

درسنامه ۱

توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

توابع چندجمله‌ای

توابعی را که ضابطه آن‌ها، چندجمله‌ای‌های جبری از یک متغیر باشند، توابع چندجمله‌ای می‌گوییم. به عبارت دیگر به تابع با ضابطه $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ که در آن $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ اعداد حقیقی، $a_n \neq 0$ و $n \in \mathbb{W}$ ، تابع چندجمله‌ای از درجه n می‌گوییم.

نکته

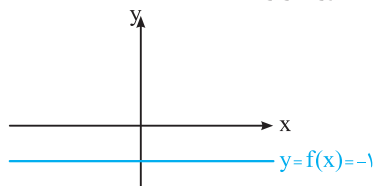
دامنه توابع چندجمله‌ای برابر مجموعه اعداد حقیقی، یعنی \mathbb{R} خواهد بود.

به طور مثال هر یک از توابع مقابل یک تابع چندجمله‌ای با دامنه \mathbb{R} می‌باشند:

$$f(x) = 2x^5 - 4x^3 - \frac{1}{x} + 3 \quad g(x) = -3x^2 + 5x + 1$$

انواع توابع چندجمله‌ای که تا به حال با آن‌ها آشنا شده‌ایم به صورت زیر می‌باشند:

(۱) تابع چندجمله‌ای از درجه صفر که به آن تابع ثابت می‌گوییم. ضابطه تابع ثابت به صورت $f(x) = a$ است که در آن a یک عدد حقیقی دلخواه است. نمودار تابع ثابت به صورت یک خط به موازات محور x ها می‌باشد. به عنوان مثال، نمودار تابع $f(x) = -1$ به صورت زیر است:



(۲) تابع چندجمله‌ای از درجه یک که به آن تابع خطی می‌گوییم. ضابطه آن به صورت $f(x) = ax + b$ ، $a \neq 0$ می‌باشد. نمودار آن یک خط راست است و برای رسم آن از دو نقطه دلخواه روی آن استفاده می‌کنیم.

(۳) تابع چندجمله‌ای از درجه ۲ که ضابطه آن به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، $a \neq 0$ است. نمودار تابع درجه ۲ را سهمی می‌گوییم و برای رسم آن باید رأس سهمی را مشخص کنیم:

$$S(x = -\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a})$$

اگر $a > 0$ ، سهمی رو به بالا و اگر $a < 0$ ، آن‌گاه سهمی رو به پایین است.

نکته

می‌توان در صورت امکان، محل تلاقی سهمی با محورهای مختصات را مشخص کرد.

مثال نمودار تابع درجه دوم به معادله $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ را رسم کنید.

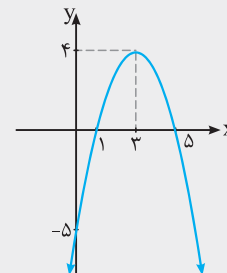
پاسخ: ابتدا مختصات رأس سهمی را مشخص می‌کنیم:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-1)} = 3 \Rightarrow y = f(3) = -9 + 18 - 5 = 4$$

$$x = 0 \Rightarrow y = -5, \quad y = 0 \Rightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0 \xrightarrow{\times(-1)} x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = 5$$

S			
x	1	3	5
y	0	4	0

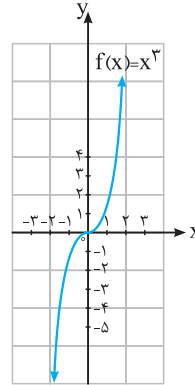


درسنامه ۱

تابع درجه ۳

تابع چندجمله‌ای با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، ($a \neq 0$) یک تابع درجه ۳ است. دامنه و برد این تابع برابر \mathbb{R} ، مجموعه اعداد حقیقی است. نمودار تابع $y = x^3$ به کمک نقطه‌یابی به صورت زیر است:

x	$f(x) = x^3$
-۲	-۸
-۱	-۱
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
۰	۰
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
۱	۱
۲	۸

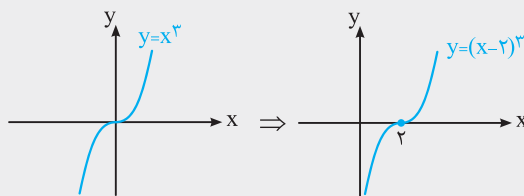


با اطلاعاتی که داریم، نمی‌توان نمودار تابع درجه ۳ را در حالت کلی رسم کرد اما می‌توان نمودار برخی از توابع درجه سوم را با استفاده از انتقال، قرینه و... به کمک نمودار $y = x^3$ رسم کرد.

نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

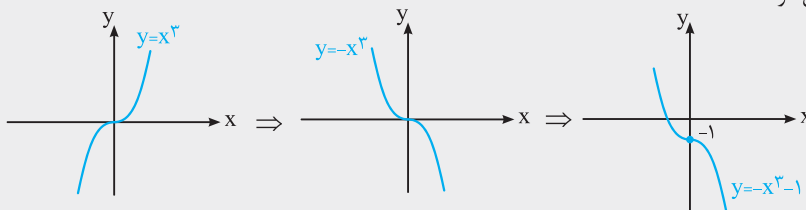
$$y = -x^3 - 1 \quad (\text{ب})$$

$$y = (x-2)^3 \quad (\text{آ})$$



پاسخ: (آ) اگر نمودار $y = x^3$ را دو واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع $y = (x-2)^3$ به دست می‌آید.

(ب) ابتدا نمودار $y = x^3$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = -x^3$ به دست آید. با انتقال نمودار $y = -x^3$ به اندازه یک واحد به سمت پایین، نمودار $y = -x^3 - 1$ رسم می‌شود:

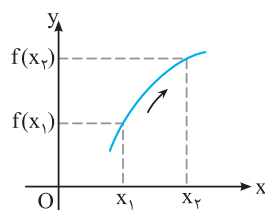


توابع صعودی و نزولی

تعریف: اگر D بازه‌ای در دامنه تابع f باشد، می‌گوییم f در بازه D اکیداً صعودی است هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in D$ داشته باشیم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

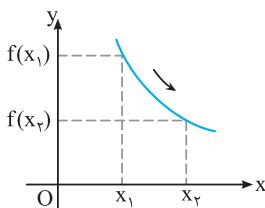
در نمودار مقابل، وقتی مقدار x در دامنه تابع f افزایش می‌یابد، مقدار y نیز افزایش می‌یابد.



تعریف: می‌گوییم f در بازه D اکیداً نزولی است، هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in D$ داشته باشیم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

در نمودار مقابل، وقتی مقدار x در دامنه f افزایش می‌یابد، مقدار y کاهش می‌یابد.



درستنامه ۱

تعریف: به تابعی که فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا می‌گوییم.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

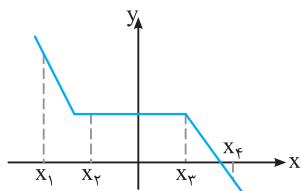
تعریف: تابع f روی بازه D صعودی است اگر و فقط اگر برای هر $x_1, x_2 \in D$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$

و تابع f روی بازه D نزولی است اگر و تنها اگر برای هر $x_1, x_2 \in D$:

در نمودار مقابل، با افزایش مقدار x در دامنه تابع f ، مقدار y یا کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) = f(x_3) > f(x_4)$$

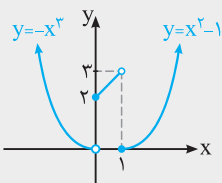


تعریف: به تابعی که فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، تابع یکنوا می‌گوییم.

تعریف: تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد. با توجه به تعریف، تابع ثابت در یک بازه هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

مثال

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 1 \\ x + 2 & 0 \leq x < 1 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$ را رسم کنید و مشخص کنید تابع f در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی است.



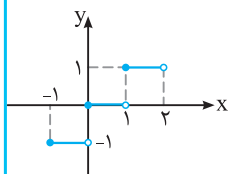
پاسخ: با رسم سهمی $y = x^2 - 1$ در بازه $[1, +\infty)$ ، خط $y = x + 2$ در بازه $[0, 1)$ و تابع درجه سوم $y = -x^3$ در بازه $(-\infty, 0)$ ، نمودار تابع f به صورت مقابل رسم می‌شود:

با توجه به نمودار تابع f ، تابع f روی بازه $(-\infty, 0)$ ، تابعی اکیداً نزولی، روی بازه $[0, 1)$ ، تابعی اکیداً صعودی و در بازه $[1, +\infty)$ ، تابعی اکیداً صعودی است.

نکته

تفاوت نمودار توابع اکیداً یکنوا و توابع یکنوا در این است که در توابع یکنوا قسمتی از نمودار یا تمام نمودار می‌تواند خطی به موازات محور x ها باشد.

به عنوان مثال، تابع $y = [x]$ که نمودار آن به صورت مقابل است، تابعی یکنوا است ولی اکیداً یکنوا نمی‌باشد.

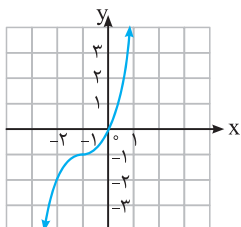


سؤالات امتحانی

(مشابه کار در کلاس صفحه ۵ کتاب درسی)

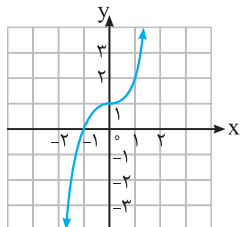
۱. ضابطه هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

ت) $y = (x + 1)^3 - 1$



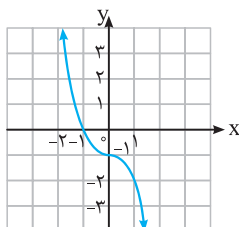
(۴)

پ) $y = (x - 1)^3 + 2$



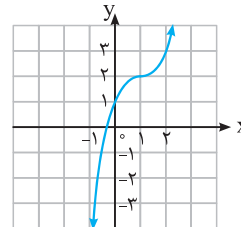
(۳)

ب) $y = -x^3 - 1$



(۲)

ا) $y = x^3 + 1$



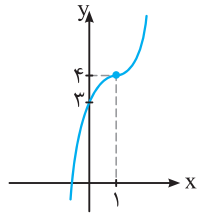
(۱)

(مشابه تمرین ۱ صفحه ۱۰ کتاب درسی)

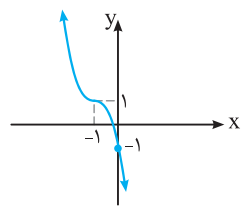
۲. نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید.

(ا) $y = x^3 - 1$ (ب) $y = -x^3 - 2$ (پ) $y = (x + 2)^3 - 1$
 (ت) $y = (x - 1)^3 + 2$ (ث) $y = -(x - 1)^3 - 1$ (ج) $y = x^3 + 3x^2 + 3x$

۳. نمودار تابع $y = a(x - b)^3 + c$ به صورت مقابل است. مقادیر a ، b و c را مشخص کنید.



۴. نمودار تابع $f(x) = a(x + b)^3 + c$ به صورت مقابل است. مقدار $f(1)$ را به دست آورید.



۵. نمودار تابع $f(x) = x^3$ را به اندازه ۲ واحد به سمت چپ و سپس به اندازه ۵ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

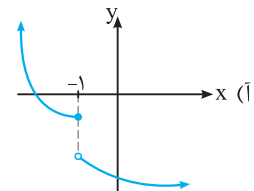
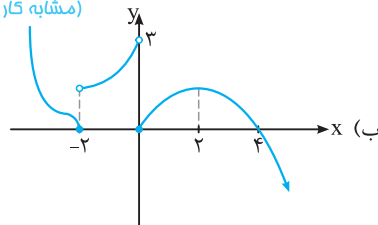
۶. نمودار $f(x) = x^3$ را ابتدا به اندازه یک واحد به سمت راست و سپس به اندازه ۷ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع g حاصل شود. نمودار توابع f و g با چه طول‌هایی همدیگر را قطع می‌کنند؟

۷. تابع چندجمله‌ای از درجه دوم f مفروض است. اگر $f(0) = 2$ ، $f(1) = 0$ و $f(-1) = 10$ باشند، ضابطه f را مشخص کنید.

۸. تابع چندجمله‌ای از درجه سوم f مفروض است. اگر ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ ، $x = -1$ ، $x = -2$ ، $x = 2$ و $f(0) = -4$ باشند، مقدار $f(3)$ را به دست آورید.

۹. در هر کدام از توابع زیر، مشخص کنید در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی (صعودی) و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی (نزولی) هستند.

(مشابه کار در کلاس صفحه ۸ کتاب درسی)



۱۰. (ا) روی بازه $[0, 2]$ نمودار یک تابع را رسم کنید که روی بازه $[0, 1]$ اکیداً صعودی و روی بازه $[1, 2]$ اکیداً نزولی باشد.
 (ب) روی بازه $[-1, 1]$ نمودار تابعی را رسم کنید که روی بازه $[-1, 0]$ و $[0, 1]$ اکیداً صعودی باشد ولی روی بازه $[-1, 1]$ اکیداً صعودی نباشد.

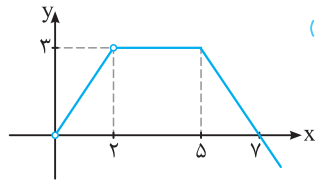
۱۱. نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید. (مشابه تمرین ۲ صفحه ۱۰ کتاب درسی)

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x < -2 \\ 1 & -2 < x < 1 \\ -2x & x > 1 \end{cases}$$

۱۲. نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

(ا) $f(x) = -x^2 + 4x$ (ب) $f(x) = x + |x|$ (پ) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (ت) $f(x) = \frac{1}{x}$
 (ث) $f(x) = -x^3 + 2$ (ج) $f(x) = 2^x - 2$ (ح) $f(x) = \log_3 x$ (خ) $f(x) = \cos x, x \in [-\pi, 2\pi]$
 (ز) $f(x) = x^2 |x|$

۱۳. ضابطه تابعی را بنویسید که در دامنه خود غیریکنوا باشد.



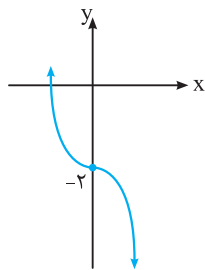
(نهایی - فرداد ۹۱)

۱۴. نمودار تابع f به صورت مقابل است. جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

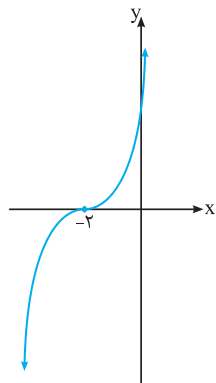
تابع در بازه اکیداً صعودی و در بازه اکیداً نزولی و در بازه $[۲, ۵]$ ، است.

پاسخ‌های تشریحی

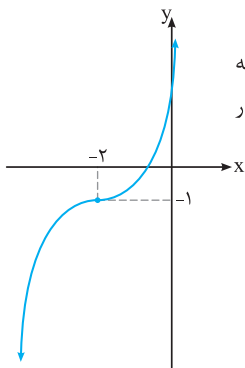
۱



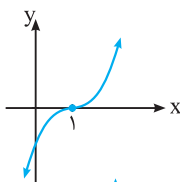
با انتقال نمودار $y = -x^3$ به اندازه دو واحد به سمت پایین، نمودار $y = -x^3 - 2$ به دست می‌آید: دامنه و برد تابع برابر \mathbb{R} می‌باشند.



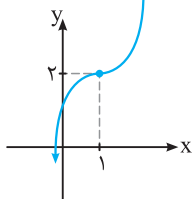
پ) با انتقال نمودار $y = x^3$ به اندازه ۲ واحد به سمت چپ، نمودار $y = (x+2)^3$ به دست می‌آید:



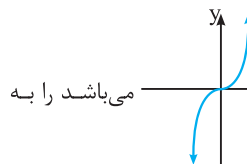
نمودار $y = (x+2)^3$ را به اندازه یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم، تا نمودار $y = (x+2)^3 - 1$ به دست آید: دامنه و برد تابع برابر \mathbb{R} می‌باشند.



ت) اگر نمودار $y = x^3$ را به اندازه یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار $y = (x-1)^3$ به دست می‌آید:



با انتقال نمودار $y = (x-1)^3$ به اندازه دو واحد به سمت بالا نمودار $y = (x-1)^3 + 2$ به دست می‌آید. دامنه و برد تابع برابر \mathbb{R} است.



ا) اگر نمودار $y = x^3$ که به صورت می‌باشد را به

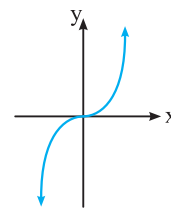
اندازه یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار $y = x^3 + 1$ به دست می‌آید. نمودار (۳)، انتقال یافته نمودار $y = x^3$ به اندازه یک واحد به سمت بالا است.

ب) اگر نمودار $y = x^3$ را ابتدا نسبت به محور x ها قرینه کنیم و سپس به اندازه یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار $y = -x^3 - 1$ به دست می‌آید. نمودار (۲)، نمودار $y = -x^3 - 1$ می‌باشد.

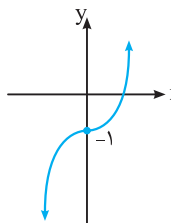
پ) اگر نمودار $y = x^3$ را به اندازه یک واحد به سمت راست و سپس به اندازه ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار $y = (x-1)^3 + 2$ به دست می‌آید. نمودار (۱)، نمودار $y = (x-1)^3 + 2$ می‌باشد.

ت) اگر نمودار $y = x^3$ را ابتدا به اندازه یک واحد به سمت چپ و سپس به اندازه یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار $y = (x+1)^3 - 1$ به دست می‌آید. نمودار (۴)، نمودار $y = (x+1)^3 - 1$ می‌باشد.

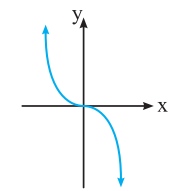
۲) نمودار تابع $y = x^3$ به صورت مقابل است:



ا) اگر نمودار $y = x^3$ را یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار $y = x^3 - 1$ به دست می‌آید:



دامنه و برد تابع برابر \mathbb{R} می‌باشند.



ب) ابتدا نمودار $y = x^3$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = -x^3$ به دست آید:

۴ اگر نمودار $y = ax^3$ ($a < 0$) را به اندازه یک واحد به سمت چپ و سپس به اندازه یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم، آنگاه ضابطه تابع به صورت $y = a(x+1)^3 + 1$ درمی آید:

$$y = a(x+1)^3 + 1 = a(x+b)^3 + c \Rightarrow b=1, c=1$$

$$\Rightarrow y = a(x+1)^3 + 1$$

طبق نمودار، نقطه $(0, -1)$ روی نمودار تابع قرار دارد، بنابراین مختصات آن در ضابطه تابع صدق می کند:

$$\Rightarrow f(x) = -2(x+1)^3 + 1 \Rightarrow f(1) = -2(1+1)^3 + 1 = -15$$

۵ اگر نمودار $f(x) = x^3$ را به اندازه ۲ واحد به سمت چپ انتقال دهیم، آنگاه ضابطه f به صورت $y = (x+2)^3$ درمی آید. با انتقال نمودار $y = (x+2)^3$ به اندازه ۵ واحد به سمت پایین، ضابطه تابع به صورت $y = (x+2)^3 - 5$ درمی آید. با قرار دادن عدد صفر به جای x ، محل تلاقی نمودار با محور y ها به دست می آید:

$$y = (x+2)^3 - 5 \xrightarrow{x=0} y = (0+2)^3 - 5 = 8 - 5 = 3$$

۶ اگر نمودار $y = x^3$ را به اندازه یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، ضابطه آن به صورت $y = (x-1)^3$ درمی آید. با انتقال نمودار تابع $y = (x-1)^3$ به اندازه ۷ واحد به سمت بالا، ضابطه تابع g به صورت $g(x) = (x-1)^3 + 7$ درمی آید. با حل معادله $f(x) = g(x)$ طول نقاط تلاقی نمودار توابع f و g مشخص می شود:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Rightarrow x^3 = (x-1)^3 + 7 \\ \Rightarrow x^3 &= (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 7 \Rightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0 \\ \xrightarrow{\div 3} &x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

۷ ضابطه تابع چندجمله ای از درجه دوم به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ است:

$$f(0) = 2 \Rightarrow a(0)^2 + b(0) + c = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow a(1)^2 + b(1) + c = 0 \xrightarrow{c=2} a + b = -2 \quad (1)$$

$$f(-1) = 10 \Rightarrow a(-1)^2 + b(-1) + c = 10 \xrightarrow{c=2} a - b = 8 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} a + b = -2 \\ a - b = 8 \end{cases} \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

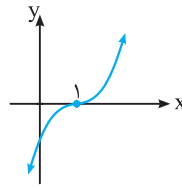
$$\xrightarrow{a+b=-2} 3 + b = -2 \Rightarrow b = -5 \Rightarrow f(x) = 3x^2 - 5x + 2$$

۸ $x = -1, x = -2, x = 2$ ریشه های معادله $f(x) = 0$ می باشند، پس $f(x)$ بر $x+1, x+2, x-2$ بخش پذیر است و داریم:

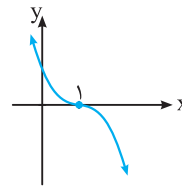
$$f(x) = a(x+1)(x+2)(x-2), f(0) = -4$$

$$\Rightarrow f(0) = a(0+1)(0+2)(0-2) = -4 \Rightarrow -4a = -4 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = (x+1)(x+2)(x-2) \Rightarrow f(3) = (3+1)(3+2)(3-2) = 20$$

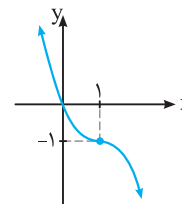


ث اگر نمودار $y = x^3$ را به اندازه یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار $y = (x-1)^3$ به دست می آید:



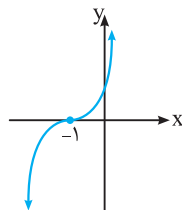
با قرینه کردن نمودار $y = (x-1)^3$ نسبت به محور x ها، نمودار $y = -(x-1)^3$ به دست می آید:

نمودار $y = -(x-1)^3$ را یک واحد به سمت پایین انتقال می دهیم تا نمودار $y = -(x-1)^3 - 1$ به دست آید: دامنه و برد تابع برابر \mathbb{R} می باشند.

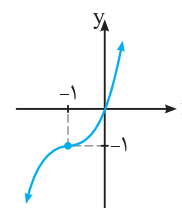


ج با اضافه و کم کردن عدد یک به سمت راست ضابطه تابع و استفاده از اتحاد مکعب دو جمله ای، عبارت را به صورت $y = (x+1)^3 - 1$ می نویسیم:

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 1 = (x+1)^3 - 1$$



اگر نمودار $y = x^3$ را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار $y = (x+1)^3$ به دست می آید:

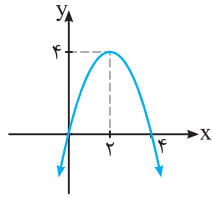


با انتقال نمودار $y = (x+1)^3$ به اندازه یک واحد به سمت پایین، نمودار $y = (x+1)^3 - 1$ به دست می آید:

دامنه و برد تابع برابر \mathbb{R} می باشند.

۳ اگر نمودار $y = ax^3$ را به اندازه یک واحد به سمت راست و سپس به اندازه ۴ واحد به سمت بالا انتقال دهیم، آنگاه نمودار $y = a(x-1)^3 + 4$ ($a > 0$) به دست می آید. بنابراین در ضابطه $y = a(x-b)^3 + c$ ، مقدار b برابر یک و مقدار c برابر ۴ است. از طرفی نمودار از نقطه $(0, 3)$ عبور کرده است، پس مختصات این نقطه در ضابطه $y = a(x-1)^3 + 4$ صدق می کند. بنابراین:

$$3 = a(0-1)^3 + 4 \Rightarrow 3 = -a + 4 \Rightarrow a = 1$$

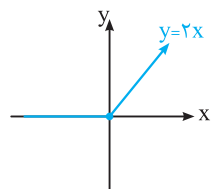


با توجه به نمودار، تابع در بازه $(-\infty, 2)$ اکیداً صعودی و تابع در بازه $(2, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

(ب) با حذف قدرمطلق، تابع را به صورت یک تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

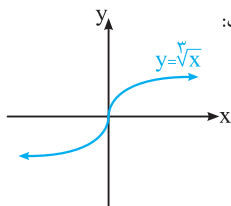
$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = x + |x| = \begin{cases} x + x & x \geq 0 \\ x + (-x) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

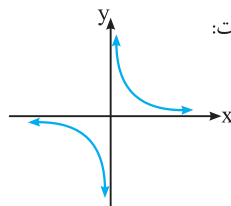


با رسم تابع ثابت $y = 0$ برای $x < 0$ و نیم‌خط $y = 2x$ برای $x \geq 0$ ، نمودار تابع f رسم می‌شود:

نمودار f در بازه $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی و در بازه $(-\infty, 0]$ هم صعودی و هم نزولی است (f تابع ثابت است). تابع f در بازه $(-\infty, +\infty)$ صعودی است.



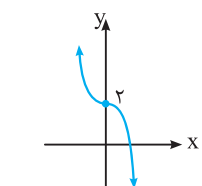
(پ) نمودار تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ به صورت زیر است:



با توجه به نمودار، تابع روی \mathbb{R} اکیداً صعودی است.

(ت) نمودار تابع گویای $y = \frac{1}{x}$ به صورت زیر است:

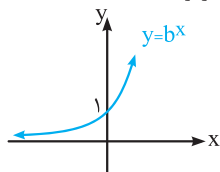
تابع در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است. ولی تابع روی \mathbb{R} غیریکنوا است.



(ث) نمودار تابع $y = -x^3 + 2$ به صورت زیر است:

تابع روی \mathbb{R} ، اکیداً نزولی است.

(ج) نمودار تابع نمایی $y = b^x$ ($b > 1$)، به صورت زیر است:



۹ تابع f اکیداً صعودی است، هرگاه:

$$x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

تابع f اکیداً نزولی است، هرگاه:

$$x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

تابع f صعودی است، هرگاه:

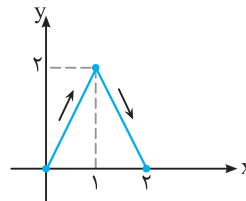
$$x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

تابع f نزولی است، هرگاه:

$$x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

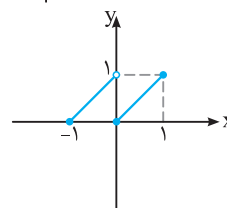
(آ) با توجه به شکل و با افزایش x ، مقدار تابع همواره کم‌تر می‌شود. بنابراین تابع روی \mathbb{R} ، اکیداً نزولی است.

(ب) با توجه به نمودار، تابع در بازه‌های $(-\infty, -2]$ و $[2, +\infty)$ اکیداً نزولی و در بازه‌های $(-2, 0)$ و $[0, 2]$ ، تابعی اکیداً صعودی است.



۱۰ (آ) اگر نمودار f به صورت مقابل

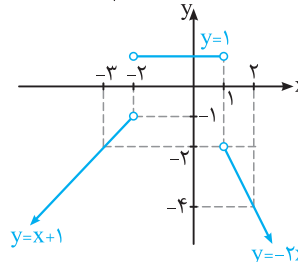
باشد، آنگاه نمودار f در بازه $[0, 1]$ در حال صعود و در بازه $[1, 2]$ در حال نزول است.



(ب) اگر نمودار f به صورت مقابل باشد، آنگاه f روی بازه‌های $(-1, 0)$ و $[0, 1]$ در حال صعود است ولی در بازه $[-1, 1]$ نه صعودی و نه نزولی است.

۱۱ برای رسم نمودار تابع سه ضابطه‌ای f ، باید خط $y = x + 1$ را در محدوده $(-\infty, -2)$ ، خط $y = 1$ را در محدوده $(-2, 1)$ و خط $y = -2x$ را در محدوده $(1, +\infty)$ رسم کنیم (برای رسم خط، دو نقطه از خط را مشخص می‌کنیم):

x	-3	-2	x	-2	1	x	1	2
$y = x + 1$	-2	-1	$y = 1$	1	1	$y = -2x$	-2	-4



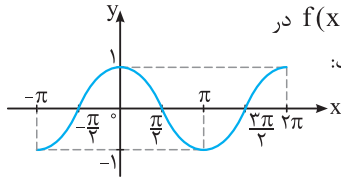
با توجه به نمودار، تابع در بازه $(-\infty, -2)$ ، تابعی اکیداً صعودی، در بازه $(-2, 1)$ ، تابعی ثابت و در بازه $(1, +\infty)$ ، تابعی اکیداً نزولی می‌باشد.

۱۲ (آ) برای رسم نمودار $y = -x^2 + 4x$ ، رأس سهمی و نقاط تلاقی با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-1)} = 2 \Rightarrow y = -(2)^2 + 4(2) = 4$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0, y = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(-x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 4$$

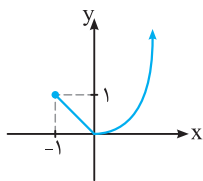


خ نمودار تابع $f(x) = \cos x$ در بازه $[-\pi, 2\pi]$ به صورت مقابل است:

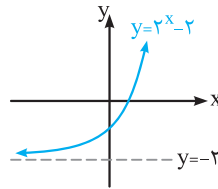
با توجه به نمودار، تابع در بازه‌های $[-\pi, 0]$ و $[\pi, 2\pi]$ اکیداً صعودی و در بازه $[0, \pi]$ ، اکیداً نزولی است.

۱۳ ابتدا نمودار تابعی را رسم می‌کنیم که ابتدا اکیداً نزولی و سپس اکیداً صعودی باشد و سپس ضابطه آن را می‌نویسیم:

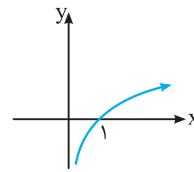
$$\text{ضابطه تابع به صورت } f(x) = \begin{cases} -x & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases} \text{ است.}$$



۱۴ $(0, 2)$ ، $(5, +\infty)$ ، ثابت



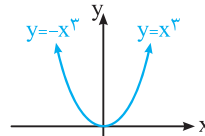
اگر نمودار تابع $y = 2^x$ را به اندازه دو واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $y = 2^x - 2$ به دست می‌آید:



تابع روی \mathbb{R} ، اکیداً صعودی است. نمودار تابع $y = \log_b x$ ، وقتی که $b > 1$ باشد، به صورت مقابل است:

با توجه به نمودار، تابع در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

$$\text{ح } y = x^2 |x| = \begin{cases} x^2(x) & x \geq 0 \\ x^2(-x) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$$



نمودار تابع به صورت مقابل است:

تابع در بازه $(-\infty, 0]$ ، اکیداً نزولی و روی بازه $[0, +\infty)$ ، اکیداً صعودی است.

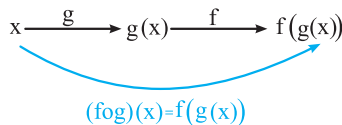
درسنامه ۲

ترکیب توابع

تعریف: ترکیب دو تابع f و g تابعی است که آن را با نماد $f \circ g$ نشان می‌دهیم (بخوانید اف ا جی) و به صورت $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ یا

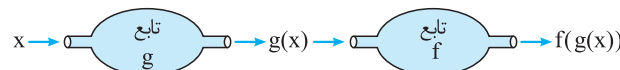
$$f \circ g : x \longrightarrow f(g(x))$$

نمودار ترکیب دو تابع به صورت مقابل است:



مراحل ساخت تابع $f \circ g$: x باید در دامنه g باشد. در مرحله اول، x ورودی و $g(x)$ خروجی است.

$g(x)$ باید در دامنه f باشد. در مرحله دوم، $g(x)$ ورودی و $f(g(x))$ خروجی است.



بنابراین برای به دست آوردن ضابطه $(f \circ g)(x)$ ، در تابع f به جای x ضابطه $g(x)$ را قرار می‌دهیم و اگر بخواهیم ضابطه $(g \circ f)(x)$ را به دست بیاوریم، کافی است در ضابطه تابع g به جای x ضابطه $f(x)$ را قرار دهیم.

مثال اگر $f(x) = 3x - 2$ و $g(x) = 4x - 3$ دو تابع باشند، ضابطه هر یک از توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را مشخص کنید.

پاسخ: اگر در ضابطه تابع f به جای x ، $g(x)$ قرار دهیم، ضابطه تابع $(f \circ g)(x)$ مشخص می‌شود:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x - 3) = 3(4x - 3) - 2 = 12x - 9 - 2 = 12x - 11$$

هم‌چنین با قرار دادن $f(x)$ به جای x در ضابطه تابع g ، ضابطه تابع $(g \circ f)(x)$ مشخص می‌شود:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 2) = 4(3x - 2) - 3 = 12x - 8 - 3 = 12x - 11$$

۲ در ستاره

مثال

اگر $f(x) = x^2 - 5x + 2$ و $g(x) = 2x - 1$ باشند، جواب‌های معادله $(fog)(x) = -4$ را مشخص کنید.

پاسخ: ضابطه تابع fog را به دست می‌آوریم و آن را مساوی -4 قرار می‌دهیم: $(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) = (2x - 1)^2 - 5(2x - 1) + 2$

$$(fog)(x) = -4 \Rightarrow (2x - 1)^2 - 5(2x - 1) + 2 = -4$$

$$A^2 - 5A + 2 = -4 \Rightarrow A^2 - 5A + 6 = 0 \Rightarrow (A - 2)(A - 3) = 0$$

با فرض $2x - 1 = A$ ، داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ A = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 2 \\ 2x - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 3 \\ 2x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = 2 \end{cases}$$

مثال

اگر $f(x) = 3x + a$ ، $g(x) = 2x - 1$ و $(fog)(x) = (gof)(x)$ باشد، مقدار gof را به ازای $x = 2$ به دست آورید.

پاسخ: ابتدا مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) \xrightarrow{\text{در ضابطه } f \text{ به جای } x, 2x - 1 \text{ قرار می‌دهیم.}} 3(2x - 1) + a = 6x - 3 + a$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(3x + a) \xrightarrow{\text{در ضابطه } g \text{ به جای } x, 3x + a \text{ قرار می‌دهیم.}} 2(3x + a) - 1 = 6x + 2a - 1$$

$$(fog)(x) = (gof)(x) \Rightarrow 6x - 3 + a = 6x + 2a - 1 \Rightarrow a - 3 = 2a - 1 \Rightarrow a = -2$$

$$(gof)(2) = g(f(2)) \cdot f(x) = 3x - 2 \Rightarrow f(2) = 6 - 2 = 4 \Rightarrow g(f(2)) = g(4) \xrightarrow{g(x) = 2x - 1} 2(4) - 1 = 7$$

مثال

اگر $f = \{(2, -1), (1, 4), (3, 0), (5, 2)\}$ و $g = \{(4, 2), (3, 1), (2, 1), (1, 6)\}$ دو تابع باشند، هر یک از توابع fog و gog را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

پاسخ: برای مشخص کردن تابع fog، ابتدا تابع روی g اثر می‌کند:

$$\left. \begin{array}{l} 4 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} -1 \\ (fog)(4) = -1 \\ 3 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 4 \\ (fog)(3) = 4 \\ 2 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 4 \\ (fog)(2) = 4 \\ 1 \xrightarrow{g} 6 \xrightarrow{f} ? \\ (fog)(1) \text{ وجود ندارد.} \end{array} \right\} \Rightarrow fog = \{(4, -1), (3, 4), (2, 4)\}$$

برای مشخص کردن تابع gog، داریم:

$$(gog)(4) = g(g(4)) = g(2) = 1 \Rightarrow (4, 1) \in gog, (gog)(3) = g(g(3)) = g(1) = 6 \Rightarrow (3, 6) \in gog$$

$$(gog)(2) = g(g(2)) = g(1) = 6 \Rightarrow (2, 6) \in gog, (gog)(1) = g(g(1)) = g(6) \text{ تعریف نشده}$$

$$gog = \{(4, 1), (3, 6), (2, 6)\}$$

بنابراین:

مثال

تابع $h(x) = (x^3 - 1)^2$ را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید (به دو طریق).

پاسخ: روش اول: تابع $y = x^3$ را به عنوان تابع $g(x)$ در نظر می‌گیریم و با قرار دادن x به جای x^3 ، تابع حاصل را $f(x)$ در نظر

$$g(x) = x^3, f(x) = (x - 1)^2 \Rightarrow h(x) = f(g(x)) = f(x^3) = (x^3 - 1)^2$$

می‌گیریم:

روش دوم: تابع $y = x^3 - 1$ را به عنوان تابع $g(x)$ در نظر می‌گیریم و با قرار دادن x به جای $x^3 - 1$ ، تابع حاصل را $f(x)$ در نظر

$$g(x) = x^3 - 1, f(x) = x^2 \Rightarrow h(x) = f(g(x)) = f(x^3 - 1) = (x^3 - 1)^2$$

می‌گیریم:

۲ در ستاره

دامنه تابع مرکب

برای محاسبه دامنه تابع $g \circ f$ دو روش وجود دارد:

روش اول: تابع $g \circ f(x)$ را تشکیل دهیم و دامنه تابع به دست آمده را تعیین کنیم (در این روش نباید ضابطه تابع را در هیچ مرحله‌ای ساده کنیم).

مثال: اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشد، دامنه تابع $g \circ f$ را به دست آورید.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2$$

$$D_{f \circ g} = [0, +\infty), x \geq 0 \Rightarrow (f \circ g)(x) = x$$

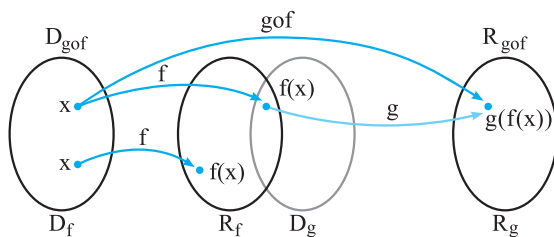
دامنه تابع $y = (\sqrt{x})^2$ مجموعه $[0, +\infty)$ است، بنابراین:

توجه کنید که اگر قبل از تعیین دامنه به جای $(\sqrt{x})^2$ ، x بنویسیم، ضابطه تابع به صورت $(f \circ g)(x) = x$ درمی‌آید که دامنه آن برابر \mathbb{R} خواهد بود. بنابراین ضروری است که ابتدا دامنه تابع را محاسبه کنیم و سپس آن را ساده کنیم.

روش دوم: دامنه تابع مرکب $g \circ f$ ، مجموعه x هایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند:

(۱) در دامنه f قرار داشته باشد.

(۲) $f(x)$ در دامنه g قرار داشته باشد.



$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

بنابراین دامنه تابع $g \circ f$ را می‌توان به صورت مقابل نوشت:

توجه کنید که اگر $f(x)$ در دامنه تابع g وجود نداشته باشد، آن‌گاه مقدار $g(f(x))$ تعریف نشده است.

نکته

$$R_f \cap D_g \neq \emptyset$$

با توجه به تعریف دامنه $g \circ f$ ، شرط آن‌که تابع $g \circ f$ تشکیل شود، آن است که:

مثال: اگر $f(x) = \frac{x-1}{2}$ و $g(x) = \sqrt{x-2}$ دو تابع باشند. آن‌گاه:

(آ) دامنه تابع $g \circ f$ را به کمک تعریف به دست آورید.

(ب) مقدار تابع $f \circ g$ را به ازای $x = 11$ به دست آورید.

پاسخ: (آ) دامنه تابع درجه اول f برابر \mathbb{R} است. برای به دست آوردن دامنه تابع رادیکالی g ، داریم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{2} \geq 2\}$$

طبق تعریف، دامنه تابع $g \circ f$ به صورت مقابل است:

$$\frac{x-1}{2} \geq 2 \Rightarrow x-1 \geq 4 \Rightarrow x \geq 5 \Rightarrow D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\} = [5, +\infty)$$

(ب) مقدار تابع $f \circ g$ به ازای $x = 11$ برابر $f(g(11))$ است: $g(11) = \sqrt{11-2} = 3 \Rightarrow f(g(11)) = f(3) = \frac{3-1}{2} = 1$

محاسبه $f(x)$ با در اختیار داشتن $g(x)$ و $f(g(x))$

اگر ضابطه توابع $g(x)$ و $f(g(x))$ داده شده باشند و بخواهیم ضابطه $f(x)$ را به دست آوریم، کافی است به جای $g(x)$ ، A قرار دهیم و از این تساوی x را برحسب A به دست آوریم و در ضابطه $f(g(x))$ جایگزین کنیم.

مثال: اگر $g(x) = \frac{x-1}{x}$ و $f(g(x)) = 2x$ باشد، ضابطه تابع f را مشخص کنید.

$$g(x) = A \Rightarrow \frac{x-1}{x} = A \Rightarrow x-1 = Ax \Rightarrow x-xA = 1 \Rightarrow x(1-A) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{1-A}$$

$$f(g(x)) = 2x \Rightarrow f(A) = 2 \times \frac{1}{1-A} = \frac{2}{1-A} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{1-x}$$

۲ درسنامه

محاسبه $g(x)$ با در اختیار داشتن $f(g(x))$ و $f(x)$

اگر $f(g(x))$ و $f(x)$ معلوم باشند و $g(x)$ را بخواهیم، ابتدا از روی ضابطه تابع f ، $f(g(x))$ را به دست می آوریم و سپس آن را با ضابطه $f(g(x))$ داده شده برابر قرار می دهیم و از این تساوی ضابطه $g(x)$ را تعیین می کنیم.

مثال اگر $f(g(x)) = 2x$ و $f(x) = \frac{x}{x-1}$ باشد، ضابطه $g(x)$ را مشخص کنید.

پاسخ: از ضابطه $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ، $f(g(x)) = \frac{g(x)}{g(x)-1}$ را به دست می آوریم:

$$\Rightarrow g(x) = 2xg(x) - 2x \Rightarrow g(x) - 2xg(x) = -2x \Rightarrow g(x)(1 - 2x) = -2x \Rightarrow g(x) = \frac{-2x}{1 - 2x}$$

تبدیل نمودار توابع

با رسم نمودار توابع جدید به کمک انتقال از روی نمودار برخی از توابع خاص آشنا می شوید. ابتدا این مطالب را یادآوری می کنیم و سپس رسم های جدیدی را بیان می کنیم.

تغییرات نمودار در راستای محور y ها: فرض کنیم نمودار $y = f(x)$ را در اختیار داشته باشیم و k عددی حقیقی و مثبت باشد. اگر نقطه $A(a, b)$ ، نقطه ای روی نمودار $y = f(x)$ باشد، آن گاه نقطه $A'(a, b+k)$ ، نقطه ای روی نمودار تابع $y = f(x) + k$ می باشد. پس برای رسیدن به نقطه A' از نقطه A ، کافی است نقطه A را به اندازه k واحد به سمت بالا انتقال دهیم. بنابراین:

(۱) برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را k واحد در جهت مثبت محور y ها (به بالا) انتقال دهیم. به همین ترتیب:

(۲) برای رسم نمودار $y = f(x) - k$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را k واحد در جهت منفی محور y ها (به پایین) انتقال دهیم.

رسم نمودار $y = kf(x)$

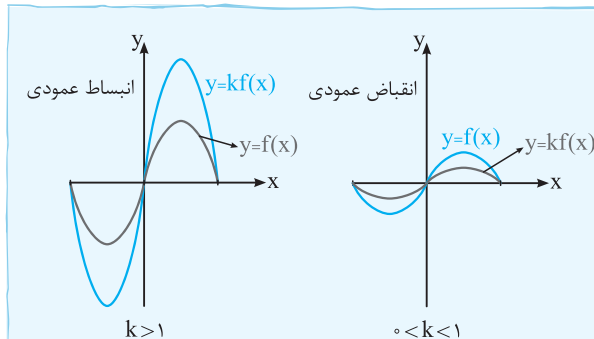
اگر نقطه $A(a, b)$ ، نقطه ای روی نمودار $y = f(x)$ باشد، آن گاه نقطه $A'(a, kb)$ ، $A'(a, kb) \rightarrow y = kf(a) = kb$ از روی $y = f(x) \rightarrow y = kf(x)$ می آید. پس برای مشخص کردن نقطه A' از روی نقطه A ، کافی است عرض نقطه A را k برابر کنیم. بنابراین:

(۳) برای رسم نمودار $y = kf(x)$ ، کافی است عرض همه نقاط واقع بر نمودار $y = f(x)$ را k برابر کنیم.

نکته

در حالت خاص برای رسم نمودار $y = -f(x)$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

نکته



نمودار تابع $y = kf(x)$ به کمک نمودار تابع $y = f(x)$ به دست می آید:

- اگر $k > 1$ ، نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k کشیده می شود که در این حالت می گوئیم نمودار انبساط عمودی یافته است.
- اگر $0 < k < 1$ ، نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k جمع می شود که در این حالت می گوئیم نمودار انقباض عمودی یافته است.
- اگر $k < 0$ ، ابتدا نمودار f نسبت به محور x ها قرینه می شود، سپس با ضریب $|k|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می شود.

نکته

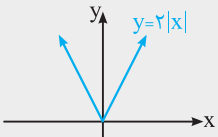
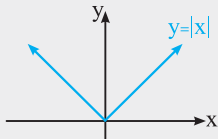
دامنه تابع $y = kf(x) + a$ با دامنه تابع $y = f(x)$ یکی است ولی برد آن ها لزوماً یکی نیست.

درستامه ۲

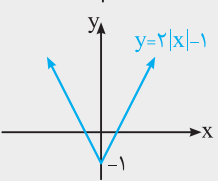
مثال

نمودار تابع $f(x) = 2|x| - 1$ را به کمک نمودار تابع $y = |x|$ رسم کنید.

پاسخ: نمودار تابع $y = |x|$ به صورت مقابل است:



عرض نقاط روی نمودار تابع $y = |x|$ را دو برابر می‌کنیم تا نمودار $y = 2|x|$ به دست بیاید:



نمودار تابع $y = 2|x|$ را به اندازه یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار $y = 2|x| - 1$ رسم شود:

تغییرات نمودار در راستای محور xها: فرض کنید نمودار $y = f(x)$ را در اختیار داشته باشیم و $k > 0$ عددی حقیقی باشد. اگر نقطه‌ای روی نمودار $y = f(x)$ باشد $(f(a) = b)$ ، آن‌گاه نقطه $A'(a+k, b)$ ، نقطه‌ای روی نمودار $y = f(x-k)$ است، زیرا:

$$f((a+k) - k) = f(a) = b$$

برای مشخص کردن نقطه A' از روی نقطه A ، کافی است نقطه A را به اندازه k واحد به سمت راست انتقال دهیم. بنابراین:

(۱) برای رسم نمودار $y = f(x-k)$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را k واحد در جهت مثبت محور x (به سمت راست) منتقل کنیم. به همین ترتیب:

(۲) برای رسم نمودار $y = f(x+k)$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را k واحد در جهت منفی محور x (به سمت چپ) منتقل کنیم. در واقع با تبدیل x به $x+k$ در تابع f و انتقال نمودار f به اندازه k واحد به سمت راست (چپ)، نمودار $f(x-k)$ ($f(x+k)$) به دست می‌آید.

رسم نمودار |f|

مقدار تابع $y = |f(x)|$ ، به ازای تمام مقادیر $x \in D_f$ غیرمنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) می‌باشد:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

پس هیچ قسمتی از نمودار $y = |f(x)|$ در پایین محور x قرار نمی‌گیرد. برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ ، بدون تعیین علامت $f(x)$ و حذف قدرمطلق، از نکته زیر استفاده می‌کنیم:

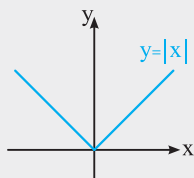
نکته

برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار f زیر محور x هاست، قرینه نمودار f را نسبت به محور x ها رسم کنیم.

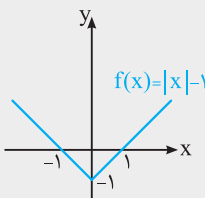
مثال

نمودار تابع $y = ||x| - 1|$ را رسم کنید.

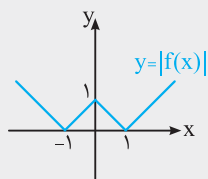
پاسخ: ابتدا نمودار $f(x) = |x| - 1$ را رسم می‌کنیم.



نمودار را به اندازه یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.



در بازه $(-1, 1)$ ، نمودار f زیر محور x قرار دارد. نمودار این قسمت را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = |f(x)|$ به دست آید:



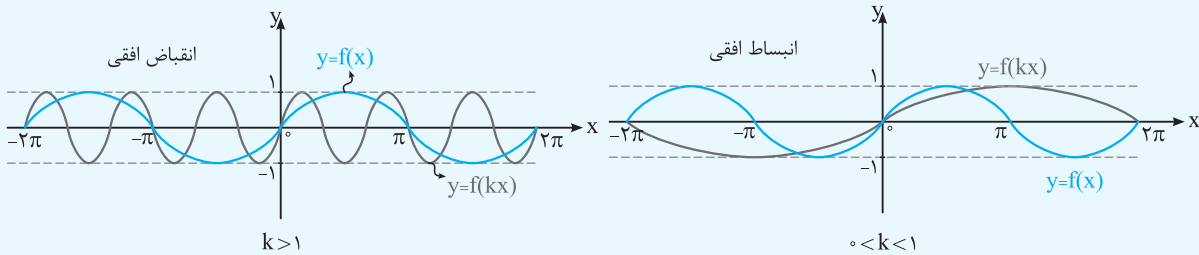
۲ در ستاره

نکته

برای رسم نمودار $y = f(kx)$ ، کافی است طول همه نقاط واقع بر نمودار $y = f(x)$ را بر k تقسیم کنیم، بدون آن که عرض نقاط متناظر تغییری کند.

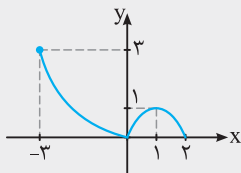
نکته

نمودار تابع $y = f(kx)$ به کمک نمودار تابع $y = f(x)$ به دست می آید:
 اگر $k > 0$ ، نمودار $y = f(kx)$ را می توان با انبساط یا انقباض نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور x ها به دست آورد. در حالتی که $k > 1$ نمودار $y = f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض (نمودار در راستای محور x ها جمع تر می شود) و در حالتی که $0 < k < 1$ نمودار $y = f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط (نمودار در راستای محور x ها بازتر می شود) می شود.

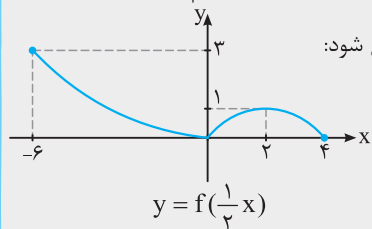


مثال

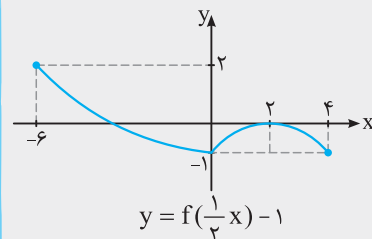
نمودار تابع f به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = f(\frac{x}{3}) - 1$ را رسم کنید.



پاسخ: برای رسم نمودار تابع $y = f(\frac{1}{3}x)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$ ، کافی است طول نقاط روی نمودار f را بر $\frac{1}{3}$ تقسیم کنیم (یا در



۲ ضرب کنیم). پس طول نقاط را دو برابر می کنیم تا طول نقاط روی نمودار $y = f(\frac{1}{3}x)$ مشخص شود:



نمودار $y = f(\frac{1}{3}x)$ را به اندازه یک واحد به سمت پایین انتقال می دهیم:

اگر $A(a, b)$ نقطه ای روی نمودار $y = f(x)$ باشد، آن گاه نقطه $A'(-a, b)$ ، نقطه ای روی نمودار $y = f(-x)$ است. می دانیم A' قرینه نقطه A نسبت به محور y ها است، بنابراین:

نکته

اگر نمودار تابعی را نسبت به محور y ها قرینه کنیم، برای به دست آوردن ضابطه آن، کافی است در ضابطه تابع اولیه، به جای x ، عبارت $-x$ را قرار دهیم، بدون آن که y را تغییر دهیم.

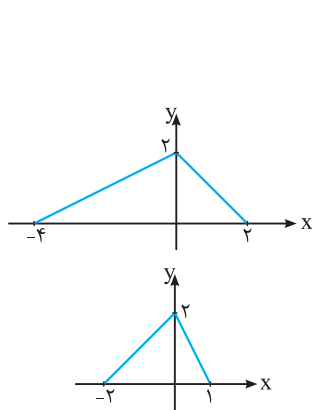
۲ درسنامه

نکته

برای رسم نمودار $y = f(-x)$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

نکته

برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ به کمک نمودار $y = f(x)$ در حالتی که $k < 0$ باشد، ابتدا نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه و سپس با ضریب $\frac{1}{|k|}$ به طور افقی منبسط یا منقبض می‌کنیم.



به عنوان مثال، اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت x باشد، برای رسم نمودار $y = f(-2x)$ ، ابتدا نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم:

حال این نمودار را با ضریب $\frac{1}{2}$ منقبض می‌کنیم (طول نقاط را بر عدد ۲ تقسیم می‌کنیم، بدون آن که عرض نقطه متناظر تغییری کند):

سؤالات امتحانی

۱۵. اگر $f = \{(1, 4), (2, 3), (5, -1), (0, 2)\}$ و $g = \{(4, -2), (-1, 5), (2, 1), (3, 0)\}$ دو تابع باشند، توابع $f \circ g$ ، $g \circ f$ و $g \circ g$ را به دست آورید. (مشابه تمرین ۱ صفحه ۲۳ کتاب درسی)

۱۶. برای دو تابع $f = \{(1, 7), (-2, 4), (3, -5), (2, -5)\}$ و $g = \{(2, 1), (4, -2), (6, 3), (3, 2)\}$ تابع $f \circ g$ را به صورت زوج مرتب بنویسید. (نهایی - دی ۹۵)

۱۷. اگر $f(x) = 2x - \sqrt{x}$ و $g = \{(1, 5), (6, 3), (2, 6)\}$ دو تابع باشند به طوری که $g(f(a)) = 3$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

۱۸. کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

(ا) اگر $f(2) = 1$ و $g(1) = -1$ ، آنگاه $(g \circ f)(2) = -1$

(ب) اگر $f(x) = 2x - 3$ و $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ ، آنگاه $(f \circ g)(1) = f(1)$

(پ) اگر f تابعی با دامنه D_f و برد R_f و g تابعی با دامنه D_g و برد R_g باشد، آنگاه شرط تشکیل تابع $f \circ g$ آن است که $D_f \cap R_g \neq \emptyset$ باشد.

۱۹. جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

(ا) اگر $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = x + 2$ باشد، مقدار تابع $f \circ g$ به ازای $x = 1$ ، است.

(ب) در رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$ ، اگر $0 < k < 1$ ، آنگاه نمودار در امتداد محور x ها، می‌شود.

(پ) دامنه تابع با ضابطه $y = kf(x)$ با دامنه تابع $y = f(x)$ برابر و برد آن‌ها یکسان ($k \neq \pm 1$)

(ت) برای رسم نمودار تابع $g(x) = |x + 1| - 2$ با استفاده از نمودار تابع $f(x) = |x|$ ، نمودار f ، یک واحد روی محور به سمت و واحد روی محور به سمت پایین انتقال پیدا می‌کند.

(نهایی - فراداد ۹۳)

۲۰. توابع $f(x) = \frac{3x}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ داده شده‌اند.

(ا) تابع $f \circ g$ را تشکیل دهید. (ب) دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۲۱. توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ داده شده‌اند. دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید. (ب) تابع gof را تشکیل دهید. (نهایی- فرداد ۹۴)

۲۲. دو تابع $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ را در نظر بگیرید. دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید. (ب) مقدار $(gof)(-3)$ را به دست آورید. (نهایی- فرداد ۹۵)

۲۳. اگر $f(x) = x+3$ و $g(x) = \sqrt{1-x}$ دو تابع باشند. دامنه توابع f و g را به دست آورید. (ب) دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف محاسبه کنید. (ب) ضابطه fog را بنویسید. (نهایی- فرداد ۹۱)

۲۴. دو تابع $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$ داده شده‌اند. ضابطه تابع fog را بنویسید. (ب) دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف تعیین کنید. (نهایی- شهریور ۹۰)

۲۵. توابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = 2x-4$ و $g(x) = \sqrt{x-6}$ داده شده‌اند. ضابطه تابع gof را بنویسید. (ب) دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید. (نهایی- فرداد ۹۲)

۲۶. توابع $f(x) = \sqrt{x-4}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ داده شده‌اند. ضابطه تابع gof را تعیین کنید. (ب) دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف آن به دست آورید. (نهایی- فرداد ۸۹)

۲۷. اگر $f(x) = x+a$ و $g(x) = x^2+bx$ باشد، a و b را طوری تعیین کنید که داشته باشیم: $(fog)(x) = x^2+4x+1$. (نهایی- شهریور ۹۲)

۲۸. اگر $f(x) = 2x+1$ و $g(x) = 3x+k$ باشد، مقدار k را طوری بیابید که $(fog)(x) = (gof)(x)$. (نهایی- شهریور ۸۷)

۲۹. اگر $f(x) = x+a$ و $g(x) = ax^2+bx+c$ باشند، a ، b و c را طوری تعیین کنید که داشته باشیم: $(fog)(x) = x^2-3x+4$. (نهایی- شهریور ۸۸)

۳۰. هر یک از توابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. (مشابه تمرین ۷ صفحه ۲۲ کتاب درسی)

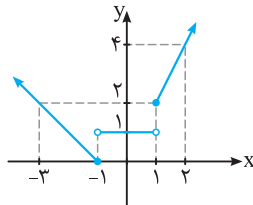
(آ) $y = \sqrt[3]{x^3-1}$ (ب) $y = (2x^3 - x^2 + 5)^4$ (پ) $y = \sqrt{x^2+3}$ (ت) $y = \frac{x^2+2}{x^2-1}$

۳۱. در هر یک از قسمت‌های زیر، با توجه به ضابطه‌های $f(x)$ و $g(x)$ ، معادلات مورد نظر را تشکیل دهید و آن‌ها را حل کنید. (مشابه تمرین ۹ صفحه ۲۳ کتاب درسی)

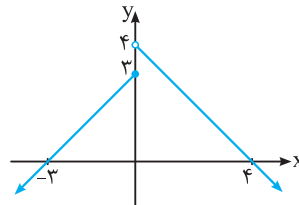
(آ) $f(x) = 4x-1$ ، $g(x) = 5x+2$ ، $(fog)(x) = -23$
 (ب) $f(x) = 3x^2 - 4x - 7$ ، $g(x) = 2x + 5$ ، $(gof)(x) = -1$

۳۲. با توجه به نمودار توابع f و g ، هر یک از مقادیر زیر را به دست آورید. (مشابه تمرین ۸ صفحه ۲۳ کتاب درسی)

(آ) $(fog)(2)$ (ب) $(gof)(0)$ (پ) $(gof)(4)$
 (ت) $(fog)(-1)$ (ث) $(fof)(-4)$ (ج) $(gog)(5)$



نمودار تابع g



نمودار تابع f

۳۳. اگر $f(3x+2) = 9x^2 - 6x$ باشد، ضابطه تابع f را مشخص کنید.

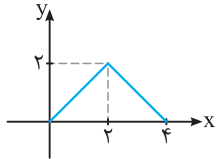
۳۴. اگر $g(x) = \frac{x-1}{x}$ و $f(g(x)) = x+3$ باشد، ضابطه تابع f را مشخص کنید.

(نهایی - دی ۹۰)

۳۵. اگر $(fog)(x) = 8x + 12$ و $f(x) = 2x + 4$ باشند، تابع $g(x)$ را تعیین کنید.

(مشابه تمرین ۳ صفحه ۲۲ کتاب درسی)

۳۶. اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$ باشد، تابع $g(x)$ را به گونه‌ای مشخص کنید که $(fog)(x) = x^2 - 4x + 5$



۳۷. نمودار تابع f با ضابطه $y = f(x)$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار توابع $y = f(x+2)$ و $y = -2f(x) + 1$ را رسم کنید و دامنه و برد هر یک را تعیین کنید.

(نهایی - دی ۹۱)

۳۸. ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x - 3|$ را در بازه $[2, 4]$ رسم کنید، سپس به کمک آن، نمودار تابع $y = f(-x)$ را رسم کنید.

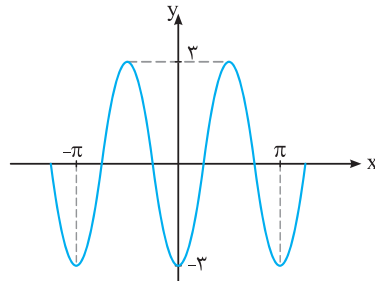
(نهایی - خرداد ۹۲)

۳۹. ابتدا نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را رسم نموده و سپس با استفاده از آن نمودار تابع $g(x) = -2f(x) - 1$ را رسم کنید.

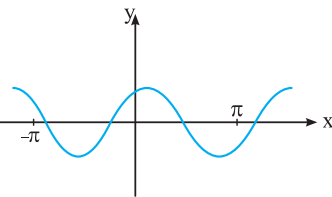
۴۰. با استفاده از نمودار تابع $y = \cos x$ ، نمودار توابع زیر رسم شده است. ضابطه هر نمودار را مشخص کنید. (مشابه تمرین ۱۰ صفحه ۲۳ کتاب درسی)

(ا) $y = \cos 3x$ (ب) $y = \cos(\frac{1}{3}x)$ (پ) $y = -\frac{1}{3} \cos \frac{1}{3}x$

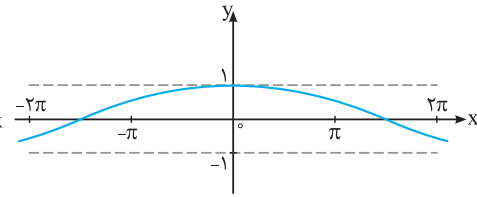
(ت) $y = -3 \cos 2x$ (ث) $y = -\frac{1}{3} \cos x$ (ج) $y = \cos(2x - \frac{\pi}{6})$



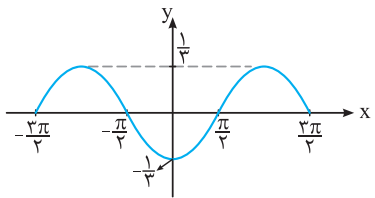
(۳)



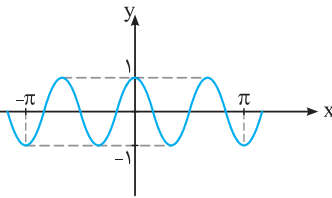
(۲)



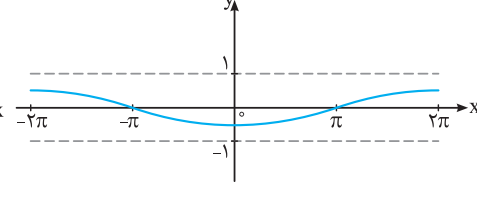
(۱)



(۶)



(۵)



(۴)

(مشابه تمرین ۱۱ صفحه ۲۳ کتاب درسی)

۴۱. با استفاده از نمودار $y = \sin x$ ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

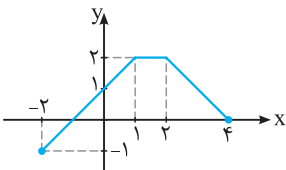
(ا) $y = \sin(\frac{x}{3})$ (ب) $y = -2 \sin(3x)$ (پ) $y = 3 \sin(3x) - 1$ (ت) $y = \cos(2(x + \frac{\pi}{4})) - 1$

۴۲. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

(ا) $f(x) = |\cos x|$, $x \in [-\pi, 2\pi]$ (ب) $f(x) = |x^2 - 2x|$ (پ) $h(x) = |x^3|$ (ت) $t(x) = ||x - 1| - 1|$

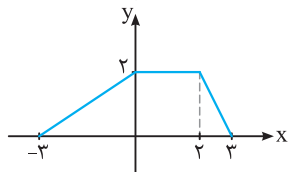
(مشابه تمرین ۱۲ صفحه ۲۳ کتاب درسی)

۴۳. با استفاده از نمودار تابع f ، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.

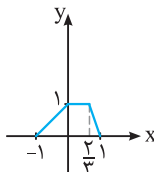


(ا) $y = f(2x) + 1$ (ب) $y = \frac{1}{2} f(-x) - 1$

(پ) $y = 2f(x+1) - 1$ (ت) $y = -f(\frac{x}{2})$



نمودار f



نمودار $y = af(bx) + c$

۴۴. نمودار تابع $y = f(x)$ و $y = af(bx) + c$ به صورت مقابل می‌باشند.

مقادیر a ، b و c را به دست آورید.

پاسخ‌های تشریحی

پ) درست است، زیرا برای آن‌که مقدار $f(g(x))$ تعریف شده باشد، باید $g(x)$ در دامنه تابع f قرار داشته باشد، پس باید داشته باشیم $D_f \cap R_g \neq \emptyset$

۱۹ آ) $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3) = 3^2 - 1 = 8$

ب) منبسط (پ) است - نیست (ت) x ها - چپ - دو - y ها

۲۰ آ) اگر در تابع f به جای x ، $g(x) = \sqrt{x}$ قرار دهیم، آنگاه ضابطه تابع $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ به دست می‌آید:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

ب) طبق تعریف، داریم: دامنه توابع f و g به صورت زیر هستند:

$$f(x) = \frac{3x}{x-1}, x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow D_g = [0, +\infty)$$

$$g(x) \in D_f \Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow \sqrt{x} \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \quad \text{بنابراین:}$$

$$= \{x \in [0, +\infty) \mid x \neq 1\} = [0, 1) \cup (1, +\infty)$$

۲۱ آ) طبق تعریف، داریم: دامنه تابع $f(x) = \sin x$ برابر \mathbb{R} است و داریم:

$$g(x) = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1$$

$$\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_g = [-1, 1]$$

$$f(x) \in D_g \Rightarrow \sin x \in [-1, 1] \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1$$

می‌دانیم $\sin x$ همواره عددی از -1 تا 1 است، بنابراین نامساوی $-1 \leq \sin x \leq 1$ به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ برقرار است. پس داریم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sin x) \quad \text{ب)}$$

$$= \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$$

۲۲ آ) طبق تعریف، داریم: دامنه توابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{1-x} \Rightarrow 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, 1]$$

$$g(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_g = [1, +\infty)$$

$$f(x) \in D_g \Rightarrow \sqrt{1-x} \in [1, +\infty) \Rightarrow \sqrt{1-x} \geq 1$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} 1-x \geq 1 \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0]$$

$$\Rightarrow D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in (-\infty, 1] \mid x \in (-\infty, 0]\} = (-\infty, 0]$$

۱۵ در تابع $f \circ g$ ، x را باید از دامنه تابع g اختیار کنیم:

$$\begin{cases} \text{تعریف نشده} & (f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(-2) \\ (f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(5) = -1 \\ (f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(0) = 2 \\ (f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(1) = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f \circ g = \{(-1, -1), (3, 2), (2, 4)\}$$

در تابع $g \circ f$ ، x را باید از دامنه تابع f اختیار کنیم:

$$\begin{cases} (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 0 \\ (g \circ f)(5) = g(f(5)) = g(-1) = 5 \\ (g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(4) = -2 \\ (g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(3) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g \circ f = \{(2, 0), (5, 5), (1, -2), (0, 1)\}$$

در تابع $g \circ g$ ، x را باید از دامنه تابع g اختیار کنیم:

$$\begin{aligned} (g \circ g)(4) &= g(g(4)) = g(-2) \quad \text{تعریف نشده} \\ (g \circ g)(-1) &= g(g(-1)) = g(5) \quad \text{تعریف نشده} \\ (g \circ g)(2) &= g(g(2)) = g(1) \quad \text{تعریف نشده} \\ (g \circ g)(3) &= g(g(3)) = g(0) \quad \text{تعریف نشده} \end{aligned}$$

بنابراین تابع $g \circ g$ تشکیل نمی‌شود.

۱۶ x ها را باید از دامنه g انتخاب کنیم:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(2) &= f(g(2)) = f(1) = 7 \\ (f \circ g)(4) &= f(g(4)) = f(-2) = 4 \\ (f \circ g)(6) &= f(g(6)) = f(3) = -5 \\ (f \circ g)(3) &= f(g(3)) = f(2) = -5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f \circ g = \{(2, 7), (4, 4), (6, -5), (3, -5)\}$$

۱۷

$$f(x) = 2x - \sqrt{x} \Rightarrow f(a) = 2a - \sqrt{a}, g(f(a)) = 3 \cdot g(6) = 3$$

$$\Rightarrow f(a) = 6 \Rightarrow 2a - \sqrt{a} = 6 \Rightarrow 2a - 6 = \sqrt{a}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} (2a - 6)^2 = a \Rightarrow 4a^2 - 24a + 36 = a$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 25a + 36 = 0, \Delta = (-25)^2 - 4(4)(36) = 49$$

$$a = \frac{25 \pm 7}{2(4)} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{32}{8} = 4 \\ a = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} \end{cases}$$

هر دو عدد به دست آمده برای a را در معادله $2a - 6 = \sqrt{a}$ قرار می‌دهیم. $a = 4$ ، در معادله صدق می‌کند ولی $a = \frac{9}{4}$ در این معادله صدق نمی‌کند. پس فقط $a = 4$ قابل قبول است.

۱۸ آ) درست است، زیرا: $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = -1$

ب) نادرست است، زیرا:

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(\sqrt{1^2 + 3}) = f(2) = 4 - 3 = 1$$

$$f(1) = 2 - 3 = -1 \Rightarrow (f \circ g)(1) \neq f(1)$$

(ب) $f(x) = \sqrt{x-4} \Rightarrow x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \Rightarrow D_f = [4, +\infty)$

$g(x) = \frac{1}{x^2-1} \Rightarrow x^2-1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq 4 \mid \sqrt{x-4} \neq \pm 1\}$

$\sqrt{x-4} \neq 1 \Rightarrow x-4 \neq 1 \Rightarrow x \neq 5$, $\sqrt{x-4} \neq -1$ (برقرار است.)

$\Rightarrow D_{gof} = \{x \geq 4 \mid x \neq 5\} = [4, 5) \cup (5, +\infty)$

ضابطه (fog)(x) را به دست می‌آوریم و آن را برابر عبارت

(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 4x + 1) : قرار می‌دهیم:

= (x^2 + 4x + 1) + a = x^2 + 4x + a + 1

(fog)(x) = x^2 + 4x + 1 \Rightarrow x^2 + 4x + a + 1 = x^2 + 4x + 1

\Rightarrow b = 4 , a = 1

ضابطه توابع fog و gof را به دست می‌آوریم و آن‌ها را مساوی هم

(fog)(x) = f(g(x)) \frac{g(x) = 2x+k}{f(2x+k)} : قرار می‌دهیم:

\frac{f(x) = 2x+1}{2(2x+k)+1} = 2x+k \quad (1)

(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = 2(2x+1) + k = 4x + 2 + k \quad (2)

(fog)(x) = (gof)(x) \xrightarrow{(1),(2)} 2x+k+1 = 4x+2+k

\Rightarrow 2k - k = 2 - 1 \Rightarrow k = 2

ضابطه (fog)(x) را به دست می‌آوریم و آن را مساوی عبارت

(fog)(x) = f(g(x)) = f(ax^2 + bx + c) : قرار می‌دهیم:

= (ax^2 + bx + c) + a = ax^2 + bx + (a+c)

(fog)(x) = x^2 - 3x + 4

\Rightarrow ax^2 + bx + (a+c) = x^2 - 3x + 4 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ a+c=4 \xrightarrow{a=1} c=3 \end{cases}

(آ) تابع y = x^3 را به عنوان تابع g(x) و با قرار دادن x به

جای x^3، تابع y = \sqrt[3]{x-1} را به عنوان تابع f(x) در نظر می‌گیریم:

g(x) = x^3 , f(x) = \sqrt[3]{x-1}

\Rightarrow (fog)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = \sqrt[3]{x^3-1}

(ب) تابع y = 2x^3 - x^2 + 5 را به عنوان تابع g(x) و با قرار دادن x به

جای g(x)، تابع y = x^4 را به عنوان تابع f(x) در نظر می‌گیریم:

g(x) = 2x^3 - x^2 + 5 , f(x) = x^4

\Rightarrow (fog)(x) = f(2x^3 - x^2 + 5) = (2x^3 - x^2 + 5)^4

(ب) $g(x) = x^2, f(x) = \sqrt{x+3} \Rightarrow (fog)(x) = f(x^2) = \sqrt{x^2+3}$

(ت) $g(x) = x^2, f(x) = \frac{x+2}{x-1} \Rightarrow f(g(x)) = f(x^2) = \frac{x^2+2}{x^2-1}$

(ب) مقدار (gof)(-3) با مقدار g(f(-3)) برابر است، داریم:

$f(x) = \sqrt{1-x} \Rightarrow f(-3) = \sqrt{1-(-3)} = 2$

\Rightarrow g(f(-3)) = g(2) = \frac{g(x) = \sqrt{x-1}}{\sqrt{2-1}} = 1

(آ) $f \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$ دوجمله‌ای از درجه یک می‌باشد.

$g \Rightarrow 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$ تابع رادیکالی با فرجه زوج می‌باشد.

\Rightarrow D_g = (-\infty, 1]

(ب) $D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x+3 \in (-\infty, 1]\}$

= $\{x \in \mathbb{R} \mid x+3 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\} = (-\infty, -2]$

(پ) $(fog)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x) = \sqrt{1-x}}{f(\sqrt{1-x})}$

$\frac{f(x) = x+3}{\sqrt{1-x}+3}$

(آ) $g(x) = \frac{1}{x-1}$
(fog)(x) = f(g(x)) = \frac{f(\frac{1}{x-1})}{\frac{1}{x-1}}

$f(x) = \frac{x+2}{x-3} \Rightarrow \frac{1}{x-1} + 2 = \frac{1+2(x-1)}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1}$
 $\frac{1}{x-1} - 3 = \frac{1-3(x-1)}{x-1} = \frac{4-3x}{x-1}$

f و g هر دو تابع کسری گویا هستند، بنابراین:

$f(x) = \frac{x+2}{x-3} \xrightarrow{x-3 \neq 0} D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

$g(x) = \frac{1}{x-1} \xrightarrow{x-1 \neq 0} D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} - \{1\} \mid \frac{1}{x-1} \in \mathbb{R} - \{3\}\}$

$\frac{1}{x-1} \in \mathbb{R} - \{3\} \Rightarrow \frac{1}{x-1} \neq 3 \Rightarrow x-1 \neq \frac{1}{3} \Rightarrow x \neq \frac{4}{3}$

\Rightarrow D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} - \{1\} \mid x \neq \frac{4}{3}\} = \mathbb{R} - \{1, \frac{4}{3}\}

(آ) $(gof)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x) = 2x-4}{g(2x-4)}$

$\frac{g(x) = \sqrt{x-6}}{\sqrt{(2x-4)-6}} = \sqrt{2x-10}$

(ب) دامنه تابع gof با استفاده از تعریف به صورت زیر است:

$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$, $f(x) = 2x-4 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

$g(x) = \sqrt{x-6} \Rightarrow x-6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 6 \Rightarrow D_g = [6, +\infty)$

$D_{gof} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x-4 \in [6, +\infty)\}$

بنابراین:

$2x-4 \in [6, +\infty) \Rightarrow 2x-4 \geq 6 \Rightarrow 2x \geq 10 \Rightarrow x \geq 5$

\Rightarrow D_{gof} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\} = [5, +\infty)

(آ) $(gof)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x) = \sqrt{x-4}}{g(\sqrt{x-4})}$

$g(x) = \frac{1}{x^2-1} \Rightarrow \frac{1}{(\sqrt{x-4})^2-1} = \frac{1}{(x-4)-1} = \frac{1}{x-5}$