

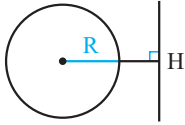
راهبرد حل مساله



مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

مؤلف درس، سؤال‌های تألیف و انتخاب سؤال‌های این فصل: سینا محمدپور

❖ در حل سؤالات مبحث مفاهیم اولیه که عموماً مرتبط با بررسی وضعیت یک خط و یک دایره می‌باشد، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:



مرحله ۱ به دست آوردن فاصله خط تا مرکز دایره مذکور (OH).

مرحله ۲ محاسبه طول شعاع دایره (R).

مرحله ۳ مقایسه فاصله خط تا مرکز دایره با طول شعاع دایره.

مرحله ۴

خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند $\Rightarrow OH > R$

خط و دایره در یک نقطه مشترک‌اند $\Rightarrow OH = R$

خط و دایره در دو نقطه مشترک‌اند $\Rightarrow OH < R$

نکته

موضوع دیگری که جز مفاهیم اولیه شمرده می‌شود و دانستن آن برای شما واجب است این است که شعاع یک دایره بر خط مماس بر دایره در نقطه تماس عمود است.

❖ در حل سؤالات مبحث زاویه مرکزی عموماً به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

مرحله ۱ رجوع به تعریف زاویه مرکزی

مرحله ۲ مشخص نمودن زوایای مرکزی و کمان‌های متناظر با این زوایا

مرحله ۳ محاسبه زوایا با استفاده از اندازه کمان‌ها (یا بالعکس)

نکته

در سؤالاتی که با محاسبه طول یک وتر روبه‌رو هستیم، باید به ارتباط بین کمان‌ها و وترهای متناظر آن‌ها توجه داشت و قضیه زیر در روند حل این سؤالات بسیار کاربردی است.

قضیه

در یک دایره، کمان‌های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند و بالعکس.

ضمناً به این نکته توجه داشته باشید که اضلاع زاویه مرکزی با یکدیگر مساوی و برابر با شعاع دایره هستند.

❖ در حل سؤالات مبحث زاویهٔ محاطی در این کتاب، عموماً به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

مرحلهٔ ۱ | رجوع به تعریف زاویهٔ محاطی

مرحلهٔ ۲ | مشخص نمودن زوایای محاطی و کمان‌های روبه‌رو به این زوایا

مرحلهٔ ۳ | محاسبهٔ زوایا با استفاده از اندازهٔ کمان‌ها (یا بالعکس)

نکته

در حل سؤالات این مبحث به ارتباط بین زاویهٔ مرکزی و محاطی روبه‌رو به یک کمان، دقت داشته باشید.

❖ در حل سؤالات مبحث زاویهٔ ظلی، عموماً به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

مرحلهٔ ۱ | رجوع به تعریف زاویهٔ ظلی

مرحلهٔ ۲ | مشخص نمودن زوایای ظلی و کمان‌های روبه‌رو به این زوایا

مرحلهٔ ۳ | محاسبهٔ زوایا با استفاده از اندازهٔ کمان‌ها (یا بالعکس)

نکته

در حل سؤالات ترکیبی این مبحث، به ارتباط بین زاویهٔ محاطی و ظلی روبه‌رو به یک کمان دقت داشته باشید.

❖ در حل سؤالات مبحث زاویهٔ بین دو وتر، عموماً به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

مرحلهٔ ۱ | مشخص نمودن زوایا و کمان‌های مرتبط با این زوایا.

مرحلهٔ ۲ | محاسبهٔ زوایا با استفاده از اندازهٔ کمان‌ها (یا بالعکس)

البته توجه به این نکته که زاویهٔ ایجاد شده، حاصل از برخورد وترها درون دایره است یا بیرون دایره، الزامی است.

نکته

در حل سؤالات ترکیبی این مبحث، به زوایای محاطی، ظلی و مرکزی روبه‌رو به کمان‌هایی که دو وتر روی دایره جدا نموده‌اند، دقت داشته باشید.

۱. مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

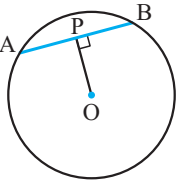
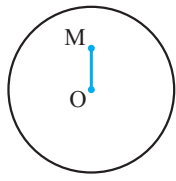
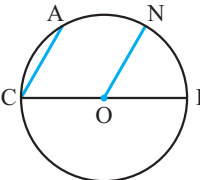
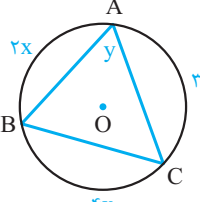
مفاهیم اولیه

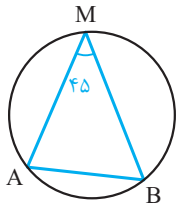
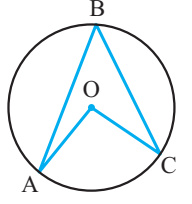
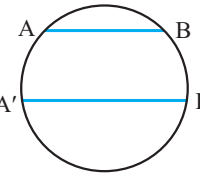
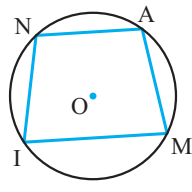
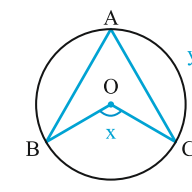
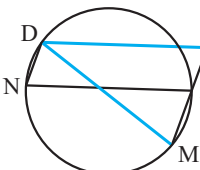
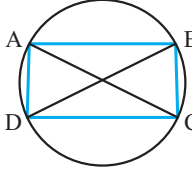
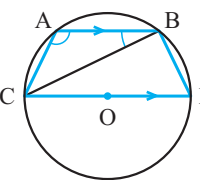
مرجع

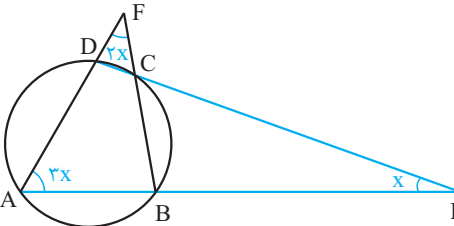
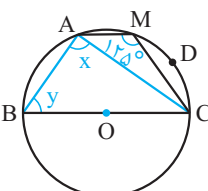
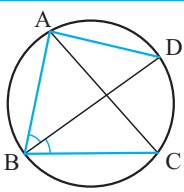
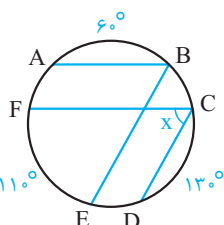
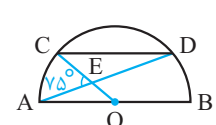
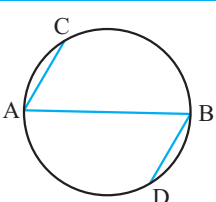
مرتبط با صفحه‌های ۱۰ تا ۱۱ کتاب درسی	۱. یک خط و یک دایره نسبت به هم چه وضعیتی می‌توانند داشته باشند؟ (با رسم شکل توضیح دهید)
مرتبط با صفحه‌های ۱۰ تا ۱۱ کتاب درسی	۲. با انتخاب گزینه مناسب، گزاره زیر را تکمیل کنید. در حالتی که خط و دایره اصطلاحاً گفته می‌شود خط بر دایره مماس است. (الف) هیچ نقطه اشتراکی نداشته باشند. (ب) تنها در یک نقطه مشترک باشند.
مرتبط با صفحه‌های ۱۰ تا ۱۱ کتاب درسی	۳. جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. (الف) اگر خط و دایره دو نقطه اشتراک داشته باشند، خط و دایره را می‌نامند. در این حالت خط را نسبت به دایره می‌نامیم. (ب) در صفحه، یک خط و دایره بر هم؛ اگر و تنها اگر این خط بر شعاع دایره در نقطه تماس عمود باشد.

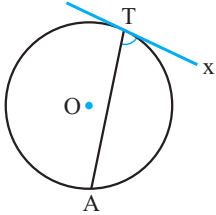
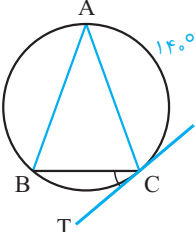
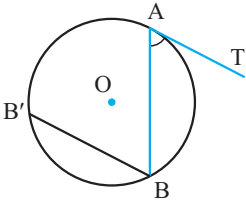
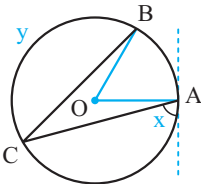
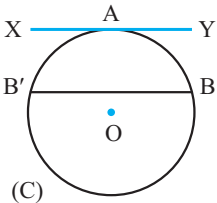
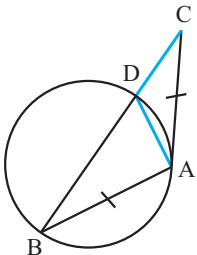
زاویه‌ها در دایره

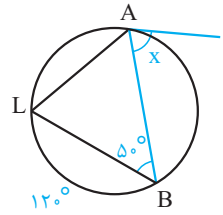
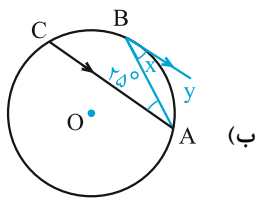
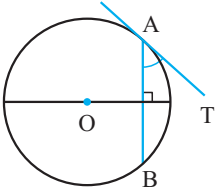
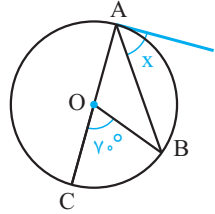
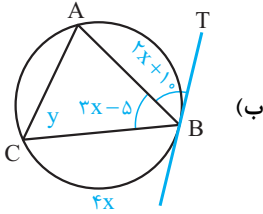
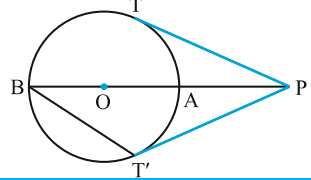
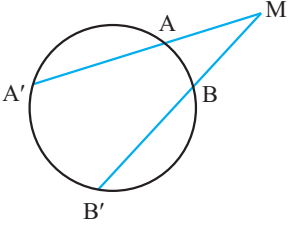
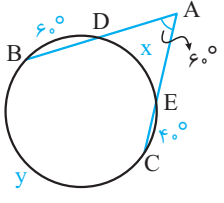
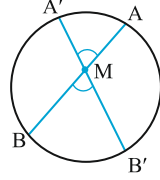
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳ کتاب درسی	۴. واژه‌های زیر را تعریف کنید. (الف) زاویه مرکزی (ب) وتر دایره
مرتبط با کاردرکلاس ۲ صفحه ۱۳ کتاب درسی	۵. با توجه به شکل و اندازه‌های مربوطه، طول کمان‌های زیر را مشخص کنید. (الف) طول \widehat{AB} (ب) طول $\widehat{A_1B_1}$
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳ کتاب درسی	۶. اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(O, R)$ بر حسب درجه مساوی α باشد: (الف) نشان دهید طول کمان AB برابر است با: $L = \frac{\pi R}{180} \alpha$. (ب) اگر $\alpha = 30^\circ$ و $R = 1$ باشد، طول کمان AB را به دست آورید.
مرتبط با کار در کلاس ۲ صفحه ۱۳ کتاب درسی	۷. با توجه به شکل مقابل، مساحت قطاع هاشور خورده را به دست آورید.
امتحان نهایی - نوبت شهریور ۹۵ مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی	۸. ثابت کنید در یک دایره، کمان‌های نظیر دو وتر مساوی، با هم برابرند.
مشهد - هیات امنایی شهید جباریان (۷ تکرار) مرتبط با فعالیت ۳ صفحه ۱۳ کتاب درسی	۹. ثابت کنید در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.

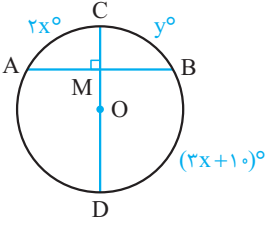
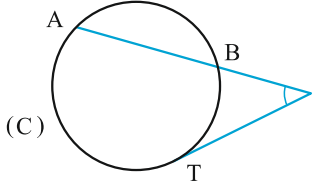
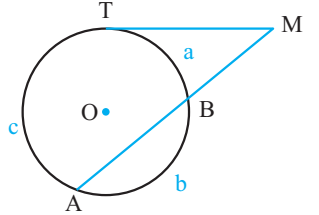
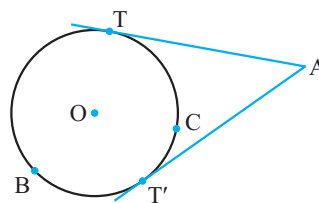
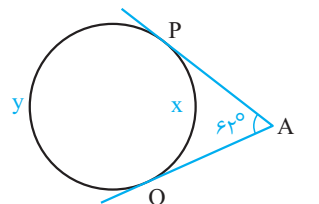
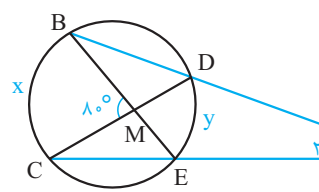
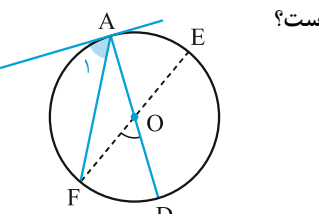
<p>۹۳ امتحان نهایی - نوبت دی مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳ کتاب درسی</p>		<p>۱۰. با توجه به شکل روبه‌رو اگر در دایره $C(O, 10)$، $OP = 6$ باشد، آن گاه طول AP و AB را به دست آورید.</p>
<p>یزد - روش نوین (۵ تکرار) مرتبط با صفحه ۱۱ تا ۱۳ کتاب درسی</p>		<p>۱۱. ثابت کنید در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر از آن وصل می‌کند بر آن وتر عمود است.</p>
<p>تهران - شهدای هفتم تیر (۱۴ تکرار) مرتبط با تمرین ۸ صفحه ۱۷ کتاب درسی</p>		<p>۱۲. ثابت کنید در یک دایره، از دو وتر نابرابر، آن که بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است.</p>
<p>تهران - فاطمیه (۶ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳ کتاب درسی</p>		<p>۱۳. ثابت کنید کوچک‌ترین وتری که از یک نقطه واقع در درون یک دایره می‌توان رسم کرد، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه، عمود است.</p>
<p>مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳ کتاب درسی</p>		<p>۱۴. در شکل مقابل، $OM = 3$ و $C(O, 5)$، اندازه کوتاه‌ترین وتری که از نقطه M می‌گذرد را بیابید.</p>
<p>کرمانشاه - هماهنگ استانی (۸ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳ کتاب درسی</p>		<p>۱۵. ثابت کنید در یک دایره، وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند.</p>
<p>مرتبط با صفحه ۱۲ کتاب درسی</p>		<p>۱۶. زاویه محاطی را تعریف کنید.</p>
<p>قزوین - نمونه دولتی علامه جعفری (۱۲ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی</p>		<p>۱۷. ثابت کنید اندازه هر زاویه محاطی برابر با نصف کمان روبه‌روی آن است.</p>
<p>۹۵ امتحان نهایی - نوبت دی (۸ تکرار) مرتبط با صفحه ۱۲ کتاب درسی</p>		<p>۱۸. با استفاده از تعریف زاویه محاطی، نشان دهید مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است.</p>
<p>البرز - پژوهندگان علم (۵ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی</p>		<p>۱۹. در دایره به مرکز O و به قطر CI، داریم $CA \parallel ON$. ثابت کنید $\widehat{AN} = \widehat{NI}$.</p>
<p>تهران - غیردولتی اردیبهشت (۴ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی</p>		<p>۲۰. در شکل زیر اندازه زاویه‌های x و y را به دست آورید.</p>

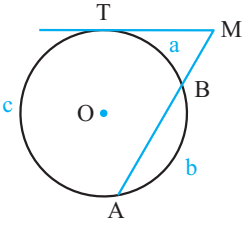
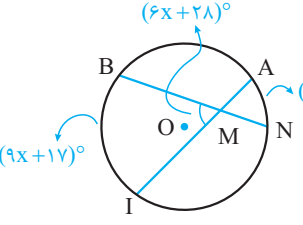
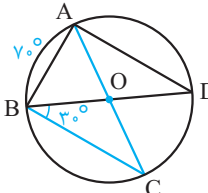
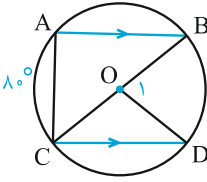
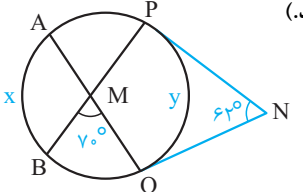
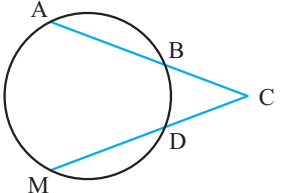
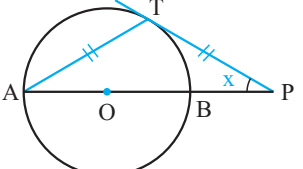
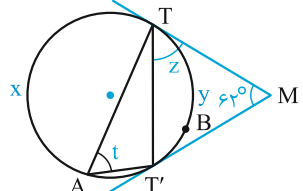
<p>گرمسار - شهید فانی (۳ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی</p>		<p>۲۱. دایره $C(O, R)$ مفروض است. وتر AB به طول $\sqrt{2}$ سانتی‌متر داده شده است. با توجه به شکل، اگر $\widehat{AMB} = 45^\circ$ باشد، آن گاه مطلوب است محاسبه: الف) شعاع دایره ب) فاصله مرکز دایره از وتر AB</p>
<p>تهران - غیردولتی ندای آزادی (۳ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی</p>		<p>۲۲. در دایره به مرکز O، اگر $\widehat{AOC} = (3\alpha + 12)^\circ$ و $\widehat{ABC} = (\alpha + 16)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازه زاویه‌های مرکزی \widehat{AOC} و محاطی \widehat{ABC} را تعیین کنید.</p>
<p>کهنوج - فرهیختگان (۳ تکرار) مرتبط با کار در کلاس ۱ صفحه ۱۵ کتاب درسی</p>		<p>۲۳. ثابت کنید در هر دایره کمان‌های محصور بین دو وتر موازی با هم برابرند.</p>
<p>تهران - غیردولتی سما (۴ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی</p>		<p>۲۴. در شکل مقابل، تمامی رئوس چهارضلعی $AMIN$ بر روی یک دایره واقع‌اند. اگر $AM = NI$ باشد، آن گاه ثابت کنید $AN \parallel MI$.</p>
<p>اراک - نمونه دولتی شهید مطهری (۳ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی</p>		<p>۲۵. در شکل روبه‌رو $AB = AC$ می‌باشد. در این صورت: الف) اگر $\widehat{y} = 160^\circ$، آنگاه \widehat{x} را به دست آورید. ب) اگر $\widehat{x} = 130^\circ$ باشد، اندازه کمان \widehat{y} را به دست آورید.</p>
<p>خرم آباد - هماهنگ استانی (۶ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی</p>		<p>۲۶. در شکل روبه‌رو چهارضلعی $DIAN$ یک متوازی‌الاضلاع است و نقطه‌های A، I و M بر یک خط راست قرار دارند. ثابت کنید $DM = DI$.</p>
<p>سمنان - نمونه رشد (۶ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی</p>		<p>۲۷. در شکل مقابل اگر $AD = BC$ باشد، ثابت کنید $AC = BD$.</p>
<p>مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی</p>		<p>۲۸. در شکل زیر، وتر AB با قطر CD موازی است، در مثلث ABC، مقدار $\widehat{A} - \widehat{B}$ را به دست آورید.</p>

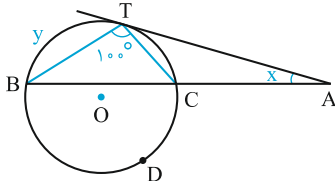
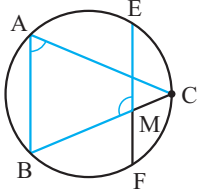
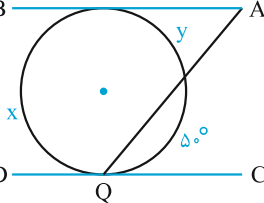
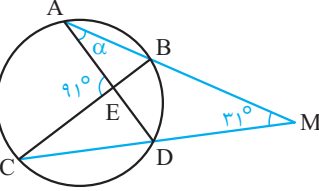
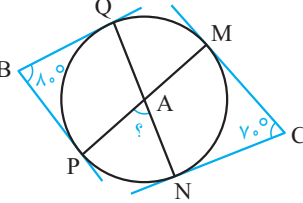
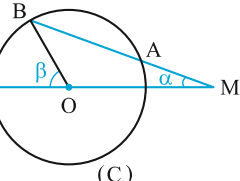
<p>تهران - غیردولتی اردیبهشت (۵ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی</p>		<p>۲۹. با توجه به شکل، x را به دست آورید.</p>
<p>مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی</p>		<p>۳۰. اندازه x و y را در شکل زیر تعیین کنید.</p>
<p>مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی</p>		<p>۳۱. نقاط A, B, C, D روی محیط یک دایره قرار دارند. اگر $\widehat{BAC} = 70^\circ$ و BD نیمساز زاویه B باشد، حاصل $\widehat{BAD} - \widehat{ABD}$ را به دست آورید.</p>
<p>تهران - غیردولتی نور (۴ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی</p>		<p>۳۲. در شکل زیر، $\widehat{EF} = 110^\circ$، $\widehat{AB} = 60^\circ$، $\widehat{CD} = 130^\circ$ و $CD \parallel BE$ و $AB \parallel FC$ می‌باشد. زاویه \widehat{FCD} چه قدر است؟</p>
<p>مرتبط با تمرین ۴ صفحه ۱۷ کتاب درسی</p>		<p>۳۳. در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره است و $AB \parallel CD$. اندازه کمان CD را به دست آورید.</p>
<p>مرتبط با تمرین ۵ صفحه ۱۷ کتاب درسی</p>		<p>۳۴. در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند. ثابت کنید $AC = BD$.</p>
<p>مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی</p>	<p>۳۵. با انتخاب گزینه مناسب، جمله زیر را تکمیل کنید. زاویه‌ای که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر آن شامل وتر است از دایره باشد، زاویه نامیده می‌شود. الف) ظلی ب) محاطی</p>	
<p>بناب - نمونه وایعصر (۱۱ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی</p>	<p>۳۶. ثابت کنید اندازه هر زاویه ظلی برابر نصف کمان روبه‌روی آن است.</p>	

<p>نمونه دولتی چمران (۲ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی</p>		<p>۳۷. اگر اندازه زاویه ظلی ATx مساوی $(2\alpha - 6)^\circ$ و اندازه کمان \widehat{AT} برابر $(3\alpha + 33)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازه زاویه ATx را بیابید.</p>
<p>امتحان نهایی - خرداد ۹۶ (۴ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی</p>		<p>۳۸. در شکل روبرو، $AB = AC$، CT مماس بر دایره در نقطه C و $\widehat{AC} = 140^\circ$ است. اندازه زاویه BCT را بیابید.</p>
<p>خرم آباد - هماهنگ استانی (۳ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی</p>		<p>۳۹. زاویه ظلی TAB در دایره‌ای به مرکز O داده شده است. به کمک خط BB' که موازی خط مماس AT رسم شده است ثابت کنید که: $\widehat{TAB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$</p>
<p>مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی</p>	<p>۴۰. از نقطه A به فاصله ۶ از مرکز دایره‌ای به شعاع ۳، دو مماس بر آن دایره رسم شده است. زاویه بین دو مماس را به دست آورید.</p>	
<p>مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی</p>		<p>۴۱. اگر $AC = BC$ و $\angle AOB = 60^\circ$، آن‌گاه مقادیر x و y را بیابید.</p>
<p>امتحان نهایی - شهریور ۹۳ (۴ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی</p>		<p>۴۲. خط XY در نقطه A بر دایره (C) مماس است، وتر BB' از دایره را موازی XY رسم کرده‌ایم. ثابت کنید: $\widehat{AB} = \widehat{AB'}$.</p>
<p>شیراز - فرزاتگان (۵ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی</p>		<p>۴۳. در شکل زیر مماس AC و وتر AB مساوی‌اند. خط BC دایره را در نقطه D قطع کرده است. ثابت کنید مثلث ADC متساوی‌الساقین است.</p>

<p>نهران - حضرت زهرا (س) (۵ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی</p>	<p>۴۴. x و y را در هر یک از شکل‌های زیر تعیین کنید.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p>(الف)</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>(ب)</p> </div> </div>
<p>عجب شیر - ملاصدرا (۴ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی</p>	<p>۴۵. زاویهٔ ظلی در دایرهٔ به مرکز O داده شده است. با استفاده از ویژگی قطر عمود بر وتر، ثابت کنید که $\widehat{TAB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$.</p> <div style="text-align: center;">  </div>
<p>گرگان - عمار یاسر (۳ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی</p>	<p>۴۶. در شکل‌های زیر x و y را پیدا کنید.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p>(الف)</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>(ب)</p> </div> </div>
<p>مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی</p>	<p>۴۷. در شکل زیر PT و PT' بر دایره مماس بوده و AB قطر دایره است. اگر $PT \parallel BT'$ باشد، آنگاه اندازهٔ کمان $\widehat{TAT'}$ را به دست آورید.</p> <div style="text-align: center;">  </div>
<p>مشهد - غیرانتفاعی فرهیختگان (۱۰ تکرار) مرتبط با فعالیت ۱ صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی</p>	<p>۴۸. در شکل مقابل ثابت کنید.</p> $\widehat{M} = \frac{\widehat{A'B'} - \widehat{AB}}{2}$ <div style="text-align: center;">  </div>
<p>قزوین - نمونه دولتی علامه جعفری (۴ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۶ کتاب درسی</p>	<p>۴۹. در شکل زیر، کمان‌های BD و CE به ترتیب 60° و 40° درجه و $\widehat{A} = 60^\circ$ است. x و y را بیابید.</p> <div style="text-align: center;">  </div>
<p>یزد - نمونه دولتی ملک ثابت (۱۰ تکرار) مرتبط با فعالیت ۲ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی</p>	<p>۵۰. ثابت کنید اندازه زاویهٔ بین دو وتر متقاطع درون دایره برابر است با نصف مجموع اندازهٔ کمان‌هایی از دایره که به اضلاع زاویه و امتداد اضلاع زاویه محدودند، یعنی $\widehat{M} = \frac{\widehat{AA'} + \widehat{BB'}}{2}$.</p> <div style="text-align: center;">  </div>

<p>تهران - سرزمین پارس (تکرار ۷) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۶ کتاب درسی</p>	 <p>۵۱. در شکل مقابل قطر CD بر وتر AB عمود است. مقادیر x و y را بیابید.</p>						
<p>مرتبط با تمرین ۱ صفحه ۱۶ کتاب درسی</p>	 <p>۵۲. خط مماس بر دایره (C) در نقطه T، امتداد وتر AB از این دایره را در نقطه M قطع کرده است. ثابت کنید: $\widehat{AMT} = \frac{\widehat{AT} - \widehat{BT}}{2}$.</p>						
<p>امتحان نهایی - خرداد ۹۴ (تکرار ۶) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۶ کتاب درسی</p>	 <p>۵۳. خط مماس بر دایره در نقطه T و امتداد وتر AB در نقطه M متقاطع‌اند. با فرض $\widehat{TB} = a$، $\widehat{BA} = b$، $\widehat{AT} = c$ و $\frac{a}{1} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ اندازه زاویه M را تعیین کنید.</p>						
<p>مرتبط با تمرین ۱ صفحه ۱۶ کتاب درسی</p>	 <p>۵۴. ثابت کنید زاویه بین دو خط مماس رسم شده از نقطه A خارج دایره بر آن $(\widehat{AT}, \widehat{AT'})$ برابر قدرمطلق نصف تفاضل دو کمان ایجاد شده بین نقاط T و T' است.</p> $\widehat{TAT'} = \left \frac{\widehat{TBT'} - \widehat{TCT'}}{2} \right $						
<p>تهران - آیت الله سعیدی (تکرار ۵) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی</p>	 <p>۵۵. x و y را بیابید.</p>						
<p>گرمسار - شهید نانی (تکرار ۴) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی</p>	 <p>۵۶. در شکل زیر \widehat{x} و \widehat{y} را به دست آورید. (با ذکر دلیل)</p>						
<p>تهران - حضرت زهرا (س) (تکرار ۲) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی</p>	 <p>۵۷. در شکل زیر، O مرکز دایره و $\widehat{A_1} = 56^\circ$ است. کمان AE چند درجه است؟</p> <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="width: 33%;"></td> <td style="width: 33%;">۶۶ (۲)</td> <td style="width: 33%;">۶۸ (۱)</td> </tr> <tr> <td></td> <td>۶۴ (۴)</td> <td>۶۴ (۳)</td> </tr> </table>		۶۶ (۲)	۶۸ (۱)		۶۴ (۴)	۶۴ (۳)
	۶۶ (۲)	۶۸ (۱)					
	۶۴ (۴)	۶۴ (۳)					

<p>تبریز - نمونه آذری (۵ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی</p>		<p>۵۸. در شکل زیر MT در نقطه T بر دایره مماس است. اگر $\widehat{M} = 60^\circ$ و $b = 100^\circ$ باشد، اندازه کمان‌های a و c را به دست آورید.</p>
<p>تهران - رضوان (۴ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی</p>		<p>۵۹. در شکل زیر، x و اندازه زاویه \widehat{BMI} را تعیین کنید.</p>
<p>مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی</p>		<p>۶۰. در هر شکل، اندازه‌های خواسته شده را به دست آورید.</p> <p>الف) \widehat{AB} ب) $\widehat{O_1}$ ج) \widehat{A}</p> 
<p>آمل - نمونه دولتی دکتر جمشیدنژاد (۴ تکرار) مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی</p>		<p>۶۱. در شکل مقابل x و y را بیابید. (MP و MQ مماس بر دایره هستند.)</p>
<p>مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی</p>		<p>۶۲. در شکل مقابل $\frac{\widehat{BD}}{1} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{\widehat{MD}}{3} = \frac{\widehat{AM}}{4}$ اندازه زاویه \widehat{MCB} چند درجه است؟</p>
<p>مرتبط با صفحه ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی</p>		<p>۶۳. در شکل مقابل مماس PT مساوی AT و O مرکز دایره است. اندازه زاویه \widehat{P} چند درجه است؟</p>
<p>مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی</p>		<p>۶۴. مقادیر x, y, z, t را در شکل مقابل به دست آورید. (MT و MT' مماس بر دایره و $\widehat{M} = 62^\circ$)</p>

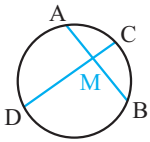
<p>مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی</p>		<p>۶۵. در شکل مقابل x و y را بیابید. $(\widehat{TBC} = 2\widehat{TAC})$</p>
<p>مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی</p>		<p>۶۶. در شکل زیر، C وسط کمان EF می‌باشد. مقدار $\widehat{BME} + \widehat{BAC}$ را بیابید.</p>
<p>مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی</p>		<p>۶۷. در شکل مقابل، $AB \parallel DC$، اندازه کمان‌های x و y را به دست آورید.</p>
<p>مرتبط با تمرین ۲ صفحه ۱۷ کتاب درسی</p>		<p>۶۸. در شکل مقابل اندازه زاویه α را به دست آورید.</p>
<p>مرتبط با تمرین ۳ صفحه ۱۷ کتاب درسی</p>		<p>۶۹. در شکل مقابل، اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازه زاویه A چند درجه است؟</p>
<p>مرتبط با صفحه‌های ۱۰ و ۱۱ کتاب درسی</p>	<p>۷۰. خط d مفروض است. مرکزهای همه دایره‌هایی که شعاع آنها مقدار ثابت R است و بر این خط مماس هستند، روی چه شکلی قرار دارند؟ این شکل چه وضعیتی نسبت به d دارد؟</p>	
<p>مرتبط با تمرین ۶ صفحه ۱۷ کتاب درسی</p>		<p>۷۱. دایره $C(O, R)$ مفروض است. از نقطه M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و $MA = R$. نشان دهید: $\beta = 3\alpha$.</p>
<p>مرتبط با صفحه‌های ۱۰ و ۱۱ کتاب درسی</p>	<p>۷۲. دو خط m و n در نقطه A متقاطع‌اند. چه تعداد دایره می‌توان رسم کرد که مرکز آن روی خط n و شعاع آن ۲ سانتی‌متر بوده و بر خط m مماس باشد. (با ذکر دلیل)</p>	

راهبرد حل مساله

رابطه‌های طولی در دایره

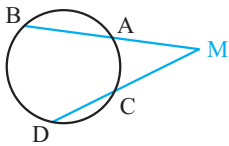
❖ در حل سؤالات مربوط به روابط طولی وترها و مماس‌های متقاطع از روابطی که به تفکیک در زیر آمده استفاده می‌کنیم:

❶ دو وتر درون دایره یکدیگر را قطع می‌کنند:



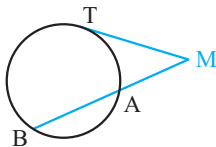
$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

❷ دو وتر بیرون از دایره یکدیگر را قطع می‌کنند:



$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

❸ خط مماس بر دایره و امتداد یک وتر، یکدیگر را قطع می‌کنند:

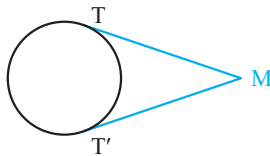


$$MT^2 = MA \cdot MB$$

❖ در حل سؤالات مربوط به رسم مماس بر دایره باید به نکات زیر توجه کنیم:

❶ روش رسم خط مماس بر دایره از نقطه‌ای بیرون از آن تنها با استفاده از خط‌کش و پرگار را مطالعه کنید.

❷ استفاده از این قضیه که مماس‌های مرسوم به یک دایره از هر نقطه خارج آن با هم برابرند.



$$MT = MT'$$

❸ استفاده از قضیه فیثاغورس نه تنها در حل سؤالات این مبحث بلکه به طور کلی برای حل سؤالات مربوط به رابطه‌های طولی در دایره بسیار

کاربردی است.

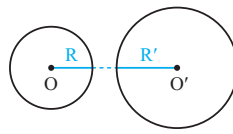
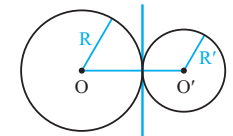
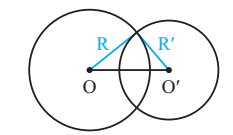
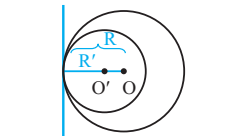
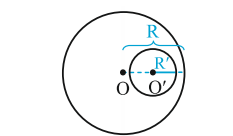
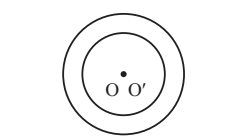
❖ در حل سؤالات مبحث حالت‌های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک‌ها عموماً به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

مرحله ۱ مشخص نمودن شعاع‌های دو دایره و خط‌المركزین آنها

مرحله ۳ محاسبه طول شعاع‌ها و خط‌المركزین

مرحله ۳ مقایسه حاصل جمع و همچنین قدرمطلق تفاضل طول شعاع‌های دو دایره با طول خط‌المركزین.

حالت‌هایی که دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ با فرض $OO' = d$ می‌توانند نسبت به هم داشته باشند، به قرار زیر است:

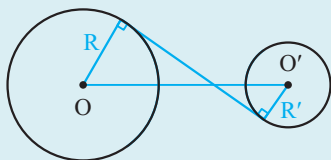
	$d > R + R'$	دو دایره بیرون هم (متخارج)
	$d = R + R'$	دو دایره مماس بیرون
	$ R - R' < d < R + R'$	دو دایره متقاطع
	$d = R - R' $	دو دایره مماس درون
	$d < R - R' $	دو دایره متداخل
	$d = 0$	دو دایره هم‌مرکز

نکته

در حل سؤالات مربوط به طول مماس مشترک داخلی و خارجی دو دایره از روابط زیر که با استفاده از قضیه فیثاغورس حاصل شده‌اند، استفاده می‌کنیم:

۲ طول مماس مشترک داخلی دو دایره:

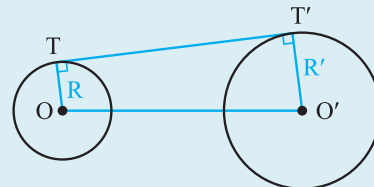
$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$



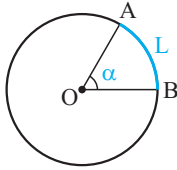
۱ طول مماس مشترک خارجی دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$

با فرض $OO' = d$ به قرار زیر است:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$



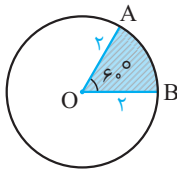
$$\Rightarrow \frac{\alpha}{360} = \frac{L}{2\pi R} \Rightarrow L = \frac{\pi R}{180} \alpha$$



(ب)

$$\alpha = 30^\circ, R = 1 \Rightarrow L = \frac{\pi(1)}{180} \times (30) = \frac{\pi}{6}$$

۷. می‌دانیم مساحت قطاعی از دایره که زاویه مرکزی آن قطاع برابر α و شعاع آن برابر R باشد، از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

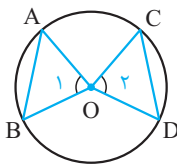


$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$$

لذا داریم:

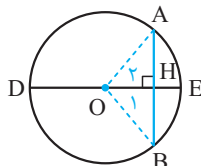
$$S_{\text{قطاع هاشور خورده}} = \frac{\pi(2)^2(60)}{360} = \frac{2\pi}{3}$$

۸. با توجه به برابری وترهای مربوطه داریم:



$$\begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \\ AB = CD \end{cases} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \triangle OAB \cong \triangle OCD$$

$$\widehat{OA} = \widehat{OB} \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$



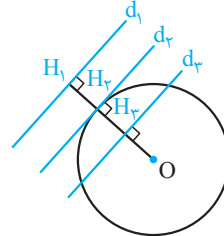
$$\begin{cases} OA = OB \text{ شعاع دایره} \\ OH = OH \text{ مشترک} \\ \widehat{OHA} = \widehat{OHB} = 90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{(وتر و یک ضلع)}} \triangle OHA \cong \triangle OHB$$

$$\text{اجزای متناظر} \left\{ \begin{array}{l} AH = BH = \frac{1}{2} AB \\ \widehat{OA} = \widehat{OB} \Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{BE} \end{array} \right.$$

پاسخ تشریحی:
سینا ممدپور

۱. دایره

۱. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید، این دو نسبت به هم می‌توانند ۳ حالت داشته باشند:



حالت ۱: خط و دایره هیچ نقطه اشتراکی نداشته باشند؛ این حالت زمانی رخ می‌دهد که فاصله خط از مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره باشد. (خط d_1)
 $OH_1 > R$

حالت ۲: خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک باشند؛ این حالت زمانی رخ می‌دهد که فاصله خط تا مرکز دایره با شعاع دایره برابر باشد. (خط d_2)
 $OH_2 = R$

حالت ۳: خط و دایره دو نقطه اشتراک داشته باشند؛ این حالت زمانی رخ می‌دهد که فاصله خط از مرکز دایره کمتر از شعاع دایره باشد. (خط d_3)
 $OH_3 < R$

۲. در حالتی که خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک باشند، اصطلاحاً گفته می‌شود خط بر دایره مماس است. بنابراین گزینه «ب» صحیح است.

۳. الف) متقاطع - قاطع
ب) مماس‌اند.

۴. الف) زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع است.
ب) پاره‌خطی که دو سر آن روی دایره باشد.

$$\frac{\text{طول کمان}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان}}{360^\circ}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{الف) } \frac{60}{360} = \frac{\text{طول } \widehat{AB}}{4\pi} \Rightarrow \text{طول } \widehat{AB} = \frac{2}{3}\pi \\ \text{ب) } \frac{60}{360} = \frac{\text{طول } \widehat{A_1B_1}}{8\pi} \Rightarrow \text{طول } \widehat{A_1B_1} = \frac{4}{3}\pi \end{cases}$$

۶. الف) با توجه به این که محیط دایره یک کمان به اندازه 360° است، لذا داریم:

$$\frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان } AB}{360^\circ}$$

با مقایسه رابطه (۱) و (۲) داریم:

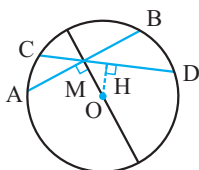
$$OH^2 + \frac{AB^2}{4} = OH'^2 + \frac{A'B'^2}{4}$$

$$\Rightarrow OH^2 - OH'^2 = \frac{A'B'^2}{4} - \frac{AB^2}{4}$$

حال اگر $AB > A'B'$ آنگاه سمت راست تساوی منفی می‌شود. بنابراین سمت چپ نیز باید همین علامت را داشته باشد. در نتیجه:

$$OH^2 - OH'^2 < 0 \Rightarrow OH^2 < OH'^2 \Rightarrow OH < OH'$$

بنابراین وتر AB بزرگتر است، به مرکز دایره نزدیکتر است.

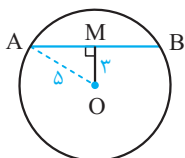


مطابق شکل وتر AB در نقطه M بر قطر گذرنده از M عمود است. حال کافیست ثابت کنیم که وتر AB از هر وتر دیگری که از نقطه M می‌گذرد کوتاه‌تر است. برای این کار وتر دلخواه CD را از M می‌گذرانیم، داریم:

$$\triangle OMH \text{ وتر مثلث: } OM > OH$$

حال بنا بر رابطه‌ای که در سؤال ۱۲ به دست آوردیم، داریم:

$$\xrightarrow[\text{نزدیکتر است}]{\text{وتر } CD \text{ به مرکز دایره}} CD > AB$$



می‌دانیم کوتاه‌ترین وتر AB که از نقطه M می‌گذرد، وتر AB است که در این نقطه بر OM عمود باشد. حال با رسم این وتر و استفاده از رابطه فیثاغورس داریم:

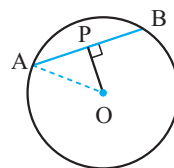
$$\triangle OMA \text{ قائم‌الزاویه: } OM^2 + AM^2 = OA^2$$

$$\Rightarrow 3^2 + AM^2 = 5^2 \Rightarrow AM = 4$$

از طرفی OM ، وتر AB را نصف می‌کند، بنابراین:

$$AM = MB \Rightarrow AB = 2AM \Rightarrow AB = 2 \times 4 = 8$$

۱۰.



ابتدا با رسم شعاع OA و استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه OPA داریم:

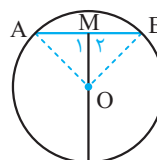
$$OP^2 + AP^2 = OA^2 \xrightarrow[\text{OP}=6]{\text{OA}=10} 6^2 + AP^2 = 10^2$$

$$\Rightarrow AP^2 = 64 \Rightarrow AP = 8$$

از طرفی می‌دانیم خطی که از مرکز دایره گذشته و بر وتر AB عمود باشد، آن وتر را نصف می‌کند. بنابراین:

$$AP = PB \Rightarrow AB = 2AP \Rightarrow AB = 2 \times 8 = 16$$

۱۱.



با توجه به این که نقطه M وسط AB قرار دارد، می‌توان نتیجه گرفت که:

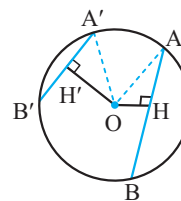
$$\begin{cases} OA = OB = R \\ OM = OM \\ AM = BM \end{cases} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \triangle AMO \cong \triangle BMO$$

$$\Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$$

از طرفی می‌دانیم؛ $\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 180^\circ$. بنابراین:

$$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = 90^\circ$$

۱۲.



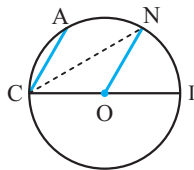
با رسم شعاع‌های OA و OA' و استفاده از قضیه فیثاغورس در دو مثلث قائم‌الزاویه OHA و $OH'A'$ داریم:

$$OH^2 + AH^2 = OA^2 \Rightarrow OH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = OA^2$$

$$\Rightarrow OH^2 + \frac{AB^2}{4} = r^2 \quad (1)$$

$$OH'^2 + A'H'^2 = OA'^2 \Rightarrow OH'^2 + \left(\frac{A'B'}{2}\right)^2 = OA'^2$$

$$\Rightarrow OH'^2 + \frac{A'B'^2}{4} = r^2 \quad (2)$$

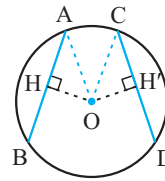


$$\begin{cases} ON \parallel CA \Rightarrow \widehat{NOI} = \widehat{ACI} \\ \widehat{NOI} = \widehat{NI} \\ \widehat{ACI} = \frac{\widehat{AI}}{2} \end{cases}$$

$$\widehat{NOI} = \widehat{ACI} \Rightarrow \widehat{NI} = \frac{\widehat{AI}}{2} \Rightarrow \widehat{AI} = 2\widehat{NI}$$

$$\Rightarrow \widehat{AN} + \widehat{NI} = 2\widehat{NI} \Rightarrow \widehat{AN} = \widehat{NI}$$

۱۹.



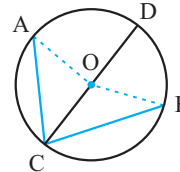
۱۵.

$$\begin{cases} AB = CD \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} \Rightarrow AH = CH' \\ OA = OC \\ \widehat{OHA} = \widehat{OH'C} = 90^\circ \end{cases}$$

(وتر و یک ضلع) $\xrightarrow{\Delta}$ $OHA \cong OH'C$ $\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}}$ $OH = OH'$

۱۶. زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشد.

۱۷.



$$\begin{cases} OA = OC \Rightarrow \widehat{ACD} = \frac{1}{2}\widehat{AOD} \\ OB = OC \Rightarrow \widehat{DCB} = \frac{1}{2}\widehat{DOB} \\ \widehat{AOB} = \widehat{AOD} + \widehat{DOB} = \widehat{AB} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{ACD} + \widehat{DCB} = \widehat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

۲۱. توجه: درحالتی که اضلاع زاویه به گونه‌ای باشند که قطر دایره درون زاویه قرار نگیرد نیز اثبات مشابه همین حالت صورت می‌گیرد.

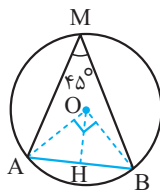
۲۰.

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CA} = 360^\circ \Rightarrow 2x + 4x + 2x = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 9x = 360^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$$

$$\widehat{BAC} = y = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow y = \frac{4x}{2} \Rightarrow y = 80^\circ$$

۲۱.



(الف)

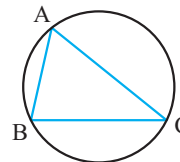
$$\begin{cases} OA = OB \\ \widehat{AOB} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \text{شعاع دایره} = OA = \frac{\sqrt{2}}{2} AB$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 1$$

$$OH = \frac{\sqrt{2}}{2} OA \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(ب)

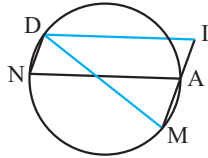
۱۸.



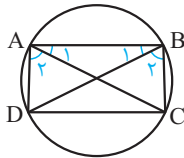
$$\begin{cases} \widehat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} \\ \widehat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2} \\ \widehat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2} \end{cases} \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{AC} + \widehat{AB}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

(ب)

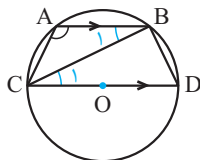
$$\begin{cases} \hat{x} = 130^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 130^\circ \\ \widehat{AB} + \widehat{AC} + \widehat{BC} = 360^\circ \Rightarrow 130^\circ + 2y = 360^\circ \\ \Rightarrow 2y = 230^\circ \Rightarrow y = 115^\circ \end{cases}$$



$$\begin{cases} DI \parallel NA \Rightarrow \hat{I} = \widehat{NAM} \\ DN \parallel IA \Rightarrow \hat{N} = \widehat{NAM} \\ \hat{M} = \hat{N} = \frac{\widehat{AD}}{2} \\ \Rightarrow \hat{M} = \hat{I} \Rightarrow MDI : DM = DI \end{cases}$$



$$\begin{cases} AD = BC \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC} \\ \hat{A}_1 = \frac{\widehat{BC}}{2} \\ \hat{B}_1 = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \\ \hat{A}_r = \hat{B}_r = \frac{\widehat{CD}}{2} \\ \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_r = \hat{B}_1 + \hat{B}_r \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \\ \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{ADC} \Rightarrow AC = BD \end{cases}$$



$$\begin{cases} AB \parallel CD \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{C}_1 = \frac{\widehat{BD}}{2} \\ \hat{A} = \frac{\widehat{BD} + \widehat{DC}}{2} \\ \Rightarrow \hat{A} - \hat{B}_1 = \hat{A} - \hat{C}_1 = \frac{\widehat{CD}}{2} = 90^\circ \end{cases}$$

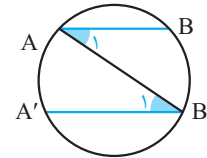
.۲۶

.۲۷

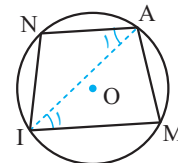
.۲۸

$$\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC} \Rightarrow 3\alpha + 12 = 2(\alpha + 16) \Rightarrow \alpha = 20 \quad .۲۲$$

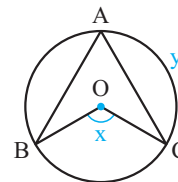
$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{AOC} = 3(20) + 12 = 72^\circ \\ \widehat{ABC} = 20 + 16 = 36^\circ \end{cases}$$



$$\begin{cases} AB \parallel A'B' \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}'_1 \\ \hat{A}_1 = \frac{\widehat{BB'}}{2} \\ \hat{B}'_1 = \frac{\widehat{AA'}}{2} \Rightarrow \widehat{AA'} = \widehat{BB'} \end{cases}$$



$$\begin{cases} AM = NI \Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{NI} \\ \hat{I}_1 = \frac{\widehat{AM}}{2} \\ \hat{A}_1 = \frac{\widehat{NI}}{2} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{I}_1 \Rightarrow AN \parallel MI \end{cases}$$



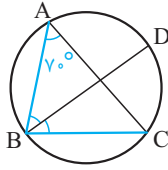
$$\begin{cases} AB = AC \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC} = y = 160^\circ \\ x = \widehat{BC} \\ \widehat{AB} + \widehat{AC} + \widehat{BC} = 360^\circ \\ \Rightarrow x + 320 = 360 \Rightarrow \hat{x} = 40^\circ \end{cases}$$

(الف)

.۲۳

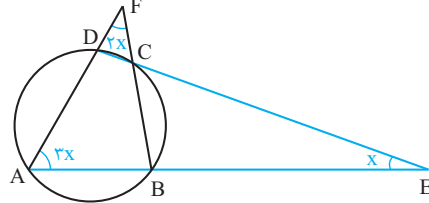
.۲۴

.۲۵



۲۹. زوایای \widehat{CDF} و \widehat{BCD} به ترتیب زوایای خارجی مثلث‌های ADE و FCD می‌باشند. بنابراین:

$$\begin{cases} \widehat{CDF} = \widehat{A} + \widehat{E} = 3x + x = 4x \\ \widehat{BCD} = \widehat{F} + \widehat{CDF} = 2x + 4x = 6x \end{cases}$$



از طرفی داریم:

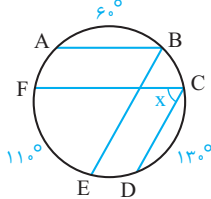
$$\widehat{A} + \widehat{BCD} = \frac{\widehat{BCD}}{2} + \frac{\widehat{BAD}}{2} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 3x + 6x = 9x = 180^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$$

۳۲. اگر کمان AF را برابر α بگیریم، در این صورت با توجه به توازی وترها:

$$AB \parallel CF \Rightarrow \widehat{AF} = \widehat{BC} = \alpha$$

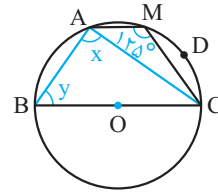
$$CD \parallel BE \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{ED} = \alpha$$



حال از آنجایی که مجموع کمان‌های دایره برابر با 360° درجه است، بنابراین:

$$\begin{aligned} \widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DE} + \widehat{EF} + \widehat{FA} &= 360^\circ \\ = \widehat{AB} + \widehat{CD} + \widehat{EF} + 3\alpha &= 360^\circ \\ \Rightarrow 60^\circ + 130^\circ + 110^\circ + 3\alpha &= 360^\circ \\ \Rightarrow 3\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ \Rightarrow \widehat{FD} &= 110^\circ + 20^\circ = 130^\circ \\ \Rightarrow \widehat{FCD} = x = \frac{\widehat{FED}}{2} = \frac{130^\circ}{2} &= 65^\circ \end{aligned}$$

۳۰.



$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow x = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\widehat{AMC} = \frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow 125^\circ = \frac{\widehat{AB}}{2} + 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} = 70^\circ$$

از طرفی داریم:

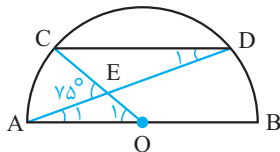
$$\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AMC}}{2} = \frac{\widehat{BAC} - \widehat{AB}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$$

۳۳. می‌دانیم \widehat{AEC} زاویه خارجی مثلث AEO می‌باشد. پس داریم:

$$\widehat{AEC} = \widehat{A}_1 + \widehat{O}_1 = 75^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{BD}}{2} + \widehat{AC} = 75^\circ \quad (1)$$

از طرفی داریم:



$$CD \parallel AB \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{D}_1 = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{AC} \quad (2)$$

حال با مقایسه رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{\widehat{BD}}{2} + \widehat{AC} = 75^\circ \xrightarrow{(2)} \frac{\widehat{AC}}{2} + \widehat{AC} = \frac{3}{2}\widehat{AC} = 75^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AC} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = 50^\circ$$

$$\widehat{AC} + \widehat{BD} + \widehat{CD} = 180^\circ \Rightarrow 50^\circ + 50^\circ + \widehat{CD} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CD} = 80^\circ$$

۳۱. $BD \Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{DBA} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{CD}$ است.

حال به محاسبه عبارت خواسته شده می‌پردازیم:

$$\widehat{BAD} - \widehat{ABD} = \frac{\widehat{BCD}}{2} - \frac{\widehat{AD}}{2}$$

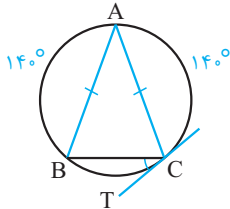
$$\Rightarrow \widehat{BAD} - \widehat{ABD} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{CD}}{2} - \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAD} - \widehat{ABD} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \widehat{BAC} = 70^\circ$$

$$\widehat{ATx} = \frac{\widehat{TA}}{2} \Rightarrow \widehat{TA} = 2\widehat{ATx}$$

$$\Rightarrow (3\alpha + 33)^\circ = 2(2\alpha - 6)^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ATx} = 2(45^\circ) - 6^\circ = 84^\circ$$



$$AB = AC \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC} = 140^\circ$$

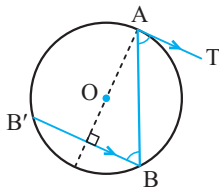
$$\widehat{AB} + \widehat{AC} + \widehat{BC} = 360^\circ \Rightarrow 280^\circ + \widehat{BC} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BC} = 80^\circ$$

$$\widehat{BCT} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BCT} = 40^\circ$$

۳۸ در صورتی که از A به مرکز دایره (O) وصل کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} AO \perp AT \\ BB' \parallel AT \end{cases} \Rightarrow AO \perp BB'$$



در نتیجه قطر AO کمان $\widehat{B'AB}$ را نصف می کند. پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{AB'} &= \widehat{AB} \\ \widehat{B} &= \frac{\widehat{AB'}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{B} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} AT \parallel BB' \\ AB \text{ مورب} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{TAB} = \widehat{B}$$

$$\Rightarrow \widehat{TAB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

۳۹ ابتدا اثبات می کنیم دو مثلث قائم الزاویه OTA و OT'A با یکدیگر همنهشتانند:

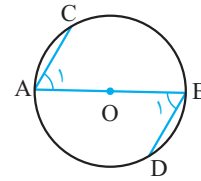
$$\left. \begin{aligned} OT &= OT' \\ OA &= OA \\ \widehat{T} &= \widehat{T'} = 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle OTA \cong \triangle OT'A \text{ (وتر و یک ضلع)}$$

$$\Rightarrow \widehat{OAT} = \widehat{OAT'} (*)$$

حال بنا بر فرض مسأله داریم:

$$OT = 3, OA = 6 \Rightarrow OT = \frac{1}{2}OA$$

۳۴



$$AC \parallel BD \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{B_1} = \frac{\widehat{CB}}{2} = \frac{\widehat{AD}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{CB} = \widehat{AD} \quad (1)$$

$$\widehat{ACB} = \widehat{BDA} = 180^\circ \quad (2)$$

اکنون با مقایسه روابط (۱) و (۲) داریم:

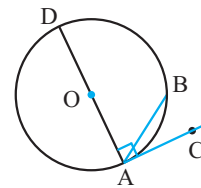
$$\xrightarrow{(1),(2)} \widehat{ACB} - \widehat{CB} = \widehat{BDA} - \widehat{AD}$$

$$\Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \Rightarrow AC = BD$$

۳۵ زاویه‌ای که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره

و ضلع دیگر آن شامل وتری از دایره باشد، زاویهٔ ظلی نامیده می شود. بنابراین گزینهٔ «الف» صحیح است.

۳۶

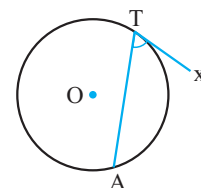


اگر قطری از دایره را رسم کنیم که شامل نقطهٔ A از زاویهٔ ظلی CAB باشد، داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} \widehat{DAC} &= 90^\circ \Rightarrow \widehat{DAC} = \frac{1}{2}\widehat{DBA} \\ \widehat{DAB} &= \frac{\widehat{BD}}{2} \\ \widehat{BAC} &= \widehat{DAC} - \widehat{DAB} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \frac{\widehat{BD} + \widehat{BA}}{2} - \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{BA}}{2}$$

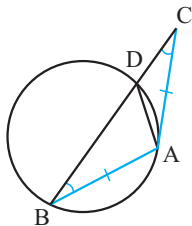
۳۷



بنا بر تعریف زاویهٔ ظلی داریم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A}_1 : \text{ظلی} &\Rightarrow \widehat{A}_1 = \frac{\widehat{AB'}}{2} \\ \widehat{B}'_1 : \text{محاطی} &\Rightarrow \widehat{B}'_1 = \frac{\widehat{AB}}{2} \\ XY \parallel BB' &\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{B}'_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{AB'} = \widehat{AB}$$

$$\Rightarrow \widehat{AB'} = \widehat{AB}$$



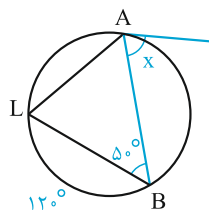
با توجه به برابر بودن مماس AC و وتر AB داریم:

$$AB = AC \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{B} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{DAC} : \text{زاویه ظلی} &\Rightarrow \widehat{DAC} = \frac{\widehat{AD}}{2} \\ \widehat{B} &= \frac{\widehat{AD}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{DAC} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \widehat{DAC} = \widehat{C} \Rightarrow DA = DC$$

بنابراین مثلث ADC متساوی‌الساقین می‌باشد.

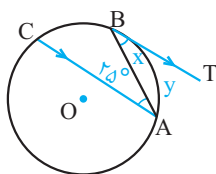


(الف)

$$\widehat{B} = \frac{\widehat{AL}}{2} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{AL} = 100^\circ$$

$$\widehat{AL} + \widehat{LB} + \widehat{BA} = 360^\circ \Rightarrow 100 + 120 + \widehat{BA} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BA} = 140^\circ \Rightarrow x = \frac{\widehat{BA}}{2} = 70^\circ$$

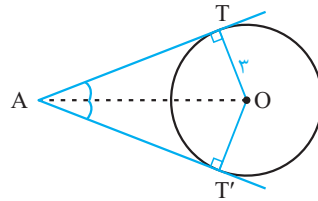


(ب)

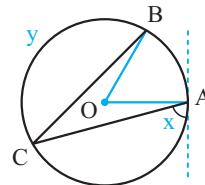
$$AC \parallel BT \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{ABT} \Rightarrow x = 25^\circ$$

می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویه 30° ، نصف وتر است و بالعکس. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle OTA$ داریم:

$$\widehat{OAT} = 30^\circ \xrightarrow{(*)} \widehat{TAT'} = 2\widehat{OAT} = 60^\circ$$



.۴۱



از آنجایی که دو وتر AC و BC با یکدیگر برابرند، بنابراین کمان‌های نظیر این دو وتر نیز با یکدیگر مساوی‌اند:

$$AC = BC \Rightarrow \widehat{CA} = \widehat{CB} \quad (1)$$

$$\widehat{x} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{CA} = 2x$$

$$\xrightarrow{(1)} y = \widehat{CB} = 2x \quad (2)$$

$$\widehat{AOB} = \widehat{AB} \Rightarrow \widehat{AB} = 60^\circ$$

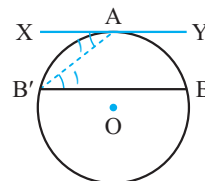
حال با توجه به این‌که مجموع کمان‌های دایره برابر با 360° درجه است، داریم:

$$\widehat{AB} + \widehat{AC} + \widehat{CB} = 360^\circ \Rightarrow 60^\circ + 2x + y = 360^\circ$$

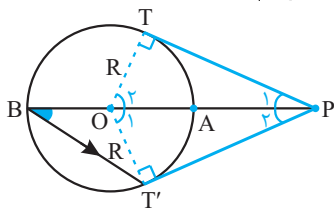
$$\xrightarrow{(2)} 60^\circ + 2y = 360^\circ \Rightarrow 2y = 300^\circ$$

$$\Rightarrow y = 150^\circ \Rightarrow x = 75^\circ$$

.۴۲



۴۷. می‌دانیم شعاع دایره، بر خط مماس در نقطه تماس عمود است. لذا به راحتی می‌توان ثابت کرد که دو مثلث قائم‌الزاویه OTP و $OT'P$ با یکدیگر هم‌نهشت‌اند:



$$\left. \begin{array}{l} OT = OT' = R \\ OP = OP \\ \hat{T} = \hat{T}' = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle OTP \cong \triangle OT'P$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \hat{P}_1 = \hat{P}_2 \end{array} \right. (*)$$

از طرفی با توجه به فرض دیگر مسأله داریم:

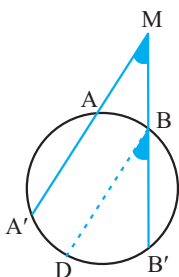
$$\left. \begin{array}{l} PT \parallel BT' \Rightarrow \hat{PBT}' = \hat{P}_1 \\ \hat{PBT}' = \frac{\widehat{AT}'}{2} \\ \hat{O}_1 = \widehat{AT}' \end{array} \right\} \xrightarrow{(*)} \left\{ \begin{array}{l} \hat{P}_2 + \hat{O}_1 = 90^\circ \\ \hat{O}_1 = 2\hat{P}_2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \hat{O}_1 = 60^\circ, \hat{P}_2 = 30^\circ$$

بنابراین کمان TAT' برابر است با:

$$\widehat{TAT}' = \widehat{TOT}' = 2\hat{O}_1 = 120^\circ$$

۴۸



ابتدا از نقطه B، خطی موازی MA' رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه D قطع کند. لذا داریم:

$$BD \parallel MA' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{M} = \hat{DBB}' \\ \widehat{DA}' = \widehat{AB} \end{array} \right. (1)$$

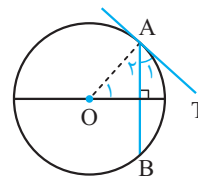
$$\hat{DBB}' = \frac{1}{2}\widehat{DB}' = \frac{1}{2}(\widehat{A'B}' - \widehat{DA}') (2)$$

$$\xrightarrow{(2), (1)} \hat{M} = \frac{\widehat{A'B}' - \widehat{AB}}{2}$$

$$x = \widehat{ABT} = \frac{\widehat{BA}}{2}$$

$$\Rightarrow y = \widehat{BA} = 50^\circ$$

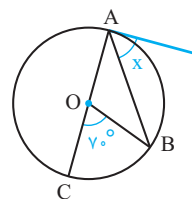
۴۵. خط مماس بر دایره، در نقطه تماس بر شعاع دایره عمود است. از طرفی می‌دانیم قطر عمود بر وتر، وتر و کمان متناظر آن را نصف می‌کند. پس داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2} \\ \hat{O}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{TAB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{A}_1$$

۴۶

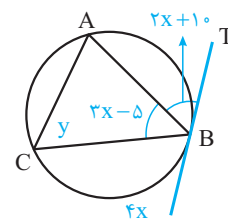


(الف)

$$\widehat{BOC} = \widehat{BC} = 70^\circ \Rightarrow \widehat{OAB} = \frac{\widehat{BC}}{2} = 35^\circ$$

از طرفی داریم:

$$\widehat{OAB} + \hat{x} = 90^\circ \Rightarrow x + 35^\circ = 90^\circ \Rightarrow x = 55^\circ$$



(ب)

$$\widehat{TBA} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} = 4x + 20$$

$$\widehat{AC} = 2\hat{B} \Rightarrow \widehat{AC} = 6x - 10$$

$$\widehat{BC} = 4x$$

حال با توجه به این‌که محیط دایره برابر 360° است، داریم:

$$(4x + 20) + (6x - 10) + 4x = 360 \Rightarrow x = 25^\circ$$

$$\hat{C} = y = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow y = \frac{4x + 20}{2} = 2x + 10$$

$$\Rightarrow y = 50 + 10 \Rightarrow y = 60^\circ$$