

درسنامه ۳

بخش‌پذیری در اعداد صحیح^۱

شمارنده

قرار دادن تعدادی شیء در دسته‌های مساوی یا دسته‌بندی کردن تعدادی شیء بدون آن‌که باقی‌مانده‌ای داشته باشد، «عاد کردن» یا شمارش آن اشیاء توسط شمارنده‌ها می‌نامیم. به عنوان مثال ۱۸ شیء را می‌توان توسط شمارنده‌های ۱۸ یعنی ۱، ۲، ۳، ۶، ۹ و ۱۸ شمارش کرد. برای نمایش این مفهوم از نماد «|» به معنی عاد کردن یا همان شمردن استفاده می‌کنیم. به طوری که می‌نویسیم $۱۸|۳$ و می‌خوانیم:

(آ) ۳ می‌شمارد عدد ۱۸ را

(ب) ۳ عاد می‌کند عدد ۱۸ را

(پ) عدد ۱۸ بر ۳ بخش‌پذیر است. (باقی‌مانده تقسیم صفر است.)

عاد کردن

عدد صحیح a که مخالف صفر است، شمارنده عدد b است (یا a, b را می‌شمارد یا b بر a بخش‌پذیر است یا $a|b$)، هرگاه عدد صحیحی چون q وجود داشته باشد به طوری که $b = aq$. (اگر b بر a بخش‌پذیر نباشد یا عدد a عدد b را عاد نکند، آن را به صورت $a \nmid b$ نمایش می‌دهیم.)
قرارداد: چون بی‌شمار عدد صحیح مانند q وجود دارد که در $0 = 0 \times q$ صدق می‌کند، به معنی آن است که صفر عدد صفر را می‌شمارد و این به صورت یک قرارداد پذیرفته می‌شود.

نکته

اگر a عددی طبیعی باشد، داریم $a|a$ و $۱|a$ یعنی هر عدد بر خودش و عدد ۱ بخش‌پذیر است، مانند:

$$۱|۷ \xleftarrow{(q=۷)} ۷ = ۱ \times ۷, \quad ۵|۵ \xleftarrow{(q=۱)} ۵ = ۵ \times ۱$$

مثال

با توجه به تعریف رابطه عاد کردن، دلیل درستی رابطه‌های زیر را بیان کنید.

(ت) $۵ \nmid ۱۷$

(پ) $۴|-۳۲$

(ب) $-۳|۳۹$

(آ) $۵|۴۵$

پاسخ:

(ب) $-۳|۳۹ \xleftarrow{q=-۱۳} ۳۹ = (-۳) \times (-۱۳)$

(آ) $۵|۴۵ \xleftarrow{q=۹} ۴۵ = ۵ \times ۹$

(ت) $۵ \nmid ۱۷ \Rightarrow \frac{۱۷}{۵} \notin \mathbb{Z}$

(پ) $۴|-۳۲ \xleftarrow{q=-۸} -۳۲ = ۴ \times (-۸)$

خواص و ویژگی‌های رابطه عاد کردن

$$a|1 \Rightarrow a = \pm 1$$

(۱) اگر a عاد کند عدد ۱ را آن‌گاه $a = 1$ یا $a = -1$

(۲) برای هر عدد طبیعی m و n که n بزرگ‌تر یا مساوی m باشد، داریم $a^m | a^n$

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n \Rightarrow a^m | a^n$$

مثال: $۲^۴ | ۲^۹ \xrightarrow{q=۲^۵} ۲^۹ = ۲^۴ \times ۲^۵$

(۳) اگر عدد a عدد b را بشمارد، آن‌گاه هر مضرب عدد b را نیز می‌شمارد، یعنی:

$$a|b \Rightarrow a|mb$$

مثال: $۷|۱۴ \Rightarrow ۷|۱۴ \times ۵, ۷|۱۴ \times (-۳), ۷|۱۴ \times ۱۲$

(۴) اگر a عدد b را بشمارد، آن‌گاه b^n را می‌شمارد و در حالت کلی $b^n, (n \in \mathbb{N})$ را می‌شمارد.

$$a|b \Rightarrow a|b^2, \quad a|b \Rightarrow a|b^n$$

مثال: $۳|۶ \Rightarrow ۳|۶^2, \quad ۳|۶ \Rightarrow ۳|۶^n$

۱- تا پایان این فصل، منظور از عدد، عدد صحیح است.

درسنامه ۳

۵) اگر عدد a ، عدد b را بشمارد و b نیز c را بشمارد، آن‌گاه a ، عدد c را می‌شمارد. این خاصیت را خاصیت تعدی برای رابطهٔ عاد کردن می‌نامیم.

$$a | b \wedge b | c \Rightarrow a | c$$

مثال: $3 | 9 \wedge 9 | 18 \Rightarrow 3 | 18$

۶) هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آن‌گاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$a | b \wedge a | c \Rightarrow a | b \pm c$$

مثال: $7 | 14 \wedge 7 | 21 \Rightarrow \begin{cases} 7 | 14 + 21 \Rightarrow 7 | 35 \\ 7 | 14 - 21 \Rightarrow 7 | -7 \end{cases}$

۷) اگر $a | b$ و $b \neq 0$ در این صورت $|a| \leq |b|$

$$a | b \wedge b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|$$

از این خاصیت می‌توان نتیجه گرفت که اگر $a | b$ و $b | a$ ، آن‌گاه $a = \pm b$

مثال: $5 | 25 \Rightarrow |5| \leq |25| \Rightarrow 5 \leq 25$ ، $-5 | 25 \Rightarrow |-5| \leq |25| \Rightarrow 5 \leq 25$ ، $-5 | -25 \Rightarrow |-5| \leq |-25| \Rightarrow 5 \leq 25$

۸) اگر $a | b$ ، آن‌گاه داریم $a^n | b^n$

$$a | b \Rightarrow a^n | b^n$$

مثال: $3 | -6 \Rightarrow \begin{cases} 3^2 | (-6)^2 \Rightarrow 9 | 36 \\ 3^3 | (-6)^3 \Rightarrow 27 | -216 \end{cases}$

۹) اگر $a | b$ و $c | d$ ، آن‌گاه داریم $ac | bd$

(دو طرف بخش پذیری را می‌توان در هم ضرب کرد.)

$$a | b \wedge c | d \Rightarrow ac | bd$$

مثال: $4 | 12$ ، $5 | 15 \Rightarrow 4 \times 5 | 12 \times 15 \Rightarrow 20 | 180$

۱۰) اگر $a | b$ و $a | c$ ، آن‌گاه $a | mb \pm nc$ (m و n اعداد صحیح‌اند.)

$$a | b \wedge a | c \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} a | mb \pm nc, (n, m \in \mathbb{Z})$$

مثال: $2 | 6$ ، $2 | 4 \xrightarrow{n=5, m=3} \begin{cases} 2 | 3 \times 6 + 5 \times 4 \Rightarrow 2 | 18 + 20 \Rightarrow 2 | 38 \\ 2 | 3 \times 6 - 5 \times 4 \Rightarrow 2 | 18 - 20 \Rightarrow 2 | -2 \end{cases}$

مثال از رابطهٔ $5n^2 - 8n + 4 | 1$ چند مقدار طبیعی برای n به دست می‌آید؟

پاسخ: با توجه به ویژگی شمارهٔ یک داریم:

$$5n^2 - 8n + 4 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} 5n^2 - 8n + 4 = +1 \\ 5n^2 - 8n + 4 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5n^2 - 8n + 3 = 0 \xrightarrow{\Delta = 64 - 4(5)(3) = 4} n_1 = 1, n_2 = \frac{3}{5} \notin \mathbb{N} \text{ (غرق)} \\ 5n^2 - 8n + 5 = 0 \xrightarrow{\Delta = 64 - 4(5)(5) = -36} \Delta = -36 < 0 \end{cases}$$

بنابراین فقط یک مقدار عدد طبیعی یعنی $n = 1$ به دست می‌آید.

عدد اول

هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ که هیچ شمارندهٔ مثبتی به جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود. این مجموعه که مجموعه‌ای نامتناهی است، به صورت $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ نمایش داده می‌شود.

نکته

اگر p عددی اول و a عددی طبیعی باشد و $a | p$ ، در این صورت $a = 1$ یا $a = p$

درسنامه ۳

مثال

اگر a عددی طبیعی باشد و دو عدد $(7k+8)$ و $(6k+5)$ را عا کند، ثابت کنید $a=1$ یا $a=13$

پاسخ:

$$\left. \begin{array}{l} a \mid 7k+8 \xrightarrow{(\times 6)} a \mid 6(7k+8) \Rightarrow a \mid 42k+48 \\ a \mid 6k+5 \xrightarrow{(\times 7)} a \mid 7(6k+5) \Rightarrow a \mid 42k+35 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ترکیب خطی} \\ \text{ویژگی ۱} \end{array} \rightarrow a \mid (42k+48) - (42k+35)$$

$$\Rightarrow a \mid 42k+48-42k-35 \Rightarrow a \mid 13 \xrightarrow{\text{۱۳ عددی اول است.}} a=13 \text{ یا } a=1$$

سؤالات امتحانی

۶۵. در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

(آ) اگر $a \mid 1$ آن گاه a برابر یا است.

(ب) اگر p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و $a \mid p$ ، در این صورت a برابر یا است.

(پ) اگر $a \mid b$ و $a \mid a$ ، آن گاه a برابر یا است.

(ت) اگر $a \mid b$ و، آن گاه $ac \mid bd$

(ث) اگر $a \mid a$ ، آن گاه a برابر است.

۶۶. درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را با دلیل بیان کنید.

(آ) اگر $a \mid 17$ ، آن گاه $a \mid 51$ (ب) اگر $a \mid 24$ ، آن گاه $a \mid 6$ یا $a \mid 8$

(پ) اگر $a \mid 19$ ، آن گاه $a \mid 76$ (ت) اگر $a \mid 3$ ، آن گاه $a \mid 243$

(ث) از این که $a \mid b+c$ ، همواره می توان نتیجه گرفت که $a \mid c$ یا $a \mid b$

۶۷. اگر فرض کنیم $ab=cd$ (a, b, c, d اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت سه رابطه عا کردن را از این تساوی نتیجه بگیرید.

(مشابه تمرین ۱ صفحه ۱۶ کتاب درسی)

۶۸. از رابطه $4n^2 - 7n + 4 \mid 1$ چند مقدار طبیعی برای n به دست می آید؟

(تمرین ۲ صفحه ۱۶ کتاب درسی)

۶۹. اگر $a \mid b$ ثابت کنید $a \mid -b$ ، $a \mid b$ و $-a \mid -b$

۷۰. ثابت کنید اگر a عدد b را بشمارد، آن گاه b^2 را می شمارد و در حالت کلی b^n ($n \in \mathbb{N}$) را می شمارد.

(آ) $a \mid b \Rightarrow a \mid b^2$ (ب) $a \mid b \Rightarrow a \mid b^n$

۷۱. در صورت درست بودن عبارتهای زیر، آن را ثابت کنید و در صورت نادرست بودن، یک مثال نقض برای آن ها بیاورید.

(آ) آیا از این که $a \mid bc$ می توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b و c را عا می کند؟ چرا؟

(ب) آیا از این که $a \mid b$ و $c \mid d$ همواره می توان نتیجه گرفت که $a+c \mid b+d$ ؟ چرا؟

۷۲. آیا از این که $a \mid b$ می توان نتیجه گرفت $ka \mid kb$ ؟ آیا از $ka \mid kb$ می توان نتیجه گرفت $a \mid b$ ($k \neq 0$)؟

۷۳. ثابت کنید اگر عدد a ، عدد b را بشمارد و b نیز c را بشمارد، آن گاه a ، عدد c را می شمارد. $(a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c)$

۷۴. ثابت کنید هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آن‌گاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.
 $(a | b \wedge a | c \Rightarrow a | b \pm c)$
- آیا عکس این مطلب درست است؟
 $(a | b \pm c \Rightarrow a | b, a | c)$
۷۵. ثابت کنید اگر $a | b$ و $b \neq 0$ در این صورت $|a| \leq |b|$ ($a, b \in \mathbb{Z}$)
۷۶. ثابت کنید اگر $a | b$ و $b | a$ ، آن‌گاه $a = \pm b$
۷۷. اگر $a | b$ ، نشان دهید $a^n | b^n$
 (تمرین ۲ کار در کلاس صفحه ۱۲ کتاب درسی)
۷۸. اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(6m + 5)$ و $(5m + 4)$ بر a بخش پذیر باشند، ثابت کنید $a = \pm 1$ (مشابه کار در کلاس صفحه ۱۱ کتاب درسی)
۷۹. اعداد طبیعی کوچک‌تر از 70 که به صورت $2n + 2$ و $3n - 3$ بوده و نسبت به هم اول نیستند را به دست آورید.
 (مشابه تمرین ۳ صفحه ۱۶ کتاب درسی)
۸۰. اگر $a > 1$ و $a | 4k + 5$ و $a | 7k + 6$ ، ثابت کنید a عددی اول است.
 (مشابه تمرین ۴ صفحه ۱۶ کتاب درسی)
۸۱. اگر k ای در \mathbb{Z} باشد که داشته باشیم $4k + 2$ ، 5 ، ثابت کنید $14 + 36k + 25$
 (تمرین ۸ صفحه ۱۶ کتاب درسی)
۸۲. اگر $m \cdot n \in \mathbb{Z}$ و $a \cdot b \in \mathbb{Z}$ در این صورت ثابت کنید:
 $m \leq n, a | b \Rightarrow a^m | b^n$
۸۳. اگر $a | b$ و $c | d$ ثابت کنید $ac | bd$
۸۴. اگر $a | b$ و $a | c$ نشان دهید که $a | mb \pm nc$
۸۵. ابتدا نشان دهید که $3 + 10!$ بر 3 بخش پذیر است و سپس 9 عدد طبیعی متوالی بیابید که هیچ‌کدام اول نباشند؟
 (تمرین ۸ صفحه ۱۶ کتاب درسی)

پاسخ‌های تشریحی

۶۸

$$\begin{aligned} 2n^2 - 7n + 4 | 1 &\Rightarrow 2n^2 - 7n + 4 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} 2n^2 - 7n + 4 = +1 \\ 2n^2 - 7n + 4 = -1 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} 2n^2 - 7n + 3 = 0 & \Delta = 49 - 4(2)(3) = 25 \\ 2n^2 - 7n + 5 = 0 & \Delta = 49 - 4(2)(5) = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} n_1 = \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3, n_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N} \text{ (غقوق)} \\ n_1 = \frac{7+3}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \notin \mathbb{N} \text{ (غقوق)}, n_2 = \frac{7-3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین دو عدد طبیعی $n = 3$ و $n = 1$ به دست می‌آید.

۶۹ با توجه به فرض آن‌که $a | b$ ، داریم: ($q \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} a | b &\Rightarrow b = aq \xrightarrow{\times(-1)} -b = a(-q) \Rightarrow -b = aq' \Rightarrow a | -b \\ a | b &\Rightarrow b = aq \longrightarrow b = (-a)(-q) \Rightarrow b = (-a)q' \Rightarrow -a | b \\ a | b &\Rightarrow b = aq \xrightarrow{\times(-1)} -b = (-a)(q) \Rightarrow -a | -b \end{aligned}$$

۷۰ (آ)

$$\begin{aligned} a | b &\Rightarrow a | mb \xrightarrow{m=b} a | b \times b \Rightarrow a | b^2 \\ a | b &\Rightarrow a | mb \xrightarrow{m=b^{n-1}} a | b^{n-1} \times b \Rightarrow a | b^n \end{aligned}$$

(ب) روش اول: $a | b^n$

روش دوم:
 $a | b \Rightarrow a | b \wedge a | b^n \xrightarrow{\text{خاصیت تعدی}} a | b^n$
 خاصیت $a | b$ طبق فرض
 خاصیت $b | b^n$ (۱)

۶۵ (آ) اگر $a | 1$ آن‌گاه a برابر $+1$ یا -1 است.
 (ب) اگر p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و $a | p$ ، در این صورت برابر 1 یا p است.
 (پ) اگر $a | b$ و $a | a$ ، آن‌گاه a برابر $+b$ یا $-b$ است.
 (ت) اگر $a | b$ و $c | d$ ، آن‌گاه $ac | bd$
 (ث) اگر $a | 0$ ، آن‌گاه a برابر صفر است.

۶۶ (آ) درست است، زیرا اگر a ، 17 را عادت کند، هر مضربی از 17 را عادت می‌کند:
 $a | 17 \Rightarrow a | 3 \times 17 \Rightarrow a | 51$
 (ب) نادرست است، زیرا به عنوان مثال اگر $a = 12$ ، آن‌گاه $12 | 24$ ولی هیچ‌یک از دو رابطه $12 | 8$ و $12 | 6$ درست نیست.
 (پ) درست است، زیرا می‌توانیم طرفین رابطه عادت کردن را در یک عدد صحیح ضرب کنیم:
 $a | 19 \Rightarrow 4a | 4 \times 19 \Rightarrow 4a | 76$
 (ت) درست است، زیرا اگر $a | b$ و $b | b^n$ ، آن‌گاه $a | b^n$
 $a | 3, 3 | 3^5 \Rightarrow a | 3^5 \Rightarrow a | 243$
 (ث) نادرست است، زیرا:
 $10 | 6 + 14 \Rightarrow 10 | 6$ و $10 | 14$

۶۷ هر یک از a, b, c و d را می‌توانیم به جای q در نظر بگیریم:

- ۱) $ab = cd \xrightarrow{d=q} ab = cq \Rightarrow c | ab$
- ۲) $ab = cd \xrightarrow{c=q} ab = qd \Rightarrow d | ab$
- ۳) $ab = cd \xrightarrow{b=q} aq = cd \Rightarrow a | cd$

چون n یک عدد طبیعی است، k باید فرد باشد.

$$\Rightarrow 2n = 19k + 3 \Rightarrow n = \frac{19k + 3}{2}$$

$$\frac{\text{فرد } k=2k'+1}{k' \in \mathbb{Z}} \Rightarrow n = \frac{19(2k'+1) + 3}{2} \Rightarrow n = \frac{38k' + 22}{2}$$

$$\Rightarrow n = 19k' + 11 \Rightarrow \begin{cases} k' = 0 \Rightarrow n = 11 \\ k' = 1 \Rightarrow n = 30 \\ k' = 2 \Rightarrow n = 49 \\ k' = 3 \Rightarrow n = 68 \end{cases}$$

۸۰

$$\begin{cases} a | 4k + 5 \\ a | 7k + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a | 7(4k + 5) \\ a | 4(7k + 6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a | 28k + 35 \\ a | 28k + 24 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} a | (28k + 35) - (28k + 24) \Rightarrow a | 28k + 35 - 28k - 24$$

$$\Rightarrow a | 11 \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 11 \\ a = \pm 1 \end{cases} \xrightarrow{(a > 1)} a = 11 \Rightarrow a = 11 \text{ عددی اول است.}$$

۸۱ با توجه به فرض مسئله $5 | 4k + 2$ طبق ویژگی عادی کردن $(a | b \Rightarrow a^n | b^n)$ داریم:

$$5 | 4k + 2 \Rightarrow 5^2 | (4k + 2)^2 \Rightarrow 25 | 16k^2 + 16k + 4 \quad (1)$$

از طرفی داریم:

$$5 | 4k + 2 \Rightarrow 4k + 2 = 5q \xrightarrow{\times 5} 5(4k + 2) = 25q$$

$$\Rightarrow 20k + 10 = 25q \Rightarrow 25 | 20k + 10 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب خطی (۱) و (۲)}} 25 | 16k^2 + 16k + 4 + 20k + 10$$

$$\Rightarrow 25 | 16k^2 + 36k + 14$$

۸۲ طبق ویژگی عادی کردن داریم:

$$a | b \Rightarrow a^m | b^m \quad (1)$$

از طرفی داریم:

$$(m \leq n) \Rightarrow b^n = b^m \times \underbrace{b^{n-m}}_q \Rightarrow b^n = b^m q \Rightarrow b^m | b^n \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2) \cdot (1)} a^m | b^m, b^m | b^n \Rightarrow a^m | b^n$$

۸۳

$$\begin{cases} a | b \Rightarrow b = aq_1 \\ c | d \Rightarrow d = cq_2 \end{cases} \Rightarrow b \times d = (aq_1) \times (cq_2)$$

$$\Rightarrow b \times d = (a \times c) \underbrace{(q_1 \times q_2)}_q \Rightarrow b \times d = (a \times c)q \Rightarrow ac | bd$$

۸۴

$$\begin{cases} a | b \xrightarrow{\text{ویژگی (۲)}} a | mb \\ a | c \xrightarrow{\text{ویژگی (۳)}} a | \pm nc \end{cases} \xrightarrow{\text{ترکیب خطی (ویژگی (۶))}} a | mb \pm nc$$

۷۱ (آ) خیر $12 | 24 \Rightarrow 12 | 3 \times 8, 12 | 3, 12 | 8$ مثال نقض
(ب) خیر $2 | 4, 9 | 9 \Rightarrow 11 | 13$ مثال نقض

$$a | b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{\text{در } k \text{ ضرب}} kb = kaq \Rightarrow ka | kb \quad 72$$

$$ka | kb \Rightarrow kb = kaq \xrightarrow{\text{بر } k \text{ تقسیم}} b = aq \Rightarrow a | b$$

۷۳ برای اثبات این خاصیت که به خاصیت تعدی برای رابطه عادی کردن معروف است به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a | b \Rightarrow b = aq \quad (1) \\ b | c \Rightarrow c = bq' \end{cases} \Rightarrow c = bq' \xrightarrow{(1)} c = (aq)q'$$

$$\Rightarrow c = a \underbrace{qq'}_{q''} \Rightarrow c = aq'' \Rightarrow a | c$$

۷۴

$$\begin{cases} a | b \Rightarrow b = aq \\ a | c \Rightarrow c = aq' \end{cases} \xrightarrow{\text{طرفین تساوی را جمع و تفریق می‌کنیم.}} b \pm c = aq \pm aq'$$

$$\Rightarrow b \pm c = a \underbrace{(q \pm q')}_{q''} \Rightarrow a | b \pm c$$

عکس این مطلب برقرار نیست زیرا: $6 | 6 \Rightarrow 6 | 4 + 2 \Rightarrow 6 | 4$ و $6 | 2$ و $6 | 6 \Rightarrow 6 | 8 - 2 \Rightarrow 6 | 8$ و $6 | 2$

۷۵ چون $a | b$ پس $b = aq$ و چون $b \neq 0$ پس $q \neq 0$ و چون $q \in \mathbb{Z}$ لذا $|q| \geq 1$. حال اگر طرفین نامساوی اخیر را در $|a|$ ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$1 \leq |q| \Rightarrow |a| \times 1 \leq |a| |q| \Rightarrow |a| \leq |aq| \xrightarrow{b=aq} |a| \leq |b|$$

۷۶

$$\begin{cases} a | b \xrightarrow{\text{خاصیت (۷)}} |a| \leq |b| \\ b | a \xrightarrow{\text{خاصیت (۷)}} |b| \leq |a| \end{cases} \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$$

۷۷

$$a | b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b^n = a^n q^n \xrightarrow{q^n = q'} b^n = a^n q' \Rightarrow a^n | b^n$$

۷۸

$$\begin{cases} a | 6m + 5 \Rightarrow a | 30m + 25 \\ a | 5m + 4 \Rightarrow a | 30m + 24 \end{cases} \Rightarrow a | (30m + 25) - (30m + 24)$$

$$\Rightarrow a | 30m + 25 - 30m - 24 \Rightarrow a | 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

۷۹

$$\begin{cases} d | 5n + 2 \\ d | 2n - 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} d | 2(5n + 2) - 5(2n - 3)$$

$$\Rightarrow d | 10n + 4 - 10n + 15 \Rightarrow d | 19$$

$d = 19$ را در یکی از عادی کردن‌های $d | 2n - 3$ یا $d | 5n + 2$ قرار می‌دهیم.

$$d = 19 \Rightarrow 19 | 2n - 3 \Rightarrow 2n - 3 = 19k$$

روش دوم:

$$\begin{cases} 3 | 10! \\ 3 | 3 \end{cases} \Rightarrow 3 | 10! + 3$$

پس $10! + 3$ بر 3 بخش پذیر است.
 عدد $10! + 2$ عددی غیراول است و همین طور عدد $10! + 3$ عددی غیراول است و تا عدد $10! + 10$ نیز غیراول می باشد. بنابراین با توجه به این که اعداد $(10! + 2)$ ، $(10! + 3)$ ، ... و $(10! + 10)$ ، 9 عدد طبیعی متوالی اند که هیچ کدام اول نیستند.

۸۵ برای آن که نشان دهیم $10! + 3$ بر 3 بخش پذیر است به دو روش زیر می توانیم این کار را انجام دهیم:
 روش اول:

$$\begin{aligned} 10! + 3 &= 10 \times 9 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 + 3 \\ &\stackrel{\text{فاکتورگیری}}{=} 3 \underbrace{(10 \times 9 \times \dots \times 4 \times 2 \times 1 + 1)}_q \\ &\Rightarrow 10! + 3 = 3q \Rightarrow 3 | 10! + 3 \end{aligned}$$

پس $10! + 3$ بر 3 بخش پذیر است.

درسنامه ۴

مقسوم علیه مشترک

مقسوم علیه مشترک

مقسوم علیه همان شمارنده است، اگر بنویسیم $a | b$ یعنی a شمارنده b است یا b بر a بخش پذیر است و این یعنی a مقسوم علیه b است. هم چنین می گوئیم b مضرب a است یعنی $b = aq$ یا $a | b$ به عنوان مثال؛ وقتی می نویسیم $7 | 28$ عبارت های زیر از آن استنتاج می شود:
 (۱) 7 شمارنده 28 است. (۲) 28 بر 7 بخش پذیر است.
 (۳) 7 مقسوم علیه 28 است. (۴) 28 مضرب 7 است، یعنی $28 = 7 \times 4$
 مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح a و b : عدد صحیح c را یک مقسوم علیه مشترک a و b می گوئیم هرگاه $c | a$ و $c | b$

مثال مقسوم علیه های مشترک مثبت دو عدد 18 و 12 را به دست آورید.

پاسخ:

$$\begin{aligned} \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} &= \text{مقسوم علیه های مثبت } 18 \\ \{1, 2, 3, 6\} &= \text{مقسوم علیه های مشترک دو عدد } 18 \text{ و } 12 \Rightarrow \\ \{1, 2, 3, 6, 12\} &= \text{مقسوم علیه های مثبت } 12 \end{aligned}$$

مثال اگر n عدد طبیعی و دو عدد $n - 5$ و $8n + 1$ دارای مقسوم علیه مشترک غیر از 1 باشند، اعداد دو رقمی n را به دست آورید.

پاسخ:

$$\begin{aligned} \begin{cases} d | 8n + 1 \\ d | n - 5 \end{cases} &\xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} d | 8n + 1 - 8(n - 5) \Rightarrow d | 8n + 1 - 8n + 40 \Rightarrow d | 41 \Rightarrow d = 1 \text{ (غ ق ق)} \text{ یا } d = 41 \\ \Rightarrow \begin{cases} 41 | n - 5 \Rightarrow n - 5 = 41k \Rightarrow n = 41k + 5 \\ 41 | 8n + 1 \end{cases} &\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} k = 0 \Rightarrow n = 5 \text{ (غیر قابل قبول)} \\ k = 1 \Rightarrow n = 46 \\ k = 2 \Rightarrow n = 87 \end{cases} \Rightarrow \text{جواب ها} \end{aligned}$$

بم (بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک)

تعریف: عدد طبیعی d را بم دو عدد صحیح a و b می گوئیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند). هرگاه دو شرط (آ) و (ب) برقرار باشند؛ می نویسیم $(a, b) = d$

$$\bar{a} \bar{d} | a, \bar{d} | b \quad \text{ب) } \forall m > 0, m | a, m | b \Rightarrow m \leq d$$

شرط (آ) مقسوم علیه مشترک بودن d را مشخص می کند و شرط (ب) نشان می دهد که d از هر مقسوم علیه مشترک دلخواه دیگری چون m ، بزرگ تر است.

۴ در ستاره

قضیه تقسیم: اگر عددی صحیح b عددی طبیعی باشد، در این صورت (با تقسیم a بر b) اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می‌شوند، به قسمی که $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$ (در یک تقسیم وقتی a را بر b تقسیم می‌کنیم، a را مقسوم، b را مقسوم‌علیه، q را خارج‌قسمت و r را باقی‌مانده می‌نامیم).

مثال

در معادله‌های زیر مقدار باقی‌مانده را به دست آورید.

(آ) $a = 11q + 39$ (ب) $a = 8q - 5$

پاسخ: در قضیه تقسیم، برای باقی‌مانده باید رابطه $0 \leq r < b$ را داشته باشیم:

(آ) باقی‌مانده $a = 11q + 39 \Rightarrow a = 11q + 33 + 6 \Rightarrow a = 11(q+3) + 6 \Rightarrow a = 11q' + 6 \Rightarrow r = 6$

(ب) در قضیه تقسیم، باقی‌مانده باید مثبت باشد.

باقی‌مانده $a = 8q - 5 \Rightarrow a = 8q - 8 + 3 \Rightarrow a = 8(q-1) + 3 \Rightarrow a = 8q'' + 3 \Rightarrow r = 3$

مثال

اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر 14 به ترتیب 6 و 4 باشند، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $3m - 5n$ را بر 14 به دست آورید.

پاسخ: طبق قضیه تقسیم و فرض‌های مسئله داریم:

$$\begin{cases} m = 14q_1 + 6 \\ n = 14q_2 + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m = 3 \times 14q_1 + 18 \\ 5n = 5 \times 14q_2 + 20 \end{cases}$$

باقی‌مانده $\Rightarrow 3m - 5n = 14(3q_1 - 5q_2) + 18 - 20 = 14(\underbrace{3q_1 - 5q_2 + 1}_{\text{اضافه و کم}} - 1) - 2 = 14(q_3 - 1) + 14 - 2 = 14q_3 + 12 \Rightarrow r = 12$

رابطه بین (کم‌م) و (بم‌م)

اگر a و b دو عدد صحیح باشند، آنگاه $a, b = |ab|$

مثال

کم‌م دو عدد 42 و 56 را با استفاده از بم‌م دو عدد به دست آورید.

پاسخ: با توجه به آن‌که $42 = 3 \times 14$ و $56 = 4 \times 14$ پس بم‌م این دو عدد برابر 14 می‌باشد.

$(42, 56) = 14$

طبق فرمول داریم:

$a, b = |ab|$

$[42, 56] \times 14 = |42 \times 56| \Rightarrow [42, 56] = \frac{42 \times 56}{14} = 3 \times 56$

$[42, 56] = 168$: کم‌م دو عدد 42 و 56

یادآوری افزاز یک مجموعه

فرض کنیم A یک مجموعه غیرتهی باشد، گوییم A به n ($n \in \mathbb{N}$) زیرمجموعه A_1, A_2, \dots, A_n افزاز شده است، اگر:

(۱) برای هر $(1 \leq i \leq n)$ ، $A_i \neq \emptyset$ (هیچ‌یک از زیرمجموعه‌ها تهی نباشند)

(۲) برای هر $j, i, i \neq j$ ، $A_i \cap A_j = \emptyset$ (دو به دو جدا از هم باشند).

(۳) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i = A$ (اجتماع همه زیرمجموعه‌ها برابر خود مجموعه اصلی است).

۴ درسامه

افراز مجموعه \mathbb{Z} به کمک قضیه تقسیم

اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، با تقسیم آن بر عدد طبیعی b و با توجه به این که باقی مانده تقسیم یعنی r در رابطه $0 \leq r < b$ صدق می کند، برای a بر حسب r ، دقیقاً b حالت وجود دارد. به عنوان مثال اگر عدد صحیح a را به 4 تقسیم کنیم، در این صورت یا a بر 4 بخش پذیر است، یعنی $r = 0$ یا باقی مانده تقسیم a بر 4 عدد 1 ، عدد 2 یا عدد 3 است، به عبارت دیگر $a = 4k + 3$ ، $a = 4k + 2$ ، $a = 4k + 1$ یا $a = 4k$. پس می توان گفت هر عدد صحیح مانند a را می توان به یکی از چهار صورت فوق نوشت:

چهار مجموعه $A_1 = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 4k\}$ ، $A_2 = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 4k + 1\}$ ، $A_3 = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 4k + 2\}$ و $A_4 = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 4k + 3\}$ ، پس هر عدد صحیح دلخواه حتماً و فقط در یکی از مجموعه های A_1 تا A_4 است.

مثال اگر $a \in \mathbb{Z}$ ، نشان دهید که a را به یکی از دو صورت زوج یا فرد ($2k$ یا $2k + 1$) می توان نوشت و سپس نشان دهید که حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی همواره زوج است.

پاسخ: طبق قضیه تقسیم کافی است که a را بر 2 تقسیم کنیم که در این صورت داریم:

$$\forall a \in \mathbb{Z} : a = 2k + r, 0 \leq r < 2 \Rightarrow a = 2k \text{ یا } a = 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

پس هر عدد صحیح را به صورت اعداد زوج یا فرد می توان نوشت. حال اگر a و $a + 1$ را دو عدد صحیح متوالی در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} a = 2k \Rightarrow a(a+1) = 2k(2k+1) = 2(\underbrace{2k^2 + k}_{k'}) = 2k' \\ a = 2k + 1 \Rightarrow a(a+1) = (2k+1)((2k+1)+1) = (2k+1)(2k+2) = (2k+1)2(k+1) = 2(\underbrace{(2k+1)(k+1)}_{k''}) = 2k'' \end{cases}$$

پس در هر دو حالت، حاصل ضرب دو عدد متوالی زوج است.

مثال ثابت کنید باقی مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر 8 ، مساوی با 1 می باشد.

پاسخ: هر عدد فرد را می توان به صورت $a = 4k + 1$ و $a = 4k + 3$ نوشت، پس مربع هر یک را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} a = 4k + 1 \Rightarrow a^2 = (4k+1)^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8(\underbrace{2k^2 + k}_{k'}) + 1 = 8k' + 1 \\ a = 4k + 3 \Rightarrow a^2 = (4k+3)^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 8(\underbrace{2k^2 + 3k + 1}_{k''}) + 1 = 8k'' + 1 \end{cases}$$

پس در هر دو حالت، مربع عدد فرد به شکل $8k + 1$ نوشته می شود.

سؤالات امتحانی

۸۶. جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

(آ) اگر p عددی اول و a عددی صحیح باشد، به طوری که $p \nmid a$ ، آن گاه (a, p) برابر است.

(ب) هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم

(پ) هر دو عدد فرد متوالی نسبت به هم

(ت) حاصل $[96, 36]$ برابر است.

(ث) حاصل $(54, 192)$ برابر است.

(ج) حاصل $(12, 18)$ برابر است.

۸۷. درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید.

(آ) حاصل ضرب چهار عدد طبیعی متوالی بر $4!$ بخش پذیر است.

(ب) اگر a و b دو عدد صحیح باشند، آن گاه $(b, a) \neq (a, b)$

(پ) اگر a و b دو عدد صحیح باشند، آن گاه $(a, b) = (\pm a, \pm b)$

(ت) اگر $a \mid b$ و a و b ناصفر باشند، $(a, b) = |a|$

(ث) اگر $a \mid b$ و a و b دو عدد صحیح باشند، $[a, b] = |b|$

۸۸. با توجه به تعریف‌های ب‌م و کم‌م و با فرض این‌که a و b دو عدد صحیح باشند، ثابت کنید: (تمرین ۱ کار در کلاس صفحه ۱۳ کتاب درسی)
 $a | b \Rightarrow (a, b) = |a|$ (آ) $a | b \Rightarrow [a, b] = |b|$ (ب)
۸۹. اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و p/a ، ثابت کنید $(p, a) = 1$ (تمرین ۲ کار در کلاس صفحه ۱۴ کتاب درسی)
۹۰. ثابت کنید: (تمرین ۶ صفحه ۱۶ کتاب درسی)
 (آ) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اولند. (ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اولند.
۹۱. اگر p و q هر دو عدد اول باشند $(p \neq q)$ ، ثابت کنید $(p, q) = 1$ (تمرین ۷ صفحه ۱۶ کتاب درسی)
۹۲. اگر $d = (a - 5, a^2 - 6a + 3)$ و $a \in \mathbb{Z}$ باشد، آنگاه d را محاسبه کنید.
۹۳. اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۹ و ۸ به ترتیب ۷ و ۵ باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۷۲ بیابید. (مشابه تمرین ۹ صفحه ۱۶ کتاب درسی)
۹۴. اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۶ و ۸ به ترتیب ۴ و ۷ باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۲۴ بیابید. (مشابه تمرین ۹ صفحه ۱۶ کتاب درسی)
۹۵. ثابت کنید هر عدد صحیح و فرد مانند a را می‌توان به یکی از دو صورت $4k + 1$ یا $4k + 3$ نوشت.
۹۶. اگر a و b دو عدد فرد باشند، آنگاه باقی‌مانده تقسیم عدد $a^2 + b^2 + 3$ را بر ۸ بیابید. (مشابه تمرین ۱۰ صفحه ۱۶ کتاب درسی)
۹۷. اگر n عددی صحیح باشد، ثابت کنید $3 | n^3 - n$ (مشابه تمرین ۱۱ صفحه ۱۶ کتاب درسی)
۹۸. اگر n عددی صحیح و فرد باشد، ثابت کنید $8 | n^3 - n$
۹۹. اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است. (مشابه تمرین ۱۲ صفحه ۱۷ کتاب درسی)
۱۰۰. اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a ، $a + 2$ یا $a + 4$ بر ۳ بخش‌پذیر است. (مشابه تمرین ۱۳ صفحه ۱۷ کتاب درسی)
۱۰۱. ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی، عددی فرد است. (مشابه تمرین ۱۴ صفحه ۱۷ کتاب درسی)
۱۰۲. ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد متوالی همواره بر ۳! بخش‌پذیر است. (مشابه تمرین ۱۵ صفحه ۱۷ کتاب درسی)
۱۰۳. حاصل هریک را به‌دست آورید: $(m \in \mathbb{Z})$
 (آ) $([m^3, m], m^7)$ (ب) $(12m^2, 8m^4)$ (پ) $([m^{12}, (m^4, m^6)])$
 (ت) $(4m + 2, 4m + 1)$ (ث) $([90, 54], 162)$
۱۰۴. کم‌م دو عدد ۷۲ و ۹۶ را با استفاده از ب‌م دو عدد به‌دست آورید.

پاسخ‌های تشریحی

- ۸۶ (آ) اگر p عددی اول و a عددی صحیح باشد، به طوری‌که p/a ، آنگاه (a, p) برابر یک است. (ب) هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اول‌اند. (پ) هر دو عدد فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند. (ت) کم‌م دو عدد، $3^2 \times 2^2 = 36$ و $3 \times 2^5 = 96$ برابر $288 = 3^2 \times 2^5$ است. (ث) ب‌م دو عدد، $3 \times 2^6 = 192$ و $3^3 \times 2 = 54$ برابر $6 = 2 \times 3$ است. (ج) ابتدا ب‌م دو عدد، $3^2 \times 2 = 18$ و $3 \times 2^2 = 12$ که برابر $6 = 2 \times 3$ است. (ت) است را به‌دست می‌آوریم و سپس کم‌م $2^5 = 32$ و $6 = 2 \times 3$ که برابر $96 = 3^2 \times 2^5$ است، محاسبه می‌کنیم.
- ۸۷ (آ) درست است، زیرا حاصل ضرب n عدد طبیعی متوالی بر $n!$ بخش‌پذیر است. (ب) نادرست است، زیرا اگر a و b دو عدد صحیح باشند، آنگاه $(b, a) = (a, b)$ (پ) درست است، زیرا در ب‌م دو عدد صحیح جواب همواره مثبت است و به مثبت یا منفی بودن a و b بستگی ندارد. (ت) درست است، زیرا اگر $a | b$ یعنی $b = a \times k$ که حداقل یکی از a و b ناصفر باشند، جواب برابر $|a|$ است. (ث) نادرست است. زیرا اگر $a | b$ باید هر دو عدد a و b ناصفر باشند تا $[a, b] = |b|$ باشد.

$$d = (a - 5, a^2 - 6a + 3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d | a - 5 \xrightarrow{\times a} d | a^2 - 5a \\ d | a^2 - 6a + 3 \rightarrow d | a^2 - 6a + 3 \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} d | (a^2 - 5a) - (a^2 - 6a + 3) \Rightarrow d | a - 3$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} d | (a - 3) - (a - 5) \Rightarrow d | 2 \xrightarrow{d > 0} \begin{cases} d = 1 \\ \text{یا} \\ d = 2 \end{cases}$$

۹۲ طبق قضیه تقسیم داریم:

$$a = 9q + 5 \xrightarrow{\times 8} 8a = 72q + 40$$

$$a = 8q' + 7 \xrightarrow{\times 9} 9a = 72q' + 63$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} a = 72q' + 63 - 72q - 40$$

$$\Rightarrow a = 72(q' - q) + 23 \Rightarrow a = 72q'' + 23 \Rightarrow r = 23 \text{ (باقی مانده)}$$

پس باقی مانده تقسیم عدد a بر 72 برابر 23 است.

۹۳ طبق قضیه تقسیم داریم:

$$a = 6q + 4 \xrightarrow{\times 8} 8a = 48q + 32$$

$$a = 8q' + 7 \xrightarrow{\times 6} 6a = 48q' + 42$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} 2a = 48q + 32 - 48q' - 42$$

$$\Rightarrow 2a = 48(q - q') - 10 \Rightarrow 2a = 48q'' - 48 + 38$$

$$\Rightarrow 2a = 48(q'' - 1) + 38 \Rightarrow 2a = 48t + 38$$

$$\Rightarrow a = 24t + 19 \Rightarrow r = 19$$

پس باقی مانده تقسیم عدد a بر 24 برابر 19 است.

۹۵ فرض می‌کنیم که $a \in \mathbb{Z}$ و a فرد باشد، اگر a را بر 4 تقسیم کنیم

$$a = 4k + r, 0 \leq r < 4$$

طبق قضیه تقسیم داریم:

$$\Rightarrow a = 4k \text{ (۱)}, a = 4k + 1 \text{ (۲)}, a = 4k + 2 \text{ (۳)}, a = 4k + 3 \text{ (۴)}$$

حالت‌های (۱) و (۳) زوج می‌باشند، بنابراین هر عدد صحیح فرد را می‌توان به صورت $4k + 1$ یا $4k + 3$ نوشت.

۹۶ می‌دانیم مربع هر عدد فرد را می‌توان به صورت مضرب 8 به اضافه

یک نوشت، پس مربع دو عدد فرد را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$a^2 = 8q + 1, b^2 = 8q' + 1$$

در نتیجه داریم:

$$a^2 + b^2 + 3 = 8q + 1 + 8q' + 1 + 3 = 8q + 8q' + 5$$

$$= 8(q + q') + 5 = 8q'' + 5 \Rightarrow r = 5$$

باقی مانده تقسیم $a^2 + b^2 + 3$ بر 8 برابر 5 می‌باشد.

۹۲

۸۸ (آ) برای اثبات باید دو شرط موجود در تعریف ب.م.م را برای $|a|$

بررسی کنیم. چون $|a| |a|$ و طبق فرض $a | b$ ، پس $|a|$ یک مقسوم‌علیه مشترک a و b است (شرط اول تعریف ب.م.م). حال فرض کنید m یک مقسوم‌علیه مشترک a و b باشد، در این صورت $m | a$ و $m | b$ اما از $m | a$ می‌توان نتیجه گرفت $m \leq |a|$ ، پس $|a|$ از هر مقسوم‌علیه مشترک دیگر a و b بزرگ‌تر است (شرط دوم تعریف ب.م.م). بنابراین $(a, b) = |a|$

(ب) برای اثبات باید دو شرط موجود در تعریف کم‌م را برای $|b|$ بررسی کنیم. از $a | b$ فرض مسئله نتیجه می‌شود $a | \pm b$ ، بنابراین $a | |b|$ و از طرفی می‌دانیم $b | |b|$ ، پس $|b|$ یک مضرب مشترک a و b است (شرط اول). همچنین اگر عدد طبیعی m یک مضرب مشترک a و b باشد، آن‌گاه $a | m$ و $b | m$ اما از $b | m$ ، نتیجه می‌شود $m \leq |b|$ ، در نتیجه در بین مضارب مثبت مشترک a و b ، عدد $|b|$ کوچک‌ترین عدد است (شرط دوم)، پس $[a, b] = |b|$

۸۹ با توجه به فرض‌های مسئله که $a \in \mathbb{Z}$ و $p | a$ ، فرض می‌کنیم که $(p, a) = d$ ، آن‌گاه داریم:

$$(p, a) = d \Rightarrow \begin{cases} d | p \xrightarrow{p \text{ عدد اول}} d = 1 \text{ یا } d = p \\ d | a \text{ (۱)} \end{cases}$$

اگر $d = p$ با توجه به رابطه (۱) داریم: $p | a$ که این با فرض تناقض دارد. پس فقط $d = 1$ و $(p, a) = 1$

۹۰ (آ) اگر m و $m + 1$ را دو عدد صحیح متوالی در نظر بگیریم و فرض کنیم که $(m, m + 1) = d$ ، آن‌گاه:

$$\begin{cases} d | m \\ d | m + 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} d | m + 1 - m \Rightarrow d | 1 \Rightarrow d = \pm 1 \Rightarrow d = 1$$

بنابراین هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اولند.

(ب) اگر $2m + 1$ و $2m + 3$ را دو عدد صحیح متوالی فرد در نظر بگیریم و فرض کنیم که $d = (2m + 1, 2m + 3)$ ، آن‌گاه:

$$\begin{cases} d | 2m + 1 \\ d | 2m + 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} d | (2m + 3) - (2m + 1)$$

$$\Rightarrow d | 2m + 3 - 2m - 1 \Rightarrow d | 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ \text{دو زوج است و غیرقابل قبول} \\ d = 2 \end{cases}$$

بنابراین $d = 1$ و هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اولند.

۹۱ فرض می‌کنیم p و q هر دو عدد اول و $p \neq q$ است. اگر $(p, q) = d$ در نظر بگیریم، آن‌گاه:

$$\begin{cases} d | p \xrightarrow{p \text{ عدد اول}} \begin{cases} d = p \\ \text{یا} \\ d = 1 \end{cases} \\ d | q \xrightarrow{q \text{ عدد اول}} \begin{cases} d = q \\ \text{یا} \\ d = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d | p \xrightarrow{p \text{ عدد اول}} \begin{cases} d = p \\ \text{یا} \\ d = 1 \end{cases} \\ d | q \xrightarrow{q \text{ عدد اول}} \begin{cases} d = q \\ \text{یا} \\ d = 1 \end{cases} \end{cases}$$

p و q مخالف یکدیگر می‌باشند، پس تنها عامل مشترک $d = 1$ است و نتیجه می‌شود $(p, q) = 1$

۱۰۰ عدد صحیح a را به سه حالت $a = 3k + 1$, $a = 3k$ و $a = 3k + 2$ افزایش می‌کنیم. در این صورت داریم:

حالت اول: $a = 3k \Rightarrow 3 | a$

حالت دوم: $a = 3k + 1 \xrightarrow{+2} a + 2 = 3k + 1 + 2$

$$\Rightarrow a + 2 = 3k + 3 = 3(k+1) = 3k' \Rightarrow 3 | a + 2$$

حالت سوم: $a = 3k + 2 \xrightarrow{+4} a + 4 = 3k + 2 + 4$

$$\Rightarrow a + 4 = 3k + 6 = 3(k+2) = 3k'' \Rightarrow 3 | a + 4$$

طبق سه حالت، همواره یکی از اعداد صحیح a , $a + 2$ یا $a + 4$ بر ۳ بخش پذیر است.

۱۰۱ اگر دو عدد صحیح متوالی را n و $n + 1$ در نظر بگیریم، تفاضل مکعب‌های دو عدد برابر است با:

$$(n+1)^3 - n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 = (3n^2 + 3n) + 1$$

$$\frac{\text{فاکتور}}{3n(n+1)+1} = 3 \times 2k + 1 = 2(3k) + 1$$

$$\Rightarrow (n+1)^3 - n^3 = 2k' + 1 \quad (\text{عددی فرد})$$

۱۰۲ اگر سه عدد متوالی را n , $n + 1$ و $n + 2$ در نظر بگیریم، برای اثبات بخش پذیری $n(n+1)(n+2)$ بر $3! = 3 \times 2 \times 1$ ثابت می‌کنیم بر ۲ و ۳ بخش پذیر است.

$$\begin{cases} \text{بخش پذیری بر ۲:} \\ n = 2k \Rightarrow 2 | n \Rightarrow 2 | n(n+1)(n+2) \\ n = 2k + 1 \Rightarrow n + 1 = 2k + 2 = 2(k+1) = 2k' \\ \Rightarrow 2 | n + 1 \Rightarrow 2 | n(n+1)(n+2) \end{cases}$$

بنابراین $n(n+1)(n+2)$ همواره بر ۲ بخش پذیر است.
بخش پذیری بر ۳:

$$\begin{cases} n = 3k \Rightarrow 3 | n \Rightarrow 3 | n(n+1)(n+2) \\ n = 3k + 1 \Rightarrow n + 2 = 3k + 3 = 3(k+1) = 3k' \\ \Rightarrow 3 | (n+2) \Rightarrow 3 | n(n+1)(n+2) \\ n = 3k + 2 \Rightarrow n + 1 = 3k + 3 = 3(k+1) = 3k'' \\ \Rightarrow 3 | (n+1) \Rightarrow 3 | n(n+1)(n+2) \end{cases}$$

بنابراین $n(n+1)(n+2)$ همواره بر ۳ بخش پذیر است.
پس با توجه به این‌که $n(n+1)(n+2)$ بر ۲ و ۳ بخش پذیر است، بر ۶ نیز بخش پذیر است.

۱۰۳ برای محاسبه ب.م.م دو عدد a و b ، عامل‌های مشترک را به دست می‌آوریم و با کوچک‌ترین توان می‌نویسیم و برای محاسبه ک.م.م دو عدد a و b ، حاصل ضرب عامل‌های مشترک با بزرگ‌ترین توان در عامل‌های غیرمشترک را محاسبه می‌کنیم.

$[m^3, m] = m^3$ (*) عامل مشترک با بزرگ‌ترین توان

عامل مشترک با کوچک‌ترین توان $([m^3, m], m^4) = (m^3, m^4) = m^3$

$$(12m^2, 8m^4) = (2^2 \times 3m^2, 2^3m^4) = 2^2m^2 = 4m^2 \quad (\text{ب})$$

$(m^4, m^6) = m^4$ (*) (پ)

$[m^{12}, (m^4, m^6)] = [m^{12}, m^4] = m^{12}$ (*)

۹۷ روش اول (اشباع): عدد صحیح n را به سه حالت $n = 3k$, $n = 3k + 1$ و $n = 3k + 2$ افزایش می‌کنیم و در سه حالت بررسی می‌کنیم که $n^3 - n$ بر ۳ بخش پذیر باشد.

حالت اول: $n = 3k \Rightarrow 3 | n \Rightarrow 3 | n(n-1)(n+1)$

$$\Rightarrow 3 | n(n^2 - 1) \Rightarrow 3 | n^3 - n$$

حالت دوم: $n = 3k + 1 \Rightarrow n - 1 = 3k \Rightarrow 3 | n - 1 \Rightarrow 3 | (n-1)n(n+1)$

$$\Rightarrow 3 | n(n^2 - 1) \Rightarrow 3 | n^3 - n$$

حالت سوم: $n = 3k + 2 \Rightarrow n + 1 = 3k + 3 \Rightarrow 3(k+1) = 3k' \Rightarrow 3 | n + 1$

$$\Rightarrow 3 | (n+1)n(n-1) \Rightarrow 3 | n(n^2 - 1) \Rightarrow 3 | n^3 - n$$

بنابراین در سه حالت بررسی شده، $n^3 - n$ همواره بر ۳ بخش پذیر است.
روش دوم (مستقیم): با توجه به این‌که:

$$A = n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$$

پس A به صورت حاصل ضرب ۳ عدد متوالی نوشته شده که بر ۳ بخش پذیر است.

۹۸ همان‌طور که در درسنامه ثابت شد هر عدد صحیح فرد را می‌توان به صورت $n = 4k + 1$ و $n = 4k + 3$ نوشت. پس در دو حالت بررسی می‌کنیم که $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$ بر ۸ بخش پذیر است.

حالت اول: $n = 4k + 1 \Rightarrow \begin{cases} n - 1 = 4k \\ n + 1 = 4k + 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow n(n-1)(n+1) = (4k+1)(4k)(4k+2)$$

$$\Rightarrow n(n-1)(n+1) = (4k+1)4(k)2(k+1)$$

$$= 8 \underbrace{(4k+1)(k)(k+1)}_{k'} = 8k'$$

$$\Rightarrow 8 | n(n-1)(n+1) \Rightarrow 8 | n^3 - n$$

حالت دوم: $n = 4k + 3 \Rightarrow \begin{cases} n + 1 = 4k + 4 \\ n - 1 = 4k + 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow n(n-1)(n+1) = (4k+3)(4k+2)(4k+4)$$

$$\Rightarrow n(n-1)(n+1) = (4k+3)2(2k+1)4(k+1)$$

$$= 8 \underbrace{(4k+3)(2k+1)(k+1)}_{k'} = 8k'$$

$$\Rightarrow 8 | n(n-1)(n+1) \Rightarrow 8 | n^3 - n$$

بنابراین $n^3 - n$ بر ۸ بخش پذیر است.

۹۹ در تقسیم $a = bq + r$ به a مقسوم، به b مقسوم‌علیه، به q خارج‌قسمت و به r باقی‌مانده می‌گوییم. اگر a و b هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشد، یعنی:

$$a = nk \Rightarrow n | a, \quad a = bq + r \Rightarrow nk = (nk')q + r$$

$$b = nk' \Rightarrow n | b$$

$$\Rightarrow r = nk - nk'q = n(k - k'q) = nq' \Rightarrow n | r$$

یعنی باقی‌مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش پذیر است.