درسنامه ۴

محاسبهٔ توان‌های بزرگ در یک ماتریس $(n \geq ۵)$

برای یافتن توان‌های بزرگ یک ماتریس مانند A، معمولاً ماتریس $A^۲$ (در صورت لزوم $A^۳$) را می‌یابیم تا الگویی برای محاسبهٔ A^n به‌دست آید.

مثال **اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{۳۰} - A^{۲۹}$ را بیابید.**

پاسخ: ابتدا ماتریس $A^۲$ را می‌یابیم:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^۲ = I \begin{cases} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۱۵}} (A^۲)^{۱۵} = (I)^{۱۵} \Rightarrow A^{۳۰} = I \quad (I) \\ \xrightarrow[\text{طرفین به توان ۱۴}]{} (A^۲)^{۱۴} = (I)^{۱۴} \Rightarrow A^{۲۸} = I \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } A} A^{۲۹} = A \quad (II) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(I) ، (II)} A^{۳۰} - A^{۲۹} = I - A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

مثال **اگر $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$ و $a_{ij} = \begin{cases} -۲ & i+j=۴ \\ ۰ & i+j \neq ۴ \end{cases}$ باشند، آن‌گاه ماتریس $A^{۹۹}$ را به‌دست آورید.**

پاسخ: ابتدا ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کرده و سپس $A^۲$ را می‌یابیم:

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۲ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۲ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۲ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^۲ = ۴I \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۴۹}} (A^۲)^{۴۹} = (۴I)^{۴۹} \Rightarrow A^{۹۸} = ۴^{۴۹}I \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } A} A^{۹۹} = ۴^{۴۹}A$$

مثال **اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های $A^{۵۰}$ را بیابید.**

پاسخ: ابتدا ماتریس $A^۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

ماتریس $A^۲$ الگویی به ما نمی‌دهد؛ پس ماتریس $A^۳$ را می‌یابیم:

$$A^۳ = A \times A^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۳ = -I \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۱۶}} (A^۳)^{۱۶} = (-I)^{۱۶} \Rightarrow A^{۴۸} = I$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } A^۲} A^{۵۰} = A^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{۵۰} \text{ مجموع درایه‌های } = ۰ + (-۱) + ۱ + (-۱) = -۱$$

مثال **اگر $A^۲ + A + I = \bar{O}$، آن‌گاه $A^{۳۵}$ را به‌دست آورید.**

پاسخ: ابتدا $A^۲$ را می‌یابیم:

$$A^۲ + A + I = \bar{O} \Rightarrow A^۲ = -A - I \quad (*)$$

ماتریس $A^۲$ الگویی به ما نمی‌دهد؛ پس ماتریس $A^۳$ را می‌یابیم:

$$\xrightarrow{\text{طرفین } (*) \text{ ضرب در } A} A^۳ = -A^۲ - A \stackrel{(*)}{=} -(-A-I) - A = I$$

$$\Rightarrow A^۳ = I \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۱۱}} A^{۳۳} = I \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در} A^۲} A^{۳۵} = A^۲ = -A - I$$

درسنامه ۴

مثال

اگر $A^2 + 2A = \bar{O}$ آن‌گاه A^9 را بیابید.

پاسخ:

$$A^2 + 2A = \bar{O} \Rightarrow A^2 = (-2)^1 A \quad (I)$$

برای یافتن الگوی مناسب، ماتریس A^3 را نیز می‌یابیم.

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین (I) در A}} A^3 = -2A^2 \overset{(I)}{=} -2(-2A) = (-2)^2 A \Rightarrow A^3 = (-2)^2 A \quad (II)$$

$$(I),(II) \Rightarrow A^9 = (-2)^8 A = 2^8 A$$

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های A^{20} را محاسبه کنید.

پاسخ: ابتدا ماتریس A^2 را می‌یابیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = 2^1 A \quad (I)$$

برای یافتن الگوی مناسب، ماتریس A^3 را نیز می‌یابیم:

$$\xrightarrow{\text{طرفین (I) ضرب در A}} A^3 = 2A^2 \overset{(I)}{=} 2(2A) = 2^2 A \Rightarrow A^3 = 2^2 A \quad (II)$$

$$\Rightarrow (I),(II) \Rightarrow A^{20} = 2^{19} A$$

$$\Rightarrow (\text{مجموع درایه‌های } A^{20}) = [\text{مجموع درایه‌های } (2^{19}A)] = 2^{19} \times (\text{مجموع درایه‌های } A) = 2^{19} \times 8 = 2^{19} \times 2^3 = 2^{22}$$

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، آن‌گاه ماتریس A^{50} را بیابید.

پاسخ: ابتدا ماتریس A^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^{1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A^{2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای یافتن الگوی مناسب، ماتریس A^3 را نیز می‌یابیم:

$$A^{3} = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با مقایسهٔ ماتریس‌های A^1، A^2 و A^3 نتیجه می‌گیریم که فقط درایهٔ سطر اول و ستون دوم در آن‌ها تغییر می‌کند. به این‌صورت که مقدار آن همواره با توان ماتریس برابر است. پس:

$$A^{50} = \begin{bmatrix} 1 & 50 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه ماتریس A^{1397} را بیابید.

پاسخ: برای یافتن الگوی مناسب، ماتریس‌های A^2 و A^3 را می‌یابیم:

$$A^{1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A^{2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad A^{3} = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

با مقایسهٔ ماتریس‌های A^1، A^2 و A^3 نتیجه می‌گیریم که درایهٔ سطر اول و ستون اول آن‌ها یک واحد از توان بیش‌تر و درایهٔ سطر اول و ستون دوم آن‌ها قرینهٔ توان و ... می‌باشد. پس:

$$A^n = \begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & 1-n \end{bmatrix} \Rightarrow A^{1397} = \begin{bmatrix} 1398 & -1397 \\ 1397 & -1396 \end{bmatrix}$$

مثال

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های سطر اول A^{10} را به‌دست آورید.

درسنامه ۴

پاسخ: برای یافتن الگوی مناسب، ماتریس‌های $A^۲$ و $A^۳$ را می‌یابیم:

$$A=\begin{bmatrix}۱&۳&۳\\ ۰&۱&۰\\ ۰&۰&۱\end{bmatrix},\quad A^۲=\begin{bmatrix}۱&۳&۳\\ ۰&۱&۰\\ ۰&۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۳&۳\\ ۰&۱&۰\\ ۰&۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۶&۶\\ ۰&۱&۰\\ ۰&۰&۱\end{bmatrix},\quad A^۳=A\times A^۲=\begin{bmatrix}۱&۳&۳\\ ۰&۱&۰\\ ۰&۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۶&۶\\ ۰&۱&۰\\ ۰&۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۹&۹\\ ۰&۱&۰\\ ۰&۰&۱\end{bmatrix}$$

با مقایسهٔ سطر اول ماتریس‌های $A^۱$، $A^۲$ و $A^۳$ نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
&A^۱ \text{ سطر اول } =\begin{bmatrix}۱&۳\times۱&۳\times۱\end{bmatrix}\\
&A^۲ \text{ سطر اول } =\begin{bmatrix}۱&۳\times۲&۳\times۲\end{bmatrix}\\
&A^۳ \text{ سطر اول } =\begin{bmatrix}۱&۳\times۳&۳\times۳\end{bmatrix}\\
&\qquad\vdots\\
&A^{۱۰} \text{ سطر اول } =\begin{bmatrix}۱&۳\times۱۰&۳\times۱۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۳۰&۳۰\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

بنابراین مجموع درایه‌های سطر اول $A^{۱۰}$ برابر است با: $۱+۳۰+۳۰=۶۱$

محاسبهٔ توان n ام برخی از ماتریس های خاص

مثال ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix}a&۰&۰\\ ۰&b&۰\\ ۰&۰&c\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

آ) ماتریس‌های $A^۲$ و $A^۳$ را بیابید. **ب) قانونی برای محاسبهٔ A^n بیان کنید.**

پاسخ: آ)

$$A=\begin{bmatrix}a&۰&۰\\ ۰&b&۰\\ ۰&۰&c\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲=\begin{bmatrix}a&۰&۰\\ ۰&b&۰\\ ۰&۰&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&۰&۰\\ ۰&b&۰\\ ۰&۰&c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^۲&۰&۰\\ ۰&b^۲&۰\\ ۰&۰&c^۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^۳=A\times A^۲=\begin{bmatrix}a&۰&۰\\ ۰&b&۰\\ ۰&۰&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a^۲&۰&۰\\ ۰&b^۲&۰\\ ۰&۰&c^۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^۳&۰&۰\\ ۰&b^۳&۰\\ ۰&۰&c^۳\end{bmatrix}$$

ب) برای به توان رساندن یک ماتریس قطری، کافی است درایه‌های روی قطر اصلی را بـه تـوان برسانیم و بقیهٔ درایه‌ها را عیناً بنویسیم. یعنی:

$$\begin{bmatrix}a&۰&۰\\ ۰&b&۰\\ ۰&۰&c\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a^n&۰&۰\\ ۰&b^n&۰\\ ۰&۰&c^n\end{bmatrix}$$

مثال ماتریس $A=\begin{bmatrix}۰&۰&k\\ ۰&k&۰\\ k&۰&۰\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

آ) ماتریس‌های $A^۲$ و $A^۳$ را بیابید. **ب) برای محاسبهٔ A^n قانونی بیان کنید.**

پاسخ: آ)

$$A=\begin{bmatrix}۰&۰&k\\ ۰&k&۰\\ k&۰&۰\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲=\begin{bmatrix}۰&۰&k\\ ۰&k&۰\\ k&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۰&k\\ ۰&k&۰\\ k&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k^۲&۰&۰\\ ۰&k^۲&۰\\ ۰&۰&k^۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^۳=A\times A^۲=\begin{bmatrix}۰&۰&k\\ ۰&k&۰\\ k&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k^۲&۰&۰\\ ۰&k^۲&۰\\ ۰&۰&k^۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&k^۳\\ ۰&k^۳&۰\\ k^۳&۰&۰\end{bmatrix}$$

ب) برای محاسبهٔ توان nاُم داریم:

$$A=\begin{bmatrix}۰&۰&k\\ ۰&k&۰\\ k&۰&۰\end{bmatrix}\Rightarrow A^n=\begin{cases}\begin{bmatrix}k^n&۰&۰\\ ۰&k^n&۰\\ ۰&۰&k^n\end{bmatrix} & \text{زوج } n\\[2ex] \begin{bmatrix}۰&۰&k^n\\ ۰&k^n&۰\\ k^n&۰&۰\end{bmatrix} & \text{فرد } n\end{cases}$$

سـؤالات امتـحـانی

۴۱. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، A^{11} را بیابید.

۴۲. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^7 - A^4$ را بیابید.

۴۳. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ ماتریس A^{10}

۴۴. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، در ماتریس A^{100} مجموع درایه‌ها را بیابید.

۴۵. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه A^{13} را بیابید.

۴۶. اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه A^{50} را بیابید.

۴۷. اگر $A^2 - \frac{1}{2}A = \bar{O}$ آن‌گاه A^8 را بیابید.

۴۸. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه ماتریس A^{13} را محاسبه کنید.

۴۹. اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه A^9 را بیابید.

۵۰. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $BA^n = \begin{bmatrix} 4 & 41 \\ 3 & 32 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه n را به‌دست آورید.

۵۱. اگر $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ و $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i \le j \\ 0 & i > j \end{cases}$ باشد، در ماتریس A^{20} درایه‌های ستون دوم را بیابید.

۵۲. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^{10} را بیابید.

۵۳. اگر A ماتریس مربعی و $A^2 = \bar{O}$ باشد، حاصل $(A+2I)^3$ را بیابید.

۵۴. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$، ماتریس $A^8 - A^7$ را بیابید.

۵۵. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض است.

آ) ماتریس A^3 را به‌دست آورید.

ب) برای محاسبهٔ A^n قانونی بیان کنید.

۵۶. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^{10} را محاسبه کنید.

پاسخ‌های تشریحی

۴۱ ابتدا ماتریس $A^۲$ را می‌یابیم.

$$A^۲ = \begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^۲ = -I \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۵}} (A^۲)^۵ = (-I)^۵ \Rightarrow A^{۱۰} = -I$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در A}} A^{۱۱} = -A = \begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$$

۴۲ ابتدا ماتریس $A^۲$ را می‌یابیم:

$$A^۲ = \begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & -۲\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A^۲ = I \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳}} (A^۲)^۳ = (I)^۳ \Rightarrow A^۶ = I \xrightarrow{\times A} A^۷ = A \\ A^۲ = I \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (A^۲)^۲ = (I)^۲ \Rightarrow A^۴ = I \end{cases}$$

$$A^۷ - A^۴ = A - I = \begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & -۲\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۳ & -۳\end{bmatrix}$$

۴۳

$$A = \begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴ & -۲\\ -۳ & ۱\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-۲ & ۰\\ ۰ & -۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = -۲I \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۱۰}} A^{۱۰} = (-۲I)^{۱۰} = ۲^{۱۰} I$$

۴۴ ابتدا ماتریس $A^۲$ را می‌یابیم:

$$A^۲ = \begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۱ & -۱\end{bmatrix}$$

ماتریس $A^۲$ الگویی به ما نمی‌دهد. پس ماتریس $A^۳$ را نیز می‌یابیم:

$$A^۳ = A \times A^۲ = \begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۱ & -۱\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^۳ = -I \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳۳}} (A^۳)^{۳۳} = (-I)^{۳۳} \Rightarrow A^{۹۹} = -I$$

$$\xrightarrow{\times A} A^{۱۰۰} = -A = \begin{bmatrix}-۱ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌ها در ماتریس $A^{۱۰۰}$ برابر است با: $-۱-۱+۱+۰=-۱$

۴۵ ابتدا ماتریس $A^۲$ را می‌یابیم:

$$A^۲ = \begin{bmatrix}۱ & -\sqrt{۳}\\ \sqrt{۳} & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -\sqrt{۳}\\ \sqrt{۳} & ۱\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-۲ & -۲\sqrt{۳}\\ ۲\sqrt{۳} & -۲\end{bmatrix}$$

ماتریس $A^۲$ الگویی به ما نمی‌دهد، پس ماتریس $A^۳$ را نیز می‌یابیم:

$$\Rightarrow A^۳ = A \times A^۲ = \begin{bmatrix}۱ & -\sqrt{۳}\\ \sqrt{۳} & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & -۲\sqrt{۳}\\ ۲\sqrt{۳} & -۲\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-۸ & ۰\\ ۰ & -۸\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^۳ = -۸I \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۴}} (A^۳)^۴ = (-۸I)^۴$$

$$\Rightarrow A^{۱۲} = ۸^۴ I \xrightarrow{\times A} A^{۱۳} = ۸^۴ A$$

۴۶ ابتدا $A^۲$ را می‌یابیم:

$$A^۲ = \begin{bmatrix}\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^۲ = A \quad (I)$$

برای یافتن الگوی مناسب، $A^۳$ را نیز می‌یابیم:

$$\xrightarrow{\text{طرفین (I) ضرب در A}} A^۳ = A^۲ \overset{(I)}{=} A \Rightarrow A^۳ = A \qquad (II)$$

$$(I),(II) \Rightarrow A^{۵۰} = A$$

۴۷

$$A^۲ - \frac{۱}{۲}A = \bar{O} \Rightarrow A^۲ = (\frac{۱}{۲})^۱ A \qquad (I)$$

برای یافتن الگوی مناسب، $A^۳$ را نیز می‌یابیم:

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین (I) در A}} A^۳ = \frac{۱}{۲}A^۲ \overset{(I)}{=} \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}A) = (\frac{۱}{۲})^۲ A$$

$$\Rightarrow A^۳ = (\frac{۱}{۲})^۲ A \quad (II)$$

$$(I),(II) \Rightarrow A^۸ = (\frac{۱}{۲})^۷ A$$

۴۸ ابتدا ماتریس $A^۲$ را می‌یابیم:

$$A^۲ = \begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۱\\ -۱ & ۱ & -۱\\ ۱ & -۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۱\\ -۱ & ۱ & -۱\\ ۱ & -۱ & ۱\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۳ & -۳ & ۳\\ -۳ & ۳ & -۳\\ ۳ & -۳ & ۳\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^۲ = ۳^۱ A \quad (I)$$

برای یافتن الگوی مناسب، $A^۳$ را نیز می‌یابیم:

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین (I) در A}} A^۳ = ۳A^۲ \overset{(I)}{=} ۳(۳A) = ۳^۲ A$$

$$\Rightarrow A^۳ = ۳^۲ A \quad (II)$$

$$(I),(II) \Rightarrow A^{۱۳} = ۳^{۱۲} A$$

۴۹ ابتدا ماتریس $A^۲$ را می‌یابیم:

$$A^۲ = \begin{bmatrix}-۱ & -۱ & -۱\\ -۱ & -۱ & -۱\\ -۱ & -۱ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & -۱ & -۱\\ -۱ & -۱ & -۱\\ -۱ & -۱ & -۱\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۳ & ۳ & ۳\\ ۳ & ۳ & ۳\\ ۳ & ۳ & ۳\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^۲ = (-۳)^۱ A \qquad (I)$$

برای یافتن الگوی مناسب، $A^۳$ را نیز می‌یابیم:

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین (I) در A}} A^۳ = -۳A^۲ \overset{(I)}{=} -۳(-۳A) = (-۳)^۲ A$$

$$\Rightarrow A^۳ = (-۳)^۲ A \qquad (II)$$

$$(I),(II) \Rightarrow A^۹ = (-۳)^۸ A$$

۵۰ ابتدا ماتریس A^2 را می‌یابیم:

$$A^{1}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\quad \Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$$

برای یافتن الگوی مناسب، A^3 را نیز می‌یابیم:

$$\Rightarrow A^{3}=A\times A^2=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$$

با مقایسهٔ ماتریس‌های A، A^2 و A^3 نتیجه می‌گیریم:

$$A^{n}=\begin{bmatrix}1&n\\0&1\end{bmatrix}$$

حال ماتریس BA^n را محاسبه می‌کنیم:

$$BA^n=\begin{bmatrix}4&1\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&n\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&4n+1\\3&3n+2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض}}\begin{bmatrix}4&4n+1\\3&3n+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&41\\3&32\end{bmatrix}\Rightarrow 4n+1=41\Rightarrow n=10$$

---

۵۱ ابتدا ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}_{3\times3}$$

برای یافتن الگوی مناسب باید ماتریس‌های A^2 و A^3 را بیابیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=A\times A^2=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&6\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$$

با مقایسهٔ ستون دوم ماتریس‌های A، A^2 و A^3 نتیجه می‌گیریم ستون دوم A^{20} به‌صورت $\begin{bmatrix}20\\1\\0\end{bmatrix}$ می‌باشد.

---

۵۲ برای یافتن الگوی مناسب باید ماتریس‌های A^2 و A^3 را بیابیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1&3\\0&0&4\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&3\\0&0&4\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&4\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3=A\times A^2=\begin{bmatrix}0&1&3\\0&0&4\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&4\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3=\bar{O}\xrightarrow{\times A}A^4=\bar{O}\Rightarrow\dots\Rightarrow A^{10}=\bar{O}$$

۵۳

$$A^2=\bar{O}\quad(I)$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین (I) در A}}A^3=\bar{O}\quad(II)$$

از آن‌جا که $AI=IA$، پس برای دو ماتریس A و I اتحادهای جبری برقرار است و داریم:

$$(A+2I)^3=A^3+6A^2+12A+8I\overset{(I),(II)}{=\!=}\bar{O}+\bar{O}+12A+8I=12A+8I$$

---

۵۴ **روش اول:** ابتدا ماتریس A^2 را می‌یابیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

$$\begin{cases}A^2=I\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۴}}(A^2)^4=I^4\Rightarrow A^8=I\\ A^2=I\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳}}(A^2)^3=I^3\Rightarrow A^6=I\xrightarrow{\times A}A^7=A\end{cases}$$

$$\Rightarrow A^8-A^7=I-A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix}$$

روش دوم: A یک ماتریس قطری است. پس برای به توان رساندن آن کافی است درایه‌های قطر اصلی را به توان برسانیم و بقیهٔ درایه‌ها را نیز بدون تغییر بنویسیم:

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}A^8=\begin{bmatrix}1^8&0\\0&(-1)^8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\\ A^7=\begin{bmatrix}1^7&0\\0&(-1)^7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$\Rightarrow A^8-A^7=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix}$$

---

۵۵ آ) ابتدا ماتریس A^2 و سپس A^3 را می‌یابیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&9&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^2&0&0\\0&(-3)^2&0\\0&0&1^2\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0&0\\0&9&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&0&0\\0&-27&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^3&0&0\\0&(-3)^3&0\\0&0&1^3\end{bmatrix}$$

ب) برای به توان رساندن یک ماتریس قطری، کافی است درایه‌های قطر اصلی را به توان برسانیم و بقیهٔ درایه‌ها را بدون تغییر بنویسیم.

$$A=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}\Rightarrow A^n=\begin{bmatrix}a^n&0&0\\0&b^n&0\\0&0&c^n\end{bmatrix}$$

---

۵۶ **روش اول:** ابتدا ماتریس A^2 را می‌یابیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2=4I\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۵}}(A^2)^5=(4I)^5\Rightarrow A^{10}=4^5I=2^{10}I$$

روش دوم: می‌دانیم:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&k\\0&k&0\\k&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow A^n=\begin{cases}\begin{bmatrix}k^n&0&0\\0&k^n&0\\0&0&k^n\end{bmatrix} & \text{زوج } n\\ \begin{bmatrix}0&0&k^n\\0&k^n&0\\k^n&0&0\end{bmatrix} & \text{فرد } n\end{cases}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{زوج } n}A^{10}=\begin{bmatrix}2^{10}&0&0\\0&2^{10}&0\\0&0&2^{10}\end{bmatrix}=2^{10}I$$