

## درسنامه ۲

## نقیض یک گزاره و ترکیب گزاره‌ها

## نقیض یک گزاره

نقیض گزاره  $p$  را به صورت  $\sim p$  می‌نویسیم و آن را «چنین نیست که  $p$ » می‌خوانیم. به علامت « $\sim$ » ناقض گفته می‌شود و «چنین نیست که» خوانده می‌شود.

مثلاً: «مجموع زاویه‌های داخلی هر متوازی‌الاضلاع  $360^\circ$  است.» یک گزاره است که نقیض آن برابر است با «چنین نیست که مجموع زاویه‌های داخلی هر متوازی‌الاضلاع  $360^\circ$  باشد.» که معادل است با «مجموع زاویه‌های داخلی هر متوازی‌الاضلاع  $360^\circ$  نیست.»

## ارزش نقیض یک گزاره

$p$	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

اگر ارزش گزاره  $p$  درست باشد، در این صورت ارزش گزاره  $\sim p$  نادرست است و وقتی که ارزش گزاره  $p$  نادرست باشد، ارزش نقیض آن درست است.

## گزاره‌های هم‌ارز منطقی

اگر دو گزاره  $p$  و  $q$  همواره ارزش یکسان داشته باشند، می‌گوییم این دو گزاره، هم‌ارز منطقی هستند و می‌نویسیم  $p \equiv q$  و می‌خوانیم « $P$  هم‌ارز است با  $q$ ». با توجه به جدول بالا، دو گزاره  $p$  و  $\sim(\sim p)$  هم‌ارز منطقی هستند، پس  $p \equiv \sim(\sim p)$

مثال گزاره « $2 < 5$ » را دو بار نقیض کنید.

پاسخ:

$$p: (2 < 5) \Rightarrow \sim p: (2 \not< 5) \Rightarrow \sim p: (2 \geq 5) \Rightarrow \sim(\sim p): (2 \not\geq 5) \Rightarrow \sim(\sim p): (2 < 5)$$

در نتیجه  $p$  هم‌ارز منطقی با  $\sim(\sim p)$  است.

## رابطه‌های گزاره‌ای

رابطه‌های گزاره‌ای عبارتند از «و»، «یا»، «اگر - آن‌گاه»، «اگر و فقط اگر» که گزاره‌های ساده را به هم مربوط می‌کنند.

## ترکیب گزاره‌ها

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیلهٔ رابطه‌های گزاره‌ای (ادات ربط) گزاره‌های مرکب به دست می‌آید. (دقت کنید که در گزاره مرکب، تعداد گزاره‌ها باید محدود باشد). به عنوان مثال جمله «عدد ۳ فرد است و عدد ۱۴ زوج است.» یک گزاره مرکب است و جمله «عدد ۳ فرد است و عدد ۵ فرد است و عدد ۷ فرد است و ...» گزاره مرکب نیست، زیرا تعداد گزاره‌ها محدود نیست.

## ترکیب فصلی دو گزاره

هرگاه  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p$  یا  $q$ » را به صورت « $p \vee q$ » می‌نویسند و به آن **ترکیب فصلی** دو گزاره می‌گوییم. در این جا به رابط منطقی « $\vee$ » **فاصل** گفته می‌شود.

ارزش گزاره مرکب  $p \vee q$  وقتی نادرست است که ارزش هر دوی  $p$  و  $q$  نادرست باشد و در بقیهٔ حالات، ارزش  $p \vee q$  درست است. یا به عبارتی در ترکیب فصلی اگر حداقل ارزش یک گزاره درست باشد، ارزش ترکیب فصلی درست است.

$p$	$q$	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

جدول ارزش گزاره  $p \vee q$  به صورت روبه‌رو است:

**توجه:** هرگاه گزاره مرکب همواره درست باشد، ارزش منطقی آن « $T$ » و اگر همواره نادرست باشد، ارزش منطقی آن « $F$ » است.

## درسنامه ۲

مثال

ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

(آ)  $(-3 \in \mathbb{Z}) \vee (2 \in \mathbb{Q})$

(ب)  $(\frac{1}{3} \neq \frac{2}{6}) \vee (\frac{36}{18} = 2)$

(پ) «۴ یک عدد اول یا ۴ عدد مرکب است.»

(ت)  $(A \not\subseteq A \vee \emptyset \not\subseteq A)$

**پاسخ:** (آ) ارزش گزاره  $(2 \in \mathbb{Q})$  درست و ارزش گزاره  $(-3 \in \mathbb{Z})$  نیز درست است، پس ارزش گزاره ترکیب فصلی آن‌ها نیز درست است.(ب) ارزش گزاره  $(\frac{36}{18} = 2)$  درست و ارزش گزاره  $(\frac{1}{3} \neq \frac{2}{6})$  نادرست است، پس ارزش گزاره ترکیب فصلی آن‌ها درست است.

(پ) ارزش گزاره «۴ یک عدد اول است.» نادرست است و ارزش گزاره «۴ یک عدد مرکب است.» درست است، پس ارزش گزاره ترکیب فصلی آن‌ها درست است.

(ت) ارزش گزاره  $(\emptyset \not\subseteq A)$  نادرست است و ارزش گزاره  $(A \not\subseteq A)$  نادرست است، پس ارزش گزاره ترکیب فصلی آن‌ها نادرست است.

## ترکیب عطفی دو گزاره

هرگاه  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p \wedge q$ » را که خوانده می‌شود « $p$  و  $q$ »، ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم. در این‌جا به رابط منطقی « $\wedge$ » عاطف گفته می‌شود.

## ارزش ترکیب عطفی دو گزاره

ارزش ترکیب عطفی دو گزاره وقتی درست است که ارزش هر دو گزاره  $p$  و  $q$  درست باشد و در بقیه حالات ارزش  $p \wedge q$  نادرست است، یا به عبارتی در گزاره عطفی اگر حداقل ارزش یک گزاره نادرست باشد، ارزش گزاره عطفی نیز نادرست است.جدول ارزش  $p \wedge q$  به صورت روبه‌رو است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

مثال

ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

(آ)  $\sqrt{2}$  عددی گویا و  $\sqrt{7}$  عددی گنگ است.

(ب)  $(\frac{4}{16} = \frac{1}{4}) \wedge (\frac{5}{3} < \frac{7}{4})$

**پاسخ:** (آ) ارزش گزاره « $\sqrt{2}$  عددی گویا است.» نادرست است و ارزش گزاره « $\sqrt{7}$  عددی گنگ است.» درست است، پس ارزش گزاره ترکیب عطفی آن‌ها نادرست است.(ب) ارزش گزاره  $(\frac{5}{3} < \frac{7}{4})$  درست است و ارزش گزاره  $(\frac{4}{16} = \frac{1}{4})$  درست است، پس ارزش گزاره ترکیب عطفی آن‌ها نیز درست است.

مثال

مقادیر  $x$  و  $y$  را چنان بیابید که داشته باشیم:

$|x-1| + (x+2y)^2 = 0$

**پاسخ:** چون  $(x+2y)^2 \geq 0$  و  $|x-1| \geq 0$ ، بنابراین تساوی بالا وقتی برقرار است که:

$$((x+2y)^2 = 0) \wedge (|x-1| = 0) \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+2y=0 \Rightarrow 1+2y=0 \Rightarrow 2y=-1 \Rightarrow y=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

**نتیجه:** رابطه بالا وقتی درست است که  $x=1$  و  $y=-\frac{1}{2}$  باشد.**تذکر:** به دو هم‌ارزی زیر قانون دمورگان در منطق ریاضی گفته می‌شود:

$$\begin{cases} \sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q) \\ \sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q) \end{cases}$$

(اثبات این قوانین در تمرین‌ها آمده است.)

۲ در ستاره

مثلاً نقیض گزاره  $(a = b) \vee (a < b)$  برابر است با  $(a \neq b) \wedge (a \not< b)$ ، به عبارتی نقیض گزاره  $(a \leq b)$  برابر  $(a > b)$  می‌باشد. یعنی:  
 $\sim (a \leq b) \Rightarrow (a \neq b) \wedge (a \not< b) \Rightarrow (a \neq b) \wedge (a \geq b) \Rightarrow a > b$

همارزهای منطقی بین گزاره‌های مرکب

- ۱- قوانین جابه‌جایی
 
$$\begin{cases} p \vee q \equiv q \vee p \\ p \wedge q \equiv q \wedge p \end{cases}$$
- ۲- قوانین شرکت‌پذیری
 
$$\begin{cases} (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \\ (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \end{cases}$$
- ۳- قوانین توزیع‌پذیری (پخشی)
 
$$\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$$

(اثبات این قوانین در تمرین‌ها آمده است.)

مثلاً در ترکیب فصلی «۶ عددی زوج است.»  $\vee$  «۶ عددی مرکب است.» اگر دو گزاره را جابه‌جا کنیم، گزاره‌ای هم‌ارز گزاره اول به دست می‌آید. یعنی «۶ عددی مرکب است.»  $\vee$  «۶ عددی زوج است.» هم‌ارز گزاره اول است.

۱۰. نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

- آ)  $\sqrt{10} < 10$       ب)  $\frac{15}{3} \leq 3$       پ)  $3 \in \{1, 2, 5\}$       ت)  $2^2 + 2^3 = 2^5$
- ث) سعدی شاعر ایرانی است.      ج) ۱۹۷۱ عددی اول است.      چ) ۳ عددی فرد است یا عدد  $\sqrt{2}$  گویا است.      ح)  $(2 < a) \wedge (a < 5)$

۱۱. جدول زیر را کامل کنید:

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \vee q$	ارزش $p \wedge q$
مهر اولین ماه فصل پاییز است.	تهران پایتخت ایران است.	د			
۵ عددی اول است.			ن		
۲ عددی زوج نیست.			د		
				ن	

۱۲. کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

- آ)  $(-3)^2 = 9 \vee (5 < 7)$
- ب)  $(2^9 = 512) \vee (5^4 = 125)$
- پ) ۹۳ عددی فرد یا عددی اول است.
- ت)  $(\sqrt{3^2 + 5^2} = 3 + 5) \vee (3 + 5)! = 3! + 5!$

۱۳. کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

- آ) عدد ۱۴۴ بر ۱۲ و ۳۶ بخش‌پذیر است.
- ب) مسکو پایتخت روسیه و یکی از شهرهای ایران است.
- پ)  $(3 < 5) \wedge (-3 < -5)$
- ت)  $((2^3)^2 > 2^{3^2}) \wedge (\sqrt{0.01} > \sqrt{0.04})$

۱۴. کدام یک از جمله‌های زیر گزاره مرکب است؟ ارزش گزاره‌های مرکب را تعیین کنید.

- آ)  $(11 > 3 + 1) \vee (3^3 = 81)$
- ب)  $(-4 < -5) \wedge (4 > 5)$
- پ)  $(\mathbb{W} \not\subseteq \mathbb{Z}) \vee (\{2\} \in \{2, 3\})$
- ت)  $(\sqrt{0.01} > \sqrt{0.04}) \wedge ((2^3)^2 > 2^{3^2})$
- ث)  $((3^2)^2 = 81) \wedge (2^{2^2} = 16)$
- ج)  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

۱۵. جدول ارزش گزاره‌های زیر را تشکیل داده و نشان دهید گزاره‌های زیر همواره نادرست هستند.

- آ)  $p \wedge \sim p \equiv F$
- ب)  $\sim p \wedge (p \wedge q) \equiv F$
- پ)  $p \wedge \sim (p \vee q) \equiv F$

۱۶. با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید هم‌ارزی‌های منطقی زیر برقرار است.

- آ) قوانین جابه‌جایی  $p \vee q \equiv q \vee p$
- ب) قوانین شرکت‌پذیری  $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
- پ) قوانین توزیع‌پذیری  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

۱۷. با جدول ارزش‌ها نشان دهید که هم‌ارزی قانون دمورگان در منطق ریاضی برقرار است.

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \quad (ب) \quad \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \quad (آ)$$

۱۸. مقادیر  $x$  و  $y$  را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\begin{aligned} |2x - 1| + |x + y| &= 0 \quad (ب) & (x - 2)^2 + (y + 1)^2 &= 0 \quad (آ) \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 &= 0 \quad (پ) \end{aligned}$$

### پاسخ‌هاک تشریحی

(ت) ارزش گزاره « $3! + 5! = 3! + 5!$ » نادرست است، زیرا  $\sqrt{9+25} = 3+5 \Rightarrow \sqrt{34} = 8$  و ارزش گزاره  $8! \neq 6+120 \Rightarrow 40320 \neq 126$  نیز نادرست است، پس ارزش گزاره ترکیب فصلی نیز نادرست است.

۱۳ (آ) گزاره اول یعنی «۱۴۴ بر ۱۲ بخش‌پذیر است» درست و گزاره دوم یعنی «۱۴۴ بر ۳۶ بخش‌پذیر است» نیز درست است، در نتیجه ارزش گزاره ترکیب عطفی نیز درست است. (ب) گزاره اول «مسکو پایتخت روسیه است» درست و گزاره دوم «مسکو یکی از شهرهای ایران است» نادرست است، پس ارزش گزاره ترکیب عطفی نادرست است. (پ) ارزش گزاره « $-3 < -5$ » نادرست و ارزش گزاره « $3 < 5$ » درست است، پس ارزش گزاره ترکیب عطفی نادرست است.

(ت) گزاره  $\frac{0}{1} > \frac{0}{2} \Rightarrow \frac{0}{1} > \frac{0}{2}$  دارای ارزش نادرست است و گزاره  $512 > 64 > 2^9 \Rightarrow 8^2 > 2^9 \Rightarrow (2^3)^2 > 2^9$  نیز دارای ارزش نادرست است، پس ارزش گزاره ترکیب عطفی نادرست است.

۱۴

(آ) چون از دو گزاره تشکیل شده است، پس این جمله گزاره مرکب است. این جمله مرکب به صورت ترکیب فصلی است که برای درست بودن باید حداقل یکی از دو گزاره درست باشد و به دلیل آن که  $11 > 4$  است، ارزش این گزاره مرکب درست است.

(ب) چون از دو گزاره تشکیل شده است، پس این جمله گزاره مرکب است. این گزاره مرکب به صورت ترکیب عطفی است که چون ارزش هر دو گزاره نادرست است، پس ارزش این گزاره مرکب نیز نادرست است.

(پ) چون دارای یک گزاره می‌باشد، بنابراین گزاره مرکب نیست. (ت) به دلیل آن که از دو گزاره تشکیل شده است، پس این جمله گزاره مرکب است. دو گزاره به صورت ترکیب فصلی است و ارزش هر دو گزاره نادرست است، پس ارزش گزاره مرکب نیز نادرست است.

(ث) به دلیل آن که از دو گزاره تشکیل شده است، پس این جمله گزاره مرکب است این جمله مرکب به صورت ترکیب عطفی است که چون ارزش هر دو گزاره درست است پس ارزش این گزاره مرکب نیز درست است. (ج) چون دارای یک گزاره می‌باشد، بنابراین گزاره مرکب نیست.

p	~p	p ∧ ~p
د	ن	ن
ن	د	ن

۱۵ (آ)

$$p \wedge \sim p \equiv F$$

در نتیجه:

پس ارزش منطقی  $p \wedge \sim p$  همواره نادرست است.

۱۰ (آ)

$$p: (\sqrt{10} < 10) \Rightarrow \sim p: \sim(\sqrt{10} < 10) \equiv (\sqrt{10} \not< 10) \equiv (\sqrt{10} \geq 10)$$

$$p: (\frac{15}{3} \leq 3) \Rightarrow \sim p: \sim(\frac{15}{3} \leq 3) \equiv (\frac{15}{3} \not\leq 3) \equiv (\frac{15}{3} > 3) \quad (ب)$$

$$p: (3 \in \{1, 2, 5\}) \Rightarrow \sim p: \sim(3 \in \{1, 2, 5\}) \equiv (3 \notin \{1, 2, 5\}) \quad (پ)$$

$$p: (2^2 + 2^3 = 2^5) \Rightarrow \sim p: \sim(2^2 + 2^3 = 2^5) \equiv (2^2 + 2^3 \neq 2^5) \quad (ت)$$

یا می‌توانیم آن را به صورت  $(2^2 + 2^3 < 2^5) \vee (2^2 + 2^3 > 2^5)$  بنویسیم.

(ث) نقیض این گزاره را می‌توان به صورت «چنین نیست که سعدی شاعر ایرانی باشد». یا به صورت «سعدی شاعر ایرانی نیست.» نوشت.

(ج) نقیض این گزاره را می‌توان به صورت «چنین نیست که ۱۹۷۱ عددی اول باشد». یا به صورت «۱۹۷۱ عددی اول نیست.» نوشت.

(چ) نقیض گزاره: «۳ عددی فرد نیست و عدد  $\sqrt{2}$  گویا نیست.»

(ح) نقیض گزاره به صورت  $(a \not\leq 5) \vee (2 \not\leq a)$  می‌باشد که معادل  $(a > 5) \vee (2 > a)$  است.

۱۱

گزاره p	گزاره q
مهر اولین ماه فصل پاییز است.	تهران پایتخت ایران است.
۵ عددی اول است.	۵ عددی اول نیست.
۲ عددی زوج نیست.	۴ مربع کامل است.
۳ عددی زوج است.	$4 + 3 = 8$

ارزش p	ارزش q	ارزش $p \vee q$	ارزش $p \wedge q$
د	د	د	د
د	ن	د	ن
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

۱۲ (آ) ارزش گزاره  $(5 < 7)$  درست است و ارزش گزاره  $9 = (-3)^2$  نیز درست است، پس ارزش گزاره ترکیب فصلی درست است.

(ب) ارزش گزاره «۹۳ عددی فرد است.» درست و ارزش گزاره «۹۳ عددی اول است.» نادرست است. پس ارزش گزاره ترکیب فصلی درست است.

(پ) ارزش گزاره « $125 = 5^4$ » نادرست است و ارزش گزاره « $2^9 = 512$ » درست است. پس ارزش گزاره ترکیب فصلی درست است.



## درسنامه ۳

## ترکیب شرطی و ترکیب دوشروطی

## ترکیب شرطی

هرگاه  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، گزاره مرکب  $(p \Rightarrow q)$  را که خوانده می‌شود «اگر  $p$  آن‌گاه  $q$ »، ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم. در این ترکیب شرطی  $p$  را مقدم (فرض) و  $q$  را تالی (حکم) می‌نامیم.

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	ن	د
ن	د	د

ارزش گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » وقتی نادرست است که ارزش  $p$  (مقدم) درست باشد و ارزش  $q$  (تالی) نادرست باشد. در بقیه حالت‌ها ارزش « $p \Rightarrow q$ » درست است.

به عبارتی می‌توان گفت هرگاه ارزش  $p$  (مقدم) نادرست باشد، ارزش گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » درست است، در این حالت می‌گوییم ارزش گزاره  $(p \Rightarrow q)$  به انتفای مقدم درست است. هم‌چنین می‌توان گفت هر ترکیب شرطی که ارزش  $q$  (تالی) آن درست باشد، مستقل از ارزش مقدم آن همواره درست است.

مثال: کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

(آ) اگر  $400$  بر  $10$  بخش پذیر باشد، آن‌گاه  $400$  بر  $5$  نیز بخش پذیر است. (ب)  $(\frac{1}{4})^2 > (\frac{1}{4})^2 \Rightarrow (\frac{1}{4}) < (\frac{1}{4})$

(ت)  $2^6 = 128 \Rightarrow 2^6 = 64 = 2^5$

(پ)  $0.7 < 0.5 \Rightarrow \sqrt{0.7} > \sqrt{0.5}$

پاسخ: (آ) در این ترکیب شرطی، مقدم درست است و تالی نیز درست است، لذا گزاره شرطی نیز درست است.

(ب) مقدم درست و تالی نادرست است، بنابراین گزاره شرطی نادرست است.

(پ) با توجه به این‌که مقدم نادرست و تالی درست است، بنا به انتفای مقدم ترکیب شرطی درست است.

(ت) با توجه به این‌که مقدم نادرست و تالی نادرست است، بنا به انتفای مقدم ترکیب شرطی درست است.

صورت‌های مختلف بیان ترکیب شرطی  $(p \Rightarrow q)$ 

می‌توانیم گزاره شرطی  $(p \Rightarrow q)$  را به صورت‌های زیر بیان کنیم:

۱- «اگر  $p$  آن‌گاه  $q$ »

۲- « $p$  شرط کافی برای  $q$  است.» یا «شرط کافی برای  $q$  آن است که  $p$ .»

۳- « $q$  شرط لازم برای  $p$  است.» یا «شرط لازم برای  $p$  آن است که  $q$ .»

۴- « $p$  نتیجه می‌دهد  $q$  را.»

۵- « $q$  اگر  $p$ »

مثال: گزاره شرطی «اگر یک چهارضلعی مستطیل باشد، آن‌گاه دو قطرش مساویند.» را به دو شکل مختلف دیگر بنویسید.

پاسخ:

۱- مستطیل بودن یک چهارضلعی شرط کافی برای مساوی بودن قطرهای آن است.

۲- مساوی بودن قطرهای یک چهارضلعی شرط لازم برای مستطیل بودن آن است.

## نکته

۱- گزاره‌های  $p \Rightarrow q$  و  $\sim p \vee q$  هم‌ارز منطقی هستند.

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

۲- گزاره « $q \Rightarrow p$ » عکس ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » و گزاره « $\sim q \Rightarrow \sim p$ » عکس نقیض ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » است، به طوری‌که

« $p \Rightarrow q$ » هم‌ارز منطقی « $\sim q \Rightarrow \sim p$ » است.

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

درسنامه ۳

۳- قانون ادخال فاصل:  $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$

یعنی به هر گزاره می‌توانیم با ترکیب فصلی هر تعداد گزاره را اضافه (ترکیب) کنیم.

۴- قانون حذف عاطف:  $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$  یا  $(p \wedge q \Rightarrow q) \equiv T$

یعنی از ترکیب عطفی دو یا چند گزاره می‌توانیم هر کدام را به دلخواه نتیجه بگیریم. (اثبات در تمرین‌ها آمده است.)

مثال

**مثبت کنید** اگر  $a \in \mathbb{Z}$  و  $a^2$  عددی زوج باشد، آن‌گاه  $a$  نیز عددی زوج است.

**پاسخ:** به جای اثبات این حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم.

( $a^2$  عددی فرد است.  $\Rightarrow a$  عددی فرد است.)  $\equiv$  ( $a$  عددی زوج است.  $\Rightarrow a^2$  عددی زوج است.)

اگر  $a$  عددی فرد باشد، آن را به صورت  $a = 2k + 1$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ) در نظر می‌گیریم و سپس طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$a^2 = (2k + 1)^2 = (4k^2 + 4k) + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{k' \in \mathbb{Z}}) + 1 = 2k' + 1$$

در نتیجه  $a^2$  عددی فرد است. عکس نقیض گزاره خواسته شده را ثابت کردیم، بنابراین گزاره اصلی درست است.

ترکیب دوشروطی

هرگاه  $p$  و  $q$  گزاره باشند، گزاره مرکب  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$  را به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » می‌نویسیم و آن را **ترکیب دوشروطی**  $p$  و  $q$  می‌نامیم. گزاره « $p \Leftrightarrow q$ » را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

۱- «اگر  $p$  آن‌گاه  $q$  و بر عکس»

۲- « $p$  شرط لازم و کافی برای  $q$  است.»

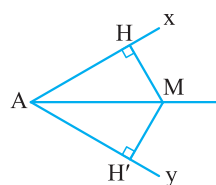
۳- « $q$  شرط لازم و کافی برای  $p$  است.»

۴- « $p$  اگر و تنها اگر  $q$ » یا « $q$  اگر و فقط اگر  $p$ »

به عنوان مثال گزاره‌های زیر نمونه‌ای از ترکیب دوشروطی گزاره‌ها هستند:

(آ)  $(x = 4 \Rightarrow 3x = 12) \wedge (3x = 12 \Rightarrow x = 4) \equiv (x = 4 \Leftrightarrow 3x = 12)$

(ب) شرط لازم و کافی برای آن که نقطه‌ای روی نیمساز زاویه  $A$  قرار داشته باشد آن است که فاصله آن تا دو ضلع زاویه برابر باشد.



$MH = MH' \Leftrightarrow$  قرار دارد.  $A$  روی نیمساز زاویه  $A$

جدول ارزش ترکیب دوشروطی

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د	د

طبق تعریف هم‌ارزی  $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$  برقرار است زیرا در دو ستون آخر جدول، ارزش آن‌ها یکسان است، بنابراین اگر دو گزاره  $p$  و  $q$ ، هم‌ارزش باشند یعنی هر دو دارای ارزش درست یا هر دو دارای ارزش نادرست باشند، ارزش گزاره دوشروطی درست است. در بقیه حالت‌ها ارزش گزاره دوشروطی نادرست است.

مثلاً ارزش گزاره  $(3 > 12 \Leftrightarrow 3 + 1 > 12 + 1)$  درست است، زیرا هر دو گزاره نادرست هستند.



## درستنامه ۳

## نکته

نقیض گزاره شرطی و دوشروطی به صورت زیر می‌باشد:

$$\bar{A} \quad \sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

$$(B) \quad \sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

(اثبات در تمرین‌ها آمده است.)

## مثال

نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

(آ) اگر  $a$  عددی منفی باشد، آن‌گاه مربع آن مثبت است.

(ب) یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرهایش منصف یکدیگر باشند.

**پاسخ:** (آ) نقیض گزاره برابر است با « $a$  عددی منفی است و مربع  $a$  مثبت نیست.»

(ب) نقیض گزاره برابر است با: «یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع نیست اگر و تنها اگر قطرهایش منصف یکدیگر باشند.»

یا «یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرهایش منصف یکدیگر نباشد.»

## ۱۹. جاهای خالی را با عبارت‌های «لازم»، «کافی»، یا «لازم و کافی» پر کنید.

(آ) شرط ..... برای آن‌که نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد آن است که روی عمودمنصف آن پاره‌خط باشد.

(ب) شرط ..... برای آن‌که  $ab = 0$  باشد آن است که  $a = 0$  و  $b = 0$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ )

(پ) شرط ..... برای آن‌که عددی مثبت باشد آن است که مربع آن عدد مثبت باشد.

(ت) شرط ..... برای آن‌که  $ab = 0$  باشد آن است که  $a = 0$  یا  $b = 0$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ )

(ث) شرط ..... برای آن‌که عددی زوج باشد آن است که مربع آن زوج باشد.

(نهایی- دی ۹۳)

۲۰. قضیه شرطی «اگر  $a$  و  $b$  دو عدد گویا باشند، آن‌گاه  $a + b$  گویا است.» را در نظر بگیرید.

(آ) عکس قضیه شرطی را بنویسید.

(ب) آیا عکس آن نیز یک قضیه شرطی است؟ چرا؟

## ۲۱. ارزش گزاره‌های شرطی و دوشروطی زیر را مشخص کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.

(آ) اگر  $a$  عددی فرد باشد، آن‌گاه  $a^2$  فرد است.

(پ) اگر دو مثلث دارای مساحت‌های برابر باشند، آن‌گاه دو مثلث هم‌نهشت هستند.

(ت) اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند، آن‌گاه دو مثلث دارای مساحت‌های برابر می‌باشند.

(ج)  $(2^2 = 4) \Leftrightarrow (2^2 = 2)$

(چ) اگر  $a$  بر  $b$  بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه  $a^n$  بر  $b^n$  بخش‌پذیر است.

## ۲۲. با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، قانون ادخال فاصل و قانون حذف عاطف را نشان دهید.

## ۲۳. جدول‌های ارزش گزاره‌های زیر را تشکیل داده و نشان دهید این گزاره‌ها همواره درست هستند.

$$(A) \quad p \Rightarrow p \equiv T \quad (B) \quad (p \vee \sim q) \vee (\sim p \vee q) \equiv T \quad (C) \quad (p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p) \Leftrightarrow q \equiv T$$

(تمرین ۸ صفحه ۱۸ کتاب درسی)

## ۲۴. با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید:

$$(A) \quad p \vee F \equiv p \quad (B) \quad p \vee (q \wedge p) \equiv p \quad (C) \quad \sim(p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q \quad (D) \quad p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$$

## ۲۵. با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید:

$$(A) \quad p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q \quad (B) \quad \sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

$$(C) \quad p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p \quad (D) \quad \sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

$$(E) \quad p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r) \quad (F) \quad (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow r$$

(مشابه نهایی- شهریور ۹۲)

۲۶. نشان دهید اگر  $n^2$  عددی فرد باشد، آن‌گاه  $n$  نیز فرد است.۲۷. ثابت کنید هرگاه  $n$  عدد صحیح و  $n^2$  مضرب ۵ باشد، آن‌گاه  $n$  نیز مضرب ۵ است.



پاسخ‌های تشریحی

۲۲ قانون ادخال فاصل:  $(p \Rightarrow p \vee q \equiv T)$

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

قانون حذف عاطف:  $(p \wedge q \Rightarrow p \equiv T)$  یا  $(p \wedge q \Rightarrow q \equiv T)$

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$	$p \wedge q \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د
ن	د	ن	د	د
ن	ن	ن	د	د

۲۳ آ

p	$p \Rightarrow p$
د	د
ن	د

$P \Rightarrow P \equiv T$

در نتیجه:

ب

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim p \vee q$	$(p \vee \sim q) \vee (\sim p \vee q)$
د	د	ن	ن	د	د	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د	د

$(p \vee \sim q) \vee (\sim p \vee q) \equiv T$

در نتیجه:

پ

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \vee p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	د
ن	د	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	ن	د

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow q \equiv T$

در نتیجه:

۲۴ آ

p	F	$p \vee F$
د	ن	د
ن	ن	ن

↑

ارزش دو ستون یکسان است، پس  $p \vee F \equiv p$

۱۹ آ «هر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله می‌باشد اگر و تنها اگر روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار داشته باشد»، یک ترکیب دوشروطی است (یعنی از هر کدام دیگری را می‌توانیم نتیجه بگیریم). پس عبارت «لازم و کافی» در جای خالی قرار می‌گیرد.

ب گزاره  $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \wedge b = 0)$  درست است. بنابراین در جای خالی کلمه «کافی» قرار می‌گیرد.

پ گزاره «اگر عددی مثبت باشد، آن‌گاه مربع آن مثبت است»، همواره درست است. پس کلمه «لازم» در جای خالی قرار می‌گیرد.

ت گزاره دوشروطی  $(a = 0 \vee b = 0) \Leftrightarrow ab = 0$  درست است (زیرا از هر یک دیگری را می‌توانیم نتیجه بگیریم). لذا در جای خالی عبارت «لازم و کافی» قرار می‌گیرد.

ث «اگر عددی زوج باشد، مربع عدد نیز زوج است و بر عکس». بنابراین این گزاره یک ترکیب دوشروطی همیشه درست است. پس عبارت «لازم و کافی» در جای خالی قرار می‌گیرد.

۲۰ آ عکس قضیه: اگر  $a + b$  گویا باشد، آن‌گاه  $a$  و  $b$  دو عدد گویا هستند.

ب خیر، مثال نقض: عدد ۲ گویا است.  $a + b = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2$  در نتیجه  $a + b = 2$  گویا است ولی  $a = 1 + \sqrt{2}$  و  $b = 1 - \sqrt{2}$  گنگ هستند.

۲۱ آ در این گزاره شرطی ارزش مقدم و تالی درست است، پس ارزش گزاره شرطی نیز درست است.

نقیض گزاره: « $a$  عددی فرد است و  $a^2$  عددی فرد نیست.»

ب در این گزاره دوشروطی ارزش گزاره « $\pi$  عددی گویا است.» و گزاره « $\pi = 3/14$ » نادرست است، پس ارزش گزاره دوشروطی درست است.

نقیض گزاره: « $\pi$  عددی گویا نیست، اگر و تنها اگر  $\pi = 3/14$  باشد.» یا « $\pi$  عددی گویا است، اگر و تنها اگر  $\pi \neq 3/14$  باشد.»

پ در این گزاره شرطی ارزش مقدم درست و ارزش تالی نادرست است. بنابراین ارزش گزاره شرطی نادرست است.

نقیض گزاره: «دو مثلث دارای مساحت‌های برابر می‌باشند و دو مثلث هم‌نهشت نیستند.»

ت در این گزاره شرطی ارزش مقدم و تالی درست است، پس ارزش گزاره شرطی نیز درست است.

نقیض گزاره: «دو مثلث هم‌نهشت هستند و دو مثلث دارای مساحت برابر نیستند.»

ث در این گزاره شرطی ارزش مقدم و تالی درست است، پس ارزش گزاره شرطی درست است.

نقیض گزاره: «یک چهارضلعی مربع است و قطرهای آن با هم برابر نیستند.»

ج در این گزاره دوشروطی ارزش گزاره « $2^2 = 4$ » درست و ارزش گزاره « $2^0 = 2$ » نادرست است، پس ارزش گزاره دوشروطی نادرست است.

نقیض گزاره:  $(2^2 \neq 4) \Leftrightarrow (2^0 = 2)$  یا  $(2^2 = 4) \Leftrightarrow (2^0 \neq 2)$

ج در این گزاره شرطی به دلیل آن‌که مقدم و تالی درست است، ارزش گزاره شرطی درست است.

نقیض گزاره: « $a$  بر  $b$  بخش‌پذیر است و  $a^n$  بر  $b^n$  بخش‌پذیر نیست.»

گزاره‌های  $p \Rightarrow q$  و  $\sim q \Rightarrow \sim p$  هم‌ارز منطقی هستند، زیرا ارزش دو ستون آن‌ها یکسان است.

(یعنی هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.)  
 $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	د	ن

گزاره‌های  $\sim(p \Rightarrow q)$  و  $p \wedge \sim q$  هم‌ارز منطقی هستند، زیرا ارزش دو ستون آن‌ها یکسان است.

$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$\sim(p \Leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim p \Leftrightarrow q$	$\sim q$	$p \Leftrightarrow \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	د	ن	د	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د	ن	د	ن

گزاره‌های  $\sim(p \Leftrightarrow q)$ ،  $\sim p \Leftrightarrow q$  و  $p \Leftrightarrow \sim q$  هم‌ارز منطقی هستند. زیرا ارزش ستون آن‌ها یکسان است.

$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	ن	ن	د	ن
د	ن	د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	ن	د	د	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	ن	د

گزاره‌های  $(p \vee q) \Rightarrow r$  و  $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$  هم‌ارز منطقی هستند. زیرا ارزش دو ستون آن‌ها یکسان است.

$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow r$

p	q	$q \wedge p$	$p \vee (q \wedge p)$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

ارزش دو ستون یکسان است، پس  $p \vee (q \wedge p) \equiv p$

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$\sim(p \Leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim p \Leftrightarrow q$
د	د	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د
ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	ن

ارزش دو ستون یکسان است، پس:  $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	ن	د	ن
د	ن	د	د	د	ن	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	ن	د
ن	ن	د	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	ن	د

ارزش دو ستون یکسان است، پس:  $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

۲۵ (آ)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

گزاره‌های  $p \Rightarrow q$  و  $\sim p \vee q$  هم‌ارز منطقی هستند، زیرا ارزش دو ستون آن‌ها یکسان است.

$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

۲۷ به جای اثبات حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم.  
 (n مضرب ۵ نیست)  $\equiv$  (n مضرب ۵ است)  $\Rightarrow$  (n<sup>۲</sup> مضرب ۵ است).  
 $\Rightarrow$  (n<sup>۲</sup> مضرب ۵ نیست).

در این قسمت دو روش برای اثبات داریم:

**روش اول:** اگر n مضرب ۵ نباشد، یعنی  $n \neq 5k$  و خواهیم داشت:

$$n^2 \neq (5k)^2 \neq 25k^2 \neq 5(\underbrace{5k^2}_{k' \in \mathbb{Z}}) \neq 5k'$$

در نتیجه n<sup>۲</sup> مضرب ۵ نیست.

**روش دوم:** اگر n مضرب ۵ نباشد، پس به صورت زیر است:

$$n = 5k + r \quad (1 \leq r \leq 4)$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$n^2 = (5k + r)^2 = 25k^2 + 10kr + r^2$$

$$= 5(\underbrace{5k^2 + 2kr}_{k' \in \mathbb{Z}}) + r^2 = 5k' + r^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r=1 \Rightarrow n^2 = 5k' + 1 & (n^2 \text{ مضرب } 5 \text{ نیست}) \\ r=2 \Rightarrow n^2 = 5k' + 4 & (n^2 \text{ مضرب } 5 \text{ نیست}) \\ r=3 \Rightarrow n^2 = 5k' + 9 & (n^2 \text{ مضرب } 5 \text{ نیست}) \\ r=4 \Rightarrow n^2 = 5k' + 16 & (n^2 \text{ مضرب } 5 \text{ نیست}) \end{cases}$$

در نتیجه در هر ۴ حالت، n<sup>۲</sup> مضرب ۵ نیست.

(ج)

p	q	r	q $\Rightarrow$ r	p $\Rightarrow$ (q $\Rightarrow$ r)	p $\Rightarrow$ r	q $\Rightarrow$ (p $\Rightarrow$ r)
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	د	د
ن	ن	د	د	د	د	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

گزاره‌های  $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$  و  $q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$  هم‌ارز منطقی هستند، زیرا ارزش دو ستون آن‌ها یکسان است.  $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

۲۶ به جای اثبات حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم:

(n عددی زوج است)  $\equiv$  (n عددی فرد است)  $\Rightarrow$  (n<sup>۲</sup> عددی فرد است).  
 $\Rightarrow$  (n<sup>۲</sup> عددی زوج است).

اگر n عددی زوج باشد، یعنی  $n = 2k$  است و داریم:

$$n = 2k \Rightarrow n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(\underbrace{2k^2}_{k' \in \mathbb{Z}}) = 2k'$$

در نتیجه n<sup>۲</sup> عددی زوج است.

## درسنامه ۴

### سورها

سور <....

عبارت‌های «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» به سور معروف هستند.

این عبارت‌ها می‌توانند قبل از گزاره‌نماها قرار گیرند و به این وسیله گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند.

برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به جای «به ازای هر» یا «به ازای جمیع مقادیر» از نماد  $\forall$  (از حرف اول کلمه All گرفته شده است). و به جای «وجود دارد» یا «به ازای بعضی مقادیر» از نماد  $\exists$  (از حرف اول کلمه Exist گرفته شده است). استفاده می‌کنیم. نماد  $\forall$  سور عمومی و نماد  $\exists$  سور وجودی نامیده می‌شود.

گزاره‌ها با سور عمومی <....

گزاره‌هایی مانند «هر عدد طبیعی، یک عدد مثبت است.» و «هر مستطیلی یک متوازی‌الاضلاع است.» که خاصیتی را به تمام اعضای یک مجموعه نسبت می‌دهند، سور عمومی هستند.

اگر  $P(x)$  را گزاره‌نمایی فرض کنیم که خاصیتی را برای متغیر x بیان می‌کند، در این صورت گزاره «هر x ای خاصیت P را دارا می‌باشد.» را به صورت  $\forall x : P(x)$  مقابل نشان می‌دهیم:

گزاره‌های با سور عمومی وقتی درست می‌باشند که مجموعه جواب آن‌ها با دامنه متغیر آن‌ها یکسان باشد. به عبارت دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشند.

## درستنامه ۴

مثال

گزاره‌های زیر را به زبان ریاضی بیان کرده و ارزش آن‌ها را تعیین کنید.

(آ) مربع هر عدد حقیقی، نامنفی است.

(ب) نصف هر عدد صحیح از خود آن عدد کوچک‌تر است.

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$$

پاسخ: (آ) این گزاره درست است.

زیرا گزاره‌نمایی شامل متغیر  $x$  که با سور عمومی بیان می‌شود، وقتی به یک گزاره درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره‌نما صدق کند و هیچ مثال نقضی نداشته باشد و این عبارت این شرایط را دارد و درست می‌باشد.

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \frac{x}{2} < x$$

(ب)

این گزاره نادرست است، زیرا  $x = -1$  یک مثال نقض برای این گزاره محسوب می‌شود.  $(-1) < \frac{-1}{2}$

یادآوری: مجموعه اعداد زوج را با  $E$ ، مجموعه اعداد فرد را با  $O$  و مجموعه اعداد اول را با  $P$  نمایش می‌دهیم.

مثال

عبارت روبه‌رو را با زبان طبیعی بنویسید و ارزش آن را مشخص کنید.

$$\forall a \in O : a = 2k + 1, (k \in \mathbb{Z})$$

$$a = 2k + 1, (k \in \mathbb{Z})$$

پاسخ: برای هر عدد صحیح فرد داریم:

ارزش این گزاره درست است، زیرا اگر به جای  $k$  اعداد صحیح را قرار دهیم، تمام اعداد فرد به دست می‌آیند و هیچ مثال نقضی نیز ندارد.

## گزاره‌های با سور وجودی

گزاره‌ای با سور وجودی، گزاره‌ای است که خاصیتی را حداقل به یک عضو از مجموعه نسبت دهد.

گزاره « $\exists x : P(x)$ » به این معنی است که حداقل یک  $x$  وجود دارد که خاصیت  $P$  را دارا می‌باشد. به عنوان مثال:

«بعضی از اعداد اول، زوج هستند.» و «بعضی از اعداد با توان زوج، فرد هستند.» گزاره‌هایی با سور وجودی می‌باشند.

گزاره‌های با سور وجودی زمانی درست هستند که مجموعه جواب آن‌ها تهی نباشد.

مثال

گزاره‌های زیر را به زبان ریاضی بیان کرده و ارزش آن‌ها را تعیین کنید.

(آ) معکوس بعضی از اعداد صحیح، یک عدد صحیح است.

(ب) جذر بعضی از اعداد طبیعی از خود عدد طبیعی بزرگ‌تر است.

پاسخ: (آ) این گزاره درست است، زیرا به ازای  $x = 1$  گزاره درست است، پس حداقل یک عضو وجود دارد که به ازای آن، این گزاره‌نما به گزاره‌ای

با ارزش درست تبدیل می‌شود.

$$\exists x \in \mathbb{Z} : \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$$

(ب) این گزاره نادرست است، زیرا هیچ عضوی از اعداد طبیعی وجود ندارد که به ازای آن، این گزاره‌نما به یک گزاره درست تبدیل شود.

$$\exists x \in \mathbb{N} : \sqrt{x} > x$$

## نقیض گزاره‌های با سور عمومی

گزاره « $\forall x : P(x)$ » وقتی درست است که تمام اعضای دامنه، خاصیت  $P(x)$  را داشته باشند. بنابراین می‌توان گفت این گزاره وقتی نادرست است که

$$\sim (\forall x : P(x)) \equiv \exists x : \sim P(x)$$

حداقل یک عضو پیدا شود که خاصیت  $P(x)$  را نداشته باشد.

مثال

ارزش و نقیض گزاره مقابل را به دست آورید.

$$\forall x \in \mathbb{N} : x + 3 \geq 4$$

پاسخ: ارزش این گزاره درست است، زیرا به ازای تمام اعداد طبیعی نامساوی برقرار است.

$$\sim (\forall x \in \mathbb{N} : x + 3 \geq 4) \equiv (\exists x \in \mathbb{N} : x + 3 < 4) \equiv (\exists x \in \mathbb{N} : x + 3 \leq 3)$$

۴ در ستاره

نقیض گزاره‌ها با سور وجودی

گزاره  $\exists x : P(x)$  وقتی درست است که مجموعه جوابش ناتهی باشد. پس این گزاره وقتی نادرست است که مجموعه جوابش تهی باشد، یعنی هیچ عضوی از دامنه در رابطه  $P(x)$  صدق نکند.

$$\sim(\exists x : P(x)) \equiv \forall x : \sim P(x)$$

**مثال** نقیض گزاره «بعضی از اعداد اول زوج هستند.» را بیان کنید.

**پاسخ:** نقیض این گزاره به صورت «هر عدد اولی فرد است.» یا «تمام اعداد اول فردند.» می‌باشد.

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x^4 = 0$$

**مثال** ارزش و نقیض گزاره مقابل را به دست آورید.

**پاسخ:** ارزش این گزاره درست است، زیرا به ازای  $x = 0$  معادله برقرار است، پس مجموعه جواب معادله  $x^2 + x^4 = 0$  ناتهی است.

$$\sim(\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x^4 = 0) \equiv \forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x^4 \neq 0$$

۲۸. با ذکر دلیل، درستی یا نادرستی گزاره‌های سوری زیر را مشخص کنید.

(آ) در آمار، هر متغیر گسسته یک متغیر کمی است.

(ب) در آمار، هر متغیر کمی یک متغیر گسسته است.

(پ) در آمار، بعضی از متغیرهای گسسته یک متغیر کیفی هستند.

(ت) در آمار، بعضی از متغیرهای کمی یک متغیر گسسته هستند.

۲۹. ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

(ب)  $\forall x \in \mathbb{R} : \sin x + \cos x = 1$

(آ)  $\forall x \in \mathbb{N} : x(x+1) = 2k, (k \in \mathbb{N})$

(ت)  $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 4 = 0$

(پ)  $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 + 3x = 0$

(ج)  $\exists x \in \mathbb{Z} : x^5 + 1 = 0$

(ث)  $\forall x \in \mathbb{P} : x = 2k + 1, (k \in \mathbb{N})$

۳۰. هرگاه  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x < 2\}$  دامنه متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید. (مشابه تمرین ۱۱ صفحه ۱۸ کتاب درسی)

(ب)  $\forall x \in A : 2x + 1 > -3$

(آ)  $\forall x \in A : x + 3 \leq 4$

(ت)  $\exists x \in A : \frac{x-1}{2} \geq 1$

(پ)  $\exists x \in A : \sqrt{x^2 + 3} = 2$

۳۱. گزاره‌های زیر را به زبان ریاضی بیان کرده و ارزش آن‌ها را تعیین کنید.

(ب) مجذور هر عدد حقیقی منفی، منفی است.

(آ) مربع هر عدد حقیقی، مثبت است.

(ت) مجذور بعضی از اعداد صحیح با خود آن عدد صحیح مساوی است.

(پ) هر عدد صحیحی، گویا است.

(ج) بعضی از اعداد حقیقی، گویا نیستند.

(ث) وجود دارد عدد طبیعی مانند  $a$  به طوری که  $-2a + 1 > 0$

۳۲. گزاره‌های زیر را به زبان طبیعی بنویسید و ارزش آن‌ها را مشخص کنید.

(ب)  $\forall y \in \mathbb{P} : 2y + 1 > 5$

(آ)  $\forall x \in \mathbb{N} : (x)(x+1)(x+3) = 3k, (k \in \mathbb{N})$

(پ)  $\exists x \in \mathbb{N} : n^2 + n < 3$

۳۳. ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید و نقیض هر یک را بنویسید.

(پ)  $\forall x \in \mathbb{Z} : \frac{4-x^2}{2+x} = 2-x$

(ب)  $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

(آ)  $\forall x \in \mathbb{N} : \frac{x+1}{x} \geq 2$

(ث)  $\exists n \in \mathbb{N} : 2^n > 1000$

(ت)  $\exists x \in \mathbb{R} : \sqrt{-x} \in \mathbb{Z}$

پاسخ‌های تشریحی

۳۱ آ) ارزش این گزاره‌نما نادرست است.  $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$

زیرا عضوی از اعداد حقیقی وجود دارد که به ازای آن نامساوی برقرار نیست.

$$x = 0 \Rightarrow 0^2 \not> 0 \Rightarrow 0 \not> 0$$

ب) ارزش این گزاره‌نما نادرست است.  $\forall x \in (-\infty, 0) : x^2 < 0$

زیرا هر عدد منفی را به توان ۲ برسانیم، یک عدد مثبت می‌شود.

پ) ارزش آن درست است.  $\forall x \in \mathbb{Z} : x \in \mathbb{Q}$

زیرا هر عدد صحیح را می‌توانیم به صورت یک عدد گویا بنویسیم.

ت) ارزش این گزاره درست است.  $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 = x$

زیرا به ازای  $x = 1$  و  $x = 0$  تساوی برقرار می‌شود.

ث) ارزش این گزاره نادرست است.  $\exists a \in \mathbb{N} : -2a + 1 > 0$

زیرا هیچ عدد طبیعی وجود ندارد که این نامساوی به ازای آن درست باشد.

ج) ارزش این گزاره درست است.  $\exists x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q}$

زیرا عضوی از اعداد حقیقی وجود دارد که در اعداد گویا نیست،

$$\text{مانند } x = \sqrt{2}$$

۳۲ آ) حاصل ضرب هر سه عدد متوالی طبیعی مضرب ۳ است. ارزش این

گزاره درست است، زیرا از هر سه عدد طبیعی متوالی، یکی مضرب ۳ است.

ب) به ازای هر عدد اول، دو برابر آن به اضافه یک از ۵ بزرگ‌تر است.

$$y = 2 \Rightarrow 2(2) + 1 = 5 \not> 5$$

ارزش این گزاره نادرست است، زیرا به ازای  $y = 2$  نامساوی نادرست است.

پ) وجود دارد عددی طبیعی که مجموع آن عدد با مربعش کوچک‌تر از ۳ باشد.

ارزش این گزاره درست است، زیرا  $n = 1$  وجود دارد که به ازای آن نامساوی

برقرار است.

$$n = 1 \Rightarrow 1^2 + 1 = 2 < 3$$

۳۳ آ) نادرست است، زیرا  $x = 2$  یک مثال نقض برای آن است.  $(\frac{3}{4} \not\geq 2)$

$$\sim(\forall x \in \mathbb{N} : \frac{x+1}{x} \geq 2) \equiv \exists x \in \mathbb{N} : \frac{x+1}{x} < 2 \equiv \exists x \in \mathbb{N} : \frac{x+1}{x} < 2$$

ب) درست است، زیرا اتحاد مزدوج می‌باشد و به ازای هر عدد حقیقی برقرار است.

$$\sim(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = (x-1)(x+1))$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq (x-1)(x+1)$$

پ) نادرست است، زیرا به ازای  $x = -2$  مخرج کسر صفر شده و عبارت

تعریف نشده است.

$$\sim(\forall x \in \mathbb{Z} : \frac{4-x^2}{2+x} = 2-x) \equiv \exists x \in \mathbb{Z} : \frac{4-x^2}{2+x} \neq 2-x$$

ت) درست است، زیرا به ازای  $x = 0$  زیر رادیکال برابر صفر شده و متعلق

به اعداد صحیح است، پس مجموعه جواب آن ناتهی است.

$$\sim(\exists x \in \mathbb{R} : \sqrt{-x} \in \mathbb{Z}) \equiv \forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{-x} \notin \mathbb{Z}$$

ث) درست است، زیرا به ازای  $n \geq 10$  نامساوی برقرار می‌شود.

$$n = 10 \Rightarrow (2^{10} = 1024 > 1000)$$

$$\sim(\exists n \in \mathbb{N} : 2^n > 1000) \equiv \forall n \in \mathbb{N} : 2^n \leq 1000$$

۲۸ آ) درست است، زیرا تمام متغیرهای گسسته به صورت کمی گسسته می‌باشند.

ب) نادرست است، زیرا متغیرهای کمی به دو شاخه پیوسته و گسسته

تقسیم می‌شوند. پس متغیر می‌تواند کمی پیوسته باشد، مانند زمان مطالعه.

پ) نادرست است، زیرا هیچ متغیر گسسته‌ای یک متغیر کیفی نیست، پس

مجموعه جواب تهی است.

ت) درست است، زیرا حداقل یک متغیر کمی گسسته مانند تعداد دانش‌آموزان یک

کلاس داریم. پس حداقل یک متغیر کمی گسسته وجود دارد و این گزاره درست می‌باشد.

۲۹ آ) چون حاصل ضرب هر دو عدد طبیعی متوالی زوج است، بنابراین

برای هر عضو از دامنه متغیر  $(\mathbb{N})$ ، گزاره‌نما به گزاره‌ای درست تبدیل

می‌شود، پس این عبارت درست است.

ب) نادرست است، زیرا به عنوان مثال اگر  $x = \frac{\pi}{4}$  باشد، گزاره‌نما به

گزاره‌ای نادرست تبدیل می‌شود.

$$\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \neq 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1 \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{2} \neq 1 \Rightarrow \sqrt{2} \neq 1$$

پ) درست است، زیرا دو عدد صحیح  $\{0, -3\}$  وجود دارند که در معادله

صدق می‌کنند، پس مجموعه جواب گزاره‌نما ناتهی است.

$$x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

ت) نادرست است، زیرا مجموعه جواب گزاره‌نما مجموعه تهی است.

معادله جواب حقیقی ندارد.  $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4$

ث) نادرست است، زیرا  $x = 2$  عددی اول است ولی  $2 \neq 2k + 1$

ج) درست است.  $x^5 + 1 = 0 \Rightarrow x^5 = -1 \Rightarrow x = -1$

زیرا یک عدد صحیح وجود دارد که در معادله صدق می‌کند.

۳۰ آ) ارزش این گزاره سوری درست است، زیرا به ازای هر  $x \in A$

گزاره‌نما درست می‌باشد.

$$A = \{-2, -1, 0, 1\} \Rightarrow \begin{cases} -2 + 3 \leq 4 \Rightarrow 1 \leq 4 \\ -1 + 3 \leq 4 \Rightarrow 2 \leq 4 \\ 0 + 3 \leq 4 \Rightarrow 3 \leq 4 \\ 1 + 3 \leq 4 \Rightarrow 4 \leq 4 \end{cases}$$

ب) ارزش این گزاره سوری نادرست است، زیرا  $x = -2$  از دامنه متغیر

وجود دارد که به ازای آن ارزش گزاره‌نما نادرست است.

$$x = -2 \Rightarrow 2(-2) + 1 \not\geq -3 \Rightarrow -3 \not\geq -3$$

پ) ارزش این گزاره سوری درست است، زیرا عضوی از دامنه متغیر وجود دارد

که به ازای آن ارزش گزاره‌نما درست است.  $x = 1 \Rightarrow \sqrt{1^2 + 3} = \sqrt{4} = 2$

ت) ارزش این گزاره سوری نادرست است، زیرا هیچ عضوی از دامنه متغیر وجود ندارد

که ارزش گزاره‌نما به ازای آن درست شود.

$$A = \{-2, -1, 0, 1\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-2-1}{2} = \frac{-3}{2} \not\geq 1 \\ \frac{-1-1}{2} = \frac{-2}{2} \not\geq 1 \\ \frac{0-1}{2} = \frac{-1}{2} \not\geq 1 \\ \frac{1-1}{2} = 0 \not\geq 1 \end{cases}$$