 = 302$$

### تذکر

$$\underbrace{a_8 - d}_{a_7}, \underbrace{a_8}_{a_8}, \underbrace{a_8 + d}_{a_9}$$

اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$  سه جمله متوالی از یک دنباله گزینه ۱۶۶

حسابی با قدرنسبت  $d$  باشند، داریم:

$$\begin{cases} a = b - d \\ c = b + d \end{cases} \quad a, b, c \quad -d + d$$

از طرفی بنا بر قضیه فیثاغورس داریم  $a^2 + b^2 = c^2$ ، پس:

$$(b-d)^2 + b^2 = (b+d)^2 \Rightarrow b^2 - 2bd + d^2 + b^2 = b^2 + 2bd + d^2$$

$$= b^2 + d^2 + 2bd \Rightarrow b^2 = 4bd \xrightarrow{-b} b = 4d$$

پس طول اضلاع برحسب  $d$  به صورت زیر است:

$$a = b - d = 3d, b = 4d, c = b + d = 5d$$

$$\frac{\text{نسبت محیط}}{\text{طول ضلع کوچک}} = \frac{3d + 4d + 5d}{3d} = \frac{12d}{3d} = 4 \quad \text{در نتیجه:}$$

در هر دنباله عددی با جمله عمومی  $a_n$ ، گزینه ۱۶۱

جمله عمومی به صورت  $a_n = an + b$  است که در آن ضریب  $n$  قدرنسبت است. زیرا:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 + nd - d = \underbrace{d}_{\downarrow a} n + \underbrace{(a_1 - d)}_{\downarrow b}$$

پس در دنباله حسابی با جمله اول  $a_1 = 3 - 12n$ ،  $a_n = 3 - 12n$ ، قدرنسبت برابر  $-12$  است. از طرفی  $a_1 = -9$  است. پس جمله اول دنباله جدید  $-6$  و قدرنسبت آن  $-14$  است. اگر جمله عمومی دنباله جدید را  $a'_n$  بنامیم، داریم:

$$\begin{cases} d' = -14 \\ a'_1 = -6 \end{cases} \Rightarrow a'_n = -6 - 14(n-1) = -8 - 14n$$

$$\Rightarrow a_n - a'_n = (3 - 12n) - (-8 - 14n) = 2n - 5 \\ a_2 - a'_2 = 2 \times 20 - 5 = 35$$

ابتدا جمله عمومی دنباله را به دست می‌آوریم. گزینه ۳۴

جمله اول این دنباله  $-2$  و جمله چهارم آن  $7$  است. پس:

$$\begin{cases} a_4 = 7 \\ a_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow a_4 - a_1 = 9 \Rightarrow 7 - (-2) = 9 \Rightarrow 9 = 9$$

$$\Rightarrow 3d = 9 \Rightarrow d = 3$$

پس جمله عمومی این دنباله به صورت زیر است:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -2 + 3(n-1) = 3n - 5$$

پس بايد ببینیم به ازای چه مقدار از  $a_n < 100$ ،  $n$

$$a_n < 100 \Rightarrow 3n - 5 < 100 \Rightarrow 3n < 105 \Rightarrow n < 35$$

پس به ازای هر عدد طبیعی کوچکتر از  $35$ ،  $a_n$  کمتر از  $100$  است.

پس  $34$  عدد طبیعی ابتدایی باعث می‌شوند که  $a_n < 100$  باشد. ظ

ابتدا جمله شانزدهم دنباله با جمله گزینه ۶۳

عمومی  $b_n$  را حساب می‌کنیم:

$$b_n = 3n - 4 \Rightarrow b_{16} = (3 \times 16) - 4 = 44$$

حال  $n$  را طوری می‌یابیم که  $a_n = 44$  باشد:

$$a_n = 44 \Rightarrow 4n = 44 \Rightarrow n = 11$$

چون  $x, y, z$  دنباله عددی تشکیل می‌دهند. گزینه ۱۶۴

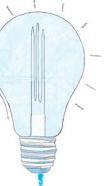
$$x + z = 2y \quad \text{در نتیجه} \quad \frac{x+z}{2} = y \quad \text{پس}$$

از طرفی مطابق شکل  $M$  برابر است با:

$$n(M) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) + 17$$

$$\Rightarrow n(M) = x + y + z + 17$$

$$\xrightarrow{n(M)=44} x + y + z = 27$$



می دانیم جمله عمومی یک دنباله هندسی با

**گزینه ۶۹**

قدرنسبت  $q$  و جمله اول  $a_1$  برابر  $a_1 q^{n-1}$  است، پس:

$$\frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} = \frac{a_1 \times q^{(n-1)-1}}{a_1 \times q^{(n+1)-1}} = \frac{q^{n-2}}{q^n} = q^{-2} = 9 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow q = \pm \frac{1}{3}$$

چون جملات دنباله، همگی مثبتاند، پس قدرنسبت نمی تواند

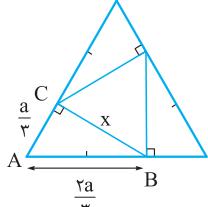
منفی باشد. پس  $q = \frac{1}{3}$  است. در نتیجه:

$$a_{10} = a_1 q^9 = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^9 = 3^{-9}$$

اگر طول ضلع مثلث متساوی الاضلاع اولیه را

**گزینه ۷۰**

بنایمیم، می توانیم طول ضلع مثلث متساوی الاضلاع دوم را بر حسب  $a$  حساب کنیم.



در مثلث قائم الزاویه ABC داریم:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2a}{3}\right)^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{4a^2}{9} - \frac{a^2}{9} \Rightarrow x^2 = \frac{3a^2}{9} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}a}{3}$$

پس طول هر مثلث متساوی الاضلاع داخلی،  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  برابر طول هر ضلع مثلث متساوی الاضلاع خارجی است. پس طول اضلاع، تشکیل

دنباله هندسی با قدرنسبت  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  و جمله اول  $9$  می دهنند:

$$a_1 : 9, 9 \times \frac{\sqrt{3}}{3}, 9 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2, \dots$$

$$\times \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

در نتیجه، جمله پنجم آن برابر است با:

$$a_5 = 9 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4 = 9 \times \frac{1}{3^2} = 1$$

زمانی که جمعیت اولیه برابر  $a$  است، پس از یک

**گزینه ۷۱**

سال با کاهش  $20\%$  جمعیت، جمعیت به  $80\%$  جمعیت اولیه می رسد. پس

بعد از یک سال جمعیت برابر  $80\% a$  است. در سال دوم با کاهش  $20\%$  جمعیت باز جمعیت  $80\% \times 80\% a = 64\% a$  خواهد بود. پس بعد از

۲ سال، جمعیت  $80\% \times 80\% a = 64\% a$  خواهد بود. پس داریم:

سال	۱۳۹۰	۱۳۹۱	۱۳۹۲	۱۳۹۳
جمعیت	$10^5$	$0.8 \times 10^5$	$0.8^2 \times 10^5$	$0.8^3 \times 10^5$

$$\times 0.8 \quad \times 0.8 \quad \times 0.8$$

اگر  $x$  و  $z$  سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند، داریم:

$$b - c, c - a \Rightarrow \frac{x + z}{2} = y. \text{ پس با توجه به آن که}$$

و  $a - b$  سه جمله اول یک دنباله حسابی اند، داریم:

$$\frac{(a - b) + (c - a)}{2} = b - c \Rightarrow \frac{c - b}{2} = (b - c)$$

$$\Rightarrow c - b = 2(b - c) \Rightarrow 2(b - c) + b - c = 0$$

$$\Rightarrow 3(b - c) = 0 \Rightarrow b = c$$

پس  $c = b$  است. در نتیجه سه جمله اول دنباله به صورت زیر است:

$$\underbrace{c - a}_{b - a}, \underbrace{b - c}_{b - a}, \underbrace{a - b}_{b - a} \Rightarrow b - a, b - a, b - a$$

پس قدرنسبت این دنباله برابر  $b - a$  و جمله اول آن  $b - a$  است. پس:

$$a_{14} = a_1 + 13d = (b - a) + 13(a - b) = 12(a - b)$$

$$a_6 = a_1 + 5d = (b - a) + 5(a - b) = 4(a - b)$$

$$\Rightarrow \frac{a_{14}}{a_6} = \frac{12(a - b)}{4(a - b)} = 3$$

**گزینه ۷۸**

مستطیل باشند و تشکیل دنباله حسابی با قدرنسبت  $d$  دهند، داریم:

$$x, y, z \Rightarrow x = y - d$$

$$-d + d \quad z = y + d$$

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ x & & z \\ & x & \end{array} \quad x^2 + y^2 = z^2$$

از طرفی بنا بر قضیه فیثاغورس داریم:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

در نتیجه:

$$(y - d)^2 + y^2 = (y + d)^2 \Rightarrow y^2 - 2yd + d^2 + y^2$$

$$= y^2 + 2yd + d^2 \Rightarrow y^2 = 4yd \xrightarrow{+y} y = 4d$$

پس با توجه به آن که  $z = y + d$  و  $x = y - d$  است، داریم:

$$x = 4d - d = 3d, z = 4d + d = 5d$$

با توجه به آن که محیط مستطیل برابر  $56$  است، پس

$$2(x + y) = 56 \Rightarrow x + y = 28$$

است. با توجه به آن که  $y = 4d$  است، داریم:

$$x + y = 28 \Rightarrow 3d + 4d = 28 \Rightarrow 7d = 28 \Rightarrow d = 4$$

پس  $x = 12$  و  $y = 16$  است و مساحت مستطیل برابر

$$12 \times 16 = 192$$



پس حاصل ضرب  $5^{\circ}$  جمله اول آن به صورت زیر است:

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_5 = 2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \cdots \times 2^5 \\ = 2^{1+2+3+\cdots+5}.$$

می‌دانیم مجموع  $n$  جمله ابتدایی اعداد طبیعی ابتدایی

$$\text{برابر } \frac{n(n+1)}{2} \text{ است، پس:}$$

$$2^{1+2+3+\cdots+5} = 2^{\frac{5(5+1)}{2}} = 2^{25}.$$

این عدد را باید در پایه  $\lambda$  بنویسیم. می‌دانیم  $51 = 3 \times 17$  پس:

$$2^{25} = 2^{5 \times 3 \times 17} = (2^3)^{5 \times 17} = \lambda^{425}.$$

**گزینه ۲۶**

$$a_1 a_2 a_3 \times \cdots \times a_{13} = a_1 \times a_1 q \times a_1 q^2 \times \cdots \times a_1 q^{12} \\ = a_1^{13} \times q^{1+2+3+\cdots+12}$$

می‌دانیم حاصل جمع  $n$  عدد اول طبیعی برابر  $\frac{n(n+1)}{2}$  است، پس:

$$1+2+3+\cdots+12 = \frac{12 \times 13}{2} = 6 \times 13$$

در نتیجه:

$$a_1 a_2 a_3 \times \cdots \times a_{13} = a_1^{13} q^{6 \times 13} = (a_1 q^6)^{13}$$

از طرفی می‌دانیم  $a_7 = a_1 q^6$  پس:

$$a_1 a_2 a_3 \times \cdots \times a_{13} = a_7^{13} = (\sqrt[13]{\lambda})^{13} = \lambda$$

جملات دنباله را با توجه به رابطه داده شده

**گزینه ۲۷**

می‌نویسیم:

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 2 \times 3 + 3 = 3(2 + 1)$$

$$a_3 = 2 \times 3(2 + 1) + 3 = 3(2^2 + 2 + 1)$$

$$a_4 = 2 \times 3(2^2 + 2 + 1) + 3 = 3(2^3 + 2^2 + 2 + 1)$$

در نتیجه می‌توان نشان داد:

$$a_n = 3(3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 1)$$

پس:

$$a_8 - a_7 = 3(2^7 + 2^6 + \cdots + 1) - 3(2^6 + 2^5 + \cdots + 1)$$

$$= 3 \times 2^7 = 3 \times 128 = 384$$

**تذکرہ** در حالت کلی در این دنباله می‌توان اثبات کرد:

$$a_n - a_{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$$

پس در ابتدای سال ۱۳۹۵ جمعیت برابر  $10^5 \times 8^5 = 8^5 \times 10^5$  است، یعنی:

**گزینه ۲۸** می‌دانیم اگر سه عدد  $a$ ,  $b$  و  $c$  سه جمله متوالی

از یک دنباله هندسی باشند، داریم:  $ac = b^2$ . پس اگر

$4+k$  و  $22+k$  تشکیل دنباله هندسی دهند، داریم:

$$(k+22)(k-4) = (k+4)^2 \Rightarrow k^2 + 20k - 44$$

$$= k^2 + 8k + 16 \Rightarrow 12k = 60 \Rightarrow k = 5$$

**گزینه ۲۹** اگر بین ۲ و ۱۶ پنج عدد طوری قرار دهیم که

۷ عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی دهند، جمله اول دنباله، ۲ و

جمله هفتم آن ۱۶ خواهد بود. پس:

$$2, \underbrace{\phantom{0}}, \underbrace{\phantom{0}}, \underbrace{\phantom{0}}, \underbrace{\phantom{0}}, \underbrace{\phantom{0}}, 16 \\ a_1 \qquad \qquad \qquad a_7$$

$$a_7 = a_1 q^6 \Rightarrow \frac{a_7}{a_1} = q^6 \Rightarrow \frac{16}{2} = q^6 \Rightarrow q^6 = 8$$

$$\Rightarrow q^3 = \sqrt[3]{8} = 2\sqrt[3]{2}$$

در نتیجه حاصل ضرب ۵ واسطه به صورت زیر است:

$$a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 = a_1 q \times a_1 q^2 \times a_1 q^3 \times a_1 q^4 \times a_1 q^5 \\ = a_1^5 \times q^{1+2+3+4+5} = a_1^5 q^{15} = 2^5 \times (q^3)^5 = 2^5 \times (2\sqrt[3]{2})^5 \\ = 2^5 \times 2^5 \times \sqrt[3]{2}^5 = 2^10 \times 2^2 \times \sqrt[3]{2} = 2^{12} \times \sqrt[3]{2} = 4096\sqrt[3]{2}$$

**گزینه ۲۰** دنباله زیر دنباله هندسی با قدرنسبت  $\frac{1}{3}$  دارد:

جمله اول ۸۱ است. پس:

$$81, 27, 9, \dots \Rightarrow a_n = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3^4 \times 3^{1-n} = 3^{5-n}$$

$$\Rightarrow a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_{10} = 3^4 \times 3^3 \times 3^2 \times \cdots \times 3^{-5} \\ = 3^{4+3+2+\cdots-4-5} = 3^{-5}$$

از طرفی  $a_5 = 3^{5-5} = 1$ . پس حاصل ضرب ده جمله اول  $3^{-5}$  برابر

جمله پنجم است؛ یعنی:

$$\frac{a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_{10}}{a_5} = \frac{3^{-5}}{1} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$$

**گزینه ۲۶** دنباله داده شده یک دنباله هندسی با جمله اول

۲ و قدرنسبت ۲ دارد. پس جمله عمومی آن به صورت زیر است:

$$a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

### گزینه ۷۸

جملات دنباله را با توجه به رابطه داده شده

می‌نویسیم:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{3}{4} \times 1 + 1$$

$$a_3 = \frac{3}{4} \left( \frac{3}{4} + 1 \right) + 1 = \left( \frac{3}{4} \right)^2 + \left( \frac{3}{4} \right)^1 + 1$$

$$a_4 = \frac{3}{4} \left( \left( \frac{3}{4} \right)^2 + \left( \frac{3}{4} \right)^1 + 1 \right) + 1 = \left( \frac{3}{4} \right)^3 + \left( \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{3}{4} + 1$$

در نتیجه می‌توان نشان داد:

$$a_n = \left( \frac{3}{4} \right)^{n-1} + \left( \frac{3}{4} \right)^{n-2} + \dots + 1$$

پس:

$$a_{16} = \left( \frac{3}{4} \right)^{15} + \left( \frac{3}{4} \right)^{14} + \dots + 1$$

$$a_{15} = \left( \frac{3}{4} \right)^{14} + \left( \frac{3}{4} \right)^{13} + \dots + 1$$

$$a_{16} - a_{15} = \left( \frac{3}{4} \right)^{15}$$

### گزینه ۷۹

اگر  $a_n$  جمله  $n$  و  $a_{n-1}$  جمله  $n-1$  ام باشد، داریم:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = 2a_{n-1} + 2 \quad n \geq 2 \end{cases}$$

در نتیجه دنباله به صورت زیر خواهد بود:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2 \times 2^1 + 2 = 2^3 + 2$$

$$a_3 = 2(2^3 + 2) + 2 = 2^4 + 2^3 + 2$$

$$a_4 = 2(2^4 + 2^3 + 2) + 2 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2$$

در نتیجه جمله چهلم به صورت زیر است:

$$a_{40} = 2^{41} + 2^{39} + 2^{38} + \dots + 2^3 + 2$$

اگر عدد ۲ را به جمله فوق اضافه کنیم، داریم:

$$a_{40} + 2 = 2^{41} + 2^{39} + 2^{38} + \dots + 2^3 + 2 + 2$$

می‌توانیم نشان دهیم حاصل  $2^{40} + 2^{39} + 2^{38} + \dots + 2^3 + 2^2 + 2$  برابر  $2^{40}$  است:

$$\underbrace{2+2}_{2^2} + \underbrace{2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{39}}_{2^{40}} = 2^{40}$$

$$\underbrace{\underbrace{2 \times 2^2}_{2^3}}_{2 \times 2^3 = 2^4} + \underbrace{\underbrace{\dots}_{2 \times 2^{39}}}_{2 \times 2^{39}}$$

### گزینه ۸۰

$$a_4 + 2 = 2^4 + 2^4 \Rightarrow a_4 + 2 = 2 \times 2^4 + 2^4 = 3 \times 2^4$$

$$\Rightarrow a_4 = 3 \times 2^4 - 2$$

اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  جملات متولای یک دنباله

### گزینه ۸۰

هندسی باشند، داریم:  $b^3 = ac$  پس:

$$2^y \times 2^{2x} = (2\sqrt{2})^3 \Rightarrow 2^2y \times 2^{2x} = (2^x \times \sqrt{2})^3$$

$$\Rightarrow 2^{2x+2y} = 2^6 \times 2 = 2^7 \Rightarrow 2^{2x+2y} = 2^7$$

$$\Rightarrow 2x + 2y = 7 \Rightarrow 2(x+y) = 7 \Rightarrow x+y = \frac{7}{2}$$

واسطه عددی  $x$  و  $y$  برابر  $\frac{x+y}{2}$  است. پس واسطه عددی آنها

$$\frac{7}{2} = \frac{7}{2} \text{ است.}$$

واسطه عددی دو عدد  $a$  و  $b$  برابر  $\frac{a+b}{2}$  و

### گزینه ۸۱

واسطه هندسی دو عدد  $a$  و  $b$  برابر  $\sqrt{ab}$  است. پس:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x+3+x}{x(x+3)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3}{x^2+3x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + 3x = 4x + 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

عبارت بالا را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم:  
 $(x-3)(x+2) = 0$

حاصل ضرب دو عدد زمانی صفر است که یکی از آن‌ها صفر باشد، پس

$$x = -3 \text{ صفر است و } x = 2 \text{ است.}$$

اگر  $x = -2$  باشد، دو عدد  $x+9$  و  $x+6$  به ترتیب  $-2$  و  $7$  خواهند بود  
 که چون حاصل ضرب آن‌ها منفی است، واسطه هندسی برای آن‌ها تعريف  
 نمی‌شود. پس  $x = 3$  است. اگر  $x = 3$  باشد، دو عدد  $x+9$  و  $x+6$  به

ترتیب برابر ۳ و ۱۲ خواهد بود که واسطه هندسی آن‌ها ۶ است:

$$\sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$$

$$3, a, b+3 \xrightarrow[\text{دبایه حسابی}]{\text{جمله متولای}} \frac{b+3+3}{2} = a$$

$$\Rightarrow b+6 = 2a \Rightarrow b = 2a - 6$$

$$2, a-1, 2b+2 \xrightarrow[\text{دبایه هندسی}]{\text{جمله متولای}} \underbrace{2(2b+2)}_{4(b+1)} = (a-1)^2$$



پس داریم:

$$\begin{cases} a+b=34 \Rightarrow (a+b)^2=34^2 \Rightarrow a^2+b^2+2ab=34^2 (*) \\ \sqrt{ab}=15 \Rightarrow \sqrt{ab}^2=15^2 \Rightarrow ab=15^2 \end{cases}$$

اگر از دو طرف تساوی  $(*)$  را کم کنیم، می توانیم:اتحاد  $(a-b)^2$  را ایجاد کنیم:

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + 2ab - 4ab = 34^2 - 4ab \\ \Rightarrow & (a-b)^2 = 34^2 - 4ab \\ \xrightarrow{ab=15^2} & (a-b)^2 = 34^2 - 4 \times 15^2 = 34^2 - 30^2 \\ \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} & (a-b)^2 = (\underbrace{34-30}_4)(\underbrace{34+30}_6) \\ = & 256 = 16^2 \Rightarrow |a-b| = 16 \end{aligned}$$

می دانیم اگر  $a$  و  $b$  سه جمله متولی از گزینه ۲۴یک دنباله هندسی باشند، داریم:  $ac = b^2$ . پس با توجه بهآن که  $a_7, a_9$  و  $a_{11}$  تشکیل دنباله هندسی می دهند، داریم:

$$\begin{aligned} a_7 a_9 = a_{11}^2 & \Rightarrow (a_1 + 6d)(a_1 + 8d) = (a_1 + 10d)^2 \\ \Rightarrow a_1^2 + 10a_1 d + 16d^2 & = a_1^2 + 12a_1 d + 36d^2 \\ \Rightarrow \underbrace{a_1 + 10d}_{a_{11}} & = 0 \Rightarrow a_{11} = 0. \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} b = 2a - 6 \\ 4(b+1) = (a-1)^2 \end{cases} \Rightarrow 4(\underbrace{2a-6+1}_{2a-5}) = (a-1)^2$$

$$(a-1)^2 = 8a - 20 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 8a - 20.$$

$$\Rightarrow a^2 - 10a + 21 = 0.$$

به کمک اتحاد جمله مشترک،  $a^2 - 10a + 21$  را تجزیه می کنیم. در نتیجه:  $(a-3)(a-7) = 0$ .برای آن که حاصل ضرب دو عدد صفر باشد، لازم است حداقل یکی از آنها صفر باشد؛ پس یا  $a-3 = 0$  باشد یا  $a-7 = 0$ . بنابراین یا  $a = 3$  است و یا  $a = 7$ . اگر  $a = 3$  باشد:

$$b = 2a - 6 \xrightarrow{a=3} b = 0.$$

اگر  $a = 7$  باشد:

$$b = 2a - 6 \xrightarrow{a=7} b = 8$$

پس اگر  $a = 3$  باشد و  $b = 0$  باشد و  $a+b = 3$  است که در بین گزینه ها نیست. اگر  $a = 7$  باشد،  $b = 8$  است و  $a+b = 15$  است.واسطه حسابی و هندسی دو عدد مثبت  $a$  و گزینه ۲۵

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 2 \\ a+b = 34 \end{cases} \Rightarrow \frac{34}{2} - \sqrt{ab} = 2 \Rightarrow \sqrt{ab} = 15$$