TEST 119 معادله‌های رادیکالی

حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۴x+۳=\sqrt{x^۲+۴x+۵}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

LILIPOOTBOX

در حل بسیاری از معادله‌های رادیکالی نیز مانند BOX قبل، می‌توانیم با تغییر متغیر مناسب، معادلهٔ درجهٔ دوم ایجاد کنیم.

فرض کنید می‌خواهیم معادلهٔ $x^۲-۱=\sqrt{x^۲+۱}$ را حل کنیم. اگر طرفین را به توان ۲ برسانیم حل سؤال سخت و زمان‌بر می‌شود. می‌توانیم از تغییر متغیر $x^۲-۱=t$ استفاده کنیم، در این صورت $x^۲+۱=t+۲$، پس:

$$x^۲-۱=\sqrt{x^۲+۱}\Rightarrow t=\sqrt{t+۲}\xrightarrow{\text{توان ۲}} t^۲=t+۲\Rightarrow \dots$$

ANALYSE

فرض می‌کنیم $x^۲+۴x+۳=t$، بنابراین:

$$x^۲+۴x+۳=\sqrt{x^۲+۴x+۵}\Rightarrow t=\sqrt{t+۲}\xrightarrow[t>۰]{\text{طرفین به توان ۲}} t^۲=t+۲$$

$$\Rightarrow t^۲-t-۲=۰\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases} t=-۱ & \times \\ t=۲ & \checkmark \end{cases}$$

(دقت کنید جواب رادیکال همیشه یک عدد مثبت است.)

حال چون $t=x^۲+۴x+۳$ پس:

$$t=۲\Rightarrow x^۲+۴x+۳=۲\Rightarrow x^۲+۴x+۱=۰$$

$$\Delta=۴^۲-۴(۱)(۱)=۱۲$$

$$\Rightarrow x_۱=\frac{-۴+\sqrt{۱۲}}{۲}=-۲+\sqrt{۳}\quad,\quad x_۲=\frac{-۴-\sqrt{۱۲}}{۲}=-۲-\sqrt{۳}$$

$$x_۱.x_۲=(-۲+\sqrt{۳})(-۲-\sqrt{۳})=(-۲)^۲-(\sqrt{۳})^۲=۴-۳=۱$$

پاسخ گزینهٔ ۲

NOTE

TEST 120 | تعداد ریشه‌ها

به‌ازای کدام مقادیر a، معادلهٔ $x^2-2ax+6-a=0$ ریشهٔ مضاعف دارد؟

۱) ۲ و ۳- .... ۲) ۳ و ۲- .... ۳) ۴ و ۱- .... ۴) ۱ و ۴-

LILIPOOTBOX

چون در محاسبهٔ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ به روش Δ، عبارت Δ زیر رادیکال قرار دارد، پس با توجه به علامت Δ با سه حالت کلی مواجه می‌شویم:

$\Delta = b^2-4ac$

- $\Delta < 0$: معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.
- $\Delta = 0$: معادله یک ریشهٔ مضاعف دارد.
  - در این حالت طرف اول معادله مربع کامل است و مقدار دو ریشهٔ مساوی $x=-\frac{b}{a}$ است.
- $\Delta > 0$: معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

اگر بخواهیم ببینیم به‌ازای کدام مقدار m، معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}=0$ فاقد ریشهٔ حقیقی است، باید Δ را کوچک‌تر از صفر قرار دهیم:

$$\Delta<0 \Rightarrow (m+1)^2-4(2)(\frac{1}{2})<0 \Rightarrow m^2+2m-3<0 \Rightarrow \cdots$$

ANALYSE

برای این‌که معادلهٔ $x^2-2ax+6-a=0$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، باید شرط $\Delta=0$ برقرار باشد، پس:

$$\Delta=0 \xrightarrow{\Delta=b^2-4ac} (-2a)^2-4(1)(6-a)=0 \Rightarrow 4a^2-24+4a=0$$

$$\xrightarrow{\div 4} a^2+a-6=0 \Rightarrow (a+3)(a-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=-3 \end{cases}$$

پاسخ گزینهٔ ۱

NOTE

TEST 121 روابط ریشه‌ها

مجموع ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}-(a-۲)x+۲a=۰$ برابر با ۱۰ است. حاصل‌ضرب ریشه‌ها کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

LILIPOOTBOX

اگر ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ را α و β بنامیم، در این صورت مجموع ریشه‌ها را با S و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را با P نشان می‌دهیم و خواهیم داشت:

$ax^{۲}+bx+c=۰$

$\Delta>۰$

- مجموع دو ریشه: $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$
- حاصل‌ضرب دو ریشه: $P=\alpha.\beta=\frac{c}{a}$
- مجموع مربعات دو ریشه: $\alpha^{۲}+\beta^{۲}=S^{۲}-۲P$
- مجموع مکعبات دو ریشه: $\alpha^{۳}+\beta^{۳}=S^{۳}-۳PS$
- اختلاف دو ریشه: $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

ANALYSE

ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم را α و β درنظر می‌گیریم. می‌دانیم مجموع ریشه‌های معادله برابر با ۱۰ است:

$$\alpha+\beta=۱۰\Rightarrow\frac{-b}{a}=۱۰\Rightarrow\frac{(a-۲)}{۱}=۱۰\Rightarrow a-۲=۱۰\Rightarrow a=۱۲$$

پس معادله به‌صورت $x^{۲}-۱۰x+۲۴=۰$ است و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن برابر است با:

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}\Rightarrow\alpha\beta=\frac{۲۴}{۱}=۲۴$$

پاسخ گزینهٔ ۴

NOTE

TEST 122 روابط متقارن بین ریشه‌ها

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۵x+۲=۰$ باشند، کدام گزینه درست است؟

۱) $\alpha^۲\beta+\beta^۲\alpha=۷$ ۲) $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{۲}{۵}$ ۳) $\alpha^۳+\beta^۳=۱۲۵$ ۴) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{۲۱}{۲}$

LILIPOOTBOX

فرض کنید α و β ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم باشند و حاصل عبارتی را بخواهیم که برحسب α و β به‌صورت متقارن نوشته شده باشد (مثل $\frac{۱}{\beta}+\frac{۱}{\alpha}$ یا $\alpha\beta^۳+\beta\alpha^۳$ یا ...). برای این کار به کمک اتحاد، فاکتورگیری، تجزیه و یا مخرج مشترک‌گیری می‌توانیم عبارت داده‌شده را به S و P تبدیل کنیم.

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-x-۴=۰$ باشند و بخواهیم حاصل $\alpha(۱+\frac{۱}{\beta})+\beta(۱+\frac{۱}{\alpha})$ را به‌دست آوریم به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\alpha(۱+\frac{۱}{\beta})+\beta(۱+\frac{۱}{\alpha})=\alpha+\frac{\alpha}{\beta}+\beta+\frac{\beta}{\alpha}=(\alpha+\beta)+(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha})$$

$$=S+\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha\beta}=S+\frac{S^۲-۲P}{P}=\frac{۱}{۲}+\frac{(\frac{۱}{۲})^۲-۲(-۲)}{-۲}=-\frac{۱۳}{۸}$$

ANALYSE

چون α و β ریشه‌های معادله هستند، پس:

$$x^۲-۵x+۲=۰\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\frac{-۵}{۱}=۵\\ P=\alpha\beta=\frac{۲}{۱}=۲\end{cases}$$

حال تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

• گزینهٔ (۱): $\alpha^۲\beta+\beta^۲\alpha=\alpha\beta(\alpha+\beta)=۲\times۵=۱۰$

• گزینهٔ (۲): $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{۵}{۲}$

• گزینهٔ (۳): $\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=۵^۳-۳\times۲(۵)=۱۲۵-۳۰=۹۵$

• گزینهٔ (۴): $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{۵^۲-۲(۲)}{۲}=\frac{۲۵-۴}{۲}=\frac{۲۱}{۲}$

پاسخ گزینهٔ ۴

TEST 123 روابط متقارن و رادیکالی بین ریشه‌ها

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $4x^2-12x+1=0$ باشند، حاصل عبارت $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{2}$

LILIPOOTBOX

اگر حاصل عبارتی متقارن و رادیکالی برحسب ریشه‌ها را بخواهیم، کافی است آن عبارت را برابر با A قرار داده و طرفین را به توان ۲ برسانیم تا به S و P تبدیل شود.

فرض کنید α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم باشند و حاصل عبارت $\frac{1}{\sqrt{\beta}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ را بخواهیم، داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}=A \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}=A^2$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}=A^2 \Rightarrow \frac{S}{P}+\frac{2}{\sqrt{P}}=A^2 \Rightarrow \dots$$

ANALYSE

چون x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند، پس:

$$4x^2-12x+1=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-\frac{-12}{4}=3 \\ x_1x_2=\frac{1}{4} \end{cases}$$

حال فرض می‌کنیم $A=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$، داریم:

$$A=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2} \Rightarrow A^2=x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}$$

$$\Rightarrow A^2=3+2\sqrt{\frac{1}{4}}=3+2(\frac{1}{2})=3+1=4 \Rightarrow A=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

چون A مجموع دو عدد مثبت است، پس نمی‌تواند برابر ۲- باشد.

پاسخ گزینهٔ ۲

NOTE

TEST 124 استفاده از S و P در مسائل پارامتری

مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^2-(m+3)x+5=0$ برابر ۶ است. مقدار m کدام است؟

۱) $-\frac{9}{5}$ ۲) ۱ ۳) ۱ و $-\frac{9}{5}$ ۴) $\frac{9}{5}$ و -1

LILIPOOTBOX

هنگامی که در سؤالات معادلهٔ درجهٔ دوم از S و P استفاده می‌کنیم، باید مطمئن باشیم که شرط $\Delta>0$ برقرار است، یعنی معادله حتماً ریشه داشته باشد.

کاربرد اصلی این نکته در مواقعی است که بعد از استفاده از S و P ، برای مجهول مسأله دو جواب به‌دست آمده و هر دو جواب در گزینه‌ها وجود دارد و می‌خواهیم جواب درست را مشخص کنیم.

Compote هنگام استفاده از S و P در مسائل پارامتری باید شرط $\Delta>0$ را حتماً چک کنیم.

ANALYSE

اگر ریشه‌های معادله را α و β در نظر بگیریم، با توجه به گفتهٔ سؤال، داریم:

$$\alpha^2+\beta^2=6\Rightarrow S^2-2P=6$$

از طرفی در معادلهٔ داده‌شده S و P برابر است با:

$$P=\frac{5}{m}\ ,\ S=-\frac{-(m+3)}{m}=\frac{m+3}{m}$$

پس:

$$S^2-2P=6\Rightarrow\frac{(m+3)^2}{m^2}-2\left(\frac{5}{m}\right)=6\Rightarrow\frac{m^2+6m+9-10m}{m^2}=6$$

$$\Rightarrow m^2-4m+9=6m^2\Rightarrow 5m^2+4m-9=0\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}=0}\begin{cases}m=1\\ m=\frac{-9}{5}\end{cases}$$

حال باید ببینیم Δ به‌ازای کدام مقدار m مثبت است:

$$m=1\Rightarrow x^2-4x+5=0\xrightarrow{\Delta=b^2-4ac}\Delta=(-4)^2-4(1)(5)=16-20=-4<0$$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

$$m=\frac{-9}{5}\Rightarrow\frac{-9}{5}x^2-\frac{6}{5}x+5=0\xrightarrow{\Delta=b^2-4ac}\Delta=\left(\frac{-6}{5}\right)^2-4\left(\frac{-9}{5}\right)(5)=\frac{36}{25}+36>0\ \checkmark$$

پاسخ گزینهٔ ۱

125 TEST ترکیب دنباله‌های حسابی و هندسی با معادلهٔ درجه دوم

به‌ازای کدام مقدار m، عدد $\frac{1}{8}$ واسطهٔ حسابی بین ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $(m^2-4)x^2-3x+m=0$ است؟

۱) ۳   ۲) ۳-   ۳) ۴   ۴) ۴-

LILIPOOTBOX

دنباله‌های حسابی و هندسی، ارتباط زیبایی با معادلهٔ درجهٔ دوم دارند. فرض کنیم:

x_1 و x_2 ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم باشند:

- اگر عددی مثل $\bigcirc$ واسطهٔ حسابی x_1 و x_2 باشد: $\quad \underbrace{x_1+x_2}_{\text{جمع ریشه‌ها}} = 2\times\bigcirc$
- اگر عددی مثل $\bigcirc$ واسطهٔ هندسی x_1 و x_2 باشد: $\quad \underbrace{x_1x_2}_{\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}} = \bigcirc^2$

ANALYSE

اگر ریشه‌های معادله را α و β در نظر بگیریم، چون عدد $\frac{1}{8}$ واسطهٔ حسابی بین ریشه‌های حقیقی معادله است، بنابراین:

$$\alpha+\beta=2(\frac{1}{8})\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{1}{4}$$

از طرفی در معادلهٔ داده شده، مجموع ریشه‌ها برابر است با:

$$S=-\frac{-3}{m^2-4}=\frac{3}{m^2-4}$$

پس:

$$\text{مجموع ریشه‌ها}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{3}{m^2-4}=\frac{1}{4}\Rightarrow m^2-4=12\Rightarrow m^2=16\Rightarrow m=\pm4$$

حال Δ را به‌ازای $m=4$ و $m=-4$ به‌دست می‌آوریم تا ببینیم کدام مقدار m قابل قبول است:

$$m=4\Rightarrow 12x^2-3x+4=0\xrightarrow{\Delta=b^2-4ac}\Delta=(-3)^2-4(12)(4)=9-192=-183<0 \quad ✘$$

این معادله، ریشهٔ حقیقی ندارد.

$$m=-4\Rightarrow 12x^2-3x-4=0\xrightarrow{\Delta=b^2-4ac}\Delta=(-3)^2-4(12)(-4)=9+192=201>0 \quad ✓$$

پاسخ گزینهٔ ۴

TEST 126 تبدیل رابطهٔ دو ریشه به S و P

به‌ازای کدام مقدار a، ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $ax^2+3x+a^2=2$ معکوس یکدیگر هستند؟

۱) ۲ و ۱- ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) هیچ مقدار a

LILIPOOTBOX

وقتی بین ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم، رابطه‌ای بیان می‌شود، می‌توانیم آن رابطه را به زبان ریاضی نوشته و به S و P تبدیل کنیم.

فرض کنید در یک معادلهٔ درجهٔ دوم ریشه‌ها **قرینهٔ** هم هستند، در این صورت می‌توانیم رابطهٔ داده شده را به مجموع ریشه‌ها تبدیل کنیم:

$$\alpha=-\beta \Rightarrow \alpha+\beta=0 \Rightarrow S=0$$

فرض کنید در یک معادلهٔ درجهٔ دوم ریشه‌ها **عکس و قرینهٔ** هم هستند، در این صورت می‌توانیم رابطهٔ داده شده را به حاصل‌ضرب ریشه‌ها تبدیل کنیم:

$$\alpha=-\frac{1}{\beta} \Rightarrow \alpha\beta=-1 \Rightarrow P=-1$$

ANALYSE

ابتدا معادله را به‌صورت $ax^2+3x+a^2-2=0$ مرتب می‌کنیم، حال اگر ریشه‌های معادله را با α و β نمایش دهیم، داریم: $\alpha.\beta=\frac{a^2-2}{a}$ از طرفی چون ریشه‌ها معکوس یکدیگر هستند، پس:

$$\alpha=\frac{1}{\beta} \Rightarrow \alpha\beta=1 \Rightarrow \frac{a^2-2}{a}=1 \Rightarrow a^2-2=a \Rightarrow a^2-a-2=0$$

$$\Rightarrow (a+1)(a-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=2 \end{cases}$$

حال چون دو مقدار برای a به‌دست آمد و هر دو در گزینه‌ها وجود دارند، شرط مثبت بودن Δ را بررسی می‌کنیم:

$$a=-1 \Rightarrow -x^2+3x-1=0 \xrightarrow{\Delta=b^2-4ac} \Delta=(3)^2-4(-1)(-1)=5>0 \checkmark$$

$$a=2 \Rightarrow 2x^2+3x+2=0 \xrightarrow{\Delta=b^2-4ac} \Delta=(3)^2-4(2)(2)=9-16=-7<0 \times$$

پاسخ گزینهٔ ۲

NOTE

127 TEST روابط مستقل از S و P بین ریشه‌ها (I)

یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2-8x+m=0$ از نصف ریشهٔ دیگر، ۵ واحد بیشتر است. حاصل‌ضرب ریشه‌ها کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

LILIPOOT BOX

اگر رابطه‌ای بین ریشه‌ها بیان شود که قابل تبدیل به S و P نباشد (برحسب ریشه‌ها متقارن نباشد.)، در این صورت به دلخواه S یا P را به‌دست آورده، سپس آن را به همراه رابطهٔ داده شده در یک دستگاه دو معادله دو مجهول حل می‌کنیم تا ریشه‌ها به‌دست آیند.

فرض کنید در معادلهٔ $2x^2-mx+16=0$ یکی از ریشه‌ها مربع دیگری باشد، یعنی $\alpha=\beta^2$.
اگر دقت کنید این رابطه به S و P تبدیل نمی‌شود، پس:

$$\begin{cases}\alpha=\beta^2\\ \alpha\beta=8\xrightarrow{\alpha=\beta^2}\beta^2\times\beta=8\Rightarrow\beta^3=8\Rightarrow\beta=2\end{cases}$$

حال اگر $\beta=2$ را در معادله به‌جای x قرار دهیم، مقدار $m=12$ به‌دست می‌آید.

ANALYSE

اگر ریشه‌های معادله را با α و β نمایش دهیم، آن‌گاه چون یکی از ریشه‌ها از نصف ریشهٔ دیگر، ۵ واحد بیشتر است، پس:

$$\alpha=\frac{\beta}{2}+5$$

از طرفی با توجه به معادله، مجموع ریشه‌ها برابر است با:

$$\alpha+\beta=-\frac{-8}{1}=8$$

بنابراین با توجه به دو معادلهٔ به‌دست آمده، داریم:

$$\begin{cases}\alpha=\frac{\beta}{2}+5\\ \alpha+\beta=8\Rightarrow(\frac{\beta}{2}+5)+\beta=8\Rightarrow\frac{3\beta}{2}=3\Rightarrow\beta=2\Rightarrow\alpha=\frac{2}{2}+5=6\end{cases}$$

بنابراین حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$\alpha\beta=2\times6=12$$

پاسخ گزینهٔ ۲

TEST 128 روابط مستقل از S و P بین ریشه‌ها (II)

اگر α و β ریشه‌های $x^2-4x+1=0$ باشند، حاصل عبارت $\frac{\alpha^2+1}{\alpha}+\sqrt{\alpha^2(4\beta-1)}$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۸

LILIPOOTBOX

در بعضی از سؤالات یک رابطه برحسب ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم داده می‌شود که نمی‌توان آن را برحسب S یا P نوشت. برای حل این سؤالات باید به این نکته توجه کرد که ریشه‌های هر معادله در آن معادله صدق می‌کنند. بنابراین با جای‌گذاری ریشه‌ها در معادلهٔ درجهٔ دوم داده شده، به دو معادله برحسب ریشه‌ها می‌رسیم و با مرتب کردن این معادله‌ها برحسب عبارت داده شده در سؤال، می‌توانیم حاصل آن عبارت را به‌دست آوریم.

به فرض، در معادلهٔ $3x^2-x-1=0$ اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، می‌توانیم بنویسیم:

$3\alpha^2-\alpha-1=0$ یا $3\beta^2-\beta-1=0$

در مواقعی که در صورت سؤال، رابطه‌ای بین ریشه‌ها مطرح شده که قابل تبدیل به S و P نیست، این روش بسیار کارساز است.

ANALYSE

چون α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-4x+1=0$ هستند، پس در آن صدق می‌کنند، بنابراین:

۱ $\alpha^2-4\alpha+1=0 \Rightarrow \alpha^2+1=4\alpha$

۲ $\beta^2-4\beta+1=0 \Rightarrow \beta^2=4\beta-1$

حال با جای‌گذاری مقادیر ۱ و ۲ در عبارت $\frac{\alpha^2+1}{\alpha}+\sqrt{\alpha^2(4\beta-1)}$ داریم:

$$\sqrt{\alpha^2(4\beta-1)}+\frac{\alpha^2+1}{\alpha}=\sqrt{\alpha^2\beta^2}+\frac{4\alpha}{\alpha}=|\alpha\beta|+4$$

از طرفی با توجه به معادلهٔ داده شده، حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\alpha\beta=\frac{c}{a}=1$ است، بنابراین:

$$|\alpha\beta|+4=|1|+4=5$$

پاسخ گزینهٔ ۳

TEST 129 نوشتن معادلهٔ درجه دوم با داشتن دو ریشه

ریشه‌های کدام معادله از دو برابر ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-x-۵=۰$ یک واحد کم‌تر است؟

۱) $x^۲-x+۱۰=۰$
۲) $x^۲+x-۱۰=۰$
۳) $۳x^۲+۲x-۶=۰$
۴) $۲x^۲+۳x-۶=۰$

LILIPOOTBOX

اگر ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم را داشته باشیم و بخواهیم خود معادله را بنویسیم، کافی است ابتدا $S=x_۱+x_۲$ و $P=x_۱x_۲$ را به‌دست آوریم سپس معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\boxed{x^۲-Sx+P=۰}$$

فرض کنید می‌خواهیم معادله‌ای را بنویسیم که ریشه‌های آن ۲- و ۵ باشند، داریم:

$$\begin{cases} S=x_۱+x_۲=-۲+۵=۳ \\ P=x_۱x_۲=(-۲)(۵)=-۱۰ \end{cases} \Rightarrow x^۲-۳x-۱۰=۰$$

اگر بخواهیم معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌های آن با ریشه‌های یک معادلهٔ دیگر دارای رابطه‌ای باشند، کافی است S و P معادلهٔ اولیه را تشکیل دهیم و به کمک آن‌ها، S و P معادلهٔ خواسته‌شده را به‌دست آوریم.

فرض کنید β و α ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-x-۱=۰$ باشند و بخواهیم معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌هایش $\alpha^۲$ و $\beta^۲$ باشند، یعنی ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادلهٔ اولیه باشد. در معادلهٔ اولیه داریم: $\alpha+\beta=\frac{۱}{۲}$ و $\alpha\beta=-\frac{۱}{۲}$، پس:

$$\begin{cases} S_{\text{جدید}}=\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P=(\frac{۱}{۲})^۲-۲(-\frac{۱}{۲})=\frac{۵}{۴} \\ P_{\text{جدید}}=\alpha^۲\beta^۲=P^۲=(-\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴} \end{cases} \Rightarrow x^۲-\frac{۵}{۴}x+\frac{۱}{۴}=۰$$

ANALYSE

ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-x-۵=۰$ را α و β در نظر می‌گیریم:

$$۲x^۲-x-۵=۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=-\frac{-۱}{۲}=\frac{۱}{۲} \\ \alpha\beta=\frac{-۵}{۲} \end{cases}$$

به دنبال معادله‌ای هستیم که ریشه‌هایش از دو برابر ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-x-5=0$ یک واحد کمتر است، یعنی ریشه‌های معادلهٔ مورد نظر به‌صورت $2\beta-1$ و $2\alpha-1$ می‌باشند. مجموع و حاصل‌ضرب این ریشه‌ها را می‌یابیم و با کمک رابطهٔ $x^2-Sx+P=0$، معادلهٔ مورد نظر را می‌نویسیم:

$$S=(2\alpha-1)+(2\beta-1)=2(\alpha+\beta)-2=2(\frac{1}{2})-2=1-2=-1$$

$$P=(2\alpha-1)(2\beta-1)=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1=4(-\frac{5}{2})-2(\frac{1}{2})+1=-10-1+1=-10$$

در نتیجه معادلهٔ مورد نظر به صورت زیر خواهد بود:

$$x^2-(-1)x+(-10)=0 \Rightarrow x^2+x-10=0$$

پاسخ گزینهٔ ۲

N O T E

TEST 130 نوشتن یک معادله از روی یک معادلهٔ دیگر

ریشه‌های کدام‌یک از معادله‌های زیر عکس و قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ $3x^2-2x+1=0$ است؟

۱) $3x^2+2x+1=0$

۲) $x^2-2x+3=0$

۳) $3x^2+2x-1=0$

۴) $x^2+2x+3=0$

LILIPOOT BOX

اگر معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ را داشته باشیم، در حالت‌های خاص می‌توانیم بدون به‌دست آوردن مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها، معادلهٔ جدید را بنویسیم. [البته می‌توانیم با روش کلی گفته شده در BOX قبل نیز، این معادلات را بنویسیم.]

- ریشه‌های معادلهٔ $ax^2-bx+c=0$، قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ است.
- ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-3x-6=0$، قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+3x-6=0$ است.
- ریشه‌های معادلهٔ $cx^2+bx+a=0$، عکس ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ است.
- ریشه‌های معادلهٔ $-6x^2+3x+2=0$، عکس ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+3x-6=0$ است.
- ریشه‌های معادلهٔ $cx^2-bx+a=0$، عکس و قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ است.
- ریشه‌های معادلهٔ $-6x^2-3x+2=0$، عکس و قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+3x-6=0$ است.

ANALYSE

باید در معادلهٔ $3x^2-2x+1=0$، جای a و c را با هم عوض کرده و b را قرینه کنیم، پس معادلهٔ مورد نظر برابر است با:

معادلهٔ اولیه: $3x^2-\underbrace{2x}_{\text{قرینه}}+1=0 \Rightarrow$ معادلهٔ جدید: $1x^2+2x+3=0$

پاسخ گزینهٔ ۴

NOTE

درس دوم
سهمی

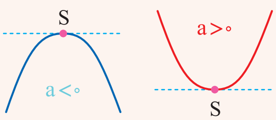
TEST 131 — **معرفی سهمی**

رأس سهمی $y=-x^2+2x+3$ کدام نقطه است و چه خاصیتی دارد؟

۱) $(1,4)$ ، ماکسیمم ۲) $(1,5)$ ، ماکسیمم ۳) $(1,4)$ ، مینیمم ۴) $(1,5)$ ، مینیمم

LILIPOOT BOX

نمودار هر رابطه به شکل $y=ax^2+bx+c$ با شرط $a\neq 0$ نشان‌دهندهٔ یک **سهمی** است، معمولاً رأس سهمی را با S نشان می‌دهند، که با توجه به علامت a به‌صورت مقابل است:

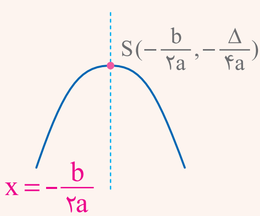


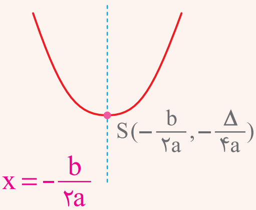
اگر $a>0$، رأس سهمی همان نقطهٔ **مینیمم** سهمی و اگر $a<0$، رأس سهمی همان نقطهٔ **ماکسیمم** سهمی است.

طول رأس سهمی $x=-\frac{b}{2a}$ که با جای‌گذاری آن در تابع $y=ax^2+bx+c$، عرض رأس سهمی به‌صورت $y=-\frac{\Delta}{4a}$ به‌دست می‌آید؛ یعنی:

$$S\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$$

محور تقارن سهمی خط $x=-\frac{b}{2a}$ است.





ANALYSE

چون ضریب x^2 منفی است، پس سهمی دارای ماکسیمم است. از طرفی طول رأس سهمی برابر است با:

$$x_{\text{رأس}}=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2(-1)}=1$$

حال با جای‌گذاری طول رأس سهمی در معادله، می‌توانیم عرض نقطهٔ رأس را به‌دست آوریم:

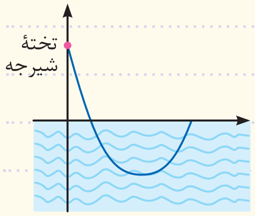
$$x_{\text{رأس}}=1\Rightarrow y_{\text{رأس}}=-(1)^2+2(1)+3=4$$

پس مختصات نقطهٔ ماکسیمم سهمی به‌صورت $(1,4)$ است.

پاسخ گزینهٔ ۱

TEST 132 مسائل کاربردی سهمی

شکل زیر مسیر حرکت یک شناگر را از لحظه‌ای که تختهٔ شیرجه را ترک می‌کند تا زمانی که دوباره به سطح آب برمی‌گردد، نشان می‌دهد. اگر معادلهٔ مسیر حرکت شناگر به‌صورت $y=x^2-8x+7$ باشد، حداکثر عمق شیرجه زدن شناگر چقدر است؟



۱) ۴

۲) ۵

۳) ۷

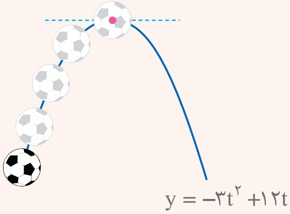
۴) ۹

LILIPOOTBOX

در بعضی از مسائل که به‌صورت کاربردی بیان می‌شوند، می‌توانیم از معادلهٔ سهمی استفاده کنیم. در این مسائل برخی نقاط از جمله رأس سهمی و محل برخورد با محورهای مختصات از اهمیت بیشتری برخوردار هستند.

علی توپی را به هوا پرتاب می‌کند. اگر معادلهٔ ارتفاع توپ در لحظهٔ t پس از پرتاب به‌صورت $y=-3t^2-12t$ باشد، برای به‌دست آوردن بیش‌ترین ارتفاع توپ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

چون ضریب t^2 منفی است، پس سهمی رو به پایین است. از طرفی بیشترین ارتفاع توپ، همان عرض رأس سهمی، یعنی $-\frac{\Delta}{4a}$ است.



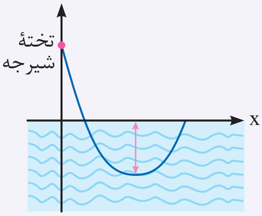
$$y=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{144-4(-3)(0)}{4(-3)}=-\frac{144}{4(-3)}=12$$

ANALYSE

حداکثر عمق شیرجه زدن، برابر با عرض رأس سهمی است، پس:

$$\text{حداکثر عمق}=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$=-\frac{(-8)^2-4(1)(7)}{4(1)}=-\frac{64-28}{4}=-\frac{36}{4}=-9$$



دقت کنید که منفی شدن جواب به خاطر این است که عدد مورد نظر بیان‌گر عمق است.

پاسخ گزینهٔ ۴

TEST 133 سهمی‌های بالا یا پایین محور xها

نمودار کدام گزینه، همواره زیر محور x قرار دارد؟

۱) $y = x^{۲} - ۲x + ۳$

۲) $y = x^{۲} + ۲x - ۳$

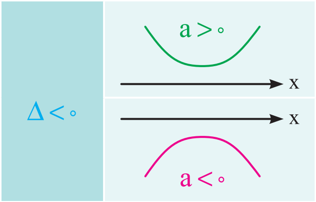
۳) $y = -x^{۲} + ۲x + ۳$

۴) $y = -x^{۲} + ۲x - ۳$

LILIPOOTBOX

در سهمی به معادلهٔ $y = ax^{۲} + bx + c$ در صورتی که $\Delta < ۰$ باشد، نمودار محور xها را قطع نخواهد کرد؛ یعنی همواره بالای محور xها یا پایین محور xها قرار خواهد گرفت که بستگی به علامت a دارد:

- اگر $a > ۰$ باشد، نمودار سهمی همواره بالای محور xها قرار دارد.
- اگر $a < ۰$ باشد، نمودار سهمی همواره پایین محور xها قرار دارد.



ANALYSE

برای این‌که نمودار پایین محور x باشد، باید ضریب $x^{۲}$ و Δ هر دو منفی باشند، چون در تابع‌های گزینه‌های (۱) و (۲) ضریب $x^{۲}$ برابر یک و مثبت است، نمی‌توانند پایین محور x قرار گیرند.

حال بررسی می‌کنیم Δ در کدام یک از گزینه‌های (۳) و (۴) منفی است:

- گزینهٔ (۳): $y = -x^{۲} + ۲x + ۳ \xrightarrow{\Delta = b^{۲} - ۴ac} \Delta = (۲)^{۲} - ۴(-۱)(۳) = ۴ + ۱۲ = ۱۶ > ۰$
- گزینهٔ (۴): $y = -x^{۲} + ۲x - ۳ \xrightarrow{\Delta = b^{۲} - ۴ac} \Delta = (۲)^{۲} - ۴(-۱)(-۳) = ۴ - ۱۲ = -۸ < ۰$

پاسخ گزینهٔ ۴

NOTE

TEST 134 نمودار سهمی‌های مماس بر محور xها

به‌ازای کدام مقدار m نمودار سهمی $y=(m-3)x^2+6x+m+3$ بالای محور x و مماس بر آن است؟

۱) $3\sqrt{2}$

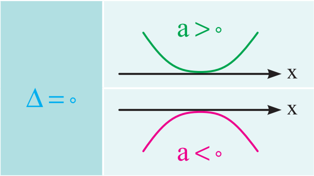
۲) $2\sqrt{3}$

۳) $5\sqrt{2}$

۴) $2\sqrt{5}$

LILIPOOTBOX

در سهمی به معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ ، در صورتی که $\Delta=0$ باشد، معادله دارای ریشهٔ مضاعف بوده و نمودار سهمی در این ریشه بر محور xها مماس است و جهت باز شدن دهانهٔ سهمی بستگی به علامت a دارد.



اگر $a>0$ باشد، دهانهٔ سهمی رو به بالا باز می‌شود.

اگر $a<0$ باشد، دهانهٔ سهمی رو به پایین باز می‌شود.

ANALYSE

برای این‌که نمودار بالای محور x و مماس بر آن باشد، باید ضریب x^2 مثبت و Δ برابر صفر باشد:

$$\begin{cases} a>0 \Rightarrow (m-3)>0 \Rightarrow m>3 \\ \Delta=0 \xrightarrow{\Delta=b^2-4ac} (6)^2-4(m-3)(m+3)=0 \\ \Rightarrow 36-4(m^2-9)=0 \xrightarrow{\div 4} 9-(m^2-9)=0 \Rightarrow 9-m^2+9=0 \\ \Rightarrow m^2=18 \Rightarrow m=\pm 3\sqrt{2} \end{cases}$$

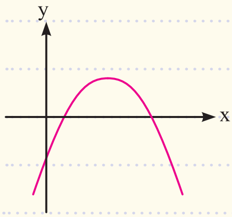
چون $m>3$ ، پس $m=3\sqrt{2}$ قابل قبول است.

پاسخ گزینهٔ ۱

NOTE

TEST 135 — تعیین علامت ضرایب به کمک نمودار

نمودار زیر مربوط به سهمی $y=ax^2+bx+c$ است. علامت a، b، c و Δ به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟



۱) منفی ، مثبت ، منفی ، منفی

۲) منفی ، مثبت ، منفی ، مثبت

۳) منفی ، منفی ، مثبت ، منفی

۴) مثبت ، مثبت ، منفی ، مثبت

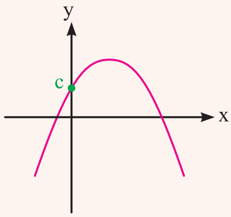
LILIPOOTBOX

برای تشخیص علامت a ، b ، c و Δ در سهمی $y=ax^2+bx+c$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

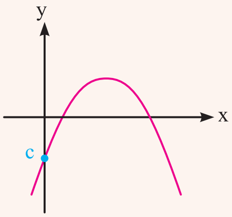
علامت a بستگی به جهت باز شدن دهانهٔ سهمی دارد:

$a>0$ $a<0$

علامت c بستگی به محل برخورد نمودار با محور yها دارد:

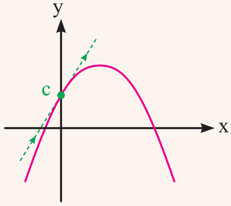


$c>0$

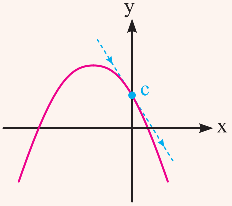


$c<0$

علامت b بستگی به شیب نمودار در نقطهٔ $(0,c)$ دارد:

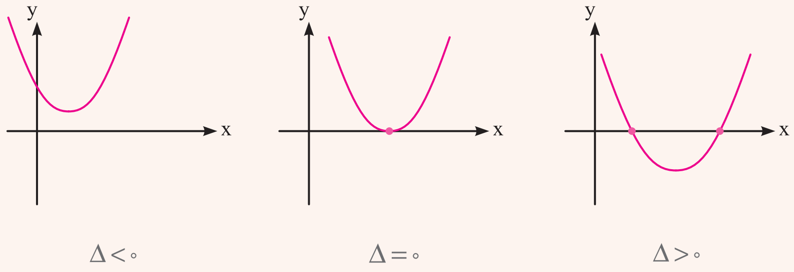


شیب در نقطهٔ $(0,c)$ $>0 \Rightarrow b>0$



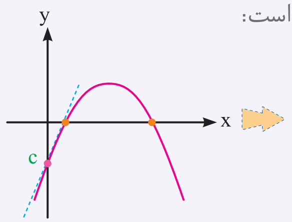
شیب در نقطهٔ $(0,c)$ $<0 \Rightarrow b<0$

علامت Δ بستگی به تعداد نقاط برخورد نمودار با محور x ها دارد:



ANALYSE

با توجه به نمودار داده شده، علامت a ، b ، c و Δ به‌صورت زیر است:



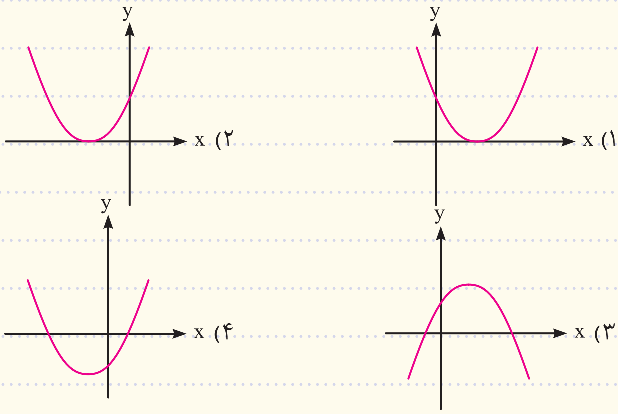
- دهانهٔ سهمی رو به پایین باز شده است، پس: $a<0$
- محل برخورد با محور yها منفی است، پس: $c<0$
- شیب نمودار در نقطهٔ $(0,c)$ مثبت است، پس: $b>0$
- سهمی محور xها را در دو نقطه قطع کرده است. پس: $\Delta>0$

پاسخ گزینهٔ ۲

NOTE

136 TEST رسم نمودار سهمی

نمودار سهمی با ضابطهٔ $y=۳x^۲+x-\frac{۳}{۴}$ کدام است؟



LILIPOOTBOX

برای رسم نمودار یک سهمی به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

- ابتدا با یافتن مقدار Δ تعداد نقاط برخورد سهمی با محور xها را مشخص می‌کنیم.
- سپس رأس سهمی را پیدا می‌کنیم تا موقعیت آن در دستگاه مختصات مشخص شود.
- در انتها از روی علامت a (جهت باز شدن دهانهٔ سهمی) و علامت c (محل برخورد نمودار سهمی با محور yها) نمودار را دقیق رسم می‌کنیم.

ANALYSE

ابتدا Δ را محاسبه می‌کنیم تا تعداد نقاط برخورد منحنی با محور xها مشخص شود:

$$y=۳x^۲+x-\frac{۳}{۴}\xrightarrow{\Delta=b^۲-۴ac}\Delta=(۱)^۲-۴(۳)(-\frac{۳}{۴})=۱+۹=۱۰$$

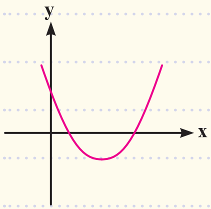
پس نمودار محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) حذف می‌شوند.

حال چون ضریب $x^۲$ مثبت است، پس دهانهٔ سهمی رو به بالا باز می‌شود، بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

پاسخ گزینهٔ ۴

TEST 137 نوشتن ضابطهٔ سهمی از روی نمودار (I)

معادلهٔ سهمی داده شده به کدام صورت است؟



۱) $y=-x^۲+۲x+۳$

۲) $y=x^۲-۲x+۴$

۳) $y=x^۲-۳x+۱$

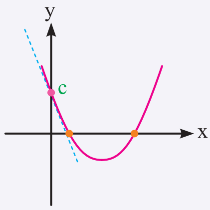
۴) $y=x^۲+۳x+۱$

LILIPOOTBOX

اگر نمودار یک سهمی را داشته باشیم و بخواهیم ضابطهٔ آن را مشخص کنیم، فرض می‌کنیم که ضابطهٔ سهمی به‌صورت $y=ax^۲+bx+c$ باشد، در این صورت:

- اگر دهانهٔ سهمی رو به بالا باشد، $a>۰$ و اگر رو به پایین باشد، $a<۰$ است.
- اگر محل برخورد نمودار با محور yها بالای محور xها باشد، $c>۰$ و اگر پایین محور xها باشد، $c<۰$ است.
- اگر شیب خط مماس بر نمودار در نقطهٔ $(۰,c)$ مثبت باشد، $b>۰$ و اگر منفی باشد، $b<۰$ است.
- اگر نمودار سهمی محور x را قطع نکند، $\Delta<۰$، اگر بر محور x مماس باشد، $\Delta=۰$ و اگر محور x را در دو نقطه قطع کند، $\Delta>۰$ خواهد بود.

ANALYSE



- دهانهٔ سهمی رو به بالا است، در نتیجه $a>۰$ پس گزینهٔ (۱) نادرست است.
- محل برخورد با محور yها مثبت است، در نتیجه $c>۰$.
- شیب در نقطهٔ $(۰,c)$ منفی است، در نتیجه $b<۰$ و گزینهٔ (۴) نادرست است.
- سهمی محور xها را در دو نقطه قطع کرده است، در نتیجه $\Delta>۰$.

حال باید بررسی کنیم در کدام‌یک از گزینه‌های (۲) و (۳)، Δ مثبت است:

- گزینهٔ (۲):

$$y=x^۲-۲x+۴ \xrightarrow{\Delta=b^۲-۴ac} \Delta=(-۲)^۲-۴(۱)(۴)=۴-۱۶=-۱۲<۰ \quad ✘$$

- گزینهٔ (۳):

$$y=x^۲-۳x+۱ \xrightarrow{\Delta=b^۲-۴ac} \Delta=(-۳)^۲-۴(۱)(۱)=۹-۴=۵>۰ \quad ✓$$

پاسخ گزینهٔ ۳