

به نام خدا

فارادوس

# ریاضی دهم

مهندس رامین منوری  
محمدسجاد ثمودی  
با همکاری سینا یادگاری



شاید برای شما هم سؤال پیش آمده باشد که خوشبختی چیست؟ قطعاً از نظر افراد مختلف تعابیر متفاوتی دارد ولی بیش‌تر آن‌ها یکی از ارکان آن را داشتن شغلی متناسب با استعداد و علاقه خود عنوان می‌کنند که در این صورت، دچار روزمرگی و خمودی نمی‌شوند و از فعالیت‌های روزانه خود لذت می‌برند.

دوستان عزیز؛ همه شما این فرصت را دارید که علاقه و استعدادهای نهفته خود را پیدا و با جهت دادن به آن، به آینده‌ای روشن دست پیدا کنید. اگر به کنکور به عنوان ابزاری برای رسیدن به این هدف (و نه به عنوان هدف) نگاه کنید، درس خواندن لذت‌بخش می‌شود. در این راه ما هم سعی کردیم همراهتان باشیم و با تألیف این کتاب کاری کنیم که این راه کمی آسانتر شود. در کنار ما، دوستانمان در انتشارات فار کمک کردند اثری متفاوت و کم‌نقص در اختیار شما قرار گیرد که علاوه بر برآورده کردن خواسته‌های شما در این درس علاقه‌تان به ریاضی نیز افزایش یابد. تألیف این اثر کار بسیار دشواری بود و اگر کمک‌های تک‌تک اعضاء انتشارات فار نبود به نتیجه نمی‌رسید. لذا لازم می‌دانیم تا از تلاش تمامی همکاران عزیزمان در واحدهای تایپ، تولید، روابط عمومی و یکایک بخش‌های دیگر انتشارات فار و هم‌چنین ویراستاران که مسئولیت برطرف شدن ایرادات فنی و ادبی را برعهده داشته‌اند کمال تشکر و قدردانی را بنماییم.

کلام آخر؛

از لحظات زندگی خود، لذت ببرید زیرا زندگی فرصت دوباره‌ای به انسان نمی‌دهد.

چشم‌ها و لب‌هایتان خندان

رامین منوری - محمدسجاد ثمودی

پاییز ۹۶

Email: phare.math@gmail.com

۱- آزمون‌های موبرگی: ابتدای هر فصل، آزمون‌های موبرگی شروع می‌شود. برای پاسخ‌گویی به این آزمون‌ها لازم است ابتدا مبحث مورد نظر را به طور دقیق از روی جزوه دبیر با درسنامه کتاب (که در عین کوتاه بودن کامل و دقیق است) مطالعه کنید و سپس به سراغ این آزمون‌ها بروید. حتماً در پایان هر آزمون پاسخ‌نامه کامل و تشریحی نوشته شده را به طور دقیق مطالعه کنید. حتی پاسخ تست‌هایی که درست پاسخ داده‌اید را دوباره بررسی کنید. این کار سبب می‌شود راه‌های ساده‌تر و نکات مربوط به هر تست را فرا بگیرید. از آنجایی که آزمون‌های موبرگی برای تکمیل آموزش ریزبخش‌های هر فصل طراحی شده است لذا رعایت وقت پیشنهادی ضرورتی ندارد بنابراین بدون نگرانی از زمان و به قصد یادگیری از این آزمون‌ها استفاده کنید.

۲- آزمون‌های جامع هر فصل: در پایان هر فصل آزمون‌هایی از مباحث کل فصل طراحی شده است. این آزمون‌ها را وقتی پاسخ دهید که مطالعه فصل را به طور کامل انجام داده و مطالب را کاملاً فرا گرفته‌اید. باز هم در پایان هر آزمون پاسخ‌نامه را دقیق مورد بررسی قرار دهید. در این آزمون‌ها سعی کنید کم‌کم بحث زمان‌بندی را هم تمرین کنید.

۳- آزمون‌های دوره‌ای و مروری: در پایان بعضی از فصول کتاب آزمون‌هایی قرار دارد که ۲ یا ۳ فصل قبلی را مورد ارزیابی قرار می‌دهد؛ این آزمون‌ها برای مرور فصل‌های قبلی در نظر گرفته شده است و باعث می‌شود تا با سوالات ترکیبی از آن چند فصل روبه‌رو شوید و هم‌چنین دوره‌ای از فصل‌های گذشته داشته باشید. در این آزمون‌ها حتماً وقت پیشنهادی را برای پاسخ‌گویی در نظر بگیرید.

۴- آزمون‌های جامع پایان کتاب: این آزمون‌ها برای دوره کامل مطالب کتاب طراحی شده است. معمولاً زمان پاسخ‌گویی به این آزمون‌ها حوالی اردیبهشت ماه است (البته برای دانش‌آموزان پایه دهم داوطلبان کنکور می‌توانند هر زمان که مطالب کتاب ریاضی دهم را به طور کامل آموختند سراغ این آزمون‌ها بروند). این آزمون‌ها محک خوبی برای آموخته‌های شما از کتاب ریاضی دهم است. باز هم توصیه می‌کنم پاسخ‌نامه هر یک از آزمون‌ها که به طور جامع و تشریحی نوشته شده است را در پایان هر آزمون به دقت بررسی کنید.

موفق باشید

ولفگانگ گهلر یکی از دانشمندان علم روانشناسی (متولد ۱۸۸۷) آزمایشی را روی یک میمون به نام سلطان انجام داد. او یک موز را با فاصله زیاد خارج از قفس سلطان قرار می دهد و سه تکه چوب کوچک، متوسط و بزرگ را در داخل قفس می گذارد و با دوربین حرکات سلطان را زیر نظر می گیرد. سلطان که بسیار گرسنه بود سعی می کند با دست و پا آن موز را بردارد اما به دلیل فاصله زیاد موفق نمی شود. از چوب متوسط و بعد از آن بقیه چوبها استفاده می کند ولی باز موفق نمی شود. دقایق زیادی این تلاش ادامه می یابد و در آخر سلطان بسیار خسته و نا امید در گوشه ای از قفس می افتد و با چشمانی خسته نظاره گر موز، قفس و چوبها می شود. بعد از چند دقیقه مکث از جای خودش بلند می شود و انتهای چوبها که دارای نری و مادگی بوده را به درون هم چفت کرده و آن چوب را کامل کرده و به بیرون قفس می اندازد و موفق می شود تا موز را به سمت خود بکشد و در نهایت با حس رضایت آن موز را نوش جان می کند. فردای همان روز آقای گهلر آزمایش دیگری ترتیب می دهد و برای دومین بار یک موز از بالای قفس آویزان می کند و چند جعبه چوبی در قفس می اندازد. در این آزمایش سلطان بدون فکر کردن بلافاصله جعبهها را روی هم می گذارد و به موز دست پیدا می کند و سریع آن را می بلعد. این آزمایشها ثابت کرد که تا قبل از توجه کافی به مسأله، سلطان نتوانست نکته را بیابد. یعنی سلطان می خواست موز را به داخل قفس بکشد ولی توجه کافی به وسایل دور و برش مثل چوبها نداشت اما بعد از توجه عمیق روی مسأله متوجه شده که نری و مادگی (نکته اصلی مسأله) در سر و ته چوبها است که می تواند آن ها را به هم وصل کند و چوب بزرگتری که احیاناً به موز می رسد را بسازد؛ که بعد از این عمل موفق به خوردن موز شد. گهلر نتیجه می گیرد: ۱- تا زمانی که سلطان به عمق مسأله پی نبرد نتوانست موفق عمل کند. ۲- وقتی سلطان به همه ابزارهای داخل قفس به خوبی نگاه کرد و در ذهنش راه حل را به طور کامل چید (یک پارچگی راه حل) و آن وقت نتوانست بلافاصله بدون هیچ اشتباهی مسأله را حل کند. ۳- وقتی که سلطان با مسأله ای مواجه شد و با تلاش زیاد و تفکر عمیق و یک پارچه آن را حل کرد این موضوع باعث شد تا بتواند مسایل مشابه را راحت تر و با صرف وقت کم تر حل نماید (مثل آزمایش دوم که سلطان باید موز آویزان شده از قفس را بدست می آورد).

در سال های بعدی دانشمندان دیگری روی موضوع حل مسأله کار کردند و نتیجه گرفتند کسانی که به دنبال حل مسأله هستند را می توان به دو گروه تقسیم کرد:

### تازه کاران و کهنه کاران

- ۱- کهنه کاران به دلیل حل مسائل زیاد و تمرین های پی در پی، الگوی حل مسائل مختلف را در ذهن می پروراند و از اینکه با مسائل سخت روبه رو شوند نمی ترسند و ساعتها با آن کلنجار می روند ولی تازه کاران حوصله بررسی مسأله را ندارند و با چند یا حتی یک خطا سریع به پاسخ آن در پاسخنامه رجوع می کنند بنابراین الگوها در ذهنشان تثبیت نمی شود.
- ۲- کهنه کاران تا به یک پارچگی در حل سوال نرسند شروع به حل نمی کنند و صرفاً با کشیدن شکل و برانداز کردن سوال سعی در پیدا کردن نکته سوال می کنند و بعد از اینکه توانستند به خوبی سوال را کالبدشکافی کنند به صورت یک پارچه شروع به پاسخ می کنند. ولی تازه کاران از همان ابتدا با دیدن سوال شروع به حل می کنند و به طور پراکنده هر چه به ذهنشان می رسد را می نویسند و در آخر نه تنها حل آن را نیافته اند بلکه سردرگم تر شده اند.
- ۳- کهنه کاران بر روی سوال تمرکز می کنند تا بتوانند ابتدا محتوا و خواست اصلی سوال را دقیق و درست بفهمند، پس از آن است که جواب از دل سوال بیرون می آید ولی تازه کاران حل مسأله به صورت سوال توجه کافی ندارند و معمولاً شتاب زده از روی سوال می گذرانند و تمرکزشان بر روی جواب است، غافل از این که جواب سوال را نباید ابداع کرد. بلکه جواب را باید در درون سوال کشف کرد. این دانشمندان بعد از چنین آزمایش هایی توصیه می کنند که:
- ۱- برای حل مسأله از دیگران کمک نگیرید و سعی کنید خودتان با گذاشتن وقت و بدون خستگی سوال را موشکافی کنید تا نکته های آن را درک نمایید.
- ۲- از کشیدن شکل و توضیح موضوع برای خودتان غافل نشوید تا درک بصری از مسأله پیدا کنید.
- ۳- وقتی مسأله ای را حل کردید چند مسأله مشابه آن را مجدد حل کنید.
- ۴- بعد از حل مسأله هایی که نکته دار هستند خودتان پارامترهای آن مسأله را تغییر دهید و یک مسأله شبیه آن طرح کنید این کار باعث می شود خودتان را جای طراح سوال حس نمایید.

۵. برای جا افتادن الگوهای متعددی که در مسأله‌های مربوط به یک فصل حل کرده‌ای بعد از چند روز دوباره آن‌ها را تکرار کنید تا آن الگوها در ذهنتان نقش ببندد.

### حال با توجه به مطالب بالا می‌توان گفت:

- ۱- سعی کنید به طور مستمر در هفته روی درس ریاضی وقت بگذارید مثلاً ۳ روز از هفته به تمرین ریاضی بپردازید.
  - ۲- بلافاصله بعد از تدریس بخشی از درس توسط دبیر خود، یک بار دیگر به جزوه، کتاب و نکته‌های خود در منزل نگاهی بیندازید و مثال‌های حل شده توسط دبیر را مجدد خودتان بدون نگاه کردن به جواب حل کنید.
  - ۳- در روزهای بعدی تمرین‌های کتاب درسی و کمک آموزشی خود را بدون نگاه کردن به پاسخ‌نامه حل کنید حتی اگر سوال وقت‌گیر بود نگران نشوید و بدون توجه به زمان مشغول حل آن شوید. فراموش نکنید آنالیز سوال است که، شما را توانمند خواهد کرد و به مرور توان حل مسأله را در شما افزایش خواهد داد. مطمئن باشید که پاسخ همیشه در محتوای سوال مستتر و پنهان است و اگر با دقت سوال را آنالیز کنید حتماً پاسخ را خواهید یافت.
- به سوال زیر دقت کنید شاید کمی پیچیده به نظر برسد ولی با اندکی دقت و بررسی شکل و محتوای سوال متوجه خواهید شد که سوال کاملاً برایتان آشنا است.

**مثال .** منحنی به معادله  $y = (2x + 1)(x + 8) - mx$  ، خطوط  $y = mx$  نقطه مشترک ندارد. مجموعه مقادیر  $m$  کدام است؟

۱)  $9 < m < 25$       ۲)  $15 < m < 23$       ۳)  $7 < m < 15$       ۴)  $5 < m < 13$

**پاسخ:** اگر قرار باشد نقطه مشترک نداشته باشد یعنی معادله  $mx - (2x + 1)(x + 8) = 0$  جواب نداشته باشد. این معادله تشکیل معادله

x	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	موافق a	مخالف a	موافق a	

درجه ۲ می‌دهد، در صورتی جواب ندارد که  $\Delta < 0$  باشد.

حالا به یک تعیین علامت می‌رسیم. باید یک عبارت درجه ۲ را تعیین علامت کنیم. عبارت درجه ۲ را باید به صورت زیر تعیین علامت کنیم:

پس مفهوم جواب نداشتن معادله این است که عبارت درجه ۲ فاقد ریشه بوده و  $\Delta$  این معادله منفی باشد.

از این مثال نتیجه می‌گیریم که سوال‌هایی به ظاهر، پیچیده مثل سوال بالا با اندکی دقت، ابتکار و پردازش به سوالی ساده تبدیل شده و قابل حل می‌شود.

۴- حتماً بعد از انجام تمرین در بخش مورد نظر به کتاب فارآزمون مراجعه کنید و از همان بخش، از خودتان آزمون بگیرید. آزمون‌های اولیه این کتاب موثرگی هستند و به شما کمک می‌کنند تا آن درس در ذهنتان جا بیفتد. از آن جایی که سوالات در آزمون‌ها پراکندگی دارند و باعث تمرکز بیش‌تر روی مبحث می‌شوند و ضمناً هنر آزمون دادن را نیز از همین ابتدا به شما آموزش می‌دهند. به علاوه آزمون دادن باعث جمع‌بندی مطالب خوانده شده می‌شود.

۵- ضمناً سوالاتی را که از کتاب درسی، کمک آموزشی و فارآزمون نتوانسته‌اید جواب بدهید یا نکته‌دار بوده‌اند را در روزهای بعدی دوباره حل کنید؛ حتی این کار می‌تواند بیش از دو بار اتفاق بیفتد. یادتان باشد با حل مجدد سوالات، ویژگی‌های مطالب یاد گرفته شده و نکته‌های حل مسأله در ذهنتان تثبیت شده و الگوهای لازم (کلید حل مسأله) در حافظه‌تان شکل می‌گیرد؛ یعنی شما را از یک تازه‌کار به یک کهنه‌کار حل مسأله تبدیل می‌کند.

در انتها توصیه می‌کنیم که هرگز از ماشین حساب برای بدست آوردن جواب استفاده نکنید. چنانچه یک روز در میان به مقدار یک ساعت و نیم تا دو ساعت مطالعه و تمرین داشته باشید و سعی کنید که خودتان بدون کمک پاسخ‌نامه و یا دیگران پاسخ را بیابید حتماً در ۴ ماه آینده از پیشرفتتان تعجب خواهید کرد.

تفکر و دقت گام اول برای موفقیت است

در پناه خداوند متعال پیروز و موفق باشید

رامین منوری - محمدسجاد ثمودی

۳۵	آزمون ۳۵ تعیین علامت و نامعادله
۳۶	آزمون ۳۶ تعیین علامت و نامعادله
۳۷	آزمون ۳۷ جامع ۱
۳۸	آزمون ۳۸ جامع ۲
۳۹	آزمون ۳۹ جامع ۳
۴۰	آزمون ۴۰ جامع ۴ (فصل‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴)
۴۲	آزمون ۴۱ جامع ۵ (فصل‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴)
۴۳	آزمون ۴۲ جامع ۶ (فصل‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴)

**۴۶ فصل پنجم: تابع**

۴۶	آزمون ۴۳ مفهوم تابع - دامنه و برد آن - انواع تابع
۴۷	آزمون ۴۴ مفهوم تابع - دامنه و برد آن - انواع تابع
۴۸	آزمون ۴۵ مفهوم تابع - دامنه و برد آن - انواع تابع
۴۹	آزمون ۴۶ مفهوم تابع - دامنه و برد آن - انواع تابع
۵۱	آزمون ۴۷ جامع ۱
۵۲	آزمون ۴۸ جامع ۲

**۵۴ فصل ششم: شمارش، بدون شمارش**

۵۴	آزمون ۴۹ شمارش و جایگشت
۵۵	آزمون ۵۰ شمارش و جایگشت
۵۶	آزمون ۵۱ ترکیب
۵۶	آزمون ۵۲ ترکیب
۵۷	آزمون ۵۳ جامع ۱
۵۸	آزمون ۵۴ جامع ۲
۵۹	آزمون ۵۵ جامع ۳
۶۰	آزمون ۵۶ جامع ۴
۶۱	آزمون ۵۷ جامع ۵ (فصل‌های ۵ و ۶)
۶۲	آزمون ۵۸ جامع ۶ (فصل‌های ۵ و ۶)

**۶۴ فصل هفتم: آمار و احتمال**

۶۴	آزمون ۵۹ فضای نمونه‌ای و پیشامد
۶۵	آزمون ۶۰ احتمال
۶۶	آزمون ۶۱ احتمال
۶۷	آزمون ۶۲ احتمال
۶۷	آزمون ۶۳ احتمال
۶۸	آزمون ۶۴ احتمال
۶۹	آزمون ۶۵ جامع ۱
۷۰	آزمون ۶۶ جامع ۲
۷۱	آزمون ۶۷ آمار
۷۲	آزمون ۶۸ جامع ۱ (فصل‌های ۵ و ۶ و ۷)
۷۳	آزمون ۶۹ جامع ۲ (فصل‌های ۵ و ۶ و ۷)
۷۵	آزمون ۷۰ جامع ۳ (فصل‌های ۵ و ۶ و ۷)

**فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله**

۲	آزمون ۱ مجموعه‌ها (یادآوری نهم)
۲	آزمون ۲ مجموعه‌ها
۳	آزمون ۳ مجموعه‌ها
۴	آزمون ۴ مجموعه‌ها
۴	آزمون ۵ مجموعه‌ها
۵	آزمون ۶ الگوها و دنباله حسابی
۶	آزمون ۷ الگوها و دنباله حسابی
۷	آزمون ۸ الگوها و دنباله حسابی
۸	آزمون ۹ دنباله هندسی
۹	آزمون ۱۰ دنباله هندسی
۱۰	آزمون ۱۱ الگوها، دنباله‌های حسابی و هندسی
۱۰	آزمون ۱۲ الگوها و دنباله‌های حسابی و هندسی
۱۱	آزمون ۱۳ جامع ۱
۱۱	آزمون ۱۴ جامع ۲

**۱۶ فصل دوم: مثلثات**

۱۶	آزمون ۱۵ مثلثات
۱۶	آزمون ۱۶ مثلثات
۱۷	آزمون ۱۷ مثلثات
۱۸	آزمون ۱۸ مثلثات
۱۸	آزمون ۱۹ مثلثات
۱۹	آزمون ۲۰ مثلثات
۲۰	آزمون ۲۱ جامع ۱
۲۱	آزمون ۲۲ جامع ۲
۲۲	آزمون ۲۳ جامع ۳
۲۳	آزمون ۲۴ جامع فصل ۱ و ۲

**۲۶ فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری**

۲۶	آزمون ۲۵ توان
۲۶	آزمون ۲۶ توان
۲۷	آزمون ۲۷ عبارت‌های جبری
۲۷	آزمون ۲۸ عبارت‌های جبری
۲۸	آزمون ۲۹ عبارت‌های جبری
۲۹	آزمون ۳۰ جامع ۱
۳۰	آزمون ۳۱ جامع ۲
۳۱	آزمون ۳۲ جامع ۳ (فصل‌های ۱ و ۲ و ۳)

**۳۴ فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها**

۳۴	آزمون ۳۳ معادله و تابع درجه دوم
۳۵	آزمون ۳۴ معادله و تابع درجه دوم

## فصل هشتم: آزمون‌های جامع کتاب

آزمون ۷۴ جامع ۴	۸۳	آزمون ۷۱ جامع ۱	۷۸
آزمون ۷۵ جامع ۵	۸۴	آزمون ۷۲ جامع ۲	۷۹
آزمون ۷۶ جامع ۶	۸۶	آزمون ۷۳ جامع ۳	۸۱
آزمون ۷۷ جامع ۷	۸۸		

## بخش دوم پاسخ‌نامه تشریحی

### پاسخ‌نامه فصل اول

پاسخ‌نامه آزمون ۱ مجموعه‌ها (یادآوری نهم)	۹۲
پاسخ‌نامه آزمون ۲ مجموعه‌ها	۹۳
پاسخ‌نامه آزمون ۳ مجموعه‌ها	۹۵
پاسخ‌نامه آزمون ۴ مجموعه‌ها	۹۷
پاسخ‌نامه آزمون ۵ مجموعه‌ها	۹۹
پاسخ‌نامه آزمون ۶ الگوها و دنباله حسابی	۱۰۱
پاسخ‌نامه آزمون ۷ الگوها و دنباله حسابی	۱۰۲
پاسخ‌نامه آزمون ۸ الگوها و دنباله حسابی	۱۰۴
پاسخ‌نامه آزمون ۹ دنباله هندسی	۱۰۵
پاسخ‌نامه آزمون ۱۰ دنباله هندسی	۱۰۷
پاسخ‌نامه آزمون ۱۱ الگوها، دنباله‌های حسابی و هندسی	۱۰۸
پاسخ‌نامه آزمون ۱۲ الگوها، دنباله‌های حسابی و هندسی	۱۱۰
پاسخ‌نامه آزمون ۱۳ جامع ۱	۱۱۱
پاسخ‌نامه آزمون ۱۴ جامع ۲	۱۱۳

### پاسخ‌نامه فصل دوم

پاسخ‌نامه آزمون ۱۵ مثلثات	۱۱۶
پاسخ‌نامه آزمون ۱۶ مثلثات	۱۱۸
پاسخ‌نامه آزمون ۱۷ مثلثات	۱۱۹
پاسخ‌نامه آزمون ۱۸ مثلثات	۱۲۰
پاسخ‌نامه آزمون ۱۹ مثلثات	۱۲۲
پاسخ‌نامه آزمون ۲۰ مثلثات	۱۲۴
پاسخ‌نامه آزمون ۲۱ جامع ۱	۱۲۵
پاسخ‌نامه آزمون ۲۲ جامع ۲	۱۲۷
پاسخ‌نامه آزمون ۲۳ جامع ۳	۱۲۹
پاسخ‌نامه آزمون ۲۴ جامع فصل ۱ و ۲	۱۳۰

### پاسخ‌نامه فصل سوم

پاسخ‌نامه آزمون ۲۵ توان	۱۳۴
پاسخ‌نامه آزمون ۲۶ توان	۱۳۵
پاسخ‌نامه آزمون ۲۷ عبارتهای جبری	۱۳۷
پاسخ‌نامه آزمون ۲۸ عبارتهای جبری	۱۳۸
پاسخ‌نامه آزمون ۲۹ عبارتهای جبری	۱۳۹
پاسخ‌نامه آزمون ۳۰ جامع ۱	۱۴۱
پاسخ‌نامه آزمون ۳۱ جامع ۲	۱۴۳
پاسخ‌نامه آزمون ۳۲ جامع ۳ (فصل‌های ۱ و ۲ و ۳)	۱۴۴

### پاسخ‌نامه فصل چهارم

پاسخ‌نامه آزمون ۳۳ معادله و تابع درجه دوم	۱۴۸
پاسخ‌نامه آزمون ۳۴ معادله و تابع درجه دوم	۱۵۰
پاسخ‌نامه آزمون ۳۵ تعیین علامت و نامعادله	۱۵۱
پاسخ‌نامه آزمون ۳۶ تعیین علامت و نامعادله	۱۵۳
پاسخ‌نامه آزمون ۳۷ جامع ۱	۱۵۴
پاسخ‌نامه آزمون ۳۸ جامع ۲	۱۵۷
پاسخ‌نامه آزمون ۳۹ جامع ۳	۱۵۹
پاسخ‌نامه آزمون ۴۰ جامع ۴	۱۶۰
پاسخ‌نامه آزمون ۴۱ جامع ۵ (فصل‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴)	۱۶۳
پاسخ‌نامه آزمون ۴۲ جامع ۶ (فصل‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴)	۱۶۶

### پاسخ‌نامه فصل پنجم

پاسخ‌نامه آزمون ۴۳ مفهوم تابع - دامنه و برد آن - انواع تابع	۱۷۰
پاسخ‌نامه آزمون ۴۴ مفهوم تابع - دامنه و برد آن - انواع تابع	۱۷۲
پاسخ‌نامه آزمون ۴۵ مفهوم تابع - دامنه و برد آن - انواع تابع	۱۷۴
پاسخ‌نامه آزمون ۴۶ مفهوم تابع - دامنه و برد آن - انواع تابع	۱۷۶
پاسخ‌نامه آزمون ۴۷ جامع ۱	۱۷۸
پاسخ‌نامه آزمون ۴۸ جامع ۲	۱۸۰

### پاسخ‌نامه فصل ششم

پاسخ‌نامه آزمون ۴۹ شمارش و جایگشت	۱۸۲
پاسخ‌نامه آزمون ۵۰ شمارش و جایگشت	۱۸۴
پاسخ‌نامه آزمون ۵۱ ترکیب	۱۸۵
پاسخ‌نامه آزمون ۵۲ ترکیب	۱۸۷
پاسخ‌نامه آزمون ۵۳ جامع ۱	۱۸۸
پاسخ‌نامه آزمون ۵۴ جامع ۲	۱۹۰
پاسخ‌نامه آزمون ۵۵ جامع ۳	۱۹۱
پاسخ‌نامه آزمون ۵۶ جامع ۴	۱۹۲
پاسخ‌نامه آزمون ۵۷ جامع ۵ (فصل‌های ۵ و ۶)	۱۹۴
پاسخ‌نامه آزمون ۵۸ جامع ۶ (فصل‌های ۵ و ۶)	۱۹۶

### پاسخ‌نامه فصل هفتم

پاسخ‌نامه آزمون ۵۹ فضای نمونه‌ای و پیشامد	۲۰۰
پاسخ‌نامه آزمون ۶۰ احتمال	۲۰۱
پاسخ‌نامه آزمون ۶۱ احتمال	۲۰۳
پاسخ‌نامه آزمون ۶۲ احتمال	۲۰۵
پاسخ‌نامه آزمون ۶۳ احتمال	۲۰۷

۲۲۴	پاسخنامه فصل هشتم	۲۰۹	پاسخنامه آزمون ۶۴ احتمال
۲۲۴	پاسخنامه آزمون ۷۱ جامع ۱	۲۱۱	پاسخنامه آزمون ۶۵ جامع ۱
۲۲۷	پاسخنامه آزمون ۷۲ جامع ۲	۲۱۳	پاسخنامه آزمون ۶۶ جامع ۲
۲۳۰	پاسخنامه آزمون ۷۳ جامع ۳	۲۱۴	پاسخنامه آزمون ۶۷ آمار
۲۳۲	پاسخنامه آزمون ۷۴ جامع ۴	۲۱۵	پاسخنامه آزمون ۶۸ جامع ۱ (فصل‌های ۵ و ۶ و ۷)
۲۳۵	پاسخنامه آزمون ۷۵ جامع ۵	۲۱۷	پاسخنامه آزمون ۶۹ جامع ۲ (فصل‌های ۵ و ۶ و ۷)
۲۳۸	پاسخنامه آزمون ۷۶ جامع ۶	۲۲۰	پاسخنامه آزمون ۷۰ جامع ۳ (فصل‌های ۵ و ۶ و ۷)
۲۴۱	پاسخنامه آزمون ۷۷ جامع ۷		

## بخش سوم درس‌نامه

۲۶۲	قوانین توان و رادیکال	۲۴۶	درس‌نامه فصل اول
۲۶۳	اتحادهای جبری	۲۴۶	مجموعه
۲۶۴	عبارت گویا	۲۴۶	زیرمجموعه
۲۶۸	درس‌نامه فصل چهارم	۲۴۶	دو مجموعه مساوی
۲۶۸	معادله درجه دوم	۲۴۷	متمم یک مجموعه
۲۷۲	تعیین علامت	۲۴۷	اشتراک دو مجموعه
۲۷۴	نامعادلات قدرمطلق	۲۴۷	اجتماع دو مجموعه
۲۷۶	درس‌نامه فصل پنجم	۲۴۷	تفاضل دو مجموعه
۲۷۶	تابع	۲۴۷	دو مجموعه جدا از هم (مجزا)
۲۷۸	دامنه تعریف ( $D_f$ )	۲۴۷	نمودار ون و روش شماره گذاری
۲۷۸	برد ( $R_f$ )	۲۴۸	تعداد عضوهای اجتماع و تفاضل دو مجموعه
۲۸۰	تابع همانی	۲۴۸	مجموعه‌های اعداد
۲۸۰	تابع ثابت	۲۴۹	دنباله
۲۸۱	تابع خطی	۲۴۹	الگوی خطی و غیر خطی
۲۸۲	درس‌نامه فصل ششم	۲۴۹	دنباله حسابی (عددی)
۲۸۲	اصول شمارش	۲۵۳	دنباله هندسی
۲۸۳	شمردن	۲۵۶	درس‌نامه فصل دوم
۲۸۸	درس‌نامه فصل هفتم	۲۵۶	تعریف نسبت‌های مثلثاتی و دایره مثلثاتی و نسبت‌های
۲۸۸	اعمال روی پیشامدها	۲۵۸	$(k\pi \pm \alpha)$ و $(2k\pi \pm \alpha)$
۲۸۹	احتمال رخ داد یک پیشامد (اندازه‌گیری شانس)	۲۵۹	دایره مثلثاتی
۲۸۹	قوانین احتمال	۲۵۹	شیب خط
۲۹۱	آمار	۲۶۲	درس‌نامه فصل سوم
		۲۶۲	رادیکال
		۲۶۲	ریشه nام

# بخش اول

---

## آزمون‌ها

---

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله ۲ • فصل دوم: مثلثات ۱۶

فصل سوم: توان‌های گویا و عبارتهای جبری ۲۶ • فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها ۳۴

فصل پنجم: تابع ۴۶ • فصل ششم: شمارش، بدون شمارش ۵۴

فصل هفتم: آمار و احتمال ۶۴ • فصل هشتم: آزمون‌های جامع ۷۸



# آزمون‌های فصل اول

## مجموعه، الگو و دنباله

۱۵ دقیقه

آزمون ۱ مجموعه‌ها (یادآوری نهم)

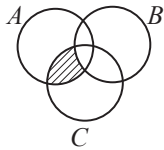
۱. در مجموعه  $A = \{\{\}, \{\{\}\}\}$ ، کدام نادرست است؟

- (۱)  $\{\} \subseteq A$       (۲)  $\{\} \in A$       (۳)  $\{\{\}\} \in A$       (۴)  $\{\{\}\} \subseteq A$

۲. اگر  $A = \{\{1, \{\}\}\}$  و  $B = \{\{\{1, \{\}\}\}\}$  باشد،  $A - B$  کدام است؟

- (۱)  $\emptyset$       (۲)  $\{\}$       (۳)  $\{\{\}\}$       (۴)  $\{\{1, \{\}\}\}$

۳. کدام مجموعه، قسمت هاشورزده شکل روبه‌رو را نشان می‌دهد؟



- (۱)  $(A \cap B) - C$       (۲)  $(B \cap C) - A$   
(۳)  $A \cap (C - B)$       (۴)  $A - (B \cap C)$

۴. اجتماع دو مجموعه  $\{\{a, \emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \{a, a\}\}$  و  $\{a, \emptyset\}$  چند عضو دارد؟

- (۱) ۲      (۲) ۳      (۳) ۴      (۴) ۵

(ریاضی، فارغ - ۹۴)

۵. اگر  $A = \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ ،  $B = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$  و  $C = \{1, 2, 3\}$  باشد، کدام رابطه درست است؟

- (۱)  $A - B = C$       (۲)  $B - C = \emptyset$       (۳)  $B - C = \{1, 2\}$       (۴)  $A - B = \{C\}$

۶. اگر مجموعه مرجع، مجموعه اعداد طبیعی،  $A = \{n : n \geq 5\}$  و  $B = \{2, 4, 7\}$ ، آن‌گاه مجموعه  $A' \cup B$  چند عضو دارد؟

- (۱) ۶      (۲) ۵      (۳) ۴      (۴) ۲

۷. اگر  $A_1 = \{1, 2, \dots, 10\}$  و  $A_2 = \{2, 3, \dots, 11\}$  و  $A_3 = \{3, 4, \dots, 12\}$  و ... باشد، آن‌گاه مجموعه  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$  چند عضو دارد؟

- (۱) ۳      (۲) ۴      (۳) ۵      (۴) ۶

(ریاضی، فارغ - ۸۶)

۸. اگر  $A = \{2\}$ ،  $B = \{2, \{2\}\}$  و  $C = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$  کدام رابطه نادرست است؟

- (۱)  $B \subset C$       (۲)  $A \subset B$       (۳)  $A \in B$       (۴)  $B \in C$

۹. اگر  $A = \{x \mid x = 6k, k \in \mathbb{Z}\}$  و  $B = \{x \mid x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$ ، آن‌گاه  $A \cap B$  کدام است؟

- (۱)  $\emptyset$       (۲)  $A$       (۳)  $B$       (۴)  $B - A$

۱۰. اگر  $A \cup B = A - B$  باشد، آن‌گاه کدام درست است؟

- (۱)  $A = \emptyset$       (۲)  $B = \emptyset$       (۳)  $A \cup B = \emptyset$       (۴)  $A - B = \emptyset$

- ۱ (۱) (۲) (۳) (۴)      ۳ (۱) (۲) (۳) (۴)      ۵ (۱) (۲) (۳) (۴)      ۷ (۱) (۲) (۳) (۴)      ۹ (۱) (۲) (۳) (۴)  
۲ (۱) (۲) (۳) (۴)      ۴ (۱) (۲) (۳) (۴)      ۶ (۱) (۲) (۳) (۴)      ۸ (۱) (۲) (۳) (۴)      ۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

۳. اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند، مجموعه  $A' \cap ((B \cap A) \cup B)$  برابر کدام مجموعه است؟

- (۱)  $B - A$  (۲)  $A - B$  (۳)  $A - B'$  (۴)  $A' - B'$

۴. اگر  $B' \subseteq A'$  باشد، کدام درست است؟

- (۱)  $A \cup B = A$  (۲)  $B' - A = A$  (۳)  $B' - A = B'$  (۴)  $A \subseteq B'$

۵. اگر  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 10\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \frac{x}{4} - 1 \leq 3\}$  باشد،  $A \cup B$  کدام است؟

- (۱)  $(3, 10]$  (۲)  $[2, 10]$  (۳)  $[3, 10)$  (۴)  $[2, 10)$

۶. در یک کلاس ۳۱ نفری، ۱۴ نفر عضو گروه سرود و ۱۹ نفر عضو گروه تئاتراند. اگر ۵ نفر عضو این دو گروه نباشند، چند نفر فقط عضو گروه سروداند؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۷. از مجموعه  $A$  یک عضو دل‌خواه برداشته و به مجموعه  $B$  اضافه نموده‌ایم، تعداد اعضای مجموعه  $B$  تغییر نکرده است. کدام رابطه بین  $A$  و  $B$  نتیجه نمی‌شود؟

- (۱)  $B' \subseteq A'$  (۲)  $A' \cup B = U$  (۳)  $B - A = \emptyset$  (۴)  $A - B = \emptyset$

۸. کدام یک از تساوی‌های « $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$ » و « $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$ » همواره برقرار هستند؟

- (۱) فقط اولی (۲) فقط دومی (۳) هر دو (۴) هیچ کدام

۹. چه تعداد از روابط « $A \not\subseteq B, B \not\subseteq C \Rightarrow A \not\subseteq C$ »، « $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$ » و « $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$ » همواره درست است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۰. اگر  $A \cup B' = U$  باشد، کدام نادرست است؟

- (۱)  $A' \subseteq B'$  (۲)  $B \subseteq A$  (۳)  $A \cap B = \emptyset$  (۴)  $A' \cap B = \emptyset$

۱	۱	۲	۳	۴	۳	۱	۲	۳	۴	۵	۱	۲	۳	۴	۷	۱	۲	۳	۴	۹	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۴	۶	۱	۲	۳	۴	۸	۱	۲	۳	۴	۱۰	۱	۲	۳	۴

پاسخ آزمون ۴ در صفحه ۹۷



۱۵ دقیقه

آزمون ۵ مجموعه‌ها

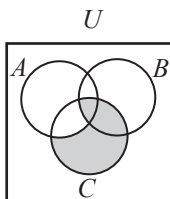
۱. اگر  $A$  دارای یک زیرمجموعه ..... باشد، آن‌گاه  $A$  یک مجموعه ..... است.

- (۱) متناهی - متناهی (۲) نامتناهی - نامتناهی  
(۳) نامتناهی - متناهی (۴) نامتناهی - نامتناهی

۲. اگر  $U = \{a, b, c, d, e\}$  مجموعه مرجع،  $A = \{a, b\}$  و  $B = \{a, b, c\}$  باشند،  $B' - A'$  چند عضو دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳. در نمودار روبه‌رو، قسمت‌های هاشورزده چه مجموعه‌ای را نشان می‌دهد؟



- (۱)  $(C - A) \cup (A \cap B \cap C)$   
(۲)  $(A - C) \cap (A \cap B \cap C)$   
(۳)  $(C - B) \cup (A \cap B \cap C)$   
(۴)  $(B - C) \cap (A \cap B \cap C)$

۴. اگر  $A \cap B = \emptyset$ ، آن‌گاه  $(A - B) \cup (B - A)$  کدام است؟

- (۱)  $A - B'$  (۲)  $A' - B$  (۳)  $A \cup B$  (۴)  $\emptyset$

۵. اگر  $n(A) = 8$  و  $n(B) = 9$  باشد، اختلاف بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار  $n(A \cup B)$  کدام است؟  
 ۱۷ (۱)      ۱۰ (۲)      ۹ (۳)      ۸ (۴)
۶. اگر  $A_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid n + 2 < x \leq 5 + n\}$  باشد، مجموعه  $(A_7 \cap A_8) - (A_7 \cup A_8)$  چند زیرمجموعهٔ ناتهی دارد؟  
 ۱۵ (۱)      ۳۱ (۲)      ۶۳ (۳)      ۱۲۷ (۴)
۷. مجموعه  $A = \left\{ n \mid n \in \mathbb{N}, \frac{2n^2 + 6n + 12}{n + 3} \in \mathbb{N} \right\}$ ، چند زیرمجموعه دارد؟  
 ۲ (۱)      ۴ (۲)      ۸ (۳)      ۱۶ (۴)
۸. اگر  $A \subset B \subset C$  باشد، کدام درست است؟  
 ۱  $A \cap B = B \cap C$  (۱)      ۲  $A \cup B = B \cup C$  (۲)      ۳  $A \cup B = B \cap C$  (۳)      ۴  $A \cap B = B \cup C$  (۴)
۹. اگر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $n + 4$  عضو، برابر  $x$  و تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $n - 1$  عضو برابر  $y$  باشد، کدام درست است؟  
 ۱  $y = 5x$  (۱)      ۲  $y = x + 5$  (۲)      ۳  $y = 32x$  (۳)      ۴  $y = x + 32$  (۴)
۱۰. ۲۷ نفر از ساکنین یک روستا، در دو کارگاه ریسندگی و بافندگی ثبت‌نام کرده‌اند. اگر ۱۹ نفر ریسندگی و ۱۵ نفر بافندگی کنند، چند نفر فقط ریسندگی می‌کنند؟  
 ۷ (۱)      ۸ (۲)      ۱۱ (۳)      ۱۲ (۴)

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴	۱	۲
۲	۱	۳	۴	۲	۱	۳	۴	۳	۱
۳	۴	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱	۳	۴	۱	۲	۳	۴

پاسخ آزمون ۵ در صفحه ۹۹

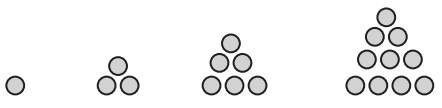
آزمون ۶ الگوها و دنباله حسابی ۱۵ دقیقه

۱. با توجه به الگوی زیر، تعداد دایره‌های شکل دهم چقدر است؟  
 شکل (۱)      شکل (۲)      شکل (۳)      شکل (۴)  
 ۱ نقطه      ۶ نقطه      ۱۵ نقطه      ۲۸ نقطه  
 ۱۹۰ (۱)      ۲۰۰ (۲)      ۲۱۰ (۳)      ۲۲۰ (۴)
۲. اگر دنباله  $5, 8, 13, 20, 29, \dots$  از یک الگوی درجهٔ دوم پیروی کند، چندمین جملهٔ آن برابر ۲۶۰ است؟  
 ۱۶ (۴)      ۱۵ (۳)      ۱۴ (۲)      ۱۳ (۱)
۳. بیست جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۳ و قدرنسبت ۲، با بیست جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۲ و قدرنسبت ۳، چند جملهٔ مساوی دارند؟  
 ۵ (۱)      ۶ (۲)      ۷ (۳)      ۸ (۴)
۴. جملهٔ دهم یک دنبالهٔ عددی از جملهٔ سوم آن ۴۲ واحد کم‌تر است. جملهٔ دوازدهم چقدر از جملهٔ دوم کم‌تر است؟  
 ۴۸ (۱)      ۵۴ (۲)      ۶۰ (۳)      ۶۶ (۴)
۵. قاعده‌های ۵ مثلث با ارتفاع‌های برابر، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند که جملهٔ میانی آن  $8/5$  است. اگر مجموع مساحت مثلث‌ها ۸۵ باشد، ارتفاع مثلث‌ها کدام است؟  
 ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۴ (۳)      ۵ (۴)

- بین ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج می‌کنیم. اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین واسطه کدام است؟  
 (۱) ۲۰ (۲) ۱۸ (۳) ۱۶ (۴) ۱۲
- حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی  $2, 4, 8, \dots$  کدام است؟  
 (۱)  $2^{200}$  (۲)  $2^{205}$  (۳)  $2^{210}$  (۴)  $2^{215}$
- در یک دنباله هندسی صعودی، جمله سوم  $10$  و جمله هفتم  $40$  است. جمله اول کدام است؟  
 (۱)  $\sqrt{5}$  (۲) ۲۵ (۳) ۵ (۴)  $\frac{5}{4}$
- واسطه هندسی بین دو عدد  $2 \times 5^3 \times 11^2$  و  $2^3 \times 5 \times 7^2$  کدام است؟  
 (۱) ۷۷۰۰ (۲) ۷۸۰۰ (۳) ۸۵۰۰ (۴) ۸۷۰۰
- در یک دنباله هندسی، جمله دوم برابر ۶ و جمله پنجم، چهار برابر جمله سوم است. جمله اول آن کدام است؟  
 (۱)  $\pm \frac{1}{3}$  (۲) فقط ۳ (۳) فقط -۳ (۴)  $\pm 3$
- در یک دنباله هندسی با جمله عمومی  $a_n$ ، حاصل ضرب نه جمله اول برابر هشت است. حاصل  $a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 \cdot a_8$  کدام است؟  
 (۱)  $2\sqrt{2}$  (۲)  $2\sqrt{2}$  (۳)  $2\sqrt{2}$  (۴) ۴
- علی دو چرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. اگر در هر سال قیمت دو چرخه، ۲۰ درصد نسبت به سال قبل کاهش یابد، بعد از ۳ سال دو چرخه‌اش را با چه قیمتی می‌تواند بفروشد؟  
 (۱) ۲۴۶ هزار تومان (۲) ۲۵۶ هزار تومان (۳) ۲۶۶ هزار تومان (۴) ۲۷۶ هزار تومان
- در یک دنباله هندسی صعودی با جمله اول ۳، اگر تفاضل جمله سوم و اول برابر ۶ باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟  
 (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۳)  $\sqrt{3}$  (۴) ۳
- در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، اگر جمله چهارم مجذور جمله اول باشد، جمله چندم دنباله، مکعب جمله اول است؟  
 (۱) ششم (۲) هفتم (۳) هشتم (۴) نهم
- در یک دنباله هندسی، جمله اول برابر ۲ و جمله هشتم مربع جمله پنجم است. قدرنسبت این دنباله برابر کدام است؟  
 (۱) ۲ (۲)  $\sqrt{2}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۳	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۵	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۷	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۹	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)
۲	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۴	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۶	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۸	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۱۰	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)

پاسخ آزمون ۱۰ در صفحه ۱۰۷

- در آرایه مثلثی شکل روبه‌رو، بیستمین شکل چند دایره دارد؟  
 (۱) ۲۰۵ (۲) ۲۱۰ (۳) ۲۱۵ (۴) ۲۲۰
- 
- در یک دنباله حسابی، مجموع ۳ جمله اول ۳ و مجموع ۳ جمله دوم ۳۹ است. مجموع ۳ جمله سوم کدام است؟  
 (۱) ۷۵ (۲) ۷۶ (۳) ۷۷ (۴) ۷۸

۳. مجموع جملات اول و دوم یک دنباله هندسی  $\frac{9}{4}$  و مجموع جملات چهارم و پنجم آن ۳۶ است. جمله سوم دنباله کدام است؟  
 (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۲
۴. هر جمله دنباله‌ای، واسطه حسابی بین دو جمله قبل آن است. اگر هر دو جمله متوالی این دنباله را از هم کم کنیم، یک دنباله ..... با قدرنسبت ..... به دست می‌آید.  
 (۱) حسابی، -۳ (۲) حسابی،  $-\frac{1}{3}$  (۳) هندسی، -۳ (۴) هندسی،  $-\frac{1}{3}$
۵. در دنباله‌ای  $a_1 = 1$  و به ازای  $n \geq 2$ ؛ حاصل ضرب  $n$  جمله اول، برابر  $n^2$  است. جمله پنجم دنباله کدام است؟  
 (۱)  $\frac{9}{4}$  (۲)  $\frac{16}{9}$  (۳)  $\frac{25}{16}$  (۴)  $\frac{36}{25}$
۶. اگر جمله اول و دوم و ششم از یک دنباله حسابی با سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی برابر باشند، قدرنسبت دنباله هندسی برابر کدام است؟  
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
۷. اعداد  $2^a$ ،  $4\sqrt{2}$  و  $2^b$  سه جمله متوالی از دنباله هندسی اند. واسطه عددی بین  $a$  و  $b$  کدام است؟ (ریاضی - ۸۷)  
 (۱)  $\frac{2}{5}$  (۲) ۲ (۳)  $\frac{1}{5}$  (۴)  $\sqrt{2}$
۸. در یک دنباله اعداد،  $a_1 = 3$  و برای هر  $n \geq 2$ ؛  $a_n = 2a_{n-1} - 2$ ، حاصل  $a_8 - a_7$ ، کدام است؟ (تجربی فارغ - ۹۵)  
 (۱) ۳۲ (۲) ۴۸ (۳) ۵۶ (۴) ۶۴
۹. در یک دنباله حسابی، جمله پنجم دو برابر جمله چهارم است. جمله ششم چند برابر جمله اول است؟  
 (۱) ۳ (۲) -۳ (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $-\frac{3}{2}$
۱۰. جمله  $3 + 2n$ ام دنباله‌ای برابر  $\frac{2n^2 + 6n + 5}{n + 2}$  است. جمله هفتم این دنباله چقدر است؟  
 (۱)  $\frac{16}{9}$  (۲)  $\frac{25}{4}$  (۳)  $\frac{36}{16}$  (۴)  $\frac{49}{25}$

۱	۱	۲	۳	۴	۳	۱	۲	۳	۴	۵	۱	۲	۳	۴	۷	۱	۲	۳	۴	۹	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۴	۶	۱	۲	۳	۴	۸	۱	۲	۳	۴	۱۰	۱	۲	۳	۴

پاسخ آزمون ۱۱ در صفحه ۱۰۸

۱۵ دقیقه

آزمون ۱۲ الگوها و دنباله‌های حسابی و هندسی

۱. با توجه به شکل‌های روبه‌رو، در شکل ۱۱م چند چوب کبریت استفاده شده است؟  
 (۱) ۳۰ (۲) ۳۱ (۳) ۳۲ (۴) ۳۳
- شکل (۱)      شکل (۲)      شکل (۳)
- ۵ چوب کبریت      ۸ چوب کبریت      ۱۱ چوب کبریت
۲. اگر در یک دنباله حسابی  $t_m = n$  و  $t_n = m$  باشد،  $t_{m+n}$  کدام است؟ ( $n \neq m$ )  
 (۱) صفر (۲)  $m+n$  (۳)  $m+n-1$  (۴)  $m+n+1$
۳. در دنباله‌ای  $a_1 = 1$  و برای  $n \geq 2$ ؛  $a_n = a_{n-1} + n$  است. جمله صدم دنباله کدام است؟  
 (۱) ۴۹۵۰ (۲) ۵۰۰۰ (۳) ۵۰۵۰ (۴) ۵۱۰۰

۴. بین دو عدد ۱ و ۶۴ پنج واسطه حسابی درج کرده ایم، جمله وسط  $A$  و بین همین دو عدد، پنج واسطه هندسی درج شده، جمله وسط  $B$  است. کدام درست است؟

(۱)  $A+B=40/5$  (۲)  $A-B=24$  (۳)  $A=B$  (۴)  $A=\sqrt{B}$

۵. در دنباله حسابی  $1, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}, \dots$  جمله اول را با  $\frac{3}{5}$  و جمله دوم را با  $\frac{2}{5}$  و جمله سوم را با  $\frac{1}{5}$  و ... جمع می کنیم. جمله نود و سوم دنباله جدید چه قدر است؟

(۱)  $\frac{139}{3}$  (۲) ۱۲۵ (۳) ۲۰ (۴) ۲۴

۶. سه عدد ناصفر تشکیل دنباله حسابی می دهند. اگر به اولی یک واحد و به سومی پنج واحد اضافه کنیم، به دومی چقدر اضافه کنیم تا اعداد حاصل نیز تشکیل دنباله حسابی دهند؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۷. در یک دنباله هندسی با جمله های صحیح و مثبت، اگر جمله پنجم از جمله سوم، ۲۴ واحد بیشتر باشد، مجموع جمله های سوم و پنجم کدام است؟

(۱) ۳۲ (۲) ۳۶ (۳) ۴۰ (۴) ۶۴

۸. در یک دنباله عددی، جملات سوم، هفتم و نهم، می توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند. چندمین جمله این دنباله، صفر است؟ (تقریبی - ۸۸)

(۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

۹. در دنباله حسابی  $3 + \sqrt{2}, 5 + 2\sqrt{2}, \dots$  مجموع چهار جمله چهارم، چقدر از مجموع چهار جمله دوم بیشتر است؟

(۱)  $32 + 32\sqrt{2}$  (۲)  $32 + 64\sqrt{2}$  (۳)  $64 + 64\sqrt{2}$  (۴)  $64 + 32\sqrt{2}$

۱۰. در دنباله های حسابی « $2, 9, 16, 23, \dots$ » و « $12, 17, 22, 27, \dots$ » چند عدد سه رقمی مشترک کوچک تر از ۳۰۰ موجود است؟ (ریاضی قارچ - ۹۵)

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱	۱	۲	۳	۴	۳	۱	۲	۳	۴	۵	۱	۲	۳	۴	۷	۱	۲	۳	۴	۹	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۴	۶	۱	۲	۳	۴	۸	۱	۲	۳	۴	۱۰	۱	۲	۳	۴

پاسخ آزمون ۱۲ در صفحه ۱۱۰

آزمون ۱۳ جامع ۱ ۱۵ دقیقه

۱. اگر  $A_n = [n-1, n+1]$ ، آن گاه مجموعه  $\bigcup_{n=1}^4 A_n - \bigcap_{n=1}^4 A_n$  با کدام مجموعه برابر است؟

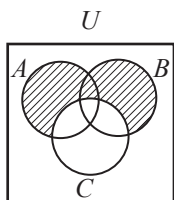
(۱)  $\{x: 1 \leq x \leq 5\}$  (۲)  $\{x: 0 \leq x \leq 5\}$   
 (۳)  $\{x: 0 \leq x \leq 5, x \neq 2\}$  (۴)  $\{x: 1 \leq x \leq 5, x \neq 2\}$

۲. اگر  $B \cap C = C$  و  $A \cap B = B$  باشد، کدام درست است؟

(۱)  $A \subseteq B \subseteq C$  (۲)  $C \subseteq B \subseteq A$  (۳)  $A \subseteq C \subseteq B$  (۴)  $A = B = C$

۳. مجموعه  $\{400, 401, 402, \dots, 600\}$  چند عضو دارد که بر ۳ بخش پذیر بوده ولی بر ۲ و ۵ بخش پذیر نباشد؟

(۱) ۲۴ (۲) ۲۵ (۳) ۲۶ (۴) ۲۷



۴. کدام برابر قسمت هاشورزده نیست؟  
 (۱)  $C' \cup (A \cap B)$  (۲)  $(A - C) \cup (B - C)$   
 (۳)  $(A \cup B) - C$  (۴)  $C' - (A' \cap B')$

۵. بین دو عدد ۱۱ و ۱۱۱ چند واسطه حسابی می‌توان درج کرد که اختلاف بیش‌ترین و کم‌ترین آن‌ها ۹۲ باشد؟

- ۲۲ (۱)      ۲۳ (۲)      ۲۴ (۳)      ۲۵ (۴)

۶. جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی، می‌توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند. قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟ (تبریز - ۹۲)

- $\frac{5}{3}$  (۱)       $\frac{7}{4}$  (۲)       $\frac{9}{4}$  (۳)       $\frac{7}{3}$  (۴)

۷. در یک دنباله عددی  $t_m + t_n = t_{m+n}$  و  $t_k = 6d$  است. مقدار  $k$  کدام است؟

- ۵ (۱)      ۶ (۲)      ۷ (۳)      ۸ (۴)

۸. در یک دنباله هندسی، حاصل ضرب جملات هشتم و بیستم برابر ۱۰۸ و جمله سیزدهم برابر ۹ است. جمله یازدهم کدام است؟

- $\frac{1}{12}$  (۱)       $\frac{4}{27}$  (۲)      ۱۲ (۳)       $\frac{27}{4}$  (۴)

۹. در یک دنباله حسابی با ۲۱ جمله، جمله وسط صفر و جمله آخر ۲۵ است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

- ۲/۲۵ (۱)      ۲/۵ (۲)      ۲/۷۵ (۳)      ۳/۲۵ (۴)

۱۰. سه عدد ناصفر تشکیل دنباله حسابی می‌دهند. اگر به اولی یک واحد یا به سومی دو واحد اضافه کنیم، یک دنباله هندسی به دست می‌آید. عدد وسط کدام است؟

- ۸ (۱)      ۱۰ (۲)      ۱۲ (۳)      ۱۴ (۴)

۱	۱	۲	۳	۴	۳	۱	۲	۳	۴	۵	۱	۲	۳	۴	۷	۱	۲	۳	۴	۹	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۴	۶	۱	۲	۳	۴	۸	۱	۲	۳	۴	۱۰	۱	۲	۳	۴

پاسخ آزمون ۱۳ در صفحه ۱۱۱

۱۵ دقیقه

آزمون ۱۴ جامع ۲

۱. مجموعه  $A' \cap (A \cup B) \cap (A - B)$  کدام است؟ (ریاضی - ۸۸)

- $B - A$  (۱)       $B$  (۲)       $\emptyset$  (۳)       $A'$  (۴)

۲. از دانش‌آموزان یک پایه، ۶۹ نفر در ریاضی، ۶۷ نفر در فیزیک و ۶۵ نفر در هر دو درس قبول شده‌اند. اگر ۵ نفر در هر دو درس مردود شده باشند، این پایه چند دانش‌آموز دارد؟

- ۷۸ (۱)      ۷۶ (۲)      ۷۴ (۳)      ۷۲ (۴)

۳. اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه ناتهی بوده و  $(B - A) \cup A = A$ ، کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

- $B - A = \emptyset$  (۱)       $B - A = B'$  (۲)       $A \subseteq B - A$  (۳)       $B - A = B$  (۴)

۴. مجموعه‌های  $A = \{2\}$  و  $B = \{3, 5, \{2\}\}$  و  $C = \{\{\{2\}, 3, 5\}, 2\}$  مفروض‌اند. کدام بیان در مورد آن‌ها نادرست است؟ (ریاضی - ۹۵)

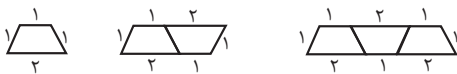
- $A \in B$  (۱)       $A \in C$  (۲)       $B \in C$  (۳)       $A \subset C$  (۴)

۵. جمله دوم یک دنباله هندسی برابر ۱۰ است. از جمله سوم آن چه عددی کم شود تا سه جمله نخست دنباله حاصل، یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۶ تشکیل دهند؟

- ۴ (۱)      ۹ (۲)      ۱۲ (۳)      ۱۶ (۴)

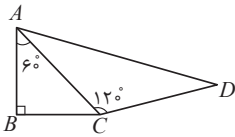
۶. الگوی زیر از تعدادی دوزنقه تشکیل شده است. محیط شکلی که تعداد دوزنقه‌های آن ۱۰ باشد، کدام است؟

- ۳۰ (۱)      ۳۱ (۲)      ۳۲ (۳)      ۳۴ (۴)



۴. ساده شده عبارت  $(\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) + \cos^2 \theta (2 + 3 \tan^2 \theta)$  کدام است؟  
 ۱ (۱) ۲ (۲) ۳  $2 \sin^2 \theta$  (۳) ۴  $2 \cos^2 \theta$  (۴)

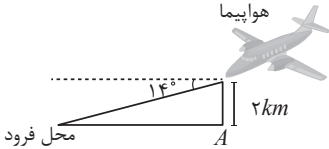
۵. اگر  $A = k \sin \alpha \cos \beta$  و  $B = k \sin \alpha \sin \beta$  و  $C = k \cos \alpha$  باشد، به ازای چه مقدار  $k$ ،  $A^2 + B^2 + C^2 = 2$  است؟  
 ۱  $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  (۱) ۲  $\pm 1$  (۲) ۳  $\pm \sqrt{2}$  (۳) ۴  $\pm 2$  (۴)



۶. در شکل روبه‌رو،  $BC = 2\sqrt{3}$  و  $AC = CD$  است. طول  $AD$  کدام است؟  
 ۱  $2\sqrt{3}$  (۱) ۲  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  (۲) ۳  $3\sqrt{3}$  (۳) ۴  $4\sqrt{3}$  (۴)

۷. حاصل عبارت  $\frac{(\sin 45^\circ - \sin 30^\circ)(\cos 45^\circ + \cos 60^\circ)}{(\sin 60^\circ - \sin 45^\circ)(\cos 30^\circ + \cos 45^\circ)} + \frac{\tan^2 60^\circ - 2 \cos^2 30^\circ}{\sin 45^\circ \cos 45^\circ}$  کدام است؟  
 ۱  $3/5$  (۱) ۲  $4$  (۲) ۳  $4/5$  (۳) ۴  $5$  (۴)

۸. یک هواپیما در ارتفاع  $2 \text{ km}$  از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویهٔ هواپیما با افق  $14^\circ$  باشد، هواپیما در چندمتری از نقطهٔ  $A$  فرود می‌آید؟ ( $\tan 76^\circ = 4$ )  
 ۱  $2500$  (۱) ۲  $5000$  (۲) ۳  $4000$  (۳) ۴  $8000$  (۴)



۹. اگر  $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{4 \sin \alpha - 1}} < 0$  باشد، انتهای کمان  $\alpha$  در کدام ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد؟  
 ۱ اول (۱) ۲ دوم (۲) ۳ سوم (۳) ۴ چهارم (۴)

۱۰. ناظری به فاصلهٔ  $35$  متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد ایستاده است. زاویهٔ رویت انتها و ابتدای مجسمه با سطح افق  $45^\circ$  و  $40^\circ$  است. ارتفاع مجسمه کدام است؟ ( $\tan 40^\circ = 0.8$ )  
 ۱  $6$  (۱) ۲  $6/4$  (۲) ۳  $7$  (۳) ۴  $7/2$  (۴)

۱	۱	۲	۳	۴	۲	۱	۲	۳	۴	۵	۱	۲	۳	۴	۷	۱	۲	۳	۴	۹	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۴	۶	۱	۲	۳	۴	۸	۱	۲	۳	۴	۱۰	۱	۲	۳	۴

پاسخ آزمون ۱۹ در صفحهٔ ۱۲۲

۱۵ دقیقه

آزمون ۲۰ مثلثات

۱. مردی با قد  $180 \text{ cm}$  در فاصله‌ای از یک تیر به ارتفاع  $6$  متر قرار دارد. اگر طول سایهٔ فرد  $60 \text{ cm}$  باشد، فاصلهٔ او تا تیر چند  $\text{cm}$  است؟  
 ۱  $120$  (۱) ۲  $140$  (۲) ۳  $160$  (۳) ۴  $200$  (۴)

۲. اگر  $\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$  باشد،  $\tan x + \cot x$  کدام است؟  
 ۱  $\frac{5}{2}$  (۱) ۲  $\frac{16}{9}$  (۲) ۳  $\frac{32}{9}$  (۳) ۴  $\frac{18}{9}$  (۴)

۳. اگر  $\tan 37^\circ = \frac{3}{4}$  باشد، حاصل  $\sin 37^\circ + \sin 53^\circ$  کدام است؟  
 ۱  $1$  (۱) ۲  $1/2$  (۲) ۳  $1/4$  (۳) ۴  $1/6$  (۴)

۴. اگر  $\tan \alpha + \sin \alpha = m$  و  $\tan \alpha - \sin \alpha = n$ ،  $m^2 - n^2$  کدام می‌تواند باشد؟  
 ۱  $4\sqrt{mn}$  (۱) ۲  $3\sqrt{mn}$  (۲) ۳  $2\sqrt{mn}$  (۳) ۴  $\sqrt{mn}$  (۴)



۵. در مثلث  $ABC$ ، طول بزرگ‌ترین ضلع  $1/5$  برابر طول کوچک‌ترین ضلع و کسینوس زاویه بین آن‌ها برابر  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$  است. اگر مساحت مثلث ۹ باشد، طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث کدام است؟

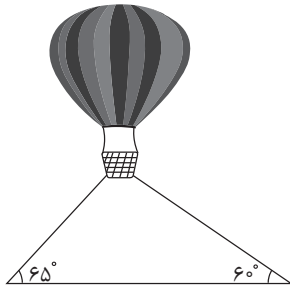
- (۱) ۶ (۲)  $6\sqrt{2}$  (۳) ۹ (۴)  $9\sqrt{2}$

۶. اگر  $\cos x \cos y = -1$  باشد، حاصل  $\sin x \cos x + \sin y \cos y$  کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر

(۳) ۱ (۴) نمی‌توان تعیین کرد.

۷. یک بالن مطابق شکل، توسط دو طناب به زمین بسته شده است. اگر طول طناب بلندتر  $90$  متر باشد طول طناب کوتاه‌تر کدام است؟



( $\sin 65^\circ \approx 0.9$  و  $\sqrt{3} = 1.7$ )

(۱) ۸۰

(۲) ۸۱

(۳) ۸۵

(۴) ۸۸

۸. اگر  $\cos x = \sqrt{\frac{\cot x}{\cot x - a}}$ ، انتهای کمان  $x$  در کدام ناحیه دایره مثلثاتی است؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۹. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای  $ABC$ ،  $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$  چند برابر  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$  است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴) ۲

۱۰. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، سینوس یکی از زوایا  $\frac{12}{13}$  و طول وتر  $26$  است. مساحت مثلث کدام است؟

- (۱) ۹۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۲۴۰

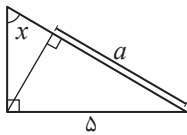
۱	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۳	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۵	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۷	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۹	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)
۲	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۴	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۶	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۸	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۱۰	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)

پاسخ آزمون ۲۰ در صفحه ۱۲۴

۱۵ دقیقه

آزمون جامع ۱

۱. در شکل روبه‌رو،  $a$  کدام است؟



(۱)  $5 \sin x$  (۲)  $\frac{1}{5} \sin x$

(۳)  $5 \cos x$  (۴)  $\frac{1}{5} \cos x$

۲. اگر  $\sin a + \cos b = 2$  باشد، حاصل  $\cos a + \sin b$  کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۳. حاصل  $\frac{1 - \sin^2 \theta - \cos^4 \theta}{2 + \tan^2 \theta + \cot^2 \theta}$  کدام است؟

- (۱)  $\sin^4 \theta \cos^4 \theta$  (۲)  $\frac{1}{\sin^4 \theta \cos^4 \theta}$  (۳)  $\sin^2 \theta \cos^2 \theta$  (۴)  $\frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}$

۴. اگر انتهای کمان  $x$  در ربع سوم دایره مثلثاتی باشد،  $\sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sin x}{1 - \cos x}$  (۲)  $\frac{\sin x}{\cos x - 1}$  (۳)  $\frac{\sin x}{1 + \cos x}$  (۴)  $\frac{-\sin x}{1 + \cos x}$

۷. در مثلث  $ABC$ ،  $\hat{A} = 60^\circ$  و  $\hat{B} = 30^\circ$  است. طول نیمساز  $AD$  چند برابر طول  $BC$  است؟

- (۱)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$  (۲)  $\frac{4}{3}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

۸. اگر  $\sin 10^\circ = a$  باشد،  $\cot 80^\circ$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$  (۲)  $\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$  (۳)  $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$  (۴)  $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$

۹. زاویه خط  $d$  با جهت مثبت محور  $x$ ها،  $120^\circ$  است. اگر خط  $d'$  بر خط  $d$  عمود بوده و دو خط یکدیگر را در نقطه‌ای به عرض ۱ واقع بر محور  $y$ ها قطع کنند، خط  $d'$  در نقطه‌ای با کدام طول محور  $x$ ها را قطع می‌کند؟

- (۱)  $-\sqrt{3}$  (۲)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۳)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴)  $-\sqrt{2}$

۱۰. اگر  $\sin x \sqrt{1 + \cot^2 x} + 1 = 0$  و  $\cot x = -\frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$  باشد، انتهای کمان  $x$  در کدام ناحیه دایره مثلثاتی قرار دارد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۱	۱	۲	۳	۴	۳	۱	۲	۳	۴	۵	۱	۲	۳	۴	۷	۱	۲	۳	۴	۹	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۴	۶	۱	۲	۳	۴	۸	۱	۲	۳	۴	۱۰	۱	۲	۳	۴

پاسخ آزمون ۲۲ در صفحه ۱۲۷

۱۵ دقیقه

آزمون ۲۳ جامع ۳

۱. اگر  $0 < x < 90^\circ$ ، کدام نامساوی همواره درست است؟

- (۱)  $\sin x > \cos x$  (۲)  $\sin x > \cot x$  (۳)  $\sin x < \tan x$  (۴)  $\cot x > \tan x$

۲. حاصل  $\frac{1}{\sin x \cos x} - (1 + \tan x)(1 + \cot x)$  برابر کدام است؟

- (۱)  $-1$  (۲)  $-2$  (۳)  $1$  (۴)  $2$

۳. حاصل  $(\tan x + \cot x)^2 - \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$  کدام است؟

- (۱)  $-2$  (۲)  $2$  (۳)  $-1$  (۴) صفر

۴. در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ،  $\hat{A} = 90^\circ$  و  $AB = 2AC$  است. مقدار  $\sin B$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$  (۲)  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۵. در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ،  $\hat{A} = 90^\circ$  و  $\sin B \sin C = \frac{3}{8}$  است. اگر اندازه وتر برابر ۴ باشد، مساحت مثلث کدام است؟

- (۱)  $1/5$  (۲)  $3$  (۳)  $4/5$  (۴)  $6$

۶. در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ،  $\tan C = \frac{5}{13}$  است. مقدار  $\cos A + \cos B + \cos C$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{30}{13}$  (۲)  $\frac{17}{13}$  (۳)  $\frac{7}{13}$  (۴)  $\frac{12}{13}$

۷. چه تعداد از روابط « $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$ » و « $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$ » و « $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 + 2\sin^2 x$ » در

دامنه‌شان همواره برقرار هستند؟

- (۱) صفر (۲)  $1$  (۳)  $2$  (۴)  $3$

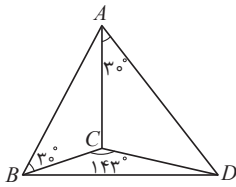
۸. حاصل  $\frac{\sin 40^\circ \cos 50^\circ + \cos 40^\circ \sin 50^\circ}{\tan 40^\circ \tan 50^\circ}$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $1$  (۴)  $2$

۹. اگر همواره  $k \cos^2 \theta + \sin^2 \theta (2 + \cot^2 \theta) (2 + \cos^2 \theta) = 4$  برقرار باشد،  $k$  کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) ۲

۱۰. در هرم زیر،  $AC$  بر صفحه مثلث  $BCD$  عمود است. اگر  $AC = 10\sqrt{3}$  باشد، مساحت مثلث  $BCD$  کدام است؟  $(\sin 37^\circ = \frac{3}{5})$



(۱) ۹۰

(۲) ۱۲۰

(۳) ۱۸۰

(۴) ۲۴۰

۱	(۱) (۲) (۳) (۴)	۳	(۱) (۲) (۳) (۴)	۵	(۱) (۲) (۳) (۴)	۷	(۱) (۲) (۳) (۴)	۹	(۱) (۲) (۳) (۴)
۲	(۱) (۲) (۳) (۴)	۴	(۱) (۲) (۳) (۴)	۶	(۱) (۲) (۳) (۴)	۸	(۱) (۲) (۳) (۴)	۱۰	(۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ آزمون ۲۳ در صفحه ۱۲۹

آزمون ۲۴ جامع فصل ۱ و ۲ ۲۵ دقیقه

۱. اگر  $A \cup (B - A) = B$  آن گاه کدام درست است؟ (ریاضی - ۱۶)

- (۱)  $A \subseteq B$  (۲)  $B \subseteq A$  (۳)  $A = \emptyset$  (۴)  $B = \emptyset$

۲. حاصل  $A' \cap ((B' \cap A') \cup B')$  کدام است؟

- (۱)  $A' - B$  (۲)  $A - B$  (۳)  $A - B'$  (۴)  $A'$

۳. اگر  $A = \{a, \{a\}\}$  و  $B = \{\{a, \{a\}\}\}$  باشد، کدام درست است؟

- (۱)  $A \cap B = \{a\}$  (۲)  $A \cap B = \{\{a\}\}$  (۳)  $A \cap B = \emptyset$  (۴)  $A - B = B$

۴. اگر در یک دنباله حسابی  $t_7 - t_3 = 28$  باشد کدام برابر ۲۴ است؟

- (۱)  $t_7 - t_4$  (۲)  $t_7 - t_5$  (۳)  $t_7 - t_6$  (۴)  $t_8 - t_4$

۵. در یک دنباله حسابی جملات اول، پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله متوالی از تصاعد هندسی صعودی اند. قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟ (ریاضی قارچ - ۱۷)

- (۱)  $\frac{6}{5}$  (۲)  $\frac{5}{4}$  (۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

۶. در دنباله‌ای  $a_1 = 1$  و  $a_{n+1} - a_n = 4n - 3$  است. جمله نهم دنباله کدام است؟

- (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۲۱ (۳) ۱۲۲ (۴) ۱۲۳

۷. اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جمله دنباله  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴) ۲

۸. اگر اعداد  $11 - x + y$  و  $x + y + 5$  و  $2x - y$  جملات متوالی یک دنباله حسابی و هندسی باشند، جمله چهارم دنباله  $2y + x - 2y + x$  کدام است؟

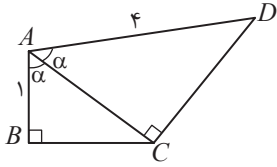
- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

۹. اگر  $a, b, c, d$  جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، حاصل  $(a - c)^2 + (c - b)^2 + (d - b)^2$  برابر کدام است؟

- (۱)  $(a - d)^2$  (۲)  $\frac{1}{4}(a - d)^2$  (۳)  $2(a - d)^2$  (۴)  $(a + d)^2$

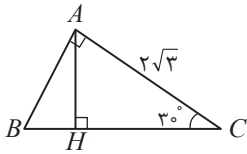
۱۰. تفاضل کدام دو عبارت، همواره با حاصل ضرب آنها برابر است؟

- (۱)  $\cos^2 x \sin^2 x$  (۲)  $\cot^2 x \sin^2 x$  (۳)  $\tan^2 x \sin^2 x$  (۴)  $\tan^2 x \cot^2 x$



۱۱. در شکل روبه‌رو، زاویه  $\alpha$  کدام است؟

- (۱)  $60^\circ$
- (۲)  $45^\circ$
- (۳)  $30^\circ$
- (۴)  $75^\circ$



۱۲. در شکل روبه‌رو، طول  $BH$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- (۲)  $1$
- (۳)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- (۴)  $\frac{2}{3}$

۱۳. حاصل  $\frac{\sin x}{\frac{1}{\sin x} - 1} + \frac{\sin x}{\frac{1}{\sin x} + 1}$  برابر کدام است؟

- (۱)  $2 \sin^2 x$
- (۲)  $2 \cos^2 x$
- (۳)  $2 \tan^2 x$
- (۴)  $2 \cot^2 x$

۱۴. اگر  $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = 4$ ، کدام می‌تواند باشد؟

- (۱)  $90^\circ$
- (۲)  $120^\circ$
- (۳)  $135^\circ$
- (۴)  $150^\circ$

۱۵. در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  اگر  $\hat{A} = 90^\circ$  باشد، حاصل  $\frac{\sin^2 B + \sin^2 C + \sin^2 \frac{B+C}{2}}{\cos^2 B + \cos^2 C + \cos^2 \frac{B+C}{2}}$  کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۱	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۴	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۷	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۱۰	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۱۳	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)
۲	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۵	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۸	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۱۱	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۱۴	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)
۳	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۶	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۹	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۱۲	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۱۵	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)

پاسخ آزمون ۲۴ در صفحه ۱۳۰

## آزمون‌های فصل سوم

### توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

۱۵ دقیقه

آزمون ۲۵ توان

- اگر  $3^{2k+1} = 6a$ ، مقدار  $\frac{k}{3}$  کدام است؟  
 (۱)  $2\sqrt{a}$  (۲)  $\sqrt{2a}$   
 (۳)  $4a^2$  (۴)  $2a^2$
- حاصل  $(\frac{1}{256})^{-0.9} \times (16)^{0.32}$  کدام است؟  
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶
- کدام درست است؟  
 (۱)  $3^{280} < 5^{210} < 2^{490}$   
 (۲)  $2^{490} < 3^{280} < 5^{210}$   
 (۳)  $3^{280} < 2^{490} < 5^{210}$   
 (۴)  $5^{210} < 2^{490} < 3^{280}$
- $\frac{1}{8}$  مربع عدد  $4^{2n-3}$  برابر ۲ است.  $\frac{1}{4}$  عدد  $8^{n-3}$  کدام است؟  
 (۱) ۴ (۲) ۲ (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{32}$
- اگر  $m$  و  $n$  اعداد صحیح و  $5^{n-4} = 8 \times 2^m$  باشد، مقدار  $2^{m+n}$  کدام است؟  
 (۱) ۲ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳) ۱۲۸ (۴)  $\frac{1}{128}$
- حاصل  $(\sqrt{2}+1)^8 (\sqrt{2}-1)^{10}$  کدام است؟  
 (۱)  $3+2\sqrt{2}$  (۲)  $3-2\sqrt{2}$  (۳)  $2\sqrt{2}+1$  (۴)  $2\sqrt{2}-1$
- حاصل  $-(-(-\frac{1}{y})^2)^{-1}$  کدام است؟  
 (۱)  $-\frac{1}{49}$  (۲)  $\frac{1}{49}$  (۳)  $-49$  (۴) ۴۹
- حاصل  $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{12}+\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$  کدام است؟  
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹
- عبارت  $\sqrt{3}-\sqrt{3}-\frac{5}{4}\sqrt{12}-2\sqrt{9}-2\sqrt{75}$  چند برابر  $\sqrt{3}$  است؟  
 (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- اگر  $5^x = (-\frac{1}{125})^{-\frac{x}{2}}$  باشد،  $x^x$  کدام است؟  
 (۱) ۴ (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳) ۱ (۴) -۱

۱ (۱) (۲) (۳) (۴) ۳ (۱) (۲) (۳) (۴) ۵ (۱) (۲) (۳) (۴) ۷ (۱) (۲) (۳) (۴) ۹ (۱) (۲) (۳) (۴)  
 ۲ (۱) (۲) (۳) (۴) ۴ (۱) (۲) (۳) (۴) ۶ (۱) (۲) (۳) (۴) ۸ (۱) (۲) (۳) (۴) ۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ آزمون ۲۵ در صفحه ۱۳۴

۵. اگر حاصل  $\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{a}{x-1}$  برابر صفر باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

- ۱ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

۶. اگر  $(2x+n)^2 = 4x^2 + mx + 16$  باشد، مقدار  $m+n$  کدام می‌تواند باشد؟

- ۱۶ (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۲۴ (۴)

۷. اگر  $x^2 + 3x = 7$  باشد، مقدار  $x(x+1)(x+2)(x+3)$  کدام است؟

- ۳۵ (۱) ۴۸ (۲) ۶۳ (۳) ۸۰ (۴)

۸. حاصل  $\frac{x^5 - x}{x^3 + x^2 + x}$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $x^2 + x^3 - x - 1$  (۲)  $x^4 - x^3 - x + 1$  (۳)  $x^4 - x^3 + x - 1$  (۴)  $x^4 + x^3 - x + 1$  (۵)

۹. حاصل  $\frac{12\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $6(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$  (۲)  $4(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$  (۳)  $2(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$  (۴)  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$  (۵)

۱۰. اگر  $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}$  باشد،  $x^4$  کدام است؟

- ۳ (۱)  $2\sqrt{2} + 3$  (۲)  $3\sqrt{2} + 1$  (۳)  $2\sqrt{6} + 5$  (۴)

۱	۱	۲	۳	۴	۳	۱	۲	۳	۴	۵	۱	۲	۳	۴	۷	۱	۲	۳	۴	۹	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۴	۶	۱	۲	۳	۴	۸	۱	۲	۳	۴	۱۰	۱	۲	۳	۴

پاسخ آزمون ۲۸ در صفحه ۱۳۸

۱۵ دقیقه

آزمون ۲۹ عبارتهای جبری

۱. اگر  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$  باشد، مقدار  $x+y$  کدام است؟

- ۵ (۱) ۲ (۲) -۱ (۳) -۳ (۴)

۲. عبارت  $x^3 + x - 10$  بر کدام عبارت بخش پذیر است؟

- ۱ (۱)  $x^2 - 2x + 5$  (۲)  $x^2 - 2x - 5$  (۳)  $x^2 + 2x + 5$  (۴)  $x^2 + 2x - 5$  (۵)

۳. اگر  $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{ax^2 + bx + c}{x^4 - 1}$  باشد، مقدار  $a+b+c+d$  کدام است؟

- ۱ (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳ (۵)

۴. اگر  $\frac{y^5 - y^3 - 12y}{8y^2 + 16y} = (\frac{y}{2} + b)(\frac{y^2 + c}{4})$  باشد،  $b+c$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $\frac{5}{4}$  (۲)  $\frac{7}{4}$  (۳) ۲ (۴)

۵. حاصل  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{9} + \sqrt{6} + \sqrt{4})(\sqrt{3} + \sqrt{2})^3$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $5 + \sqrt{12}$  (۲)  $6 + \sqrt{12}$  (۳)  $5 + \sqrt{24}$  (۴)  $6 + \sqrt{24}$  (۵)

۶. اگر  $a+b+c=5$  و  $a^2 + b^2 + c^2 = 49$  باشد، حاصل  $ab+ac+bc$  کدام است؟

- ۱۲ (۱) -۱۲ (۲) ۲۴ (۳) -۲۴ (۴)

۷. حاصل  $(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1)^{-2}$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $3 - 2\sqrt{2}$  (۲)  $6 - 4\sqrt{2}$  (۳)  $3 + 2\sqrt{2}$  (۴)  $6 + 4\sqrt{2}$  (۵)

۸. اگر  $x = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$  باشد،  $\frac{x^2+x}{x^2-x}$  برابر کدام است؟

- (۱) ۲ (۲)  $3 + \sqrt{2}$  (۳) ۴ (۴)  $3 + 2\sqrt{2}$

۹. اگر  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$  باشد، حاصل  $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}$  کدام است؟ ( $a, b, c \neq 0$ )

- (۱) ۳ (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳) -۳ (۴)  $-\frac{1}{3}$

۱۰. اگر  $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} = \frac{2x+4}{x^2+3x+2}$  باشد،  $a+b$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۳	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۵	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۷	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۹	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)
۲	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۴	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۶	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۸	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	۱۰	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)

پاسخ آزمون ۲۹ در صفحه ۱۳۹

آزمون ۳۰ جامع ۱ ۱۵ دقیقه

۱. حاصل  $\sqrt[3]{\frac{8^3+12^3}{10^3+15^3}}$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\frac{8 \times 12}{10 \times 15}$  (۲)  $\frac{8+12}{10+15}$  (۳)  $\frac{8 \times 10}{12 \times 15}$  (۴)  $\frac{8+10}{12+15}$

۲. اگر حجم مکعبی  $0/216$  متر مکعب باشد، سطح کل آن چند متر مکعب است؟

- (۱)  $0/108$  (۲)  $1/08$  (۳)  $2/16$  (۴)  $0/216$

۳. اگر  $x = y^2$  و  $y = \sqrt[5]{z}$  و  $x^m = z$  باشد،  $m$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{15}$  (۲) ۱۵ (۳)  $\frac{3}{5}$  (۴)  $\frac{5}{3}$

۴. از رابطه  $0 = 3 - 2z + 4x + 6y - 2z + 3 = 0$  حاصل  $xyz$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $-\frac{1}{6}$  (۴)  $\frac{1}{6}$

۵. حاصل  $(1 + \frac{(x-1)^2+3}{x^2-4})(\frac{3x}{2x-2} - \frac{3x+2}{x} + 1)$  کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) ۱

۶. حاصل  $\frac{1}{(2-\sqrt{3})\sqrt{2+1}(2+\sqrt{3})\sqrt{2-1}}$  کدام است؟

- (۱)  $2-\sqrt{3}$  (۲)  $2+\sqrt{3}$  (۳)  $\sqrt{3}$  (۴) ۱

۷. اگر  $4^x - 4^{x-1} = 24$  باشد، حاصل  $(2x)^x$  کدام است؟

- (۱)  $5\sqrt{5}$  (۲) ۲۵ (۳)  $25\sqrt{5}$  (۴) ۱۲۵

۸. حاصل  $\frac{5}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250}}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{\sqrt[3]{4}}{4}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

۹.  $x^6 - 1$  برابر کدام نیست؟

- (۱)  $(x^2-1)(x^4+x^2+1)$  (۲)  $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$   
 (۳)  $(x^3-1)(x^3+1)$  (۴)  $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x-1)$

۱۰. اگر  $x = 3\sqrt{2}$  و  $y = 2\sqrt{3}$  باشد، حاصل  $\frac{xy}{x-y}$  کدام است؟

- (۱)  $2x + 3y$       (۲)  $3x + 2y$       (۳)  $2x + 2y$       (۴)  $3x + 3y$

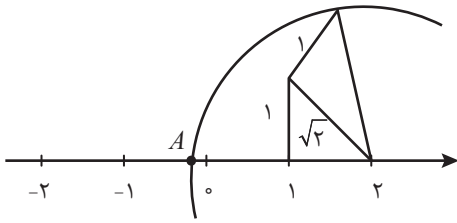
۱	۱	۲	۳	۴	۳	۱	۲	۳	۴	۵	۱	۲	۳	۴	۷	۱	۲	۳	۴	۹	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۴	۶	۱	۲	۳	۴	۸	۱	۲	۳	۴	۱۰	۱	۲	۳	۴

پاسخ آزمون ۳۰ در صفحه ۱۴۱

۱۵ دقیقه

آزمون ۳۱ جامع ۲

۱. در شکل روبه‌رو، نقطه  $A$  چه عددی را نمایش می‌دهد؟



(۱)  $1 - \sqrt{2}$

(۲)  $1 - \sqrt{3}$

(۳)  $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

(۴)  $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

۲. اگر  $(ab)^c = ab^c = c^{ab}$  باشد، کدام است  $(a, b \neq 0)$ ؟

- (۱) ۱      (۲)  $a^b$       (۳)  $ca^b$       (۴)  $abc$

۳. اگر  $8^k = (4^{3x+6})(2^{6x+3})$  باشد،  $k$  کدام است؟

- (۱)  $9x + 9$       (۲)  $4x + 5$       (۳)  $5x + 4$       (۴)  $3x + 3$

۴. اگر  $a = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{\sqrt{2}+1} (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{\sqrt{2}-1}$  باشد،  $a^2$  برابر کدام است؟

- (۱) ۱      (۲) ۵      (۳)  $5 - 2\sqrt{6}$       (۴)  $5 + 2\sqrt{6}$

۵. اگر  $A(x^2 + y^2) = (ax - by)^2 + (bx + ay)^2$  باشد،  $A$  کدام است؟

- (۱)  $a^2 - ab + b^2$       (۲)  $a^2 + a + b^2 + b$       (۳)  $a^2 + ab + b^2$       (۴)  $a^2 + b^2$

۶. حاصل عبارت  $\frac{12xy^3 - 12x^3y}{6xy^3 - 12x^2y^2 + 6x^3y}$  به ازای  $x = 4$  و  $y = 3$  کدام است؟

- (۱) ۱۴      (۲) -۱۴      (۳)  $\frac{1}{3}$       (۴) ۱

۷. اگر  $\frac{9^{x+y}}{3^{5y}} = 243$  و  $\frac{4^x}{4^{x+y}} = 8$  باشد،  $4^{4x-2y}$  کدام است؟

- (۱) ۸      (۲) ۱۶      (۳) ۳۲      (۴) ۶۴

۸. اگر  $a = x + \sqrt{x^2 + 1}$  باشد،  $a^2 + \frac{1}{a^2}$  برابر کدام است؟

- (۱)  $2x^2 - 1$       (۲)  $2x^2 + 1$       (۳)  $4x^2 - 2$       (۴)  $4x^2 + 2$

۹. حاصل  $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{5}$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{2}$       (۲)  $\sqrt{5}$       (۳)  $\sqrt{10}$       (۴)  $\sqrt{20}$



۱۰. حاصل  $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$  کدام است؟

- (۱) صفر  $\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}$  (۲)  
 (۳)  $\frac{a+b+c}{(a-b)(b-c)(c-a)}$  (۴)  
 (۴)  $\frac{-1}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

۱	۱	۲	۳	۴	۲	۱	۲	۳	۴	۵	۱	۲	۳	۴	۷	۱	۲	۳	۴	۹	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۴	۶	۱	۲	۳	۴	۸	۱	۲	۳	۴	۱۰	۱	۲	۳	۴

پاسخ آزمون ۳۱ در صفحه ۱۴۳

آزمون ۳۲ جامع ۳ (فصل‌های ۱ و ۲ و ۳) ۲۵ دقیقه

۱. اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه نامتناهی باشند، کدام الزاماً نامتناهی است؟  
 (۱)  $A \cap B$  (۲)  $A - B$   
 (۳)  $A' \cap B$  (۴)  $A \cup B$
۲. اگر  $(-2, 4) = (b, 5) \cap (-3, a)$  باشد،  $(b-a, b+a) \cup (b, a-b)$  کدام است؟  
 (۱)  $(-6, 6)$  (۲)  $(-4, 6)$  (۳)  $(-6, 4)$  (۴)  $(-4, 4)$
۳. بین دو عدد  $\frac{2}{3}$  و  $\frac{22}{3}$ ، واسطه حسابی درج می‌کنیم. چه تعداد از این واسطه‌ها، عدد طبیعی است؟  
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
۴. حاصل ضرب  $n$  جمله اولیه دنباله با جمله عمومی  $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{1}{n+1}$  (۲)  $\frac{1}{n}$  (۳)  $\frac{n}{n+1}$  (۴)  $\frac{n+1}{n}$
۵. اگر  $\alpha$  زاویه حاده و  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$  باشد، حاصل  $\cot \alpha + \frac{1}{\sin \alpha}$  کدام است؟  
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
۶. حاصل عبارت  $1 + \sqrt{x} + \frac{x}{1-\sqrt{x}}$  به ازای  $x=2$  کدام است؟  
 (۱)  $\sqrt{2}-1$  (۲)  $1-\sqrt{2}$  (۳)  $\sqrt{2}+1$  (۴)  $-\sqrt{2}-1$
۷. ریشه دوم عدد  $11-\sqrt{96}$  کدام می‌تواند باشد؟  
 (۱)  $3-2\sqrt{2}$  (۲)  $2-3\sqrt{2}$  (۳)  $3-2\sqrt{3}$  (۴)  $\sqrt{2}-2\sqrt{3}$
۸. حاصل  $\frac{\sqrt{45}-3\sqrt{20}+2\sqrt{5}}{\sqrt[3]{40}-3\sqrt[3]{5}}$  برابر کدام است؟  
 (۱)  $\sqrt[3]{5}$  (۲)  $-\sqrt[3]{5}$  (۳)  $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$  (۴)  $-\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$
۹. اگر  $3^x = 27 \times \sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9}$  باشد،  $6x$  کدام است؟  
 (۱) ۱۸ (۲) ۲۵ (۳) ۳۰ (۴) ۵۱
۱۰. کدام یک، عامل  $4x^3 - 4x^2y - x + y$  نیست؟  
 (۱)  $x-y$  (۲)  $x+y$  (۳)  $2x-1$  (۴)  $2x+1$
۱۱. اگر  $\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{7}$  باشد، حاصل  $x^3 + \frac{1}{x^3}$  کدام است؟  
 (۱) ۱۸۰ (۲) ۱۹۸ (۳) ۲۱۰ (۴) ۲۱۶

۱۲. اگر  $\sqrt[2]{a^2 \sqrt{a}} \cdot \sqrt[3]{a^3 \sqrt{a}} = a^k \sqrt{a}$  باشد،  $k$  کدام است؟

- ۲ (۱)      ۳ (۲)      ۴ (۳)      ۶ (۴)

۱۳. به ازای چند مقدار صحیح  $a$ ، عبارت  $\sqrt{256 - 3\sqrt{a}}$  عددی صحیح است؟

- ۸ (۱)      ۹ (۲)      ۱۰ (۳)      ۱۱ (۴)

۱۴. کدام فاکتور  $x^2 + 4$  است؟

- $x^2 - 2x + 2$  (۱)       $x^2 - 2x - 2$  (۲)       $x^2 - x + 2$  (۳)       $x^2 - x - 2$  (۴)

۱۵. حاصل  $\frac{(x+1)(x^2+1)(x^4+x^2+1)}{(x^2+x+1)(x^3+1)}$  به ازای  $x = \sqrt[6]{6}$  کدام است؟

- ۵ (۱)      ۶ (۲)      ۷ (۳)      ۸ (۴)

۱	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۴	۷	۱	۲	۳	۴	۱۰	۱	۲	۳	۴	۱۳	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴	۵	۱	۲	۳	۴	۸	۱	۲	۳	۴	۱۱	۱	۲	۳	۴	۱۴	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴	۶	۱	۲	۳	۴	۹	۱	۲	۳	۴	۱۲	۱	۲	۳	۴	۱۵	۱	۲	۳	۴

پاسخ آزمون ۳۲ در صفحه ۱۴۴

## آزمون‌های فصل چهارم

### معادله‌ها و نامعادله‌ها

۱۵ دقیقه

آزمون ۳۳ معادله و تابع درجه دوم

- از چهار گوشه یک صفحه مقوایی مربع شکل، مربع‌هایی به ضلع ۲ سانتی‌متر را جدا می‌کنیم و سپس با تا زدن لبه‌ها، یک جعبه با حجم ۲۰۰ سانتی‌متر مکعب می‌سازیم. سطح کل این جعبه چند سانتی‌متر مربع است؟  
 (۱) ۱۴۰ (۲) ۱۶۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۲۰۰
- مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. رقم یکان حاصل ضرب این دو عدد کدام است؟  
 (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹
- فشار خون نرمال یک شخص از رابطه  $P = 0.006S^2 - 0.02S + 120$  به دست می‌آید که  $S$  سن فرد و  $P$  بر حسب میلی‌متر جیوه است. سن شخصی که فشار خون او  $124/8$  میلی‌متر جیوه باشد، چقدر است؟  
 (۱) ۲۸ (۲) ۳۰ (۳) ۳۲ (۴) ۳۴
- به ازای کدام مقدار  $k$ ، معادله  $kx = 2x^2 + x + 8$  دو ریشه برابر دارد؟  
 (۱) ۹ و ۷ (۲) ۷ و -۹ (۳) ۷ و -۹ (۴) -۹ و ۷
- بزرگ‌ترین مقدار صحیح  $k$  که به ازای آن، معادله  $(2k-1)x^2 - 8x + 6 = 0$  ریشه حقیقی داشته باشد، کدام است؟  
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- کوچک‌ترین ریشه معادله  $(x - \frac{3}{4})^2 + (x - \frac{3}{4}) - 2 = 0$  کدام است؟  
 (۱)  $-\frac{11}{4}$  (۲)  $-\frac{9}{4}$  (۳)  $-\frac{7}{4}$  (۴)  $-\frac{5}{4}$
- دو برابر مقدار مثبتی از ثلث مربع آن ۹ واحد کم‌تر است. این مقدار یک جواب کدام یک از معادلات زیر است؟  
 (۱)  $x^2 - 8x - 9 = 0$  (۲)  $x^2 + 9x - 10 = 0$  (۳)  $x^2 - 9x - 8 = 0$  (۴)  $x^2 + 8x - 9 = 0$
- اگر اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل دنباله هندسی با قدرنسبت  $q$  دهند،  $q^2$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$  (۳)  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$
- اگر  $a > 0$  و دو معادله  $x^2 - 3x + a = 0$  و  $x^2 + x - 3a = 0$  دارای یک جواب مشترک باشند، این جواب مشترک کدام است؟  
 (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۳
- به ازای کدام مقدار  $m$ ، نمودار تابع با ضابطه  $y = (m-2)x^2 - 3x + m + 2$  بالای محور  $x$ ‌ها و مماس بر آن است؟  
 (۱) -۳ (۲)  $-\frac{5}{3}$  (۳)  $\frac{5}{3}$  (۴) ۳

۱ (۱) (۲) (۳) (۴) ۲ (۱) (۲) (۳) (۴) ۵ (۱) (۲) (۳) (۴) ۷ (۱) (۲) (۳) (۴) ۹ (۱) (۲) (۳) (۴)  
 ۲ (۱) (۲) (۳) (۴) ۴ (۱) (۲) (۳) (۴) ۶ (۱) (۲) (۳) (۴) ۸ (۱) (۲) (۳) (۴) ۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ آزمون ۳۳ در صفحه ۱۴۸

۱. یک عکس به اندازه  $10 \times 15$  درون یک قاب با مساحت  $300$  سانتی متر مربع قرار دارد. اگر فاصله همه لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، محیط قاب کدام است؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۷۰ (۳) ۸۰ (۴) ۹۰

۲. اگر ریشه‌های معادله  $x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 2 = 0$  برابر باشند، مقدار ریشه‌ها کدام است؟

- (۱) ۱ و -۱ (۲) ۱ و ۱۱ (۳) ۲ و -۱۰ (۴) ۲ و ۱۱

۳. اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 - (1+\sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$  باشند، حاصل  $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| + \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳)  $\sqrt[4]{3}$  (۴)  $2\sqrt[4]{3}$

۴.  $m$  در کدام بازه قرار گیرد که معادله  $(m+2)x^2 + 4x + m - 1 = 0$  دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشد؟

- (۱)  $(-2, 1)$  (۲)  $(1, 2)$  (۳)  $(-2, 2)$  (۴)  $(-3, 2)$

۵. یک سهمی محور  $y$ ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور  $x$ ها را در نقاط به طول‌های -۱ و ۲ قطع می‌کند. عرض رأس این سهمی کدام است؟

- (۱)  $\frac{9}{8}$  (۲)  $\frac{9}{4}$  (۳)  $\frac{9}{2}$  (۴) ۹

۶. اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه دوم  $y = (a-1)x^2 + x + 3$  نسبت به خط  $x = 2$  متقارن باشد، این منحنی محور  $x$ ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۷. به ازای کدام مقدار  $a$ ، منحنی به معادله  $f(x) = x^3 - 6x^2 + (a+5)x$  محور طول‌ها را در یک نقطه قطع می‌کند و در یک نقطه دیگر بر آن مماس است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) -۴ (۴) -۳

۸. اگر  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{4}$  عدد مثبتی را با عدد ۱ جمع و اعداد حاصل را در هم ضرب کنیم، حاصل برابر  $20$  می‌شود. مجموع ارقام این عدد کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

۹. کسر  $\frac{x}{x^2 - 5x + 9}$  برابر با چند مقدار صحیح می‌تواند باشد؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۰. اگر عبارت  $x^2 + 3x + k$  همواره مثبت باشد، کدام عبارت نیز همواره مثبت است؟

- (۱)  $kx^2 + 6x + 4$  (۲)  $kx^2 + 3x - 1$  (۳)  $x^2 + 3x - k$  (۴)  $x^2 + kx + 3$

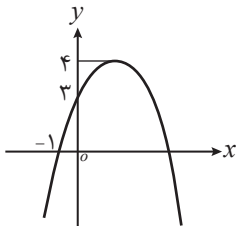
- ۱ (۱) (۲) (۳) (۴) ۳ (۱) (۲) (۳) (۴) ۵ (۱) (۲) (۳) (۴) ۷ (۱) (۲) (۳) (۴) ۹ (۱) (۲) (۳) (۴)  
۲ (۱) (۲) (۳) (۴) ۴ (۱) (۲) (۳) (۴) ۶ (۱) (۲) (۳) (۴) ۸ (۱) (۲) (۳) (۴) ۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ آزمون ۳۴ در صفحه ۱۵۰

۱. اگر جواب مشترک دو نامعادله  $3x - 2 > \frac{4x-1}{3}$  و  $\frac{3x+5}{2} - \frac{2x-4}{3} > \frac{1}{2}$  بازه  $(a, b)$  باشد،  $a + b$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) -۳

۷. اگر نمودار یک تابع درجه دوم، شکل زیر باشد، طول نقطه برخورد دیگر آن با محور  $x$  ها کدام است؟



- ۲ (۱)
- ۳ (۲)
- ۴ (۳)
- ۵ (۴)

۸. حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی از ۵ برابر عدد کوچک تر، ۳۲ واحد بیش تر است. مجموع آن دو عدد کدام است؟

- ۱۵ (۴)
- ۱۷ (۳)
- ۱۹ (۲)
- ۲۱ (۱)

۹. اگر دو معادله  $x^2 - 7x + 6m = 0$  و  $x^2 + x - 10m = 0$  دارای یک ریشه مشترک باشند، مقدار  $m$  کدام است؟ ( $m \neq 0$ )

- ۲ (۴)
- ۲ (۳)
- ۱ (۲)
- ۱ (۱)

۱۰. مجموعه جواب نامعادله  $\frac{x^2 + 2x - 5}{x^2 + x + 1} < 1$  کدام است؟

- $(6, +\infty)$  (۴)
- $(4, +\infty)$  (۳)
- $(-\infty, 6)$  (۲)
- $(-\infty, 4)$  (۱)

۱	۱	۲	۳	۴	۳	۱	۲	۳	۴	۵	۱	۲	۳	۴	۷	۱	۲	۳	۴	۹	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۴	۶	۱	۲	۳	۴	۸	۱	۲	۳	۴	۱۰	۱	۲	۳	۴

پاسخ آزمون ۳۸ در صفحه ۱۵۷

۱۵ دقیقه

آزمون ۳۹ جامع ۳

۱. به ازای چند مقدار طبیعی  $m$ ، معادله  $\frac{x-8}{n-1} = \frac{n}{x}$  جواب ندارد؟

- ۸ (۴)
- ۷ (۳)
- ۶ (۲)
- ۵ (۱)

۲. اگر دو معادله  $x^2 + 2x - m = 0$  و  $x^2 - x + 2m = 0$  یک ریشه مشترک داشته باشند معادله درجه دومی که ریشه های آن، ریشه های غیرمشترک دو معادله باشد کدام است؟

- $x^2 - 3x + 2 = 0$  (۴)
- $x^2 + 3x + 2 = 0$  (۳)
- $x^2 - x + 2 = 0$  (۲)
- $x^2 + x - 2 = 0$  (۱)

۳. مجموعه جواب نامعادله  $\frac{x^2 - 4x + 5}{(x-1)(x^2 + 1)} \geq 0$  کدام است؟

- $x > 1$  (۴)
- $x \geq 1$  (۳)
- $x < 1$  (۲)
- $x \leq 1$  (۱)

۴. اگر جواب نامعادله  $\frac{9}{x} - \frac{4}{9} > \frac{10}{x} - \frac{1}{4}$ ،  $\mathbb{R} - [a, b]$  باشد،  $b - a$  کدام است؟

- ۲۰ (۴)
- ۱۸ (۳)
- ۱۲ (۲)
- ۱۰ (۱)

۵. اگر به ازای همه مقادیر  $m$ ،  $4x^2 - 2mx + 4m^2 \geq 0$  باشد، آن گاه حدود  $m$  کدام است؟

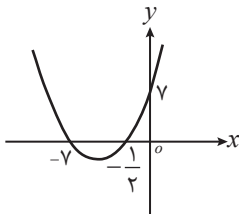
- $|m| \geq 2$  (۴)
- $|m| \leq 2$  (۳)
- $\emptyset$  (۲)
- $\mathbb{R}$  (۱)

۶. اگر مجموعه جواب  $|2x+1| < \frac{1}{5}$  یک بازه باشد، نقطه میانی و طول این بازه به ترتیب کدام اند؟

- $\frac{1}{5}$  و  $-\frac{1}{2}$  (۴)
- $\frac{1}{10}$  و  $-\frac{1}{2}$  (۳)
- $\frac{1}{5}$  و  $\frac{1}{2}$  (۲)
- $\frac{1}{10}$  و  $\frac{1}{2}$  (۱)

۷. مجموعه جواب نامعادله  $\frac{x-3}{|x|-2} > 0$  کدام است؟

- $(2, 3)$  (۴)
- $(-\infty, -3)$  (۳)
- $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$  (۲)
- $(-2, 2) \cup (3, +\infty)$  (۱)



۸. برای چه مقدار  $m$ ، خط  $y = mx - 1$  نمودار تابع زیر را قطع نمی‌کند؟
- (۱)  $5 < m < 23$
  - (۲)  $5 < m < 21$
  - (۳)  $7 < m < 23$
  - (۴)  $7 < m < 21$

۹. اگر در بازه  $(a, b)$ ، نمودار تابع  $y = 2x^2 + 3x + 4$  بالاتر از نمودار  $y = 5x^2 + 4x$  باشد، بیشترین مقدار  $b - a$  کدام است؟
- (۱) ۳
  - (۲) ۲
  - (۳)  $\frac{7}{3}$
  - (۴)  $\frac{5}{3}$
۱۰. مجموعه جواب نامعادله  $\frac{1}{4} \leq \frac{|x|}{|x|+1} \leq 2$  کدام است؟
- (۱)  $-1 \leq x \leq 1$
  - (۲)  $x \geq 1$  یا  $x \leq -1$
  - (۳)  $\emptyset$
  - (۴)  $\mathbb{R}$

۱	۲	۳	۴	۳	۱	۲	۳	۴	۵	۱	۲	۳	۴	۷	۱	۲	۳	۴	۹	۱	۲	۳	۴	
۲	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۴	۶	۱	۲	۳	۴	۸	۱	۲	۳	۴	۱۰	۱	۲	۳	۴

پاسخ آزمون ۳۹ در صفحه ۱۵۹

آزمون ۴۰ جامع ۴ (فصل‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴) ۳۰ دقیقه

۱. اگر  $A = \{1, \{1\}, \{1, 2\}, \{2\}\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 = 3x\}$ ، آنگاه تعداد زیرمجموعه‌های سره و غیر تهی مجموعه  $A - B$  کدام می‌باشد؟
- (ریاضی خارج - ۹۲)
- (۱) ۲
  - (۲) ۴
  - (۳) ۶
  - (۴) ۱۴

۲. اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه دلخواه باشد، حاصل  $(A' - B)'$  برابر کدام است؟
- (۱)  $A \cup B'$
  - (۲)  $A' \cap B$
  - (۳)  $A \cap B$
  - (۴)  $A \cup B$

۳. ۲۰ نفر از دانش‌آموزان کلاسی در تیم فوتبال مدرسه و ۱۶ نفر در تیم والیبال مدرسه و ۷ نفر در هر دو تیم شرکت کرده‌اند. اگر ۵ نفر در هیچ یک از دو تیم نباشند، این کلاس چند دانش‌آموز دارد؟
- (۱) ۳۰
  - (۲) ۳۴
  - (۳) ۳۸
  - (۴) ۴۱

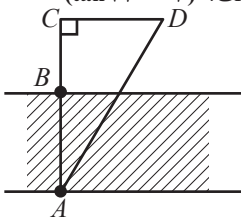
۴. جمله دوازدهم دنباله حسابی  $1, 2, \dots, -1$  با جمله چندم دنباله هندسی  $1, \dots, \frac{1}{4}$  برابر است؟
- (۱) پنجم
  - (۲) ششم
  - (۳) هفتم
  - (۴) هشتم

۵. تعداد پاره‌خط‌های مرحله چندم الگوی زیر، برابر ۲۱۱ است؟
- (۱) ۳۹
  - (۲) ۴۰
  - (۳) ۴۱
  - (۴) ۴۲
- 

۶. حاصل  $\sin \theta \cos \theta (\tan \theta + \cot \theta)$  برابر کدام است؟
- (۱)  $\sin \theta + \cos \theta$
  - (۲)  $\sin \theta \cos \theta$
  - (۳)  $\tan \theta + \cot \theta$
  - (۴)  $\tan \theta \cot \theta$

۷. اگر  $30^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ$  و  $\sin \alpha = \frac{2m-1}{4}$  باشد، حدود  $m$  کدام است؟
- (۱)  $-\frac{1}{2} \leq m < \frac{5}{2}$
  - (۲)  $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$
  - (۳)  $\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{5}{2}$
  - (۴)  $\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$

۸. برای تعیین عرض رودخانه‌ای، دو نقطه  $A$  و  $B$  را در دو طرف آن و نقطه  $C$  را در امتداد  $AB$  چنان در نظر می‌گیریم که  $BC = 3/5$  متر باشد، اگر نقطه  $D$  چنان باشد که  $CD = 2$  و  $\widehat{ADC} = 72^\circ$ ، عرض رودخانه تقریباً چند متر است؟ ( $\tan 72^\circ = 3$ )



- ۲ (۱)
- ۲/۵ (۲)
- ۳ (۳)
- ۳/۵ (۴)

۹. اگر  $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$  باشد حاصل  $\sin^3 x + \cos^3 x$  کدام است؟

- ۱۳/۲۷ (۱)
- ۱۳/۸۱ (۲)
- ۱۷/۲۷ (۳)
- ۱۷/۸۱ (۴)

۱۰. اگر  $\tan x + \cot x = k - 1$  باشد، حدود  $k$  کدام است؟

- ۱)  $-1 \leq k \leq 3$
- ۲)  $k \geq 3$  یا  $k \leq -1$
- ۳)  $k \geq 2$
- ۴)  $k \leq -\frac{1}{2}$

۱۱. حاصل  $\frac{(-y)^{-2} x^3}{(-x^{-2} y)^{-3} x^{-2}}$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{y}{x}$
- ۲)  $-xy$
- ۳)  $-\frac{y}{x}$
- ۴)  $xy$

۱۲. مجموع ریشه‌های معادله  $2^{5x+1} = 8^{x^2+1}$  کدام است؟

- ۱) ۲
- ۲)  $\frac{5}{3}$
- ۳)  $\frac{1}{3}$
- ۴) صفر

۱۳. اگر  $\frac{1-x^{-\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}}{1-x} = \frac{a}{1-x}$  باشد،  $a$  کدام است؟

- ۱) ۱
- ۲) ۲
- ۳) -۱
- ۴) -۲

۱۴. اگر  $\frac{3x}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x^2-4}$  مقدار  $B$  کدام است؟

- ۱) -۶
- ۲) ۴
- ۳) -۴
- ۴) ۶

۱۵. حاصل  $\frac{4^{0/75}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + 9^{0/25}$  برابر کدام است؟

- ۱)  $\sqrt{2}$
- ۲)  $1+\sqrt{2}$
- ۳)  $1+\sqrt{3}$
- ۴)  $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

۱۶. به ازای چند مقدار  $a$ ، معادله  $x^2 + 2a\sqrt{a^2 - 3}x + 4 = 0$  ریشه مضاعف دارد؟

- ۱) صفر
- ۲) ۱
- ۳) ۲
- ۴) ۴

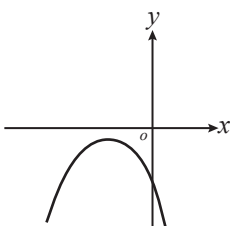
۱۷. اگر نامعادله  $x^2 - (k-3)x + 6 > k$  همواره برقرار باشد،  $k$  متعلق به کدام بازه است؟

- ۱)  $(-5, 3)$
- ۲)  $(3, 5)$
- ۳)  $(-5, -3)$
- ۴)  $(-3, 5)$

۱۸. اگر دو معادله  $x^2 + 2x + a = 0$  و  $x^2 - x - 2a = 0$  دارای یک ریشه مشترک باشند، این ریشه مشترک کدام است؟ ( $a > 0$ )

- ۱) -۲
- ۲) -۱
- ۳) ۱
- ۴) ۲

۱۹. نمودار کدام تابع درجه دوم، می‌تواند شکل روبه‌رو باشد؟



- ۱)  $y = -(x-1)^2 + 1$
- ۲)  $y = -(x-1)^2 - 1$
- ۳)  $y = -(x+1)^2 - 1$
- ۴)  $y = -(x+1)^2 + 1$

# آزمون‌های فصل پنجم

## تابع

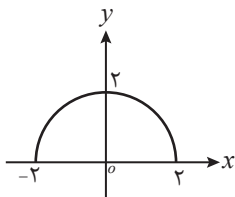
۱۵ دقیقه

آزمون ۴۳ مفهوم تابع - دامنه و برد آن - انواع تابع

۱. کدام تابع نیست؟

- (۱) رابطه بین تعداد ضلع و مجموع زوایای داخلی یک چندضلعی محدب
- (۲) رابطه بین ضلع و محیط یک مربع
- (۳) رابطه بین هر عدد و ریشه دوم آن
- (۴) رابطه بین هر فرد و گروه خونی او

۲. اگر  $x^2 + y^2 = R^2$  معادله‌ای دایره‌ای به مرکز مبدأ و به شعاع  $R$  باشد، ضابطه تابع نیم‌دایره‌ای زیر کدام است؟



$$y = \sqrt{4 - x^2} \quad (۲)$$

$$y = \sqrt{16 - x^2} \quad (۱)$$

$$y = \sqrt{4 + x^2} \quad (۴)$$

$$y = \sqrt{16 + x^2} \quad (۳)$$

۳. ضابطه‌های که رابطه بین  $x$  و  $y$  را طبق جدول  $\frac{x}{y} \begin{matrix} 100 \\ 90 \\ 70 \\ 40 \\ 0 \end{matrix}$  بیان می‌کند، کدام است؟

$$y = 100 - 5x^2 \quad (۲)$$

$$y = 100 - 10x \quad (۱)$$

$$y = 20 - x - x^2 \quad (۴)$$

$$y = 100 - 5x - 5x^2 \quad (۳)$$

۴. کدام یک از مجموعه‌های زیر، بیانگر یک تابع است؟

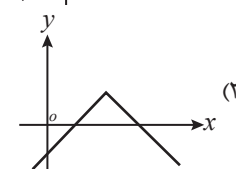
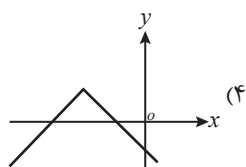
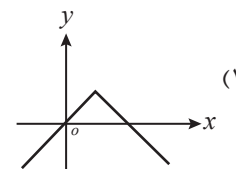
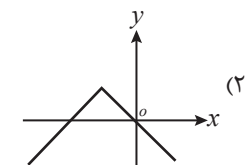
$$f = \{(x, y) | y^2 = |x|\} \quad (۲)$$

$$f = \{(x, y) | |x| + |y| = 4\} \quad (۱)$$

$$f = \{(x, y) | y^2 = x\} \quad (۴)$$

$$f = \{(x, y) | (x-1)^2 + y^2 = 4\} \quad (۳)$$

۵. کدام نمودار  $y = 1 - |x - 2|$  است؟





# آزمون‌های فصل ششم

## شمارش، بدون شمردن

۱۵ دقیقه

آزمون ۴۹ شمارش و جایگشت

- فردی می‌خواهد با اتومبیل خود از تهران به اصفهان برود و برگردد و از قم نیز عبور کند. اگر از تهران به قم ۲ جاده و از قم به اصفهان، ۳ جاده وجود داشته باشد به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد به طوری که از هیچ جاده‌ای دوبار عبور نکند؟  
 (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۳۰
- با ارقام ۲، ۳ و ۵ چند عدد ۳ رقمی می‌توان نوشت که در آن رقم تکراری وجود داشته باشد؟  
 (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۲۱ (۴) ۲۷
- در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد، اختلاف حداکثر و حداقل تعداد کارخانه‌های ممکن در این شهرک، کدام است؟  
 (۱) ۶۰۰۰ (۲) ۸۰۰۰ (۳) ۱۰۰۰۰ (۴) ۱۲۰۰۰
- به چند طریق می‌توان ۸ گلدان متفاوت را در دو کناره ۴ پله قرار داد؟  
 (۱) ۴۰۳۲۰ (۲) ۴۰۲۳۰ (۳) ۴۰۲۲۰ (۴) ۴۰۳۳۰
- با حروف کلمه «ساستیان» چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت؟  
 (۱) ۱۶۲۰ (۲) ۱۶۸۰ (۳) ۱۷۲۰ (۴) ۱۷۸۰
- با ۶ مهره متمایز، چند دستبند مختلف می‌توان ساخت؟  
 (۱) ۳۰ (۲) ۶۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۷۲۰
- ۴ دونه  $a$ ،  $b$ ،  $c$  و  $d$  در یک مسابقه دو شرکت کرده‌اند. کدام نادرست است؟  
 (۱) تعداد حالاتی که  $a$  بعد از  $b$  می‌رسد، ۱۲ است.  
 (۲) تعداد حالاتی که  $a$  درست بعد از  $b$  می‌رسد، ۶ است.  
 (۳) تعداد حالاتی که  $a$  بعد از  $b$  و  $b$  بعد از  $c$  می‌رسد، ۳ است.  
 (۴) تعداد حالاتی که  $a$  درست بعد از  $b$  و  $b$  درست بعد از  $c$  می‌رسد، ۲ است.
- با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت که بر ۵ بخش پذیر باشد؟  
 (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۲۱ (۴) ۲۴
- با حروف کلمه جمهوری، چند کلمه سه حرفی می‌توان نوشت که شامل حرف «م» باشد؟  
 (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۶۰ (۴) ۱۲۰

۱۵ دقیقه

آزمون ۵۱ ترکیب

۱. به چند طریق از میان ۸ ریاضی‌دان، ۶ فیزیک‌دان و ۵ شیمی‌دان می‌توان کمیته‌ای علمی ۳ نفره انتخاب کرد که از همه رشته‌ها در آن باشد؟  
 (۱) ۲۶۰ (۲) ۵۲۰ (۳) ۲۴۰ (۴) ۴۸۰
۲. به چند طریق از بین دو مدرس ریاضی، دو مدرس فیزیک و دو مدرس شیمی یک کمیته دو نفره انتخاب کنیم که دو نفر مدرس یک درس نباشند؟  
 (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴) ۳۰
۳. سکه‌ای را آن قدر می‌اندازیم تا برای سومین بار رو بیاید. تعداد حالاتی که در ۱۰ بار پرتاب به این منظور رسیده‌ایم، کدام است؟  
 (۱) ۳ (۲) ۸ (۳) ۳۶ (۴) ۱۲۰
۴. حاصل  $\binom{8}{6} + \binom{7}{5} + \binom{6}{4} + \binom{6}{3}$  کدام است؟  
 (۱)  $\binom{9}{2}$  (۲)  $\binom{9}{3}$  (۳)  $\binom{10}{2}$  (۴)  $\binom{10}{3}$
۵. آشپزی ده نوع ادویه دارد که با استفاده از هر ۳ تا از آن‌ها یک طعم مخصوص می‌تواند درست کند. به چند طریق می‌تواند طعمی را درست کند در صورتی که دو نوع ادویه باشند که با هم استفاده نشوند؟  
 (۱) ۱۱۱ (۲) ۱۱۲ (۳) ۱۱۳ (۴) ۱۱۴
۶. از بین ۴ دانش‌آموز سال اول، ۳ دانش‌آموز سال دوم و ۵ دانش‌آموز سال سوم به چند حالت می‌توان ۳ دانش‌آموز انتخاب کرد که تعداد دانش‌آموزان سال اول از تعداد دانش‌آموزان سال سوم بیش‌تر باشد؟  
 (۱) ۴۸ (۲) ۶۰ (۳) ۶۴ (۴) ۷۲
۷. از بین تعدادی کتاب مختلف می‌خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالات مختلف این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتاب‌ها کدام است؟  
 (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰
۸. تعداد اقطار یک  $n$  ضلعی محدب، کدام است؟  
 (۱)  $\binom{n}{2} - \binom{n}{1}$  (۲)  $\binom{n}{3} - \binom{n}{2}$  (۳)  $\binom{n}{2} - \binom{n}{0}$  (۴)  $\binom{n}{3} - \binom{n}{1}$
۹. ۶ نفر را به چند طریق می‌توان به دو تیم سه نفره تقسیم کرد؟  
 (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰
۱۰. در یک صفحه شطرنج (مربع  $8 \times 8$ ) چند مستطیل وجود دارد؟  
 (۱) ۳۹۲ (۲) ۵۸۸ (۳) ۷۸۴ (۴) ۱۲۹۶

۱ (۱) (۲) (۳) (۴) ۳ (۱) (۲) (۳) (۴) ۵ (۱) (۲) (۳) (۴) ۷ (۱) (۲) (۳) (۴) ۹ (۱) (۲) (۳) (۴)  
 ۲ (۱) (۲) (۳) (۴) ۴ (۱) (۲) (۳) (۴) ۶ (۱) (۲) (۳) (۴) ۸ (۱) (۲) (۳) (۴) ۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ آزمون ۵۱ در صفحه ۱۸۵

۱۵ دقیقه

آزمون ۵۲ ترکیب

۱. از بین ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی به چند روش کمیته‌ای ۵ نفره از داوران می‌توان تشکیل داد که حداقل ۳ داور ایرانی داشته باشد؟  
 (۱) ۳۵ (۲) ۴۰ (۳) ۴۵ (۴) ۵۰

۱۵. چند عدد چهاررقمی، با ارقام متمایز کوچک‌تر از ۶ می‌توان نوشت که بر ۵ بخش پذیر باشد؟

- ۹۶ (۱)      ۱۰۸ (۲)      ۱۹۲ (۳)      ۲۱۶ (۴)

۱ (۱) (۲) (۳) (۴)	۴ (۱) (۲) (۳) (۴)	۷ (۱) (۲) (۳) (۴)	۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴)	۱۳ (۱) (۲) (۳) (۴)
۲ (۱) (۲) (۳) (۴)	۵ (۱) (۲) (۳) (۴)	۸ (۱) (۲) (۳) (۴)	۱۱ (۱) (۲) (۳) (۴)	۱۴ (۱) (۲) (۳) (۴)
۳ (۱) (۲) (۳) (۴)	۶ (۱) (۲) (۳) (۴)	۹ (۱) (۲) (۳) (۴)	۱۲ (۱) (۲) (۳) (۴)	۱۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ آزمون ۵۷ در صفحه ۱۹۴

۲۵ دقیقه

آزمون ۵۸ جامع ۶ (فصل‌های ۵ و ۶)

۱. در کدام گزینه،  $y$  تابع  $x$  است؟

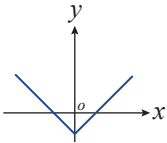
- $x = y^2 + y|y|$  (۴)       $x = |2y + 1| + y$  (۳)       $x = y^3 - 4y + 1$  (۲)       $x - \sqrt{y} = y$  (۱)

۲. نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، محور  $x$ ها را در نقطه‌ای به طول ۱ و محور  $y$ ها را در نقطه‌ای به عرض ۶- قطع کرده و از نقطه  $(-2, -6)$  می‌گذرد.  $f(-1)$  کدام است؟

(تجربی قارچ - ۸۹)

- ۸ (۱)      -۷ (۲)      -۵ (۳)      -۴ (۴)

۳. ضابطه نمودار روبه‌رو، کدام می‌تواند باشد؟



- $y = |x - 2| - 2$  (۱)       $y = |x| - 2$  (۲)  
 $y = |x + 2| - 2$  (۳)       $y = |x - 2|$  (۴)

۴. به چند طریق می‌توان یک مجموعه ۶ عضوی را به سه زیر مجموعه دو عضوی دو به دو جدا از هم تقسیم کرد؟

- ۱۰ (۱)      ۱۵ (۲)      ۶۰ (۳)      ۹۰ (۴)

۵. مجموعه  $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$  چند زیرمجموعه دارد که تعداد اعداد زوج آن فقط ۳ تا باشد؟

- ۴۰ (۱)      ۱۶۰ (۲)      ۳۲۰ (۳)      ۱۲۸۰ (۴)

۶. با حروف کلمه «جهانگردی» چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که با حرف نقطه‌دار شروع شوند؟

- ۷! (۱)       $2 \times 7!$  (۲)       $3 \times 7!$  (۳)       $4 \times 7!$  (۴)

۷. اگر تابع  $f(x) = |x^2 - 1| + \sqrt{x^2 + 3x + 2} + x^2 + 2x + 1$  برابر تابع ثابت صفر باشد، دامنه آن چند عضو دارد؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ بی‌نهایت (۴)

۸. چهار افسر و سه سرباز را به چند طریق می‌توان در یک ردیف نشانده به طوری که هیچ دو سربازی کنار هم نباشند؟

- ۷۲ (۱)      ۷۲۰ (۲)      ۱۴۴ (۳)      ۱۴۴۰ (۴)

۹. در ۱۰ پرسش موجود، به چند طریق می‌توان ۸ پرسش را جهت پاسخ‌گویی انتخاب کرد، به شرط آن که حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟

(ریاضی - ۸۹)

- ۲۵ (۱)      ۳۰ (۲)      ۳۲ (۳)      ۳۵ (۴)

۱۰. با حروف کلمه «بلوچستان» چند کلمه ۳ حرفی می‌توان ساخت که فاقد حرف تکراری باشد؟

- $\frac{8!}{5!3!}$  (۱)       $\frac{8!}{5!}$  (۲)       $\frac{8!}{3!}$  (۳)      ۸! (۴)

۱۱. برد توابع  $y = 3 \cos^2 x - 1$  و  $y = a \sin x + b$  برابرند. مقدار  $ab$  کدام می‌تواند باشد؟

- $-\frac{3}{8}$  (۱)       $-\frac{3}{4}$  (۲)       $-\frac{3}{2}$  (۳)      -۳ (۴)

۱۲. اگر سه عضو جدید به اعضای یک مجموعه اضافه کنیم، ۲۲۴ زیرمجموعه به زیر مجموعه‌های آن افزوده می‌شود. مجموعه اولیه، چند زیرمجموعه ناتهی و زوج عضوی دارد؟

- ۳ (۱)      ۱۵ (۲)      ۷ (۳)      ۳ (۴)

# آزمون‌های فصل هفتم

## آمار و احتمال

۱۵ دقیقه

آزمون ۵۹ فضای نمونه‌ای و پیشامد

- سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر پشت بیاید، یک تاس و اگر رو بیاید، دو سکه دیگر را می‌اندازیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟
 

۵ (۱)	۱۰ (۲)	۲۱ (۳)	۴۲ (۴)
-------	--------	--------	--------
- تاسی را پرتاب می‌کنیم. چند پیشامد وجود دارد که در آن عدد ۳ رو شده است؟
 

۱۵ (۱)	۱۶ (۲)	۳۲ (۳)	۶۴ (۴)
--------	--------	--------	--------
- در پرتاب ۳ سکه، پیشامد این که هم پشت و هم رو دیده شود چند عضوی است؟
 

۵ (۱)	۶ (۲)	۷ (۳)	۸ (۴)
-------	-------	-------	-------
- از نقاط شکل مقابل، سه نقطه به تصادف انتخاب می‌کنیم. تعداد عضوهای پیشامد  $A$  که در آن سه نقطه انتخابی تشکیل مثلث بدهند، کدام است؟
 

۱۵ (۱)	۲۰ (۲)	۳۰ (۳)	۴۰ (۴)
--------	--------	--------	--------
- در آزمایش پرتاب یک تاس پیشامد «آمدن عدد اول» اتفاق افتاده ولی پیشامد «آمدن عدد زوج» اتفاق نیفتاده است. کدام پیشامد زیر حتماً رخ داده است؟
 

۱) آمدن مضرب ۳	۲) آمدن غیر مضرب ۳	۳) آمدن عدد مربع کامل	۴) آمدن عدد فرد
----------------	--------------------	-----------------------	-----------------
- در خانواده‌ای با ۵ فرزند، اگر پیشامد  $A$  «حداقل ۳ فرزند پسر» و پیشامد  $B$  «حداقل دو فرزند دختر» باشد، پیشامد  $A - B$  چند عضو دارد؟
 

۵ (۱)	۶ (۲)	۱۰ (۳)	۱۶ (۴)
-------	-------	--------	--------
- چهار کارت با شماره‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ داریم. یکی را به تصادف انتخاب می‌کنیم و به تعداد عدد نوشته شده روی آن، سکه پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟
 

۳۰ (۱)	۲۸ (۲)	۲۴ (۳)	۲۰ (۴)
--------	--------	--------	--------
- در پرتاب یک سکه و تاس، پیشامد این که سکه پشت یا تاس ۶ بیاید، چند عضو دارد؟
 

۶ (۱)	۷ (۲)	۸ (۳)	۱۲ (۴)
-------	-------	-------	--------
- با ۳ رنگ قرمز، آبی و زرد خانه‌های  را رنگ می‌کنیم. پیشامد این که رنگ خانه‌های مجاور متفاوت باشد، چند عضو دارد؟
 

۱۸ (۱)	۲۱ (۲)	۲۴ (۳)	۲۷ (۴)
--------	--------	--------	--------

۱. خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. احتمال این که تعداد فرزندان دختر و پسر آن برابر باشند، کدام است؟  
 (۱)  $\frac{5}{16}$  (۲)  $\frac{5}{8}$  (۳)  $\frac{3}{8}$  (۴)  $\frac{1}{4}$
۲. در کیسه‌ای ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۲ مهره سبز داریم. ۳ مهره به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که تعداد مهره‌های آبی از قرمز بیش‌تر باشد، چه قدر است؟  
 (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{19}{42}$  (۳)  $\frac{10}{21}$  (۴)  $\frac{23}{42}$
۳. دو تاس سفید و سیاه را می‌اندازیم. احتمال این که هر دو فرد باشند ولی تاس سفید ۳ نباشد، کدام است؟  
 (۱)  $\frac{1}{6}$  (۲)  $\frac{2}{9}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{4}{9}$
۴. در جعبه‌ای ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز وجود دارد. اگر از این جعبه سه مهره به تصادف خارج کنیم، با چه احتمالی دقیقاً دو تاس آنها هم‌رنگ هستند؟  
 (۱)  $\frac{1}{7}$  (۲)  $\frac{3}{7}$  (۳)  $\frac{4}{7}$  (۴)  $\frac{6}{7}$
۵. تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آنکه عددی که بار دوم آمده از عددی که بار اول آمده بیشتر باشد، کدام است؟  
 (۱)  $\frac{1}{6}$  (۲)  $\frac{5}{6}$  (۳)  $\frac{5}{12}$  (۴)  $\frac{7}{12}$
۶. اگر  $P(A) = \frac{1}{5}$  و  $P(B) = \frac{2}{5}$  باشد، بیش‌ترین مقدار  $P(A \cup B)$ ، چند برابر کم‌ترین مقدار آن است؟  
 (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{5}$  (۳)  $\frac{1}{5}$  (۴)  $\frac{2}{5}$
۷. در ظرفی پنج مهره با شماره‌های ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ قرار دارند. دو مهره با هم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال مجموع شماره‌های این دو مهره، عدد فرد است؟  
 (ریاضی خارج - ۸۷)  
 (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{5}$  (۳)  $\frac{1}{6}$  (۴)  $\frac{1}{7}$
۸. از ساکنین شهری، ۳۰ درصد روزنامه الف، ۲۵ درصد روزنامه ب و ۹ درصد روزنامه‌های الف و ب را می‌خوانند. اگر فردی از بین آنان به تصادف انتخاب شود، با کدام احتمال، هیچ یک از این دو روزنامه را نمی‌خواند؟  
 (۱)  $\frac{1}{45}$  (۲)  $\frac{1}{48}$  (۳)  $\frac{1}{54}$  (۴)  $\frac{1}{56}$
۹. از بین اعداد ۱ و ۲ و ... و ۱۰ سه عدد انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی، این سه عدد دنباله حسابی تشکیل می‌دهند؟  
 (۱)  $\frac{1}{6}$  (۲)  $\frac{1}{5}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{3}$
۱۰. در پرتاب ۳ تاس متمایز احتمال این که مجموع ۱۰ بیاید، کدام است؟  
 (۱)  $\frac{1}{9}$  (۲)  $\frac{13}{108}$  (۳)  $\frac{1}{8}$  (۴)  $\frac{7}{54}$

۱	۱	۲	۳	۴	۳	۱	۲	۳	۴	۵	۱	۲	۳	۴	۷	۱	۲	۳	۴	۹	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۴	۶	۱	۲	۳	۴	۸	۱	۲	۳	۴	۱۰	۱	۲	۳	۴

پاسخ آزمون ۶۲ در صفحه ۲۰۵

۱. دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال این که هر دو فرد یا مجموع آنها ۶ باشد، کدام است؟  
 (۱)  $\frac{13}{36}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{11}{36}$  (۴)  $\frac{5}{18}$

۶. از بین اعداد سه رقمی با ارقام متمایز، یکی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی همه ارقام آن زوج است؟

(۱)  $\frac{1}{27}$  (۲)  $\frac{2}{27}$  (۳)  $\frac{1}{9}$  (۴)  $\frac{4}{27}$

۷. در بین ۵ دانش‌آموز ریاضی و ۶ دانش‌آموز تجربی یک تیم ۳ نفره انتخاب می‌کنیم. احتمال این که حداکثر ۲ نفر آن‌ها ریاضی باشند، کدام است؟

(۱)  $\frac{9}{11}$  (۲)  $\frac{29}{33}$  (۳)  $\frac{10}{11}$  (۴)  $\frac{31}{33}$

۸. یک تاس را دوبار پرتاب می‌کنیم. با چه احتمالی فقط یک بار عدد ظاهر شده مضرب ۳ است؟

(۱)  $\frac{4}{9}$  (۲)  $\frac{5}{9}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{7}{9}$

۹. هر یک از جایگشت‌های سه رقمی مجموعه  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  را روی کارتی می‌نویسیم و به تصادف یکی را انتخاب می‌کنیم. احتمال این که روی کارت رقم ۴ باشد ولی ۶ نباشد، کدام است؟

(۱)  $0/2$  (۲)  $0/3$  (۳)  $0/4$  (۴)  $0/5$

۱۰. ۳ گوی سفید متمایز و ۳ گوی سیاه متمایز را در یک ردیف قرار می‌دهیم. احتمال این که رنگ گوی‌ها ابتدا و انتهای ردیف متفاوت باشد کدام است؟

(۱)  $0/3$  (۲)  $0/4$  (۳)  $0/6$  (۴)  $0/8$

۱	۱	۲	۳	۴	۳	۱	۲	۳	۴	۵	۱	۲	۳	۴	۷	۱	۲	۳	۴	۹	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۴	۶	۱	۲	۳	۴	۸	۱	۲	۳	۴	۱۰	۱	۲	۳	۴

پاسخ آزمون ۶۶ در صفحه ۲۱۳

۱۵ دقیقه

آزمون ۶۷ آمار

۱. چه تعداد از گزاره‌های «اندازهٔ جامعه کم‌تر از اندازهٔ نمونه است»، «اعضای نمونه، اعضای جامعه‌اند» و «نمونه، زیر مجموعه‌ای از جامعه است.» درست است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲. کدام طریق برای جمع‌آوری داده‌ها مناسب نیست؟  
(۱) مصاحبه (۲) الگوی خاص (۳) مشاهده (۴) آزمایش

۳. نوع آلابندگی هوا چگونه متغیری است؟  
(۱) کمی گسسته (۲) کمی پیوسته (۳) کیفی اسمی (۴) کیفی ترتیبی

۴. گروه خونی افراد، متغیر تصادفی است. نوع آن کدام است؟  
(۱) کمی پیوسته (۲) کمی گسسته (۳) کیفی ترتیبی (۴) کیفی اسمی

۵. نوع کدام متغیر درست بیان شده است؟  
(۱) تعداد فرزندان - کیفی (۲) قد افراد - کمی (۳) مدت زمان رسیدن از خانه به مدرسه - کیفی (۴) میزان لذت تماشای فوتبال - کمی

۶. تعداد ماهی‌های یک دریا، چه نوع متغیری است؟  
(۱) کمی - گسسته (۲) کمی - پیوسته (۳) کیفی - اسمی (۴) کیفی - ترتیبی

۷. نوع ماهی‌های یک دریا، چه نوع متغیری است؟  
(۱) کمی - پیوسته (۲) کمی - گسسته (۳) کیفی - اسمی (۴) کیفی - ترتیبی

# آزمون‌های فصل هشتم

## آزمون‌های جامع کتاب

۳۰ دقیقه

آزمون ۷۱ جامع ۱

- اگر  $A = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$  و  $B = \{a, b\}$ ، مجموعه  $A - \{B\}$  چند زیرمجموعه سره غیر تهی دارد؟ (ریاضی - ۸۹)
 

۲ (۱)	۷ (۲)	۶ (۳)	۱۴ (۴)
-------	-------	-------	--------
- در دو دنباله حسابی به صورت‌های  $(2, 7, 12, \dots)$  و  $(8, 11, 14, \dots)$ ، چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟ (ریاضی قارچ - ۹۴)
 

۵۸ (۱)	۵۹ (۲)	۶۰ (۳)	۶۱ (۴)
--------	--------	--------	--------
- در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، جمله هفتم ۱۶ برابر جمله سوم است. نسبت جمله یازدهم به جمله هشتم کدام است؟
 

۸ (۱)	$\frac{1}{8}$ (۲)	$2\sqrt{2}$ (۳)	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (۴)
-------	-------------------	-----------------	---------------------------
- در متوازی‌الاضلاع اندازه دو قطر ۱۲ و ۸ واحد، و زاویه بین دو قطر ۱۳۵ درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر  $\sqrt{2}$  است؟ (تبریزی - ۹۲)
 

۱۸ (۱)	۲۴ (۲)	۳۲ (۳)	۳۶ (۴)
--------	--------	--------	--------
- در مثلث  $ABC$ ، طول ضلع  $a$  کدام است؟
 

$b \sin C + c \sin B$ (۱)	$b \sin B + c \sin C$ (۲)
$b \cos C + c \cos B$ (۳)	$b \cos B + c \cos C$ (۴)
- از اتحاد  $\frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2} = \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x}$ ، مقدار  $a + b + c$  کدام است؟
 

۳ (۱)	۰ (۲)	-۶ (۳)	۲ (۴)
-------	-------	--------	-------
- حاصل عبارت  $\sqrt{2}\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{3} + \sqrt{2+\sqrt{3}})$ ، کدام است؟ (ریاضی - ۹۳)
 

$\sqrt{3}$ (۱)	۲ (۲)	$1 + \sqrt{3}$ (۳)	$2\sqrt{3}$ (۴)
----------------	-------	--------------------	-----------------
- حاصل  $\frac{2\sqrt{10}}{2\sqrt{3}-\sqrt{10}} - 4\sqrt{\frac{15}{2}}$  کدام است؟
 

۱۰ (۱)	$4\sqrt{3}$ (۲)	$10(4\sqrt{3}-1)$ (۳)	$10(1+4\sqrt{3})$ (۴)
--------	-----------------	-----------------------	-----------------------
- اگر  $x^m y^n = \left(\frac{\sqrt{y}}{x + \sqrt{xy}} - \frac{\sqrt{y}}{x - \sqrt{xy}}\right) \left(\frac{y-x}{2\sqrt{xy}}\right)$  باشد،  $m - n$  کدام است؟
 

$-\frac{1}{2}$ (۱)	$\frac{1}{2}$ (۲)	$-\frac{3}{2}$ (۳)	$\frac{3}{2}$ (۴)
--------------------	-------------------	--------------------	-------------------
- جواب‌های معادله  $x^2 \sin^2 \alpha - x + \cos^2 \alpha = 0$  کدام است؟ ( $\alpha$  معلوم)
 

$-1, \tan^2 \alpha$ (۱)	$-1, -\tan^2 \alpha$ (۲)	$-1, \cot^2 \alpha$ (۳)	$1, \cot^2 \alpha$ (۴)
-------------------------	--------------------------	-------------------------	------------------------

۱۱. به ازای چه مقادیر  $a$ ، معادله درجه دوم  $\frac{3}{4}x^2 + ax + a = 0$  دارای دو ریشه حقیقی متمایز است؟

- (۱)  $a > 6$  یا  $a < 2$  (۲)  $a > 4$  یا  $a < 3$  (۳)  $2 < a < 6$  (۴)  $3 < a < 4$

۱۲. اگر معادله  $(x-a)(x-b) + 2 = 0$  دو ریشه حقیقی داشته باشد، کدام معادله همواره دو ریشه حقیقی دارد؟

- (۱)  $(x-a)(x-b) + 1 = 0$  (۲)  $(x-a)(x-b) + 4 = 0$   
(۳)  $(x-a)(x-b) + 3 = 0$  (۴)  $(x-a)(x-b) + 5 = 0$

۱۳. رابطه  $\{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3m+2), (m, 4)\}$  به ازای کدام مقدار  $m$ ، یک تابع است؟

- (۱)  $-2$  (۲)  $-1$  (۳)  $2$  (۴) هیچ مقدار  $m$

۱۴. اگر  $f(x) = \sqrt{x+2}|x|$ ، مقدار  $f(f(-144))$  کدام است؟

- (۱) تعریف نشده (۲)  $6$  (۳)  $8$  (۴)  $12$

۱۵. از هر یک از ۸ مدرسه علاقه‌مند، ۶ نفر برای بازی تنیس ۴ نفری (۲ نفر در مقابل ۲ نفر) انتخاب شده‌اند. به چند طریق این بازی ممکن است انجام شود، به طوری که دو نفر هم‌یار هم، از یک مدرسه باشند؟ (بازی بین مدارس مختلف برگزار می‌شود). (ریاضی - ۹۳)

- (۱)  $4200$  (۲)  $5400$  (۳)  $5600$  (۴)  $6300$

۱۶. با ارقام متمایز ۹ و ... و ۴ و ۳ و ۲ و ۱، به چند طریق می‌توان یک عدد چهار رقمی ساخت، به طوری که فقط یکی از ارقام آن زوج باشد؟

- (۱)  $640$  (۲)  $720$  (۳)  $780$  (۴)  $960$

۱۷. در شکل روبه‌رو، چند مثلث می‌توان رسم کرد به طوری که نقاط، رأس مثلث باشند؟

- (۱)  $76$  (۲)  $78$  (۳)  $82$  (۴)  $85$

۱۸. در جعبه‌ای ۷ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره از آن بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال یک مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید، خارج شده است؟

(تهری - ۹۴)

- (۱)  $\frac{30}{91}$  (۲)  $\frac{25}{77}$  (۳)  $\frac{40}{143}$  (۴)  $\frac{50}{143}$

۱۹. دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال، مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ است؟

(تهری - ۹۳)

- (۱)  $\frac{2}{9}$  (۲)  $\frac{5}{18}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{5}{12}$

۲۰. مراحل تحصیلی، متغیر تصادفی است. نوع آن کدام است؟

(ریاضی - ۸۶)

- (۱) کمی گسسته (۲) کمی پیوسته (۳) کیفی اسمی (۴) کیفی ترتیبی

۱	(۱) (۲) (۳) (۴)	۵	(۱) (۲) (۳) (۴)	۹	(۱) (۲) (۳) (۴)	۱۳	(۱) (۲) (۳) (۴)	۱۷	(۱) (۲) (۳) (۴)
۲	(۱) (۲) (۳) (۴)	۶	(۱) (۲) (۳) (۴)	۱۰	(۱) (۲) (۳) (۴)	۱۴	(۱) (۲) (۳) (۴)	۱۸	(۱) (۲) (۳) (۴)
۳	(۱) (۲) (۳) (۴)	۷	(۱) (۲) (۳) (۴)	۱۱	(۱) (۲) (۳) (۴)	۱۵	(۱) (۲) (۳) (۴)	۱۹	(۱) (۲) (۳) (۴)
۴	(۱) (۲) (۳) (۴)	۸	(۱) (۲) (۳) (۴)	۱۲	(۱) (۲) (۳) (۴)	۱۶	(۱) (۲) (۳) (۴)	۲۰	(۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ آزمون ۷۱ در صفحه ۲۲۴

۳۰ دقیقه

آزمون ۷۲ جامع ۲

۱. از ۵۱ دانش‌آموز یک دبیرستان ۳۵ نفر در کلاس ادبیات و ۳۱ نفر در کلاس عربی و ۲۳ نفر در هر دو کلاس شرکت کرده‌اند چند نفر در هیچ یک از دو کلاس شرکت ننموده‌اند؟

- (۱)  $5$  (۲)  $6$  (۳)  $7$  (۴)  $8$



۱. دنباله هندسی، مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آن‌ها ۲۱۶ است. تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد کدام است؟ (تبریزی - ۹۰)
- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷
۲. در یک دنباله هندسی جمله دوم، دو برابر جمله پنجم و جمله هشتم، می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند، بزرگ‌ترین این سه عدد، چند برابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟ (تبریزی قارچ - ۹۲)
- (۱)  $2 + \sqrt{3}$  (۲)  $5 + 2\sqrt{3}$  (۳)  $5 + 4\sqrt{3}$  (۴)  $7 + 4\sqrt{3}$
۳. اگر  $n \in \mathbb{N}$  و  $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid m > -n, 2^m \leq 2n\}$  باشد، مجموعه  $(A_8 - A_4) \cup A_1$  چند عضو دارد؟ (ریاضی - ۹۶)
- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸
۴. اگر  $n \in \mathbb{N}$  و  $A_n = (-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n})$  باشد، آنگاه  $\bigcap_{i=4}^n A_i$  کدام است؟ (ریاضی قارچ - ۹۶)
- (۱)  $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$  (۲)  $(-\frac{1}{4}, \frac{2}{3})$  (۳)  $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$  (۴)  $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$
۵. واسطه هندسی دو عدد مثبت، نصف واسطه عددی آن‌ها است. نسبت دو عدد کدام می‌تواند باشد؟
- (۱)  $(3 + \sqrt{3})^2$  (۲)  $(2 + \sqrt{2})^2$  (۳)  $(2 + \sqrt{3})^2$  (۴)  $(3 + \sqrt{2})^2$
۶. اگر  $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{5}$  حاصل  $\sin^6 x + \cos^6 x$  کدام است؟
- (۱)  $\frac{1}{5}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{2}{5}$  (۴)  $\frac{3}{7}$
۷. اگر  $\frac{\sin x}{1 - \cos x} = 2$  باشد، آنگاه  $\cot x$  کدام می‌تواند باشد؟
- (۱)  $\frac{5}{4}$  (۲)  $\frac{5}{2}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $\frac{3}{4}$
۸. اگر  $\cos x = \frac{1}{4}$  باشد، مقدار  $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{1}{\cot x}$  کدام است؟
- (۱)  $\frac{3}{4}$  (۲) ۴ (۳)  $\frac{5}{4}$  (۴)  $\frac{7}{4}$
۹. اندازه دو قطر از متوازی‌الاضلاع ۱۲ و  $8\sqrt{3}$  واحد است. این دو قطر با زاویه ۶۰ درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟ (تبریزی قارچ - ۹۶)
- (۱) ۴۸ (۲) ۵۴ (۳) ۶۴ (۴) ۷۲
۱۰. ریشه‌های معادله  $(2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x = 4$  کدام هستند؟
- (۱)  $\pm 2$  (۲) ۱ و ۲ (۳)  $\pm 1$  (۴) ۱ و ۲
۱۱. حاصل  $\frac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}{a^2 + 2ac - b^2 + c^2} \div \frac{a+b-c}{a-b+c}$  کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳)  $\frac{a+b+c}{a-b-c}$  (۴)  $\frac{a-b-c}{a+b+c}$
۱۲. اگر  $(x > 0)$   $\frac{x^2}{x^4 + 1} = \frac{1}{7}$ ، آنگاه  $x^3 + \frac{1}{x^3}$  برابر کدام است؟
- (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴) ۱۹
۱۳. مجموعه جواب نامعادله  $3 < \frac{3x+1}{x-3} < -1$ ، به کدام صورت است؟ (تبریزی - ۹۶)
- (۱)  $x < \frac{1}{3}$  (۲)  $x < 3$  (۳)  $-\frac{1}{3} < x < 3$  (۴)  $\frac{1}{3} < x < 3$

۱۴. به ازای کدام مقدار  $a$ ، نمودار تابع  $y = (1-a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ ، همواره بالای محور  $x$  ها است؟ (ریاضی فارج - ۹۶)

- (۱)  $a < 1$       (۲)  $a < -2$       (۳)  $a > 3$       (۴)  $-2 < a < 1$

۱۵. نمودارهای دو تابع  $f(x) = 4^x$  و  $g(x) = (\frac{1}{4})^{2x} + \frac{3}{4}$  در نقطه  $A$  متقاطع اند. فاصله نقطه  $A$  تا نقطه  $(1, -\frac{1}{4})$ ، کدام است؟ (ریاضی فارج - ۹۶)

- (۱) ۱      (۲)  $\sqrt{2}$       (۳) ۲      (۴)  $\sqrt{5}$

۱۶. ضابطه وارون تابع  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ ، کدام است؟ (تجربی - ۹۶)

- (۱)  $-x^2$       (۲)  $x^2$       (۳)  $x|x|$       (۴)  $-x|x|$

۱۷. تعداد جواب‌های معادله  $3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x = 0$  کدام است؟

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

۱۸. ارقام متمایز ۱, ۲, ۳, ۴, ..., ۹ به چند طریق می‌توان یک عدد چهار رقمی ساخت، به طوری که فقط یکی از ارقام زوج باشد؟ (ریاضی فارج - ۹۴)

- (۱) ۷۴۰      (۲) ۷۲۰      (۳) ۷۸۰      (۴) ۹۶۰

۱۹. در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال فقط دو مهره خارج شده، هم‌رنگ هستند؟ (تجربی فارج - ۹۶)

- (۱)  $\frac{41}{120}$       (۲)  $\frac{37}{60}$       (۳)  $\frac{79}{120}$       (۴)  $\frac{31}{60}$

۲۰. در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره‌های خارج شده، متفاوت است؟ (تجربی - ۹۶)

- (۱)  $\frac{5}{22}$       (۲)  $\frac{3}{11}$       (۳)  $\frac{7}{22}$       (۴)  $\frac{4}{11}$

۱	۱	۲	۳	۴	۵	۱	۲	۳	۴	۹	۱	۲	۳	۴	۱۳	۱	۲	۳	۴	۱۷	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴	۶	۱	۲	۳	۴	۱۰	۱	۲	۳	۴	۱۴	۱	۲	۳	۴	۱۸	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴	۷	۱	۲	۳	۴	۱۱	۱	۲	۳	۴	۱۵	۱	۲	۳	۴	۱۹	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴	۸	۱	۲	۳	۴	۱۲	۱	۲	۳	۴	۱۶	۱	۲	۳	۴	۲۰	۱	۲	۳	۴

پاسخ آزمون ۷۷ در صفحه ۲۴۱

## بخش دوم

# پاسخ نامه تشریحی

پاسخ نامه فصل اول ۹۲ • پاسخ نامه فصل دوم ۱۱۶

پاسخ نامه فصل سوم ۱۳۴ • پاسخ نامه فصل چهارم ۱۴۸

پاسخ نامه فصل پنجم ۱۷۰ • پاسخ نامه فصل ششم ۱۸۲

پاسخ نامه فصل هفتم ۲۰۰ • پاسخ نامه فصل هشتم ۲۲۴

## پاسخ نامه فصل اول

### مجموعه، الگو و دنباله



#### پاسخ نامه آزمون ۱ مجموعه ها (یادآوری نهم) ✓

۱. **پرسش ۱** **پشم انداز:** مجموعه  $\{\{\}, \{\{\}\}\}$  دارای دو عضو متفاوت  $\{\}$  و  $\{\{\}\}$  است. **گزینه ۱** «۱» برای این که  $\{\}\subseteq A$  باشد باید ۱ عضو  $A$  باشد. مجموعه  $A$  این عضو را ندارد. بنابراین  $\{\}$  زیرمجموعه  $A$  نبوده و این گزینه نادرست است. **گزینه ۲** «۲»  $\{\}$  عضو  $A$  بوده و عبارت  $\{\}\in A$  درست است. **گزینه ۳** «۳»  $\{\{\}\}$  عضو دیگر مجموعه  $A$  است. پس این گزینه هم درست است. **گزینه ۴** «۴» چون  $\{\}$  عضوی از  $A$  است،  $\{\{\}\}$  یک زیرمجموعه تک عضوی برای  $A$  محسوب می شود.

۲. **پرسش ۲** **پشم انداز:** برای تعیین اعضای مجموعه  $A-B$  باید از اعضای مجموعه  $A$ ، عضوهای مشترک بین دو مجموعه  $A$  و  $B$  را حذف کنیم. **پله یکم:** مجموعه  $A = \{\}, \{\}\}$  دارای دو عضو ۱ و  $\{\}$  است. اما مجموعه  $B = \{\}, \{\}, \{\}\}$  مجموعه ای تک عضوی بوده و تنها عضو آن  $\{\}, \{\}\}$  است. **پله دوم:**  $A$  و  $B$  هیچ عضو مشترکی ندارند. بنابراین می توان نوشت:  $A-B = A = \{\}, \{\}\}$

۳. **پرسش ۳** ناحیه هاشورزده متعلق به مجموعه ای است که از اشتراک دو مجموعه  $A$  و  $C$  اعضای متعلق به مجموعه  $B$  حذف شده است. به عبارت دیگر می توان گفت این قسمت، اشتراک مجموعه  $A$  با مجموعه ای است که اعضای مجموعه  $B$  را از مجموعه  $C$  حذف کرده اند. بنابراین ناحیه هاشورخورده  $A \cap (C-B)$  است.

۴. **پرسش ۴** **پشم انداز:** وقتی  $\emptyset$  در مجموعه ای قرار دارد به عنوان یک عضو در نظر گرفته می شود.  $\{a, \emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}, \{a, a\}\} = \{a, \emptyset, \{\emptyset\}, \{a, a\}\}$  مجموعه به دست آمده دارای ۳ عضو متمایز است.

۵. **پرسش ۵** برای به دست آوردن تفاضل دو مجموعه به صورت  $A-B$ ، کافی است از اعضای مجموعه  $A$  عضوهای مشترک بین دو مجموعه را حذف کنیم.

$A-B = \{\{1, 2, \{1, 2, 3\}\} - \{1, 2, 3, \{1, 2\}\} = \{\{1, 2, 3\}\} \neq C$  **گزینه ۱** «۱»  
 $B-C = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\} - \{1, 2, 3\} = \{\{1, 2\}\} \neq \emptyset$  **گزینه ۲** «۲»  
 $B-C = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\} - \{1, 2, 3\} = \{\{1, 2\}\} \neq \{1, 2\}$  **گزینه ۳** «۳»  
 $A-B = \{1, 2, \{1, 2, 3\}\} - \{1, 2, 3, \{1, 2\}\} = \{\{1, 2, 3\}\} = \{C\}$  **گزینه ۴** «۴»

۶. **پدیده ۲** **پله یکم:** ابتدا اعضای مجموعه  $A$ ، سپس  $A'$  را تعیین می‌کنیم.

$$A = \{n : n \geq 5\} \Rightarrow A = \{5, 6, 7, \dots\} \Rightarrow A' = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A' \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 7\}$$

پله دوم:

۷. **پدیده ۳** **پشم‌انداز:** برای به دست آوردن مجموعه  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$  باید اعضای را تعیین کنیم که در تمامی این ۸ مجموعه (یعنی  $A_1$  تا  $A_8$ ) وجود دارند.

$$A_2 = \{3, 4, \dots, 12\}, \dots, A_8 = \{8, 9, \dots, 17\}$$

پله یکم:

پله دوم:  $A_2 \cap \dots \cap A_8 = \{8, 9, 10, 11, 12\}$  می‌باشد که دارای ۵ عضو است.

۸. **پدیده ۱** **گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.**

گزینه «۱»: زیر مجموعه‌های  $C$ ،  $\emptyset$  و  $\{\{2\}\}$ ،  $\{\{2, \{2\}\}\}$  هستند که هیچ کدام  $B$  نیستند پس این گزینه نادرست و جواب تست است.

گزینه «۲»: چون  $2 \in B$  پس  $A = \{2\} \subset B$

گزینه «۳»: چون  $\{2\} \in B$  پس  $A \in B$

گزینه «۴»: چون  $\{2, \{2\}\} \in C$  پس  $B \in C$

۹. **پدیده ۲** **پشم‌انداز:** مجموعه  $A$  مضارب صحیح عدد ۶ و مجموعه  $B$  مضارب صحیح عدد ۳ است. هر عدد مضرب ۶

قطعاً مضرب ۳ هم هست اما عکس آن برقرار نیست.

می‌توان نتیجه گرفت  $A \subseteq B$  است. اگر  $A \subseteq B$  باشد،  $A \cap B = A$  خواهد بود.

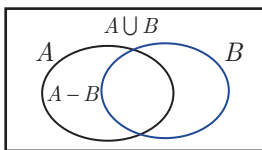
۱۰. **پدیده ۲** **روش اول) گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.**

$$A = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} A \cup B = B \\ A - B = \emptyset \end{cases} \Rightarrow B \neq \emptyset \quad \text{گزینه «۱»}$$

$$B = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} A \cup B = A \\ A - B = A \end{cases} \Rightarrow A \cup B = A - B \quad \text{گزینه «۲»}$$

گزینه «۳»: اگر  $A \cup B = \emptyset$  باشد،  $A$  و  $B$  هر دو تهی بوده‌اند.

$$A - B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A \cup B = B \\ A - B = \emptyset \end{cases} \Rightarrow B \neq \emptyset \quad \text{گزینه «۴»}$$



روش دوم) با استفاده از نمودار ون، بدیهی است وقتی  $A - B = A \cup B$  است که  $B = \emptyset$  باشد.

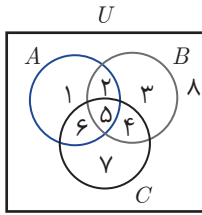
پاسخنامه آزمون ۲ **مجموعه‌ها**

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} - W = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} - \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \{\dots, -3, -2, -1\}$$

بنابراین بزرگ‌ترین عضو مجموعه  $\mathbb{Z} - W$ ، عدد  $-1$  است.



$$C - (A \cap B) = \{4, 5, 6, 7\} - \{2, 5\} = \{4, 6, 7\}$$

$$(C - A) \cup (C - B) = \{4, 7\} \cup \{6, 7\} = \{4, 6, 7\}$$

پشم‌انداز: از روش شماره‌گذاری استفاده می‌کنیم. **دلیل ۳** \*\*\* ۸.

پله یکم:

تساوی اول برقرار است.

پله دوم:

تساوی دوم برقرار است.

رابطه‌ها را بررسی می‌کنیم. **دلیل ۱** \*\*\* ۹.

رابطه «۱»: اگر  $A = \{1, 2\}$ ،  $B = \{2, 4\}$  و  $C = \{1, 2, 3\}$  باشد،  $A \not\subseteq B$ ،  $A \not\subseteq C$  ولی  $B \subseteq C$  است، پس این رابطه نادرست است.  
 رابطه «۲»: اگر  $A = \{1\}$ ،  $B = \{1, 2\}$  و  $C = \{1, 3\}$  باشد،  $A \cap B = A \cap C$  ولی  $B \neq C$  است، پس این رابطه نادرست است.  
 رابطه «۳»: اگر  $A = \{1, 2, 3\}$ ،  $B = \{1, 2\}$  و  $C = \{3\}$  باشد،  $A \cup B = A \cup C$  ولی  $B \neq C$  است، پس این رابطه نادرست است.

$$\left. \begin{array}{l} A \cap B = A \cap C \\ \text{و} \\ A \cup B = A \cup C \end{array} \right\} \Rightarrow B = C$$

نکته:

پشم‌انداز: اگر  $A \cup B' = U$ ، آن‌گاه  $B \subseteq A$  است. **دلیل ۳** \*\*\* ۱۰.

بقیه گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

$$B \subseteq A \Rightarrow A' \subseteq B'$$

گزینه «۱»:

$$B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B \neq \emptyset$$

گزینه «۳»:

$$B \subseteq A \Rightarrow B - A = \emptyset \Rightarrow B \cap A' = A' \cap B = \emptyset$$

گزینه «۴»:

پاسخ‌نامه آزمون ۵ مجموعه‌ها

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. **دلیل ۴** \*\*\* ۱.

گزینه «۱»: اگر  $A$  یک زیرمجموعه متناهی داشته باشد الزاماً مجموعه  $A$  متناهی نیست. مثلاً مجموعه اعداد طبیعی دارای بی‌شمار زیرمجموعه متناهی است اما خود مجموعه اعداد طبیعی نامتناهی است.  
 گزینه «۲»: اگر مجموعه  $A$  یک زیرمجموعه متناهی داشته باشد، مجموعه  $A$  می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.  
 گزینه «۳ و ۴»: اگر  $A$  زیرمجموعه نامتناهی داشته باشد،  $A$  هم نامتناهی است.

$$B' = \{d, e\}, A' = \{c, d, e\}$$

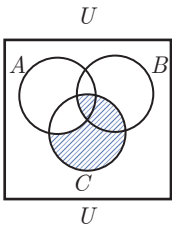
روش اول) پله یکم: **دلیل ۱** \*\*\* ۲.

$$B' - A' = \{d, e\} - \{c, d, e\} = \emptyset \Rightarrow n(B' - A') = 0$$

پله دوم:

$$A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A' \Rightarrow B' - A' = \emptyset \Rightarrow n(B' - A') = 0$$

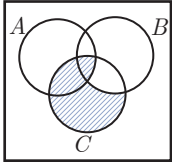
روش دوم)



\*\*\*  
۳. گزینه ۱ روش اول) نمودار ون هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم.

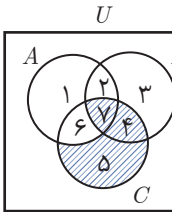
گزینه «۱»:  $(C - A) \cup (A \cap B \cap C)$

گزینه «۲»:  $(A - C), (A \cap B \cap C)$  دو مجموعه جدا از هم هستند. بنابراین اشتراک این دو مجموعه برابر مجموعه تهی است.



گزینه «۳»:  $(C - B) \cup (A \cap B \cap C)$

گزینه «۴»:  $A \cap B \cap C$  و  $B - C$  دو مجموعه جدا از هم هستند. بنابراین اشتراک این دو مجموعه برابر مجموعه تهی است.



روش دوم) از روش شماره‌گذاری استفاده می‌کنیم. مجموعه‌ای را می‌خواهیم که اعضای آن  $\{4, 5, 7\}$  باشند.

$(C - A) \cup (A \cap B \cap C) = \{4, 5\} \cup \{7\} = \{4, 5, 7\}$

\*\*\*  
۴.  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} A - B = A \\ B - A = B \end{cases} \Rightarrow (A - B) \cup (B - A) = A \cup B$

\*\*\*  
۵. چشم‌انداز: بیش‌ترین مقدار  $n(A \cup B)$  زمانی رخ می‌دهد که  $A$  و  $B$  دو مجموعه جدا از هم بوده و  $A \cap B = \emptyset$  باشد. کم‌ترین مقدار  $n(A \cup B)$  زمانی رخ می‌دهد که  $A \subseteq B$  باشد.

بیش‌ترین مقدار:  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cap B) = 0 \Rightarrow n(A \cup B) = 8 + 9 = 17$

کم‌ترین مقدار:  $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow n(A \cup B) = n(B) = 9$

بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار  $n(A \cup B)$  برابر  $17 - 9 = 8$  اختلاف بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار است.

\*\*\*  
۶. 
$$\left. \begin{aligned} A_\gamma &= \{x \in \mathbb{Z} \mid 4 < x \leq 7\} = \{5, 6, 7\} \\ A_\pi &= \{x \in \mathbb{Z} \mid 5 < x \leq 8\} = \{6, 7, 8\} \\ A_\phi &= \{x \in \mathbb{Z} \mid 6 < x \leq 9\} = \{7, 8, 9\} \\ A_\delta &= \{x \in \mathbb{Z} \mid 7 < x \leq 10\} = \{8, 9, 10\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (A_\gamma \cup A_\pi) - (A_\gamma \cap A_\pi) = \{5, 6, 7, 8, 9\} - \{8\} = \{5, 6, 7, 9\}$$

بنابراین مجموعه حاصل دارای ۴ عضو و  $2^4 - 1 = 15$  زیرمجموعه ناتهی دارد.

\*\*\*  
۷. 
$$\frac{2n^2 + 6n + 12}{n + 3} = \frac{2n(n + 3) + 12}{n + 3} = \frac{2n(n + 3)}{n + 3} + \frac{12}{n + 3} = 2n + \frac{12}{n + 3}$$

بیش‌ترین مقدار: باید اعداد طبیعی را پیدا کنیم که حاصل  $\frac{12}{n + 3}$  برابر یک عدد طبیعی باشد.

$n + 3 = 12 \Rightarrow n = 9$       $n + 3 = 4 \Rightarrow n = 1$       $n + 3 = 2 \Rightarrow n = -1$

$n + 3 = 6 \Rightarrow n = 3$       $n + 3 = 3 \Rightarrow n = 0$       $n + 3 = 1 \Rightarrow n = -2$

بنابراین مجموعه  $A$  به صورت  $A = \{1, 3, 9\}$  در می‌آید که دارای  $2^3 = 8$  زیرمجموعه است.

\*\*\*  
۸. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} A \subset B &\Rightarrow A \cap B = A \\ B \subset C &\Rightarrow B \cap C = B \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \cap B \neq B \cap C$$

گزینه «۱»

\*\*\*  
۲. ۸

$$a_{\gamma} + a_{\epsilon} = a_{\delta} + a_{\nu} \Rightarrow a_1 q^2 + a_1 q^5 = 2(a_1 q^3 + a_1 q^6) \Rightarrow a_1 q^2 (1 + q^3) = 2a_1 q^3 (1 + q^3) \Rightarrow q^2 = 2q^3 \Rightarrow 2q = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

\*\*\*  
۳. ۹ جملات دنباله عبارتند از: ۱, ۲, ۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ...

مشخص است که از جمله سوم به بعد یک دنباله هندسی با جمله اول ۳ و قدرنسبت ۲ داریم که جمله عمومی آن  $3 \times 2^{n-1}$  است (دو جمله اول با این رابطه بیان نمی‌شوند). پس به ازای  $n \geq 3$ ، جملات دنباله از رابطه  $3 \times 2^{n-3}$  به دست می‌آیند.

\*\*\*  
۴. ۱۰  $a_{\delta} a_{\epsilon} = a_{\nu} \Rightarrow (a_1 q^3)(a_1 q^5) = a_1 q^9 \Rightarrow a_1^2 q^8 = a_1 q^9 \Rightarrow a_1 = q \Rightarrow a_1 - q = 0$

پاسخنامه آزمون ۱۰ دنباله هندسی

\*\*\*  
۱. پشم‌انداز: اگر بین دو عدد ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج کنیم، این ۵ عدد تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند

که در آن جمله اول ۳ و جمله پنجم ۴۸ و  $q^4 = \frac{a_5}{a_1}$  است.

پله یکم:  $q^4 = \frac{48}{3} = 16 \Rightarrow q = \pm 2$

پله دوم: در هر دو حالت اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین واسطه‌ها را حساب می‌کنیم.

$$q = 2 \Rightarrow \begin{cases} \max = a_{\delta} = a_1 q^3 = 3 \times 2^3 = 3 \times 8 = 24 \\ \min = a_{\nu} = a_1 q^1 = 3 \times 2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \max - \min = 24 - 6 = 18$$

$$q = -2 \Rightarrow \begin{cases} \max = a_{\nu} = a_1 q = 3(-2) = -6 \\ \min = a_{\delta} = a_1 q^3 = 3(-2)^3 = -24 \end{cases} \Rightarrow \max - \min = -6 - (-24) = 18$$

\*\*\*  
۲. روش اول) پشم‌انداز: دنباله هندسی مورد نظر با جمله اول  $(a_1 = 2)2$  و قدرنسبت ۲ ( $q = 2$ ) است.

$$a_1 \times a_{\nu} \times a_{\gamma} \times \dots \times a_{\delta} = a_1 (a_1 q) (a_1 q^2) \dots (a_1 q^{19}) = a_1^{20} q^{(1+2+\dots+19)} = a_1^{20} q^{\frac{19 \times 20}{2}} = a_1^{20} \times q^{190}$$

$$\xrightarrow{a_1=q=2} 2^{20} \times 2^{190} = 2^{210}$$

روش دوم) پشم‌انداز:  $a_1 \dots a_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n}$  است.

$$a_1 \dots a_{\nu} = \sqrt{(a_1 a_{\nu})^{20}} = (a_1 \times a_1 q^{19})^{10} = (2 \times 2^{19})^{10} = 2^{210}$$

\*\*\*  
۳. پشم‌انداز: اگر  $q > 1$  باشد، دنباله هندسی صعودی است.

پله یکم:  $a_{\gamma} = 10 \Rightarrow a_1 q^2 = 10$   
 $a_{\nu} = 40 \Rightarrow a_1 q^6 = 40$   
 $\Rightarrow \frac{a_{\nu}}{a_{\gamma}} = \frac{a_1 q^6}{a_1 q^2} = q^4 = \frac{40}{10} = 4 \Rightarrow q = \pm \sqrt[4]{4} \xrightarrow{q>1} q = \sqrt{2}$

پله دوم:  $a_{\gamma} = 10 \Rightarrow a_1 q^2 = 10 \Rightarrow a_1 (\sqrt{2})^2 = 10 \Rightarrow 2a_1 = 10 \Rightarrow a_1 = 5$

\*\*\*  
۴. پشم‌انداز: اگر  $b$  واسطه هندسی بین  $a$  و  $c$  باشد،  $b^2 = ac$  است.

$$b^2 = (2 \times 5^3 \times 11^2) \times (2^3 \times 5 \times 7^2) = 2^6 \times 5^4 \times 7^2 \times 11^2 \Rightarrow b = 2^3 \times 5^2 \times 7 \times 11 = 4 \times 25 \times 77 = 7700$$

\*\*\*  
۵. پله یکم:  $a_{\delta} = 4a_{\gamma} \Rightarrow a_1 q^4 = 4a_1 q^2 \Rightarrow q^2 = 4 \Rightarrow q = \pm 2$

پله دوم:  $a_{\nu} = 6 \Rightarrow a_1 q = 6 \Rightarrow a_1 (\pm 2) = 6 \Rightarrow a_1 = \pm 3$



۱۰. **پنجاه و یکم** **پنجاه و یکم** پله یکم: ابتدا باید  $n$  ای را پیدا کنیم که به ازای آن  $2n + 3 = 7$  برابر می‌شود. معادله  $2n + 3 = 7$  را حل می‌کنیم:

$$2n + 3 = 7 \Rightarrow 2n = 4 \Rightarrow n = 2$$

پله دوم: برای محاسبه  $a_p$ ، در جمله داده شده  $n$  را برابر ۲ قرار می‌دهیم:

$$a_p = \frac{2(2)^2 + 6(2) + 5}{2+2} = \frac{25}{4}$$

**پاسخنامه آزمون ۱۲ الگوها، دنباله‌های حسابی و هندسی**

۱. **پنجاه و یکم** **پنجاه و یکم** چشم‌انداز: با توجه به تعداد چوب کبریت‌ها، الگویی برای تعداد آن‌ها در هر شکل به دست می‌آوریم.

پله یکم: دنباله  $a_1 = 5, a_2 = 8, a_3 = 11, \dots$  یک دنباله حسابی با جمله اول  $a_1 = 5$  و قدرنسبت  $d = 3$  است.

پله دوم:  $a_{10} = a_1 + 9d = 5 + (9 \times 3) = 5 + 27 = 32$

۲. **پنجاه و یکم** **پنجاه و یکم** چشم‌انداز:  $d = \frac{t_m - t_n}{m - n}$  است.

پله یکم:  $d = \frac{t_m - t_n}{m - n} = \frac{n - m}{m - n} = -1$

پله دوم:  $t_n = t_1 + (n - 1)d = m \Rightarrow t_1 + (n - 1)(-1) = m \Rightarrow t_1 - n + 1 = m \Rightarrow t_1 = m + n - 1$

پله سوم:  $t_{m+n} = t_1 + (m + n - 1)(-1) = (m + n) - 1 - (m + n) + 1 = 0$

۳. **پنجاه و یکم** **پنجاه و یکم** روش اول: با نوشتن تعدادی از جملات دنباله ... و  $a_p = a_p + 3 = 1 + 2 + 3$  و  $a_p = a_p + 4 = 1 + 2 + 3 + 4$

حس می‌زنیم که جمله  $n$  ام آن برابر  $a_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  در نتیجه

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = a_1 + 2 \\ a_3 = a_2 + 3 \\ \vdots \\ a_{n-1} = a_{n-2} + (n-1) \\ a_n = a_{n-1} + n \end{array} \right\} \begin{array}{l} + \\ \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = a_1 + \dots + a_{n-1} + 1 + 2 + \dots + n \end{array}$$

روش دوم)  $a_{100} = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$  است.

$\Rightarrow a_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow a_{100} = 50 \times 101 = 5050$

۴. **پنجاه و یکم** **پنجاه و یکم** پله یکم: اگر  $A$  جمله وسط در بین ۵ واسطه حسابی باشد،  $A$  واسطه حسابی بین ۱ و ۶۴ نیز هست، پس

$$A = \frac{64 + 1}{2} = \frac{65}{2} = 32.5$$

پله دوم: اگر  $B$  جمله وسط در بین ۵ واسطه هندسی باشد،  $B$  واسطه هندسی بین دو عدد ۱ و ۶۴ نیز محسوب می‌شود.

$$B^2 = 1 \times 64 \Rightarrow B^2 = 64 \Rightarrow B = 8$$

پله سوم: با توجه به گزینه‌ها، رابطه  $A + B = 32.5 + 8 = 40.5$  برقرار است.

۵. **پنجاه و یکم** **پنجاه و یکم** پله یکم: دنباله جدید را تشکیل می‌دهیم:

$$(1 + \frac{3}{5}), (\frac{7}{5} + \frac{2}{5}), (\frac{9}{5} + \frac{1}{5}), \dots \Rightarrow \frac{1}{5}, \frac{9}{5}, \frac{1}{5}, \dots$$

پله دوم: قدرنسبت دنباله حسابی جدید برابر است با:

پله سوم:  $a_{93} = a_1 + 92d = \frac{1}{5} + \frac{92}{5} = \frac{100}{5} = 20$

۶. **دنباله** \*\*\*  
 پله یکم:  $a, b, c$  و  $a$  تشکیل دنباله حسابی می‌دهند پس:  
 $2b = a + c$  (۱)

پله دوم:  $a+1$  و  $b+x$  و  $c+5$  نیز تشکیل دنباله حسابی می‌دهند. پس:

$$2(b+x) = a+1+c+5 \Rightarrow 2b+2x = a+c+6 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 2b+2x = 2b+6 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

۷. **دنباله** \*\*\*  
 پشم‌انداز: چون جملات دنباله، اعداد طبیعی هستند  $a_1$  و  $r$  نیز اعداد طبیعی خواهند بود.

پله یکم: 
$$a_5 - a_3 = 24 \Rightarrow a_1 r^4 - a_1 r^2 = 24 \Rightarrow a_1 r^2 (r^2 - 1) = 2 \times 4 \times 3 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ r^2 = 4 \Rightarrow r = 2 \end{cases}$$

پله دوم: 
$$a_5 + a_3 = a_1 r^4 + a_1 r^2 = a_1 r^2 (r^2 + 1) = 2 \times 4 \times 5 = 40$$

۸. **دنباله** \*\*\*  
 روش اول) پشم‌انداز: جمله هفتم دنباله حسابی واسطه هندسی دو جمله سوم و نهم از دنباله حسابی است.

$$a_7^2 = a_3 \times a_9 \Rightarrow (a_1 + 6d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 8d) \Rightarrow a_1^2 + 12a_1 d + 36d^2 = a_1^2 + 10a_1 d + 16d^2 \Rightarrow 20d^2 = -2a_1 d$$

$$-a_1 = 10d \Rightarrow a_1 = -10d \Rightarrow a_1 + 10d = 0 \Rightarrow a_{11} = 0$$

روش دوم) پله یکم: چون جملات سوم و هفتم و نهم دنباله عددی، جملات متوالی دنباله هندسی اند پس  $\frac{1}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

پله دوم: 
$$q = \frac{a_1 + 6d}{a_1 + 2d} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a_1 + 6d}{a_1 + 2d} \Rightarrow 2a_1 + 12d = a_1 + 2d \Rightarrow a_1 + 10d = 0 \Rightarrow a_{11} = 0$$

۹. **دنباله** \*\*\*  
 پشم‌انداز: از رابطه  $t_m - t_n = (m-n)d$  استفاده می‌کنیم.

پله یکم: 
$$d = (5 + 2\sqrt{2}) - (3 + \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2}$$

پله دوم: 
$$(a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16}) - (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) = (a_{13} - a_5) + (a_{14} - a_6) + (a_{15} - a_7) + (a_{16} - a_8)$$

$$= 8d + 8d + 8d + 8d = 32d = 32(2 + \sqrt{2}) = 64 + 32\sqrt{2}$$

۱۰. **دنباله** \*\*\*  
 پشم‌انداز: قدرنسبت دنباله حاصل از جملات مشترک دو دنباله برابر، کوچک‌ترین مضرب مشترک قدرنسبت‌های

دو دنباله است.

پله یکم:  $12, 17, 22, 27, 32, 37$

$2, 9, 16, 23, 30, 37$

اولین جمله دنباله مورد نظر ۳۷ و قدرنسبت آن کوچک‌ترین مضرب مشترک ۵ و ۷ یعنی ۳۵ است.

پله دوم: 
$$a_n = 37 + 35(n-1) = 37 + 35n - 35 = 35n + 2$$

پله سوم: 
$$100 \leq 35n + 2 < 300 \Rightarrow 98 \leq 35n < 298 \Rightarrow 3 \leq n \leq 8 \Rightarrow n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

بنابراین تعداد جملات مورد نظر برابر ۶ است.

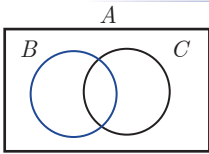
پاسخنامه آزمون ۱۳ جامع ۱

۱. **دنباله** \*\*\*  
 پشم‌انداز:  $\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$  و  $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  است.

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= [1-1, 1+1] = [0, 2] \\ A_2 &= [2-1, 2+1] = [1, 3] \\ A_3 &= [3-1, 3+1] = [2, 4] \\ A_4 &= [4-1, 4+1] = [3, 5] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^4 A_n - \bigcap_{n=1}^4 A_n = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$= [0, 5] - \{2\} = \{x : 0 \leq x \leq 5, x \neq 2\}$$

\*\*\*  
 ۲. **پشم‌انداز:** اگر  $A \cap B = B$  می‌توان نتیجه گرفت  $B \subseteq A$  است.  $\left. \begin{matrix} B \cap C = C \Rightarrow C \subseteq B \\ A \cap B = B \Rightarrow B \subseteq A \end{matrix} \right\} \Rightarrow C \subseteq B \subseteq A$  **پله یکم:** ۲



\*\*\*  
 ۳. **پشم‌انداز:** باید از مضارب ۳ که بزرگ‌تر یا مساوی ۴۰۰ و کوچک‌تر یا مساوی ۶۰۰ هستند، اعدادی که بر ۲ و ۵ بخش‌پذیر هستند را حذف کنیم. به عبارت دیگر مضارب ۳ نباید مضرب ۶ یا ۱۵ باشند.

**پله یکم:**  $n(A) = 67 \Rightarrow k \in \{134, \dots, 200\} \Rightarrow 133/3 \leq k \leq 200 \Rightarrow 400 \leq 3k \leq 600 \Rightarrow 133 \leq k \leq 200$

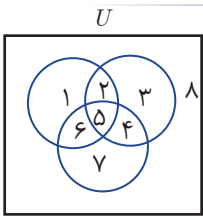
$n(B) = 34 \Rightarrow 67 \leq k \leq 100 \Rightarrow 400 \leq 6k \leq 600$

$n(C) = 14 \Rightarrow 27 \leq k \leq 40 \Rightarrow 400 \leq 15k \leq 600$

$n(B \cap C) = 7 \Rightarrow 14 \leq k \leq 20 \Rightarrow 400 \leq 30k \leq 600$

$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C) = 34 + 14 - 7 = 41$

$n(A) - n(B \cup C) = 67 - 41 = 26$  **پله دوم:**



\*\*\*  
 ۴. **پشم‌انداز:** از روش عددگذاری استفاده می‌کنیم.

قسمت هاشورخورده  $\{1, 2, 3, 5\}$  است که با گزینه «۱» برابر نیست زیرا

$C' \cup (A \cap B) = \{1, 2, 3, 8\} \cup \{2, 5\} = \{1, 2, 3, 5, 8\}$

بقیه گزینه‌ها را خودتان بررسی کنید!

\*\*\*  
 ۵. **پشم‌انداز:** فرض می‌کنیم تعداد واسطه‌ها  $n$  باشد. پس  $a_1 = 11$  و  $a_{n+2} = 111$  و  $a_{n+1} - a_n = 92$  است.

$\left. \begin{matrix} a_{n+2} - a_n = (n+1)d \Rightarrow 111 - 11 = (n+1)d \Rightarrow (n+1)d = 100 \\ a_{n+1} - a_n = (n-1)d \Rightarrow 92 = (n-1)d \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{n+1}{n-1} = \frac{25}{23} \Rightarrow n = 24$

\*\*\*  
 ۶. **روش اول (پشم‌انداز):** جمله پنجم از دنباله حسابی، واسطه هندسی بین جملات دوم و دوازدهم از این دنباله است.

**پله یکم:**  $a_5^2 = a_2 \times a_{12} \Rightarrow (a_1 + 4d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 11d) \Rightarrow a_1^2 + 8a_1d + 16d^2 = a_1^2 + 12a_1d + 11d^2$

$4a_1d = 5d^2 \xrightarrow{d \neq 0} 4a_1 = 5d$

**پله دوم:**  $q = \frac{a_1 + 4d}{a_1 + d} = \frac{4a_1 + 16d}{4a_1 + 4d} = \frac{5d + 16d}{5d + 4d} = \frac{21d}{9d} = \frac{7}{3}$

**روش دوم (پشم‌انداز):** اگر جملات  $m$  و  $n$  و  $p$  یک دنباله حسابی، جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، است  $q = \frac{p-n}{n-m}$ .

$q = \frac{12-5}{5-2} = \frac{7}{3}$

\*\*\*  
 ۷. **پله یکم:**  $t_m + t_n = t_{m+n} \Rightarrow t_1 + (m-1)d + t_1 + (n-1)d = t_1 + (m+n-1)d$

$\Rightarrow md - d + nd - d + t_1 = md + nd - d \Rightarrow t_1 - d = 0 \Rightarrow t_1 = d$

بنابراین با توجه به فرض داده شده نتیجه می‌گیریم جمله اول دنباله با قدرنسبت برابر است.

**پله دوم:**  $t_k = 6d \Rightarrow t_1 + (k-1)d = 6d \xrightarrow{t_1=d} d + (k-1)d = 6d \Rightarrow kd = 6d \Rightarrow k = 6$

\*\*\*  
 ۸. **پله یکم:**  $a_{13} = 9 \Rightarrow a_1 r^{12} = 9$

**پله دوم:**  $a_8 a_{20} = 108 \Rightarrow a_1 r^7 \times a_1 r^{19} = 108 \Rightarrow a_1^2 \times r^{26} = 108 \xrightarrow{a_1 r^{12}=9} (a_1 r^{12})^2 \times r^2 = 108 \Rightarrow$

## پاسخنامه فصل دوم

### مثلثات



#### پاسخنامه آزمون ۱۵ مثلثات

۱. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. **گزینه ۳** \*\*\*

$$\left. \begin{aligned} \sin(60^\circ + 30^\circ) &= \sin 90^\circ = 1 \\ \sin 60^\circ + \sin 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin(60^\circ + 30^\circ) \neq \sin 60^\circ + \sin 30^\circ$$

گزینه «۱»:

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, 2 \sin 30^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \sin 60^\circ \neq 2 \sin 30^\circ$$

گزینه «۲»:

$$\left. \begin{aligned} \cos(90^\circ - 30^\circ) &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\ \cos 90^\circ + \sin 30^\circ &= 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos(90^\circ - 30^\circ) = \cos 90^\circ + \sin 30^\circ$$

گزینه «۳»:

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}, 2 \cos 30^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \cos 60^\circ \neq 2 \cos 30^\circ$$

گزینه «۴»:

۲. **گزینه ۲** \*\*\* برای به دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی از مثلث قائم‌الزاویه استفاده می‌کنیم. با توجه به این که  $18^\circ < \alpha < 27^\circ$ ، پس سینوس و کسینوس آن منفی و تانژانت و کتانژانت آن مثبت است.

پله یکم: با توجه به شکل و علامت نسبت‌های مثلثاتی  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$  و  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$  و  $\cot \alpha = \frac{3}{4}$  است.

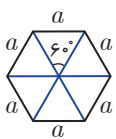
$$\cos \alpha + \tan \alpha + \cot \alpha = -\frac{3}{5} + \frac{4}{3} + \frac{3}{4} = \frac{-36 + 80 + 45}{60} = \frac{89}{60}$$

پله دوم:

۳. **گزینه ۱** \*\*\*  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  را می‌نویسیم و با مخرج مشترک گیری، حاصل عبارت را تعیین می‌کنیم.

$$\left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta\right)(1 - \sin \theta) = \left(\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)(1 - \sin \theta) = \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}\right)(1 - \sin \theta) = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta} = \cos \theta$$

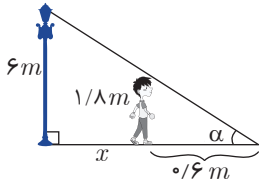
۴. **گزینه ۴** \*\*\* **پشم‌انداز:** یک ۶ ضلعی منتظم، از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $a$  تشکیل شده است



(مطابق شکل) که مساحت هر یک از آن‌ها  $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$  است، پس مساحت آن  $\frac{6a^2 \sqrt{3}}{4}$  خواهد بود.

$$S = \frac{6 \times 3^2 \times \sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$

۱. \*\*\*  
پرتله ۲



$$\left. \begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{6}{x+0.6} \\ \tan \alpha &= \frac{1/8}{0.6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{6}{x+0.6} = 3 \Rightarrow x+0.6 = 2 \Rightarrow x = 1/4 m = 14 \text{ cm}$$

از تشابه هم می‌توانید این سؤال را حل کنید.

\*\*\*

۲. پرتله ۳ پله یکم:

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

پله دوم:

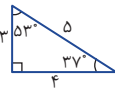
$$\sin x + \cos x = \frac{5}{4} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (\sin x + \cos x)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{25}{16} \Rightarrow 1 + 2 \sin x \cos x = \frac{25}{16} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{9}{32} \Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{32}{9}$$

\*\*\*

۳. پرتله ۳ چشم‌انداز: با استفاده از مثلث عبارت داده شده را محاسبه می‌کنیم.



$$\left. \begin{aligned} \sin 37^\circ &= \frac{3}{5} \\ \sin 53^\circ &= \frac{4}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin 37^\circ + \sin 53^\circ = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5} = 1/4$$

\*\*\*

۴. پرتله ۱ چشم‌انداز:

پله یکم:

$$m^2 - n^2 = (m-n)(m+n) = (2 \sin \alpha)(2 \tan \alpha) = 4 \sin \alpha \times \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 4 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

پله دوم:

$$mn = (\tan \alpha + \sin \alpha)(\tan \alpha - \sin \alpha) = \tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

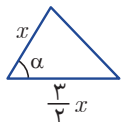
$$= \frac{\sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha \times \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \sqrt{mn} = \frac{\sin^2 \alpha}{|\cos \alpha|}$$

پله سوم:

$$\cos \alpha > 0: m^2 - n^2 = 4 \sqrt{mn}$$

\*\*\*

۵. پرتله ۳ چشم‌انداز: زاویه بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین ضلع را  $\alpha$  و طول کوچک‌ترین ضلع را  $x$  در



نظر می‌گیریم.

پله یکم:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{8}{9} + \sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{9} \xrightarrow{\sin \alpha > 0} \sin \alpha = \frac{1}{3}$$

پله دوم:

$$\frac{1}{4}(x)\left(\frac{3}{4}x\right)(\sin \alpha) = 9 \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 \left(\frac{1}{3}\right) = 9 \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 9 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

پله سوم:

$$\text{بزرگ‌ترین ضلع} = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4} \times 6 = 3 \times 3 = 9$$

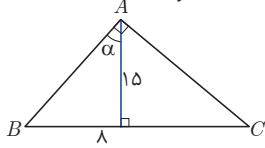
\*\*\*

۶. پرتله ۲ چشم‌انداز:  $-1 \leq \cos x \leq 1$  و  $-1 \leq \cos y \leq 1$  است. در صورتی رابطه  $\cos x \cos y = -1$  برقرار است که داشته

باشیم  $\cos x = 1$  و  $\cos y = -1$  یا برعکس که در هر دو حالت  $\sin x = \sin y = 0$  می‌شود.

$$\sin x \cos x + \sin y \cos y = 0 + 0 = 0$$

۱. **پشم‌انداز:** چون  $0 < x < 90^\circ$  است پس  $0 < \cos x < 1$  و  $\sin x > 0$  است. اگر  $a < b$  آن‌گاه



$$0 < \cos x < 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} > 1 \xrightarrow{\times \sin x > 0} \frac{\sin x}{\cos x} > \sin x \Rightarrow \tan x > \sin x$$

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

۲. **پشم‌انداز** (روش اول)

$$(1 + \tan x)(1 + \cot x) - \frac{1}{\sin x \cos x} = (1 + \tan x + \cot x + 1) - \frac{1}{\sin x \cos x} = (2 + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}) - \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$= \frac{2 \sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x - 1}{\sin x \cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 2$$

(روش دوم)  $x = 45^\circ$  را در عبارت قرار می‌دهیم تا ببینیم برابر کدام می‌شود.

$$\text{عبارت} = (1+1)(1+1) - \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = 4 - 2 = 2$$

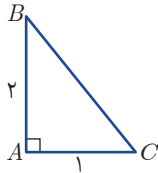
۳. **پشم‌انداز:**

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x} \text{ و } \sin^4 x + \cos^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$\frac{1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} - \left(\frac{1}{\sin x \cos x}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - 2 - \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = -2$$

با قرار دادن  $x = 45^\circ$  یک‌بار دیگر این تست را حل کنید.

۴. **پشم‌انداز:** در مسائلی که نسبت اضلاع داده شده می‌توانید آن‌ها را عدد اختیار کنید.



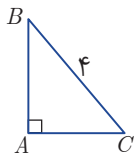
$$BC = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

پله یکم:

پله دوم:

۵. **پشم‌انداز:** در مثلث قائم‌الزاویه ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) و  $S = \frac{1}{2} AB \times AC$  و  $\sin C = \frac{AB}{BC}$  و  $\sin B = \frac{AC}{BC}$  است.



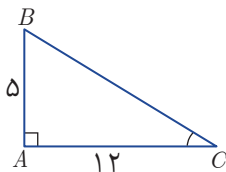
$$\sin B \times \sin C = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AC}{BC} \times \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} \Rightarrow AB \times AC = 6$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{6}{2} = 3$$

پله یکم:

پله دوم:

۶. **پشم‌انداز:** فرض می‌کنیم مثلث ABC در رأس A قائمه باشد.



بنابراین  $\cos A = 0$  است.

پله یکم: ۵، ۱۲ و ۱۳ اعداد فیثاغورسی هستند. پس  $BC = 13$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 0 + \frac{AB}{BC} + \frac{AC}{BC} = \frac{5}{13} + \frac{12}{13} = \frac{17}{13}$$

پله دوم:

۷. **پشم‌انداز:** پله یکم: اگر رابطه  $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$  را طرفین وسطین کنیم به یک تساوی همیشه درست می‌رسیم.

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

پله دوم:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$$

پله سوم:

بنابراین از بین روابط داده شده، فقط ۲ مورد همواره برقرار است.

\*\*\*  
۸. گزینه ۳

پشم‌انداز: اگر  $\alpha + \beta = 90^\circ$  باشد، در این صورت  $\cos \alpha = \sin \beta$  و  $\tan \alpha = \cot \beta$  است.

$$\frac{\sin 40^\circ \cos 50^\circ + \cos 40^\circ \sin 50^\circ}{\tan 40^\circ \tan 50^\circ} = \frac{\sin 40^\circ \sin 40^\circ + \cos 40^\circ \cos 40^\circ}{\tan 40^\circ \cot 40^\circ} = \frac{\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ}{1} = 1$$

\*\*\*  
۹. گزینه ۲

روش اول (پشم‌انداز):  $\cot^2 \theta = \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$  است.

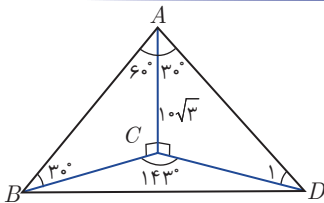
پله یکم:  $k \cos^2 \theta + (\underbrace{2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}_{2 - \cos^2 \theta})(2 + \cos^2 \theta) = 4 \Rightarrow k \cos^2 \theta + 4 - 2 \cos^2 \theta + 2 \cos^2 \theta - \cos^2 \theta = 4$

$\Rightarrow (k-1) \cos^2 \theta = 0 \Rightarrow k-1=0 \Rightarrow k=1$

روش دوم (پشم‌انداز): با انتخاب  $\theta = 45^\circ$  و قرار دادن آن در طرفین تساوی، مقدار  $k$  را به دست می‌آوریم.

$k \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (2 + 1) = 4 \Rightarrow \frac{k}{2} + \frac{1}{2}(3) = 4 \xrightarrow{\times 2} k + 3 = 8 \Rightarrow k = 5$

\*\*\*  
۱۰. گزینه ۱

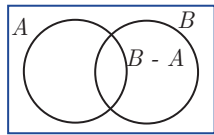


پله یکم:  $\tan \widehat{B}_1 = \tan 30^\circ \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BC = 3$

$\tan \widehat{D}_1 = \tan 60^\circ = \frac{AC}{CD} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{CD} = \sqrt{3} \Rightarrow CD = 1$

پله دوم:  $S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \times BC \times CD \times \sin 143^\circ = \frac{1}{2} \times BC \times CD \times \sin 37^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 1 \times \frac{3}{5} = \frac{9}{10}$

پاسخنامه آزمون ۲۴ جامع فصل ۱ و ۲



پشم‌انداز: با توجه به نمودار ون،  $A \cup (B - A) = A \cup B$  است.

$A \cup (B - A) = B \Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$

\*\*\*  
۱. گزینه ۱

۲. گزینه ۱ پشم‌انداز: اگر  $A \subseteq B$  آن‌گاه  $A \cup B = B$  است.

پله یکم:  $B' \cap A' \subseteq B' \Rightarrow (B' \cap A') \cup B' = B'$

پله دوم:  $A' \cap ((B' \cap A') \cup B') = A' \cap B' = A' - B$

\*\*\*  
۳. گزینه ۳

مجموعه  $A$  دارای دو عضو  $a$  و  $\{a\}$  و مجموعه  $B$  دارای یک عضو  $\{a, \{a\}\}$  است. اشتراک دو مجموعه  $A$  و  $B$  فاقد عضو یعنی  $A \cap B = \emptyset$  است.

\*\*\*  
۴. گزینه ۳

پشم‌انداز: در دنباله حسابی  $t_m - t_n = (m - n)d$  است.

پله یکم:  $t_{10} - t_7 = 28 \Rightarrow 3d = 28 \Rightarrow d = \frac{28}{3}$

پله دوم:  $-24 = -6d = t_6 - t_1$

\*\*\*  
۵. گزینه ۴

روش اول (پشم‌انداز): سه عدد  $a, b, c$  وقتی تشکیل دنباله هندسی می‌دهند که  $b^2 = ac$  باشد.

پله یکم:  $t_5^2 = t_1 \times t_9 \Rightarrow (t_1 + 4d)^2 = (t_1)(t_1 + 8d) \Rightarrow t_1^2 + 8t_1d + 16d^2 = t_1^2 + 8t_1d \Rightarrow 16d^2 = 0 \Rightarrow d = 0$

پله دوم:  $q = \frac{t_5}{t_1} = \frac{t_1 + 4d}{t_1} = \frac{\lambda d + 4d}{\lambda d} = \frac{12d}{\lambda d} = \frac{3}{\lambda}$

روش دوم (پشم‌انداز): اگر جملات  $m, n, p$  یک دنباله حسابی، جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند  $q = \frac{p-n}{n-m}$  است.

$q = \frac{11-5}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

## پاسخنامه فصل سوم

### توان‌های گویا و عبارت‌های جبری



#### پاسخنامه آزمون ۲۵ توان ✓

۱. چشم‌انداز: نیازی نیست از فرض داده شده تعیین کنیم  $k$  چیست. کافی است مقدار  $3^k$  را به دست آوریم.  
 $3^{2k+1} = 6a \xrightarrow{a^{m+n} = a^m \times a^n} 3^{2k} \times 3^1 = 6a \Rightarrow 3^{2k} = 2a$   
 پله یکم:

$$\xrightarrow{(a^n)^m = a^{mn}} (3^k)^2 = 2a \Rightarrow 3^k = \sqrt{2a}$$

$$(27)^{\frac{k}{2}} = (3^3)^{\frac{k}{2}} = 3^{(3 \times \frac{k}{2})} = 3^k = \sqrt{2a}$$

پله دوم:

۲. چشم‌انداز: از  $(a^m)^n = a^{mn}$  و  $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$  استفاده می‌کنیم.  
 $(16)^{0/32} \times (\frac{1}{256})^{-0/09} = (16)^{0/32} \times (256)^{0/09} = (2^4)^{0/32} \times (2^8)^{0/09} = 2^{1/28} \times 2^{0/72} = 2^{1/28+0/72} = 2^2 = 4$

۳. چشم‌انداز: ب.م.م سه عدد ۲۱۰، ۴۹۰ و ۲۸۰ عدد ۷۰ است. با استفاده از رابطه  $(a^m)^n = a^{mn}$  توان هر سه عدد را به عدد ۷۰ تبدیل می‌کنیم.

$$2^{490} = 2^{70 \times 7} = (2^7)^{70} = 128^{70}$$

$$5^{210} = 5^{70 \times 3} = (5^3)^{70} = 125^{70}$$

$$3^{280} = 3^{70 \times 4} = (3^4)^{70} = 81^{70}$$

$$128^{70} > 125^{70} > 81^{70} \Rightarrow 2^{490} > 5^{210} > 3^{280}$$

پله دوم:

$$\frac{1}{\lambda} \times (4^{2n-3})^2 = 2 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \times 4^{4n-6} = 2 \Rightarrow 2^{-2} \times (2^2)^{4n-6} = 2 \Rightarrow$$

۴. پله یکم:

$$2^{-2} \times 2^{8n-12} = 2 \Rightarrow 2^{8n-15} = 2 \Rightarrow 8n-15=1 \Rightarrow 8n=16 \Rightarrow n=2$$

$$\frac{1}{4} \times 8^{2-2} = \frac{1}{4} \times 8^{-1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$$

پله دوم:

۵. چشم‌انداز: تساوی داده شده را ساده می‌کنیم و به تساوی به صورت  $2^a = 5^b$  می‌رسیم. این تساوی تنها در صورتی برقرار است که  $a=b=0$  باشد.

$$8 \times 2^m = 5^{n-4} \Rightarrow 2^3 \times 2^m = 5^{n-4} \Rightarrow 2^{m+3} = 5^{n-4}$$

پله یکم:



۶. **پله یکم:** دو طرف تساوی را متحد با هم قرار می‌دهیم.

$$4x^2 + mx + 16 = (2x + n)^2 \Rightarrow 4x^2 + mx + 16 = 4x^2 + 4nx + n^2 \Rightarrow \begin{cases} m = 4n \\ n^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 4 \Rightarrow m = 16 \\ n = -4 \Rightarrow m = -16 \end{cases}$$

**پله دوم:** با توجه به گزینه‌ها  $m + n = 16 + 4 = 20$  است.

۷. **پشم‌انداز:** عبارت‌های داده شده را به نحوی در هم ضرب می‌کنیم که عبارت  $x^2 + 3x$  در آن ظاهر شود.

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = x(x+3)(x+1)(x+2) = (x^2+3x)(x^2+3x+2) \xrightarrow{x^2+3x=7} 7(7+2) = 7 \times 9 = 63$$

۸. **پشم‌انداز:** با فاکتورگیری در صورت و مخرج، سپس تجزیه عبارات حاصل، کسر را ساده می‌کنیم.

$$\frac{x^4 - x}{x^3 + x^2 + x} = \frac{x(x^3 - 1)}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 + x + 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)(x^3 + 1)}{(x^2 + x + 1)} = (x-1)(x^3 + 1)$$

$$= x^4 + x - x^3 - 1 = x^4 - x^3 + x - 1$$

۹. **پشم‌انداز:** با توجه به مخرج کسر، صورت و مخرج را در عبارت  $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5}$  ضرب و تقسیم کرده و سپس با استفاده از اتحاد مزدوج عبارت داده شده را ساده می‌کنیم.

$$\frac{12\sqrt{6}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{5}} \times \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} =$$

$$\frac{12\sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})}{2 + 3 + 2\sqrt{6} - 5} = \frac{12\sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})}{2\sqrt{6}} = 6(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$$

۱۰. **پشم‌انداز:** برای به دست آوردن  $x^4$  از تساوی  $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}$  کافی است دو طرف تساوی را دوبار به توان ۲ برسانیم.

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}} \xrightarrow{\text{به توان } 2} x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}} \xrightarrow{\text{به توان } 2} x^4 = (1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}})^2 = 1 + 2\sqrt{1 + \sqrt{1}} + 1 + 1 = 3 + 2\sqrt{1 + \sqrt{1}}$$

**پاسخنامه آزمون ۲۹ عبارتهای جبری**

۱. **پشم‌انداز:** در عبارت داده شده دو تا اتحاد مربع دو جمله‌ای ایجاد می‌کنیم. می‌دانیم اگر  $A^2 + B^2 = 0$  باشد، آن‌گاه  $A = B = 0$  است.

**پله یکم:**  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + y^2 + 6y + 13 = 0$

**پله دوم:** عبارت  $x^2 - 4x$  برای مربع کامل شدن باید با ۴ عبارت  $y^2 + 6y$  با ۹ جمع شود. عدد ۱۳ را به صورت  $4 + 9$

$$\left. \begin{aligned} x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 0 &\Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 0 \Rightarrow \\ x-2=0 &\Rightarrow x=2 \\ y+3=0 &\Rightarrow y=-3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x+y=2-3=-1$$

۲. **پشم‌انداز:** عدد ثابت عبارت را طوری می‌نویسیم که از اتحادها استفاده کنیم.

**پله یکم:**  $x^3 + x - 10 = x^3 - 8 + x - 2 = (x-2)(x^2 + 2x + 4) + (x-2) = (x-2)(x^2 + 2x + 5)$

**پله دوم:** مشخص است که عبارت بر  $x-2$  و  $x^2 + 2x + 5$  بخش پذیر است.

۳. \*\*\*  
 پشم‌انداز: مخرج مشترک سمت چپ تساوی همان عبارت  $x^6 - 1$  است. عبارت سمت چپ را ساده کرده و با عبارت سمت راست متحد قرار داده و مقادیر  $a, b, c$  و  $d$  را تعیین می‌کنیم.

پله یکم: 
$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{(x-1)(x^2+1) + (x+1)(x^2+1) - (x^2+1) + (x^2-1)}{x^6-1}$$

$$\frac{x^3 + x - x^2 - 1 + x^3 + x + x^2 + 1 - x^2 - 1 + x^2 - 1}{x^6-1} = \frac{2x^3 + 2x - 2}{x^6-1}$$

پله دوم: 
$$\frac{2x^3 + 2x - 2}{x^6-1} = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^6-1} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=0 \\ c=2 \\ d=-2 \end{cases}$$

پله سوم:  $a+b+c+d = 2+0+2-2 = 2$

۴. \*\*\*  
 پله یکم: عبارت سمت راست تساوی را ساده می‌کنیم.

$$\left(\frac{y}{2} + b\right)\left(\frac{y^2+c}{4}\right) = \left(\frac{y+2b}{2}\right)\left(\frac{y^2+c}{4}\right) = \frac{y^3 + cy + 2by^2 + 2bc}{8}$$

پله دوم: عبارت سمت چپ تساوی را نیز ساده می‌کنیم. 
$$\frac{y^5 - y^3 - 12y}{8y^2 + 16y} = \frac{y(y^4 - y^2 - 12)}{8y(y+2)} = \frac{y(y^2-4)(y^2+3)}{8y(y+2)}$$

$$\frac{(y-2)(y+2)(y^2+3)}{8(y+2)} = \frac{(y-2)(y^2+3)}{8} = \frac{y^3 + 3y - 2y^2 - 6}{8}$$

پله سوم: بامتحد قرار دادن دو طرف تساوی داریم: 
$$\frac{y^3 + cy + 2by^2 + 2bc}{8} = \frac{y^3 + 3y - 2y^2 - 6}{8} \Rightarrow \begin{cases} b=-1 \\ c=3 \end{cases}$$

$b+c = -1+3 = 2$

۵. \*\*\*  
 پله یکم: حاصل ضرب دو عبارت اول را با استفاده از اتحاد  $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$  می‌توان به صورت ساده شده نوشت.

$$(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}) = (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3 \times 2} + \sqrt[3]{2^2}) = (\sqrt[3]{3})^3 - (\sqrt[3]{2})^3 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

پله دوم: 
$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = ((\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2)(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 =$$

$$3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6} = 5 + \sqrt{2^2 \times 6} = 5 + \sqrt{24}$$

۶. \*\*\*  
 پشم‌انداز: از اتحاد  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$  استفاده می‌کنیم.

$$5^2 = 4^2 + 2ab + 2bc + 2ac \Rightarrow 25 = 16 + 2(ab + ac + bc) \Rightarrow 2(ab + ac + bc) = 9 \Rightarrow ab + ac + bc = 4.5$$

۷. \*\*\*  
 پله یکم: 
$$\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

پله دوم: 
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^{-2} = \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^{-2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2}{(1 - \sqrt{2})^2} = \frac{2}{1 - 2\sqrt{2} + 2} = \frac{2}{3 - 2\sqrt{2}}$$

پله سوم: صورت و مخرج را در عبارت  $3 + 2\sqrt{2}$  ضرب می‌کنیم تا مخرج کسر گویا شود.

$$\frac{2}{3 - 2\sqrt{2}} \times \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} = \frac{2(3 + 2\sqrt{2})}{9 - 8} = 2(3 + 2\sqrt{2}) = 6 + 4\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt[6]{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$

\*\*\*  
۸. **پژوهش ۱** پله یکم:

$$\frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \frac{(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 - \sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

پله دوم:

پله سوم: مخرج کسر را با ضرب صورت و مخرج در عبارت  $2 + \sqrt{2}$  گویا می کنیم.

$$\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \times \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{(2 + \sqrt{2})^2}{4 - 2} = \frac{4 + 4\sqrt{2} + 2}{2} = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$$

\*\*\*

۹. **پژوهش ۱** روش اول) چشم انداز: از اتحاد  $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) + 3abc$  کمک

می گیریم. اگر  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$ ، آن گاه  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$  است.

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = \frac{3abc}{abc} = 3$$

روش دوم) چشم انداز: اگر  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$ ،  $a = b = c$  است. برای اثبات طرفین را در ۲ ضرب می کنیم.

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 = 0$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a-c=0 \\ b-c=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c \Rightarrow \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = \frac{a^3 + a^3 + a^3}{a^3} = \frac{3a^3}{a^3} = 3$$

\*\*\*

۱۰. **پژوهش ۲** پله یکم: سمت چپ تساوی را به صورت ساده شده می نویسیم:

$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} = \frac{a(x+2) + b(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{ax + 2a + bx + b}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(a+b)x + 2a + b}{x^2 + 3x + 2}$$

پله دوم: عبارت های دو طرف تساوی را با یکدیگر متحد قرار می دهیم:

$$\frac{(a+b)x + 2a + b}{x^2 + 3x + 2} = \frac{3x + 4}{x^2 + 3x + 2} \Rightarrow a + b = 3$$

**پاسخ نامه آزمون ۳۰ جامع ۱**

\*\*\*

۱. **پژوهش ۲** پله یکم: ابتدا با فاکتورگیری عبارت داده شده را ساده می کنیم:

$$\sqrt[3]{\frac{8^3 + 12^3}{10^3 + 15^3}} = \sqrt[3]{\frac{4^3(2^3 + 3^3)}{5^3(2^3 + 3^3)}} = \sqrt[3]{\frac{4^3}{5^3}} = \frac{4}{5}$$

پله دوم: گزینه ای را پیدا می کنیم که حاصل آن برابر  $\frac{4}{5}$  شود. گزینه «۲» است.  $\frac{8+12}{10+15} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

\*\*\*

۲. **پژوهش ۳** چشم انداز: حجم مکعب با اندازه یال  $a$  برابر  $a^3$  و سطح کل آن برابر  $6a^2$  است.

$$a^3 = 0.216 = 216 \times 10^{-3} = 6^3 \times 10^{-3} \Rightarrow a = \sqrt[3]{6^3 \times 10^{-3}} = 6 \times 10^{-1} = 0.6$$

پله یکم:

$$S = 6a^2 = 6(0.6)^2 = 6 \times 0.36 = 2.16$$

پله دوم:

\*\*\*

$$x = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x} \quad \left. \begin{array}{l} y = \sqrt{z} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{z}$$

۳. **پژوهش ۴** پله یکم:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x} = \sqrt{z} \xrightarrow{\text{به توان ۵}} x^{\frac{5}{3}} = z \\ x^m = z \end{array} \right\} \Rightarrow m = \frac{5}{3}$$

پله دوم:

\*\*\*

۱۰. **پژوه**

پشم‌انداز: با جایگذاری  $x$  و  $y$  کسر حاصل را گویا می‌کنیم.

$$\frac{xy}{x-y} = \frac{(3\sqrt{2})(2\sqrt{3})}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{6}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} \times \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{6}(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{((3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2)} =$$

پله یکم:

$$\frac{6\sqrt{6}(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{18-12} = \frac{6\sqrt{6}(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{6} = \sqrt{6}(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}) = 3\sqrt{12}+2\sqrt{18} = 3\sqrt{2^2 \times 3} + 2\sqrt{3^2 \times 2} = 6\sqrt{3} + 6\sqrt{2}$$

$$6\sqrt{3} + 6\sqrt{2} = 3(\underbrace{\sqrt{3}}_y) + 2(\underbrace{\sqrt{2}}_x) = 2x + 3y$$

پله دوم: عبارت ساده شده بر حسب  $x$  و  $y$  برابر است با:

پاسخنامه آزمون ۳۱ جامع ۲

\*\*\*

۱. **پژوه**

پله یکم: مبدأ در شکل عدد ۱ است. یعنی از نقطه به طول ۱ کمان زده شده است.

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2, \quad x^2 + 1^2 = y^2 \Rightarrow y^2 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow y = \sqrt{3}$$

بنابراین کمان به اندازه  $\sqrt{3}$  به سمت عقب زده شده است. بنابراین نقطه  $A$  نشان‌دهنده عدد  $A = 1 - \sqrt{3}$  است.

\*\*\*

۲. **پژوه**

$$(ab)^c = ab^c \Rightarrow a^c b^c = ab^c \xrightarrow{\div b^c} a^c = a \Rightarrow c = 1$$

پله یکم:

پله دوم:  $c = 1$  به دست آمد. بنابراین  $c^{ab}$  همواره برابر ۱ است.

\*\*\*

۳. **پژوه**

$$(2^{6x+3})(4^{3x+6}) = 8^k \Rightarrow (2^{6x+3})(2^2)^{3x+6} = (2^3)^k \Rightarrow 2^{6x+3} \times 2^{6x+12} = 2^{3k} \Rightarrow 2^{6x+3+6x+12} = 2^{3k} \Rightarrow$$

$$3k = 12x + 15 = 3(4x + 5) \xrightarrow{\div 3} k = 4x + 5$$

\*\*\*

۴. **پژوه**

پشم‌انداز:  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$  و  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})$  دو عبارتی هستند که مزدوج یک‌دیگر می‌باشند. اگر توان این دو عبارت

را یکسان کنیم می‌توانیم با استفاده از اتحاد مزدوج به راحتی حاصل عبارت را به دست آوریم.

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$$

پله یکم:

$$a = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{\sqrt{2}+1} (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{\sqrt{2}+1} (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{\sqrt{2}+1} = [(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})]^{\sqrt{2}+1}$$

$$((\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2)^{\sqrt{2}+1} = (3-2)^{\sqrt{2}+1} = 1^{\sqrt{2}+1} = 1 \Rightarrow a^2 = 1$$

\*\*\*

۵. **پژوه**

پله یکم: سمت چپ تساوی را به صورت ساده شده می‌نویسیم:

$$(ax - by)^2 + (bx + ay)^2 = a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 + b^2x^2 + 2abxy + a^2y^2 =$$

$$a^2x^2 + b^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2 = x^2(a^2 + b^2) + y^2(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = A(x^2 + y^2) \Rightarrow A = a^2 + b^2$$

پله دوم: با مقایسه دو عبارت داریم:

\*\*\*

۶. **پژوه**

پله یکم: صورت و مخرج را به شکل ساده شده می‌نویسیم:

$$\frac{12xy^3 - 12x^3y}{6xy^3 - 12x^2y^2 + 6x^3y} = \frac{12xy(y^2 - x^2)}{6xy(y^2 - 2xy + x^2)} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(y-x)^2} = \frac{2(y-x)(y+x)}{(y-x)^2} = \frac{2(y+x)}{y-x}$$

$$\frac{2(3+4)}{3-4} = \frac{2(7)}{-1} = -14$$

پله دوم:  $x = 4$  و  $y = 3$  را جای‌گذاری می‌کنیم:

\*\*\*  
۷. گزینه ۲ بلیه یکم:

$$\frac{9^{x+y}}{3^{5y}} = 243 \Rightarrow \frac{(3^2)^{x+y}}{3^{5y}} = 3^5 \Rightarrow \frac{3^{2x+2y}}{3^{5y}} = 3^5 \Rightarrow 3^{2x+2y-5y} = 3^5 \Rightarrow 3^{2x-3y} = 3^5 \Rightarrow 2x-3y=5 \quad (1)$$

$$\frac{4^x}{4^{x+y}} = 8 \Rightarrow \frac{4^x}{4^x \times 4^y} = 8 \Rightarrow \frac{1}{4^y} = 8 \Rightarrow (2^{-2})^y = 2^3 \Rightarrow 2^{-2y} = 2^3 \Rightarrow -2y = 3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$$

بلیه دوم:

$$(1): 2x - 3(-\frac{3}{2}) = 5 \Rightarrow 2x + \frac{9}{2} = 5 \Rightarrow 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

بلیه سوم:

$$2^{4x+2y} = 2^{1+3} = 2^4 = 16$$

\*\*\*

۸. گزینه ۴ چشم‌انداز: با توجه به این که عبارت  $x^2 + 1$  در زیر رادیکال قرار دارد ابتدا بهتر است  $x$  را بر حسب  $a$  به دست

آوریم. پس با توجه به رابطه  $(a - \frac{1}{a})^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} - 2$ ، حاصل  $a^2 + \frac{1}{a^2}$  را بر حسب  $x$  تعیین کنیم.

$$a = x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow a - x = \sqrt{x^2 + 1} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (a - x)^2 = x^2 + 1 \Rightarrow a^2 - 2ax + x^2 = x^2 + 1$$

بلیه یکم:

$$\Rightarrow 2ax = a^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{a^2 - 1}{2a} = \frac{a}{2} - \frac{1}{2a} = \frac{1}{2}(a - \frac{1}{a}) \quad (1)$$

بلیه دوم: برای به دست آوردن حاصل  $a^2 + \frac{1}{a^2}$  دو طرف رابطه (۱) را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x^2 = \frac{1}{4}(a - \frac{1}{a})^2 \Rightarrow 4x^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 4x^2 + 2$$

می‌توانستید  $x = 1$  قرار داده و  $a$  را محاسبه کنید و با مقایسه با گزینه‌ها، گزینه صحیح را انتخاب کنید.

\*\*\*

۹. گزینه ۳

$$A = \sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} A^2 = 3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} + 2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = 6 + 2\sqrt{4} = 6 + 4 = 10$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{10}$$

\*\*\*

۱۰. گزینه ۱ چشم‌انداز: مخرج مشترک این سه کسر را عبارت  $(a-b)(a-c)(b-c)$  در نظر می‌گیریم.

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = \frac{(b-c) - (a-c) + (a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{b-c-a+c+a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 0$$

پاسخنامه آزمون ۳۲ جامع ۳ (فصل‌های ۱ و ۲ و ۳)

\*\*\*

۱. گزینه ۴ مجموعه  $A \cup B$  شامل تمام اعضای است که در  $A$  یا  $B$  وجود دارند. بنابراین چون هر دو مجموعه  $A$  و  $B$

نامتناهی هستند، بنابراین مجموعه  $A \cup B$  یک مجموعه نامتناهی محسوب می‌شود.

$$A = \{1, 3, \dots\}, B = \{2, 4, 6, \dots\} \Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

رد گزینه اول:

$$A = \{2, 3, 5, 7, 9, \dots\}, B = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} \Rightarrow A - B = \{2\}, B - A = \{1\}$$

رد گزینه دوم و سوم:

\*\*\*

$$[-3, a) \cap (b, 5] = (-2, 4) \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = 4 \end{cases}$$

بلیه یکم: ۲. گزینه ۱

$$(b-a, b+a) \cup (b, a-b) = (-6, 2) \cup (-2, 6) = (-6, 6)$$

بلیه دوم:

\*\*\*

۳. گزینه ۲ چشم‌انداز: اگر بین دو عدد  $\frac{2}{3}$  و  $\frac{22}{3}$ ، واسطه حسابی درج کنیم، مجموع این ۹ عدد تشکیل یک دنباله حسابی

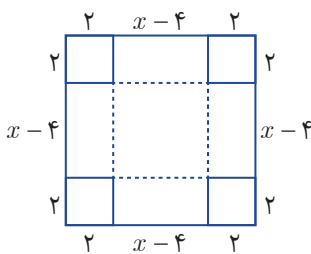
می‌دهند. در این دنباله حسابی  $a_1 = \frac{2}{3}$  و  $a_9 = \frac{22}{3}$  است.

## پاسخنامه فصل چهارم

### معادله‌ها و نامعادله‌ها



#### پاسخنامه آزمون ۳۳ معادله و تابع درجه دوم



۱. **پنجم‌انداز:** این صفحه مقوایی شکل را به صورت مربع در نظر می‌گیریم **پنجاه و سه**

اگر ضلع این مربع برابر  $x$  باشد، در این صورت با جدا کردن مربع‌های  $2 \times 2$  از گوشه‌های آن و تا کردن آن یک جعبه به ضلع قاعده  $x-2$  و ارتفاع ۲ به دست می‌آید.

پله یکم:  $V = 200 \text{ cm}^3 \Rightarrow 2(x-4)(x-4) = 200 \Rightarrow (x-4)^2 = 100$

در واقع جعبه دارای ابعاد ۱۰ و ۱۰ و ۲ است.  $\Rightarrow x-4=10 \Rightarrow x=14$

پله دوم:  $S = (10 \times 10) + 4(2 \times 10) = 100 + 80 = 180 \text{ cm}^2$   $S = 4 \times \text{جانبی} + S_{\text{قاعده}} = 180$  کل

۲. **پنجم‌انداز:** دو عدد فرد متوالی را به صورت  $2n-1$  را  $2n+1$  در نظر می‌گیریم. **پنجاه و سه**

پله یکم:  $(2n-1)^2 + (2n+1)^2 = 290 \Rightarrow 4n^2 - 4n + 1 + 4n^2 + 4n + 1 = 290 \Rightarrow 8n^2 = 288 \Rightarrow n^2 = 36 \Rightarrow n = 6$

پله دوم: دو عدد فرد  $2n-1=11$  و  $2n+1=13$  هستند که حاصلضرب آن‌ها  $143$  و رقم یکان آن ۳ است.

۳. **پنجاه و سه**  
 $0.006S^2 - 0.02S + 120 = 124/8 \Rightarrow 0.006S^2 - 0.02S - 4/8 = 0 \Rightarrow 6S^2 - 20S - 4800 = 0$   
 $\Rightarrow 3S^2 - 10S - 2400 = 0$

با استفاده از روش فرمول کلی (دلتا) معادله را حل می‌کنیم:

$\Delta = (-10)^2 - 4(3)(-2400) = 100 + 28800 = 28900 = 17^2 \times 10^2$

$S = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 \pm 17 \times 10}{6} = \begin{cases} \frac{10+170}{6} = \frac{180}{6} = 30 \\ \frac{10-170}{6} = -\frac{160}{6} = -\frac{80}{3} \end{cases}$  غ ق ق

۴. **پنجم‌انداز:** اگر معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  دارای دو ریشه برابر (ریشه مضاعف) باشد،  $\Delta = 0$  است. **پنجاه و سه**

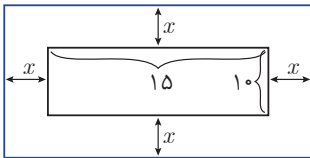
$2x^2 + x + 8 = kx \Rightarrow 2x^2 + (1-k)x + 8 = 0 \Rightarrow (1-k)^2 - 4(2)(8) = 0 \Rightarrow 1 - 2k + k^2 - 64 = 0$

$\Rightarrow k^2 - 2k - 63 = 0 \Rightarrow (k-9)(k+7) = 0 \Rightarrow k = 9, -7$

۵. **پنجم‌انداز:** برای این که معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  دارای ریشه حقیقی باشد، باید  $\Delta \geq 0$  یا  $\Delta \geq 0$ . **پنجاه و سه**

$(2k-1)x^2 - 8x + 6 = 0 \Rightarrow (-4)^2 - (2k-1)6 \geq 0 \Rightarrow 16 - 6(2k-1) \geq 0 \Rightarrow 2k-1 \leq \frac{16}{6} \Rightarrow 2k \leq \frac{16}{6} + 1$

$\Rightarrow 2k \leq \frac{11}{3} \Rightarrow k \leq \frac{11}{6} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k_{\max} = 1$



\*\*\*  
۱. چشم‌انداز: قاب و عکس آن را به شکل روبه‌رو در نظر می‌گیریم.

طول قاب برابر  $15+2x$  و عرض آن برابر  $10+2x$  است.

پله یکم:

$$(15+2x)(10+2x) = 300 \Rightarrow 150 + 50x + 4x^2 = 300 \Rightarrow 4x^2 + 50x - 150 = 0 \Rightarrow (2x)^2 + 25(2x) - 150 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 50x - 150 = 0 \Rightarrow (2x)^2 + 25(2x) - 150 = 0 \Rightarrow (2x+30)(2x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = -30 \Rightarrow x = -15 \\ 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

پله دوم: محیط قاب برابر است با:  $2(10+2x+15+2x) = 2(25+4x) = 2(25+\frac{5}{2}) = 2(25+10) = 70$

\*\*\*  
۲. چشم‌انداز: اگر  $\Delta = 0$  باشد ریشه‌های معادله برابرند. در این حالت ریشه معادله  $x = -\frac{b}{2a}$  است.

$$x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-(3a+1))^2 - 4(1)(2a^2+2) = 0 \Rightarrow$$

$$9a^2 + 6a + 1 - 8a^2 - 8 = 0 \Rightarrow a^2 + 6a - 7 = 0 \Rightarrow (a+7)(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (a+7)(a-1) = 0 \Rightarrow a = -7 \\ a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{-(3a+1)}{2} : \begin{cases} a = -7 \Rightarrow x = -10 \\ a = 1 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

\*\*\*  
۳. چشم‌انداز: در معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر  $a+b+c = 0$  آن‌گاه  $x_1 = 1$  و  $x_2 = \frac{c}{a}$  است.

$$x^2 - (1+\sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \sqrt{3}$$

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| + \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \left| \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right| + 1 + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + 1 + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}-1+2+2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}+1}{2}$$

\*\*\*  
۴. چشم‌انداز: باید  $\Delta' > 0$  باشد.

$$\Delta > 0 \Rightarrow 2^2 - (m+2)(m-1) > 0 \Rightarrow 14 - 4(m+2)(m-1) > 0$$

$$\Rightarrow (m+2)(m-1) - 4 < 0 \Rightarrow m^2 + m - 2 - 4 < 0 \Rightarrow m^2 + m - 6 < 0$$

$$\Rightarrow (m+3)(m-2) < 0 \Rightarrow \frac{m}{+} \left| \begin{array}{c} -3 \\ + \end{array} \right| \frac{2}{-} \Rightarrow m \in (-3, 2)$$

\*\*\*  
۵. چشم‌انداز: اگر منحنی تابع درجه دوم (سه‌می)،  $x$  ها را در نقاط به طول‌های  $x_1$  و  $x_2$  قطع کند، معادله آن

$$y = a(x-x_1)(x-x_2) \text{ و طول رأس آن } \frac{x_1+x_2}{2} \text{ است.}$$

$$y = a(x+1)(x-2) \xrightarrow{(0,2)} 2 = -2a \Rightarrow a = -1 \Rightarrow y = -(x+1)(x-2)$$

$$x = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right) = \frac{9}{4}$$

\*\*\*  
۶. چشم‌انداز: محور تقارن  $y = ax^2 + bx + c$  به معادله  $x = -\frac{b}{2a}$  است.

$$2 = -\frac{1}{2(a-1)} \Rightarrow 4(a-1) = -1 \Rightarrow 4a - 4 = -1 \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$a = \frac{3}{4} \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x-6)(x+2) = 0 \xrightarrow{x>0} x = 6$$

\*\*\*  
 ۱. **درتله ۲** پله یکم:  $\frac{x-8}{n-10} = \frac{n}{x} \Rightarrow x(x-8) = n(n-10) \Rightarrow x^2 - 8x = n^2 - 10n \Rightarrow x^2 - 8x - n^2 + 10n = 0$

پله دوم: می‌خواهیم معادله فاقد جواب باشد، پس  $\Delta' < 0$  است.

$$\Delta = (-8)^2 - 4(-1)(-n^2 + 10n) < 0 \Rightarrow n^2 - 10n + 16 < 0 \Rightarrow (n-2)(n-8) < 0 \Rightarrow 2 < n < 8 \Rightarrow n = 3, 4, 5, 6, 7$$

باتوجه به این که مخرج معادله  $n-10$  است بنابراین  $n \neq 10$ ، پس ۶ عدد طبیعی وجود دارد که به ازای آن‌ها معادله جواب ندارد.

\*\*\*  
 ۲. **درتله ۱** پله یکم:  $x^2 + 2x - m = (x^2 - x + 2m) = 0 \Rightarrow 2x - m = -x + 2m \Rightarrow 3x = 3m \Rightarrow x = m$

$$x^2 + 2x - m = 0 \xrightarrow{x=m} m^2 + 2m - m = 0 \Rightarrow m^2 + m = 0 \Rightarrow m(m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$$

پله دوم:  $m = 0: x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

$m = 0: x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

$m = -1: x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$

$m = -1: x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

پله سوم: ریشه‌های غیرمشترک دو معادله برابر  $x = -2$  و  $x = 1$  هستند. و معادله‌ای که ریشه‌هایش این دو عدد هستند

عبارتست از:  $(x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

\*\*\*  
 ۳. **درتله ۴** چشم‌انداز: عبارت‌های  $x^2 + 1$  و  $x^2 - 4x + 5$  همواره مثبت هستند پس در تعیین علامت تأثیری ندارند.

$$\frac{x^2 - 4x + 5}{(x-1)(x^2 + 1)} \geq 0 \xrightarrow{\begin{matrix} x^2 - 4x + 5 > 0 \\ x^2 + 1 > 0 \end{matrix}} x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

\*\*\*  
 ۴. **درتله ۳** پله یکم: همه جملات را به یک طرف منتقل کرده و با تعیین علامت، جواب را به دست می‌آوریم.

$$\frac{9}{x} - \frac{4}{9} > \frac{10}{x} - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{9}{x} - \frac{10}{x} - \frac{4}{9} + \frac{1}{2} > 0$$

$$\frac{9-10}{x} + \frac{9-8}{18} > 0 \Rightarrow \frac{-18+x}{18x} > 0 \Rightarrow x \left| \begin{matrix} -\infty & 0 & 18 & +\infty \\ + & \times & - & + \end{matrix} \right. \Rightarrow x < 0 \vee x > 18 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - [0, 18]$$

$a = 0, b = 18 \Rightarrow b - a = 18$  پله دوم:

\*\*\*  
 ۵. **درتله ۱**  $4x^2 - 2mx + 4m^2 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta' = (-m)^2 - 4(4m^2) \leq 0 \Rightarrow m^2 - 16m^2 \leq 0$

$\Rightarrow -15m^2 \leq 0 \Rightarrow m^2 \geq 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R}$

\*\*\*  
 ۶. **درتله ۴** روش اول) پله یکم:

$$|2x+1| < \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{1}{5} < 2x+1 < \frac{1}{5} \xrightarrow{-1} -\frac{6}{5} < 2x < -\frac{4}{5} \xrightarrow{\div 2} -\frac{3}{5} < x < -\frac{2}{5} \Rightarrow x \in \left(-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

نقطه میانی =  $\frac{\left(-\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right)}{2} = \frac{-1}{2}$

طول بازه =  $-\frac{2}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$

روش دوم) چشم‌انداز:  $|x - x_0| < r$  یک بازه با نقطه میانی  $x_0$  و طول  $2r$  است.



$$|2x+1| < \frac{1}{5} \Rightarrow \left| x + \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \begin{cases} \text{نقطه میانی} & x_0 = -\frac{1}{2} \\ \text{طول بازه} & 2r = 2\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{5} \end{cases}$$

\*\*\*

۷. **ترتیب ۱** **پله یکم:**  $x > 0: \frac{x-3}{|x|-2} = \frac{x-3}{x-2} > 0 \Rightarrow x \left| \begin{array}{cccc} -\infty & 2 & 3 & +\infty \\ + & \times & - & + \end{array} \right.$

مجموعه جواب نامعادله با توجه به این که  $x > 0$  است، به صورت  $(0, 2) \cup (3, +\infty)$  درمی آید.

**پله دوم:**  $x < 0: \frac{x-3}{|x|-2} = \frac{x-3}{-x-2} > 0 \Rightarrow x \left| \begin{array}{cccc} -\infty & -2 & 3 & +\infty \\ - & \times & + & - \end{array} \right.$

$x < 0$  است. پس مجموعه جواب نامعادله به صورت  $(-2, 0)$  درمی آید.

**پله سوم:** بنابراین مجموعه جواب  $(-2, 2) \cup (3, +\infty)$  است.

\*\*\*

۸. **ترتیب ۳** **پشم انداز:** اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه های تابع درجه دوم باشند ضابطه آن  $y = a(x-x_1)(x-x_2)$  است.

**پله یکم:**  $y = a(x+\gamma)(x+\frac{1}{\gamma}) \stackrel{(0, \gamma)}{\implies} \gamma = \frac{\gamma a}{\gamma} \implies a = \gamma \implies y = \gamma(x+\gamma)(x+\frac{1}{\gamma}) = (x+\gamma)(\gamma x+1) = \gamma x^2 + 15x + \gamma$

**پله دوم:** معادله تلاقی خط و منحنی نباید ریشه داشته باشد:  $2x^2 + 15x + \gamma = mx - 1 \implies 2x^2 + (15-m)x + \gamma + 1 = 0$

$\Delta < 0 \implies (15-m)^2 - 4(\gamma+1) < 0 \implies 225 - 30m + m^2 - 4\gamma - 4 < 0 \implies m^2 - 30m + 161 < 0$

$\implies (m-23)(m-7) < 0 \implies 7 < m < 23$

\*\*\*

۹. **ترتیب ۳** **پله یکم:**  $2x^2 + 3x + 4 > 5x^2 + 4x \implies 3x^2 + x - 4 < 0 \implies (3x+4)(x-1) < 0 \implies x \in (-\frac{4}{3}, 1)$

**پله دوم:** بیشترین مقدار  $b-a$  برابر است با:  $b-a = 1 - (-\frac{4}{3}) = \frac{7}{3}$

\*\*\*

۱۰. **ترتیب ۲** **پشم انداز:**  $2(|x|+1)$  عبارتی مثبت است پس طرفین نامساوی را در آن ضرب می کنیم.

$\frac{1}{2} \leq \frac{|x|}{|x|+1} \leq 2 \implies |x|+1 \leq 2|x| \leq 4|x|+4 \implies \begin{cases} |x|+1 \leq 2|x| \implies |x| \geq 1 \implies x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ 2|x| \leq 4|x|+4 \implies |x| \geq -2 \implies x \in \mathbb{R} \end{cases} \implies x \leq -1 \vee x \geq 1$

**پاسخنامه آزمون ۴۰ جامع ۴**

\*\*\*

۱. **ترتیب ۳** **پشم انداز:** اعضای مجموعه  $B$  سپس  $A-B$  را تعیین می کنیم. تعداد زیرمجموعه های سره و ناتهی یک

مجموعه  $n$  عضوی  $2^n - 2$  است.

**پله یکم:**  $x^2 + 2 = 3x \implies x^2 - 3x + 2 = 0 \implies (x-2)(x-1) = 0 \implies x = 2, x = 1 \implies B = \{1, 2\}, A = \{1, \{1\}, \{1, 2\}, \{2\}\}$

**پله دوم:**  $A-B = \{1, \{1\}, \{1, 2\}, \{2\}\} - \{1, 2\} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{2\}\}$

**پله سوم:** مجموعه  $A-B$  دارای ۳ عضو بوده و تعداد زیرمجموعه های سره و غیرتهی آن برابر است با:

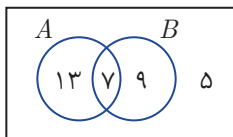
$2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$

\*\*\*

۲. **ترتیب ۱**  $(A'-B) = (A' \cap B) = (A') \cup B' = A \cup B'$

\*\*\*

۳. **ترتیب ۲** **پشم انداز:** کلاس را مجموعه مرجع در نظر می گیریم. مجموعه  $A$  دانش آموزان



حاضر در تیم فوتبال و مجموعه  $B$  دانش آموزان حاضر در تیم والیبال است. با استفاده از

نمودار زیر داریم:  $13 + 7 + 9 + 5 = 34 = \text{تعداد دانش آموزان کلاس}$

## پاسخ نامه فصل پنجم

### تابع



#### پاسخ نامه آزمون ۴۳ مفهومی تابع - دامنه و برد آن - انواع تابع

- \*\*\*  
 ۱. **پنجم انداز:** تابع به رابطه‌ای گفته می‌شود که به ازای هر ورودی، حداکثر یک خروجی داشته باشیم.  
 گزینه «۱»: برای هر  $n$  ضلعی بین تعداد اضلاع و مجموع زوایای داخلی رابطه  $(n-2) \times 180^\circ$  برقرار است، بنابراین رابطه داده شده تابع است.  
 گزینه «۲»: بین ضلع  $(a)$  و محیط یک مربع نیز رابطه  $4a$  برقرار است.  
 گزینه «۳»: هر عدد مثبت دارای دو ریشه دوم است. به عنوان مثال عدد ۴ دارای ریشه‌های دوم ۲ و -۲ است. پس این رابطه نمی‌تواند تابع باشد.  
 گزینه «۴»: هر فرد دارای یک گروه خونی منحصر به فرد است. بنابراین رابطه مورد نظر تابع است.

- \*\*\*  
 ۲. **پنجم:** **پله یکم:**  
 $x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y^2 = R^2 - x^2 \xrightarrow{y > 0} y = \sqrt{R^2 - x^2}$   
**پله دوم:**  
 $R = 2 \Rightarrow y = \sqrt{4 - x^2}$

- \*\*\*  
 ۳. **پنجم انداز:** ضابطه‌ای را انتخاب می‌کنیم که به ازای هر  $x$  از جدول داده شده،  $y$  متناظر آن را بدهد.  
 گزینه «۱»:  $y = 100 - 10x : x = 2 \Rightarrow y = 100 - (10 \times 2) = 100 - 20 = 80$   
 گزینه «۲»:  $y = 100 - 5x^2 : x = 1 \Rightarrow y = 100 - 5(1)^2 = 100 - 5 = 95$   
 گزینه «۳»: به ازای تمام  $x$ های داده شده مقدار  $y$  با توجه به رابطه  $y = 100 - 5x - 5x^2$  یک مقدار درست به دست می‌آید.  
 گزینه «۴»:  $y = 20 - x - x^2 : x = 0 \Rightarrow y = 20 - 0 - 0 = 20$

- \*\*\*  
 ۴. **پنجم انداز:** یک رابطه در صورتی تابع است که به ازای یک مقدار برای  $x$ ، چند مقدار متفاوت برای  $y$  به دست نیاید.  
 گزینه «۱»:  $|x| + |y| = 4 \xrightarrow{x=0} |y| = 4 \Rightarrow y = 4$   
 گزینه «۲»: هر مقداری که به  $x$  بدهیم چون برای به دست آوردن  $y$  باید ریشه سوم  $|x|$  را به دست آوریم بنابراین یک مقدار برای  $y$  به دست می‌آید ( $y = \sqrt[3]{|x|}$ ). بنابراین رابطه  $y^3 = |x|$  یک تابع محسوب می‌شود.  
 گزینه «۳»:  $(x-1)^2 + y^2 = 4 \xrightarrow{x=1} 0 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$   
 گزینه «۴»:  $y^2 = x \xrightarrow{x=4} y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

## پاسخنامه فصل ششم

### شمارش، بدون شمردن



#### پاسخنامه آزمون ۴۹ شمارش و جایگشت

\*\*\*  
 ۱. **پله ۱** تعداد حالات مسافرت در مسیر رفت: اصفهان قم تهران

$$۶ = \frac{۳}{\text{قم به اصفهان}} \times \frac{۲}{\text{تهران به قم}}$$

**پله دوم:** چون باید از هیچ جاده‌ای دوبار عبور نکنیم پس برای بازگشت از مسیر اصفهان به قم ۲ راه و از قم به تهران ۱ راه وجود دارد. پس، تعداد حالات مسافرت در مسیر برگشت:  $۲ = \frac{۱}{\text{قم به تهران}} \times \frac{۲}{\text{اصفهان به قم}}$  است.

**پله سوم:** تعداد حالات مسافرت در رفت و برگشت برابر  $۱۲ = \frac{۲}{\text{مسافرت برگشت}} \times \frac{۶}{\text{مسافرت رفت}}$  خواهد بود.

\*\*\*  
 ۲. **پله ۳** **پشم‌انداز:** تعداد کل اعدادی را که با این ارقام می‌توان نوشت به دست می‌آوریم و آن‌هایی را که رقم تکراری ندارند کنار می‌گذاریم.

$$۳ \times ۳ \times ۳ = ۲۷$$

**پله یکم:** تعداد کل اعداد (با تکرار)

$$۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$$

**پله دوم:** تعداد اعدادی که تکرار ارقام ندارند:

**پله سوم:** تعداد اعداد مورد نظر  $۲۱ = ۲۷ - ۶$  است.

\*\*\*  
 ۳. **پله ۳** **پله یکم:** برای تعیین حداکثر تعداد کارخانه‌ها، حداکثرهای موجود را در هم ضرب می‌کنیم که برابر  $۱۸۰۰۰ = ۵ \times ۱۰ \times ۱۲ \times ۳۰$  است.

**پله دوم:** برای تعیین حداقل تعداد کارخانه‌ها، حداقل‌های موجود را در هم ضرب می‌کنیم که برابر  $۸۰۰۰ = ۵ \times ۸ \times ۱۰ \times ۲۰$  است.

**پله سوم:** اختلاف حداکثر و حداقل کارخانه‌ها برابر  $۱۰۰۰۰ = ۱۸۰۰۰ - ۸۰۰۰$  است.

\*\*\*  
 ۴. **پله ۱** **پشم‌انداز:** تعداد مکان‌هایی که ما می‌توانیم گلدان در آن قرار دهیم ۸ تاست (هر پله دو سمت دارد و تعداد پله‌ها ۴ تاست) می‌خواهیم ۸ گلدان را در این ۸ جا قرار دهیم. پس تعداد جایگشت‌ها برابر است با:

$$۸! = ۴۰۳۲۰ = ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$$

\*\*\*  
 ۵. **پله ۲** **پشم‌انداز:** اگر  $n$  شیء داشته باشیم که شیء اول،  $n_1$  بار، شیء دوم  $n_2$  بار، ... شیء  $k$ ام،  $n_k$  بار تکرار شده باشد  $(n = n_1 + n_2 + \dots + n_k)$  تعداد حالاتی که می‌توان این شیء را کنار هم چید از رابطه  $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$  به دست می‌آید.



$$y = \frac{1}{x^2 - x} \Rightarrow yx^2 - yx - 1 = 0 \quad (1) \Rightarrow \Delta = y^2 + 4y \geq 0 \Rightarrow y(y+4) \geq 0 \Rightarrow y \leq -4 \text{ یا } y \geq 0$$

البته باید توجه کنید که  $y$  برابر صفر نمی‌تواند باشد، زیرا در معادله (۱) ضریب  $x^2$  است و اگر  $y = 0$  باشد به رابطه  $-1 = 0$  می‌رسیم، در نتیجه  $y \neq -3, -2, -1, 0$  است.

\*\*\*

۱۴. **پشم‌انداز:** تیم متشکل از ۴ دختر و ۲ پسر یا ۵ دختر و ۱ پسر است.

$$\binom{5}{4} \binom{4}{2} + \binom{5}{5} \binom{4}{1} = 5 \times 6 + 1 \times 4 = 34$$

\*\*\*

۱۵. **پشم‌انداز:** عددی مضرب ۵ است که یکنانش صفر یا ۵ باشد و از آن جایی که تکرار در این سؤال مجاز نیست پس سؤال را در ۲ حالت حل می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} \frac{5 \times 4 \times 3 \times 1}{5} &= 60 \\ \frac{4 \times 4 \times 3 \times 1}{5} &= 48 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 60 + 48 = 108$$

**پاسخنامه آزمون ۵/۱ جامع ۶ (فصل‌های ۵ و ۶)**

\*\*\*

۱. **پشم‌انداز:** باید به‌ازای هر  $x$  حداکثر یک  $y$  داشته باشیم.

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه «۱»:  $x = y + \sqrt{y} \Rightarrow x + \frac{1}{4} = y + \sqrt{y} + \frac{1}{4} = \left(\sqrt{y} + \frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{y} + \frac{1}{4} = \pm \sqrt{x + \frac{1}{4}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = \sqrt{x + \frac{1}{4}} - \frac{1}{4} \Rightarrow y = \left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} - \frac{1}{4}\right)^2 \\ \sqrt{y} = -\sqrt{x + \frac{1}{4}} - \frac{1}{4} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

گزینه «۲»:  $x = 1 \Rightarrow y(y^2 - 4) = 0 \Rightarrow y = 0, \pm 2$  تابع نیست.

گزینه «۳»:  $x = 1 \Rightarrow |2y + 1| = 1 - y \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = 0 \end{cases}$  تابع نیست.

گزینه «۴»:  $x = 0 \Rightarrow y(y + |y|) = 0 \Rightarrow y \leq 0$  تابع نیست.

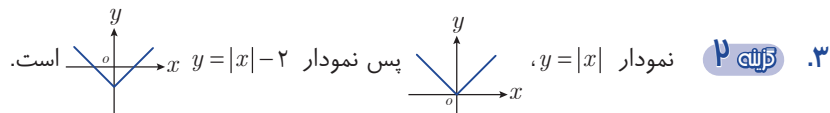
\*\*\*

۲. **پشم‌انداز:** نقاط داده شده را در تابع قرار می‌دهیم و دستگاه حاصل را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} (1, 0): & 0 = a + b + c \\ (0, -6): & -6 = c \\ (-2, -6): & -6 = 4a - 2b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 6 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 4$$

پله دوم:  $f(x) = 2x^2 + 4x - 6 \Rightarrow f(-1) = 2 - 4 - 6 = -8$

\*\*\*



\*\*\*

۴. **پشم‌انداز:** ابتدا ۲ نفر را انتخاب می‌کنیم، سپس از ۴ نفر باقی‌مانده ۲ نفر را و از ۲ نفر باقی‌مانده نیز ۲ نفر را برمی‌گزینیم ولی از آن جایی که ترتیب اهمیتی ندارد و تعداد افراد گروه‌ها برابر است به جایگشت ۳ گروه تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{\binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2}}{3!} = \frac{15 \times 6 \times 1}{6} = 15$$

## پاسخ نامه فصل هفتم

### آمار و احتمال



#### پاسخنامه آزمون ۵۹ فضای نمونه‌ای و پیشامد

\*\*\*  
 ۱. **پرسش ۲** از نمودار درختی استفاده می‌کنیم.  
 پس مقدار کل  $6+4=10$  است.  
 سکه  $\begin{cases} \text{پشت} \longrightarrow \text{یک تاس (حالت ۶)} \\ \text{رو} \longrightarrow \text{دو سکه (حالت } 2 \times 2 = 4) \end{cases}$

\*\*\*  
 ۲. **پرسش ۳** می‌دانیم به هر زیر مجموعه از فضای نمونه‌ای، یک پیشامد گفته می‌شود.  
 چون عدد ۳ در پیشامد ظاهر شده، بقیه اعداد در این پیشامد می‌توانند باشند یا نباشند بنابراین جواب، تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه ۵ عضوی یعنی  $2^5 = 32$  است.

\*\*\*  
 ۳. **پرسش ۲** پرتاب ۳ سکه  $2 \times 2 \times 2 = 8$  حالت دارد که در ۲ حالت پشت و رو با هم دیده نمی‌شوند  $\{پپپ, ررر\}$  پس پیشامد  $A$ ،  $8-2=6$  عضو دارد. این را می‌توانستید با نوشتن اعضای  $A$  به صورت  $\{پپر, پپر, پپپ, ررر, رپر, رپر, ررپ\}$  نیز متوجه شوید.

\*\*\*  
 ۴. **پرسش ۳** چشم‌انداز: ۳ نقطه باید روی خط راست نباشند تا تشکیل مثلث دهند، پس دو نقطه از خط بالا و یکی از خط پایین یا دو نقطه از خط پایین و یکی از خط بالا انتخاب می‌کنیم.

$$n(A) = \binom{3}{2} \binom{4}{1} + \binom{4}{2} \binom{3}{1} = 3 \times 4 + 6 \times 3 = 12 + 18 = 30$$

\*\*\*  
 ۵. **پرسش ۴** چشم‌انداز: پیشامد اتفاق افتادن  $A$  و اتفاق نیفتادن  $B$ ،  $A-B$  است.

$$\left. \begin{matrix} A = \{2, 3, 5\} \\ B = \{2, 4, 6\} \end{matrix} \right\} \Rightarrow A-B = \{3, 5\}$$

بله یکم

بله دوم: باید پیشامدی را در گزینه‌ها انتخاب کنیم که در آن ۳ و ۵ دیده شود که این در گزینه «۴» اتفاق می‌افتد.

\*\*\*  
 ۶. **پرسش ۲** چشم‌انداز:  $A-B = A - (A \cap B)$  است.

بله یکم:  $A = \{د۳, پ۳, د۴, د۵\}$  و  $B = \{د۲, پ۳, د۳, پ۲, د۴, د۵\}$  است، پس  $A-B = \{د۱, پ۴, د۵\}$  می‌شود.

$$n(A-B) = \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 5 + 1 = 6$$

بله دوم

\*\*\*

۱. **پله یکم:** خانواده دارای ۴ فرزند، پس  $n(S) = 2^4 = 16$  است.

**پله دوم:** پیشامدی مد نظر است که تعداد فرزندان دختر و پسر برابر یعنی ۲ فرزند پسر و ۲ فرزند دختر باشد پس

$$n(A) = \binom{4}{2} = 6$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

**پله سوم:**

\*\*\*

۲. **پله یکم:** ۳ مهره از بین ۹ مهره موجود انتخاب می‌کنیم.

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{\cancel{9} \times \cancel{8} \times \cancel{7} \times 6!}{\cancel{6} \times 6!} = 84$$

**پله دوم:** حالت‌هایی که در آن تعداد مهره‌های آبی از قرمز بیشتر است، به صورت زیر است.

$$\binom{4}{1} \times \binom{2}{2} = 4$$

حالت ۱: یک مهره آبی و دو مهره سبز:

$$\binom{4}{2} \times \binom{2}{1} = 12$$

حالت ۲: ۲ مهره آبی و یک مهره سبز:

$$\binom{4}{3} = 4$$

حالت ۳: ۳ مهره آبی:

$$\binom{4}{2} \times \binom{3}{1} = 18$$

حالت ۴: ۲ مهره آبی و ۱ مهره قرمز:

$$n(A) = 4 + 12 + 4 + 18 = 38 \Rightarrow P(A) = \frac{38}{84} = \frac{19}{42}$$

\*\*\*

۳. **پله یکم:** تعداد کل حالت‌ها در پرتاب دو تاس برابر است با:

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

**پله دوم:** برای تاس سفید ۲ حالت (۱ یا ۵) و برای تاس سیاه ۳ حالت (۱ یا ۳ یا ۵) داریم پس:

$$n(A) = 3 \times 2 = 6$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

**پله سوم:**

\*\*\*

۴. **پشم‌انداز:** از ۳ مهره خارج شده باید ۲ آبی و ۱ قرمز یا ۲ قرمز و ۱ آبی باشد.

$$n(S) = \binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 35$$

**پله یکم:** تعداد کل حالت‌ها انتخاب ۳ مهره از ۷ مهره است:

$$n(A) = \binom{4}{2} \binom{3}{1} + \binom{3}{2} \binom{4}{1} = 30$$

**پله دوم:**

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}$$

**پله سوم:**

\*\*\*

۵. **روش اول:** پله یکم: ابتدا تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای را مشخص می‌کنیم:

$$n(S) = 6^2 = 36$$

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)}_{6^1} \\ \underbrace{(2,3), (2,4), (2,5), (2,6)}_{6^2} \\ \underbrace{(3,4), (3,5), (3,6)}_{6^3} \\ \underbrace{(4,5), (4,6)}_{6^4} \\ \underbrace{(5,6)}_{6^5} \end{array} \right\}$$

**پله دوم:** حالت‌هایی که عدد دوم از عدد اول بیشتر باشد به صورت روبه‌رو است.

پله دوم: تعداد حالاتی که هر ۳ دانش آموز از رشته ریاضی باشند:

$$n(A') = \binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} = 10$$

پله سوم:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{10}{165} = 1 - \frac{2}{33} = \frac{31}{33}$$

\*\*\*

۸. **پله ۱** تعداد کل حالت‌ها در پرتاب دو تاس برابر ۳۶ است. تعداد اعداد مضرب ۳، ۲ تاست (۳ و ۶) پس اگر اولی

مضرب ۳ باشد و دومی مضرب ۳ نباشد  $4 \times 2 = 8$  حالت دارد همین‌طور برعکس آن نیز ۸ حالت دارد، در نتیجه

$$P(A) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} \quad n(A) = 16 \text{ است.}$$

\*\*\*

۹. **پله ۲** پله یکم:

$$n(S) = P(6, 3) = \binom{6}{3} \times 3!$$

پله دوم: چون ۴ روی کارت هست پس یک رقم آن معلوم است پس دو رقم بعدی را از بین بقیه به غیر از ۶ انتخاب می‌کنیم.

$$n(A) = \binom{4}{2} \times 3!$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{2} \times 3!}{\binom{6}{3} \times 3!} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0.3 \quad \text{پله سوم:}$$

\*\*\*

۱۰. **پله ۳** پله یکم: ۶ گوی را در کنار هم قرار می‌دهیم. پس  $n(S) = 6!$  است.

پله دوم: دو حالت ممکن است رخ دهد. مهره اول سیاه و مهره آخر سفید یا این که مهره اول سفید و مهره آخر سیاه باشد.

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{\text{سفید}} \times \frac{4}{\text{سیاه}} \times \frac{3}{\text{سفید}} \times \frac{2}{\text{سیاه}} \times \frac{1}{\text{سفید}} \times \frac{3}{\text{سیاه}} &= 4! \times 9 \\ \frac{3}{\text{سیاه}} \times \frac{4}{\text{سفید}} \times \frac{3}{\text{سیاه}} \times \frac{2}{\text{سفید}} \times \frac{1}{\text{سیاه}} \times \frac{3}{\text{سفید}} &= 4! \times 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow n(A) = 2 \times 4! \times 9$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2 \times 4! \times 9}{6 \times 5 \times 4!} = \frac{3}{5} = 0.6 \quad \text{پله سوم:}$$

**پاسخنامه آزمون ۶۷ آمار**

\*\*\*

۱. **پله ۳** نمونه، زیرمجموعه‌ای از جامعه است. پس تعداد اعضای نمونه از تعداد اعضای جامعه کم‌تر و اعضای نمونه،

اعضای جامعه‌اند پس گزاره‌های دوم و سوم درست هستند.

\*\*\*

۲. **پله ۲** مصاحبه، مشاهده و آزمایش همه راه‌های جمع‌آوری اطلاعات هستند ولی الگوی خاص نیست. همین که در

گزینه «۲» از لفظ «خاص» استفاده شده است نمی‌تواند یک روش دقیق و معتبر باشد.

\*\*\*

۳. **پله ۳** نوع آلاینده هوا با اعداد و ارقام بیان نمی‌شود پس کیفی است و ترتیبی ندارد پس اسمی است.

\*\*\*

۴. **پله ۴** گروه خونی کیفی اسمی است.

\*\*\*

۵. **پله ۲** گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه «۱»: تعداد فرزندان: کمی

گزینه «۲»: قد: کمی

گزینه «۳»: مدت زمان رسیدن به خانه: کمی

گزینه «۴»: میزان لذت تماشای فوتبال: کیفی



# پاسخنامه فصل هشتم

## آزمون‌های جامع کتاب



### پاسخنامه آزمون ۷۱ جامع ۱

\*\*\*

۱. **پسشمانداز:** برای تعیین اعضای  $A - \{B\}$ ، اعضای مشترک  $A$  و  $\{B\}$  را از  $A$  حذف می‌کنیم.  
 پله یکم:  $A - \{B\} = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\} - \{\{a, b\}\} = \{a, b, \{a\}\}$   
 پله دوم: مجموعه  $A - \{B\}$  دارای ۳ عضو است. بنابراین  $2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$  زیرمجموعه سره غیر تهی دارد.

\*\*\*

۲. **پسشمانداز:** اولین جمله و قدر نسبت دنباله مشترک را تعیین می‌کنیم. قدر نسبت کم قدر نسبت دو دنباله است.  
 پله یکم:  $\{2, 7, 12, 17, 22, \dots\}$  / اولین جمله مشترک  $\Rightarrow \{8, 11, 14, 17, 20, \dots\}$   
 قدر نسبت دنباله اول  $d_1 = 5$  و قدر نسبت دنباله دوم  $d_2 = 3$  است. قدر نسبت دنباله جملات مشترک این دو دنباله کم  $d_1$  و  $d_2$  یعنی ۱۵ است.

پله دوم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 17 + 15(n-1) = 17 + 15n - 15 = 15n + 2$$

$$100 \leq 15n + 2 \leq 999 \Rightarrow 98 \leq 15n \leq 997 \Rightarrow 6/53 \leq n \leq 66/46$$

$$\xRightarrow{n \in \mathbb{N}} 7 \leq n \leq 66 \Rightarrow \text{تعداد جملات (سه رقمی)} = 66 - 7 + 1 = 60$$

\*\*\*

۳. **پسشمانداز:** در دنباله هندسی  $r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$  است.

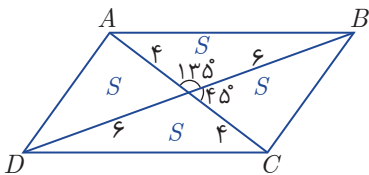
پله یکم:

$$\frac{a_7}{a_3} = 16 \Rightarrow r^4 = 16 \xRightarrow{r > 0} r = 2$$

پله دوم:

$$\frac{a_{11}}{a_8} = r^3 = 2^3 = 8$$

\*\*\*



۴. **پسشمانداز:** روش اول) **پسشمانداز:** دو قطر متوازی الاضلاع آن را به ۴ مثلث معادل (هم مساحت) تقسیم می‌کنند.

$$S_{ABCD} = 4S = 4 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin 135^\circ = 24\sqrt{2}$$

بنابراین مساحت متوازی الاضلاع  $ABCD$ ، برابر  $24\sqrt{2}$  است.

روش دوم) مساحت هر چهار ضلعی برابر نصف حاصل ضرب دو قطر در سینوس زاویه بین آنهاست.

$$S = \frac{1}{2} \times (8)(12) \sin 135^\circ = 24\sqrt{2}$$

\*\*\*  
۱۸. **پژوهنده:** فرض می‌کنیم  $P(A \cap B) = x$  باشد.

پله یکم: 
$$P(A) = 2P(B) = 3 \underbrace{P(A \cap B)}_x \Rightarrow \begin{cases} P(A) = 3x \\ P(B) = \frac{3}{2}x \end{cases}$$

پله دوم: 
$$\frac{P(A \cup B)}{P(A \cap B)} = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = \frac{x + \frac{3}{2}x - x}{x} = \frac{\frac{3}{2}x}{x} = 3/5$$

\*\*\*  
۱۹. **پژوهنده:** حالت نشستن یک در میان افسرها و سربازها □□□□□□ است.

پله یکم:  $n(S) = 7!$  تعداد حالات قرارگیری ۷ نفر در کنار هم

پله دوم: چهار افسر و سه سرباز یک در میان (اس اس اس اس اس اس اس)   
  $n(A) = 4! \times 3!$    
 جابجایی سربازها جابجایی افسرها

پله سوم: 
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4! \times 3!}{7!} = \frac{4! \times 3!}{7 \times 6 \times 5 \times 4!} = \frac{1}{35}$$

\*\*\*  
۲۰. **پژوهنده:** در هر صورت یا  $a$  قبل از  $b$  سوار می‌شود یا  $b$  قبل از  $a$  و احتمال این دو برابر است. پس احتمال این که  $a$  قبل از  $b$  سوار شود، برابر  $\frac{1}{2}$  است.

✓ پاسخنامه آزمون ۷۷ جامع ۷

\*\*\*  
۱. **پژوهنده:** جملات دنباله را  $a, aq, aq^2$  در نظر می‌گیریم.

پله یکم:  $(\frac{a}{q})(a)(aq) = 216 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = 6$

پله دوم:  $\frac{a}{q} + a + aq = 19 \xrightarrow{a=6} \frac{6}{q} + 6 + 6q = 19 \Rightarrow \frac{6}{q} + 6q = 13 \Rightarrow 6q^2 - 13q + 6 = 0$

$$\Rightarrow q = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} \end{cases}$$

پله سوم: در هر دو حالت ( $q = \frac{3}{2}$  یا  $\frac{2}{3}$ ) اعداد ۶ و ۹ هستند که اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین آن‌ها ۵ است.

\*\*\*  
۲. **پژوهنده:** سه عدد وقتی تشکیل دنباله حسابی می‌دهند که عدد وسط، واسطه حسابی دو تای دیگر باشد.

پله یکم: اگر فرض کنیم جمله اول دنباله هندسی  $a$  باشد،  $aq$  و  $2aq^2$  تشکیل دنباله حسابی می‌دهند.

$$2(2aq^2) = aq + aq^y \xrightarrow{q \neq 0} 4q^3 = 1 + q^y \xrightarrow{q^y = x} x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow q^3 = 2 \pm \sqrt{3}$$

پله دوم:  $q = 2 + \sqrt{3}$ :  $\frac{aq^y}{aq} = \frac{aq^y}{aq} = q^y = (q^3)^2 = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$    
 بزرگ‌ترین:  $q = 2 + \sqrt{3}$    
 کوچک‌ترین

$q = 2 - \sqrt{3}$ :  $\frac{aq^y}{aq^y} = \frac{aq}{q^6} = \frac{1}{q^5} = (\frac{1}{q^3})^2 = (\frac{1}{2 - \sqrt{3}})^2 = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$    
 بزرگ‌ترین:  $q = 2 - \sqrt{3}$    
 کوچک‌ترین

\*\*\*  
۳. **پژوهنده:**  $A_\lambda = \left\{ m \in \mathbb{Z} \mid m > -8, \underbrace{2^m \leq 16}_{m \leq 4} \right\} = \{-7, -6, \dots, 4\}$

$$A_f = \left\{ m \in \mathbb{Z} \mid m > -4, \underbrace{2^m \leq 8}_{m \leq 3} \right\} = \{-3, -2, \dots, 3\}$$

$$A_1 = \left\{ m \in \mathbb{Z} \mid m > -1, \underbrace{2^m \leq 2}_{m \leq 1} \right\} = \{0, 1\}$$

$$(A_\lambda - A_f) \cup A_1 = \{-7, -6, -5, -4, 4\} \cup \{0, 1\} = \{-7, -6, -5, -4, 0, 1, 4\}$$

پله دوم:

این مجموعه 7 عضو دارد.

\*\*\*  
**۴. گزینه ۱** چشم‌انداز:  $A_n = \left(-\frac{2}{n}, 1 - \frac{2}{n}\right)$  است.

$$\left. \begin{aligned} A_f &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & A_5 &= \left(-\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) & A_6 &= \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ A_7 &= \left(-\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right) & A_8 &= \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bigcap_{i=f}^8 A_i = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

دقت کنید که ابتدای بازه‌ها و انتهای بازه‌ها زیاد می‌شوند پس اشتراک بازه‌ای است که ابتدای آن، ابتدای آخری و انتهای آن، انتهای اولی است.

\*\*\*  
**۵. گزینه ۳** چشم‌انداز: واسطه حسابی دو عدد مثبت  $a$  و  $b$  برابر  $\frac{a+b}{2}$  و واسطه هندسی آن‌ها  $\sqrt{ab}$  است.

$$\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} \Rightarrow 2\sqrt{ab} = a+b \Rightarrow 2\sqrt{ab} - a - b = 0 \Rightarrow a^2 - 14ab + b^2 = 0 \xrightarrow{+b^2} \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 14\frac{a}{b} + 1 = 0 \xrightarrow{x=\frac{a}{b}} x^2 - 14x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = 7 \pm 4\sqrt{3} = (7 \pm \sqrt{3})^2$$

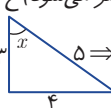
\*\*\*  
**۶. گزینه ۳** چشم‌انداز:  $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$  و  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$  است.

$$\sin^4 x + \sin^2 x = \frac{3}{5} \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x \stackrel{(1)}{=} 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

\*\*\*  
**۷. گزینه ۴** چشم‌انداز: رابطه را طرفین وسطین کرده و به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\sin x = 2(1 - \cos x) \Rightarrow \sin^2 x = 4(1 - 2\cos x + \cos^2 x) \Rightarrow 1 - \cos^2 x = 4 - 8\cos x + 4\cos^2 x$$

$$\Rightarrow 5\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب=صفر}} \begin{cases} \cos x = 1 & \text{مخرج صفر می‌شود (غ ق ق)} \\ \cos x = \frac{3}{5} \Rightarrow 3 \end{cases}$$


$$\Rightarrow \cot x = \frac{3}{4}$$

\*\*\*  
**۸. گزینه ۲** چشم‌انداز: ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم. سپس مقدار را جایگزین می‌کنیم.

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{1}{\cot x} = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin x(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + \sin x}{(1 + \sin x)\cos x}$$

$$= \frac{1 + \sin x}{(1 + \sin x)\cos x} = \frac{1}{\cos x} = 4$$

\*\*\*  
**۹. گزینه ۴** چشم‌انداز: مساحت هر ۴ ضلعی برابر نصف حاصل ضرب دو قطر در سینوس زاویه بین آن‌هاست.

$$S = \frac{1}{2} (12)(8\sqrt{3}) \underbrace{\sin 60^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 72$$

\*\*\*  
**۱۰. گزینه ۳** چشم‌انداز:  $2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$  است.

$$(2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x = 4 \Rightarrow \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^x} + (2 + \sqrt{3})^x = 4 \quad \text{پله یکم:}$$

$$\frac{1}{A} + A = 4 \Rightarrow A^2 - 4A + 1 = 0 \Rightarrow A = 2 \pm \sqrt{3} \quad \text{پله دوم: فرض می‌کنیم } (2 + \sqrt{3})^x = A \text{ باشد.}$$

$$(2 + \sqrt{3})^x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow x = 1 \quad \text{پله سوم:}$$

$$(2 + \sqrt{3})^x = 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \Rightarrow x = -1$$

\*\*\*

۱۱. چشم‌انداز: با تجزیه صورت و مخرج کسر اول و عکس کردن کسر دوم و تبدیل تقسیم به ضرب عبارت را ساده می‌کنیم.

$$a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = (a+b)^2 - c^2 = (a+b+c)(a+b-c) \quad \text{پله یکم:}$$

$$a^2 + 2ac + c^2 - b^2 = (a+c)^2 - b^2 = (a+c+b)(a+c-b)$$

$$\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)(a+c-b)} \times \frac{a+c-b}{a+b-c} = 1 \quad \text{پله دوم:}$$

\*\*\*

۱۲. چشم‌انداز: فرض را عکس کرده و  $x + \frac{1}{x}$  را به دست آورده و در دومی قرار می‌دهیم.

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{x^2+1}{x^2} = y \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y \Rightarrow (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = y \Rightarrow (x + \frac{1}{x})^2 = 9 \xrightarrow{x>0} x + \frac{1}{x} = 3 \quad \text{پله یکم:}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2(x + \frac{1}{x}) = (3)^2 - 2(3) = 9 - 6 = 3 \quad \text{پله دوم:}$$

\*\*\*

۱۳. روش اول) هر یک از نامساوی‌ها را حل کرده و اشتراک جواب‌ها را به دست می‌آوریم.

$$-1 < \frac{3x+1}{x-3} \Rightarrow \frac{3x+1}{x-3} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{4x-2}{x-3} > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \text{ یا } x > 2 \quad (1) \quad \text{پله یکم:}$$

$$\frac{3x+1}{x-3} < 3 \Rightarrow \frac{3x+1}{x-3} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{10}{x-3} < 0 \Rightarrow x-3 < 0 \Rightarrow x < 3 \quad (2) \quad \text{پله دوم:}$$

$$(1) \cap (2): x < \frac{1}{2} \quad \text{پله سوم:}$$

روش دوم) چشم‌انداز: نامساوی را به یک نامساوی قدر مطلق تبدیل کرده و نامعادله قدر مطلق را با به توان ۲ رساندن حل می‌کنیم. برای این کار  $\frac{-1+3}{2} = 1$  را از نامساوی کم می‌کنیم.

$$-1 < \frac{3x+1}{x-3} < 3 \Rightarrow -2 < \frac{3x+1}{x-3} - 1 < 2 \Rightarrow \left| \frac{2x+4}{x-3} \right| < 2 \Rightarrow |x+2| < |x-3| \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2 + 4x + 4 < x^2 - 6x + 9$$

$$\Rightarrow 10x < 5 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

\*\*\*

۱۴. چشم‌انداز: برای این تابع درجه دوم  $y = ax^2 + bx + c$  همواره بالای محور  $x$  ها باشد باید  $\Delta < 0$  یا  $\Delta' < 0$  و  $a > 0$

$$1 - a > 0 \Rightarrow a < 1 \quad (1)$$

$$\Delta' = 6 + a(1-a) < 0 \Rightarrow a^2 - a - 6 > 0 \Rightarrow (a-3)(a+2) > 0 \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 3 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2): a < -2$$

\*\*\*

۱۵. چشم‌انداز: طول نقطه  $A$  را از حل معادله  $f(x) = g(x)$  به دست آورده و در یکی از دو تابع قرار می‌دهیم تا

عرض آن نیز به دست آید.

$$4^x = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} + \frac{3}{4} \Rightarrow 4^x = \frac{1}{4^x} + \frac{3}{4} \xrightarrow{4^x=A} A = \frac{1}{A} + \frac{3}{4} \Rightarrow 4A^2 - 3A - 2 = 0 \quad \text{پله یکم:}$$

$$A = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{4} \end{cases} \text{ غرق قی}$$

$$4^x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

پله دوم:

$$\left. \begin{matrix} A\left(\frac{1}{2}, 2\right) \\ B\left(-\frac{1}{2}, 1\right) \end{matrix} \right\} \Rightarrow AB = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

پله سوم:

\*\*\*

روش اول) چشم‌انداز: وارون هر ضابطه را به دست می‌آوریم.

۱۶. گزینه ۳

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

پله یکم:

$$y = -\sqrt{-x} \Rightarrow \begin{cases} -y = \sqrt{-x} \Rightarrow y^2 = -x = -y^2 \\ x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} = x|x|$$

پله دوم:

روش دوم) چشم‌انداز: اگر نقطه  $A(\alpha, \beta)$  روی تابع باشد  $A'(\beta, \alpha)$  روی تابع وارون است.

در گزینه‌های «۲» و «۳» صدق می‌کند.  $A(1,1) \Rightarrow A'(1,1)$

در گزینه «۲» صدق نمی‌کند و در گزینه «۳» صدق می‌کنند.  $B(-1,-1) \Rightarrow B'(-1,-1)$

\*\*\*

با تجزیه معادله، تعداد جواب‌های آن را تعیین می‌کنیم.

۱۷. گزینه ۴

$$3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x^2(3x+2) - x(3x+2) = 0$$

$$\Rightarrow (3x+2)(x^2 - x) = 0 \Rightarrow (3x+2)x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1, -\frac{2}{3}$$

\*\*\*

چشم‌انداز: فرض می‌کنیم رقم اول زوج باشد، تعداد آن را محاسبه می‌کنیم و حاصل را در ۴ ضرب می‌کنیم (برای

۱۸. گزینه ۴

حالاتی که رقم دوم یا سوم یا چهارم زوج باشد)

$$\frac{4}{\text{فرد}} \times \frac{5}{\text{فرد}} \times \frac{4}{\text{فرد}} \times \frac{3}{\text{فرد}} = 240$$

پله یکم:

پله دوم: تعداد کل اعداد  $240 \times 4 = 960$  است.

\*\*\*

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

۱۹. گزینه ۳ پله یکم:

$$n(A) = \binom{5}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{3}{2} \times \binom{7}{1} + \binom{2}{2} \times \binom{8}{1} = 10 \times 5 + 3 \times 7 + 1 \times 8 = 79$$

پله دوم:

$$P(A) = \frac{79}{120}$$

پله سوم:

\*\*\*

$$n(S) = \binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$

۲۰. گزینه ۲ پله یکم:

$$n(A) = \binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{1} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

پله دوم: ۳ مهره از بین ۱۲ مهره انتخاب می‌کنیم.

$$P(A) = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

پله سوم: از هر رنگ باید ۱ مهره داشته باشیم.

# بخش سوم

## درس نامه

### درس نامه فصل اول ۲۴۶

- مجموعه ۲۴۶
- زیرمجموعه ۲۴۶
- دو مجموعه مساوی ۲۴۶
- متمم یک مجموعه ۲۴۷
- اشتراک دو مجموعه ۲۴۷
- اجتماع دو مجموعه ۲۴۷
- تفاضل دو مجموعه ۲۴۷
- دو مجموعه جدا از هم (مجزا) ۲۴۷
- نمودار ون و روش شماره گذاری ۲۴۷
- تعداد عضوهای اجتماع و تفاضل دو مجموعه ۲۴۸
- مجموعه های اعداد ۲۴۸
- دنباله ۲۴۹
- الگوی خطی و غیر خطی ۲۴۹
- دنباله حسابی (عددی) ۲۴۹
- دنباله هندسی ۲۵۳

### درس نامه فصل دوم ۲۵۶

- تعریف نسبت های مثلثاتی و دایره مثلثاتی و نسبت های  $(2k\pi \pm \alpha)$  و  $(k\pi \pm \alpha)$  ۲۵۶
- دایره مثلثاتی ۲۵۸
- شیب خط ۲۵۹

### درس نامه فصل سوم ۲۶۲

- رادیکال ۲۶۲
- ریشه  $m$ ام ۲۶۲
- قوانین توان و رادیکال ۲۶۲
- اتحادهای جبری ۲۶۳
- عبارت گویا ۲۶۴

### درس نامه فصل چهارم ۲۶۸

- معادله درجه دوم ۲۶۸
- تعیین علامت ۲۷۲
- نامعادلات قدرمطلق ۲۷۴

### درس نامه فصل پنجم ۲۷۶

- تابع ۲۷۶
- دامنه تعریف  $(D_f)$  ۲۷۸
- برد  $(R_f)$  ۲۷۸
- تابع همانی ۲۸۰
- تابع ثابت ۲۸۰
- تابع خطی ۲۸۱

### درس نامه فصل ششم ۲۸۲

- اصول شمارش ۲۸۲
- شمردن ۲۸۳

### درس نامه فصل هفتم ۲۸۸

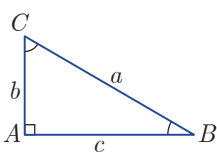
- اعمال روی پیشامدها ۲۸۸
- احتمال رخ داد یک پیشامد (اندازه گیری شانس) ۲۸۹
- قوانین احتمال ۲۸۹
- آمار ۲۹۱

# درس نامه فصل دوم

## مثلثات

### تعریف نسبت‌های مثلثاتی و دایره مثلثاتی و نسبت‌های $(2k\pi \pm \alpha)$ و $(k\pi \pm \alpha) \dots$

علم مثلثات بر پایه مثلث قائم‌الزاویه بنا شده است. در این مثلث نسبت‌های مثلثاتی هر زاویه حاده به صورت زیر تعریف می‌شود.



$$\begin{aligned} \text{سینوس} &= \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول وتر}} & \text{کسینوس} &= \frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول وتر}} \\ \text{تانژانت} &= \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}} & \text{کوتانژانت} &= \frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول ضلع مقابل}} \end{aligned}$$

مثلث  $ABC$ ، قائم‌الزاویه، پس  $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$  است، یعنی دو زاویه  $\widehat{B}$  و  $\widehat{C}$  متمم یکدیگرند.

$$\begin{aligned} \sin \widehat{B} &= \frac{b}{a} & \cos \widehat{C} &= \frac{b}{a} & \cos \widehat{B} &= \frac{c}{a} \\ \sin \widehat{C} &= \frac{c}{a} & \tan \widehat{B} &= \frac{b}{c} & \cot \widehat{C} &= \frac{b}{c} \\ \cot \widehat{B} &= \frac{c}{b} & \tan \widehat{C} &= \frac{c}{b} \end{aligned}$$

اگر به نسبت‌های فوق توجه کنید، متوجه می‌شوید که  $\cos B = \sin C$ ،  $\sin B = \cos C$ ،  $\tan B = \cot C$  و  $\cot B = \tan C$  است.

### نسبت‌های مثلثاتی بعضی از زاویه‌ها

$x$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

### فرمول‌های مثلثات

$x$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده است.
$\cot x$	تعریف نشده است.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

۱)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

۲)  $\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases} \Rightarrow \alpha \neq \frac{k\pi}{2} : \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \end{cases}$

۳)  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha}$

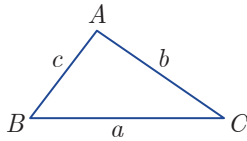
$$۴) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$۵) (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = 1 \pm 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$۶) \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$۷) \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

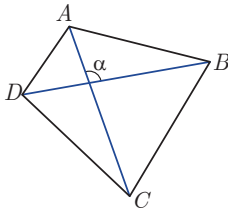
$$۸) \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$



مساحت مثلث: مساحت هر مثلث برابر نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین آنهاست.

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$S = \frac{1}{2} (AC)(BD) \sin \alpha$$



مساحت ۴ ضلعی: مساحت هر ۴ ضلعی نصف حاصل ضرب دو قطر در سینوس زاویه بین دو قطر است.

مثال. حاصل  $(\cos 15^\circ - \cos 75^\circ)^2 + (\sin 15^\circ + \sin 75^\circ)^2$  برابر کدام است؟

- ۲ (۱)       $2 \sin^2 15^\circ$  (۲)       $2 \cos^2 15^\circ$  (۳)      ۴ (۴)

پاسخ: **ب** چون  $15^\circ + 75^\circ = 90^\circ$  بنابراین  $\cos 75^\circ = \sin 15^\circ$  و  $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$  است. با استفاده از

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$(\cos 15^\circ - \sin 15^\circ)^2 + (\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)^2 = 2(\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ) = 2$$

مثال. اگر  $\sin x - \cos x = \frac{1}{4}$  مقدار  $\sin x \cos x$  کدام است؟

- $-\frac{3}{8}$  (۱)       $\frac{3}{8}$  (۲)       $-\frac{3}{4}$  (۳)       $\frac{3}{4}$  (۴)

پاسخ: **ب** طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(\sin x - \cos x)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow 1 - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{16} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{15}{16} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{3}{8}$$

مثال. اگر  $\frac{\sin a - \cos a}{2 \sin a + 3 \cos a} = \frac{1}{2}$  زاویه  $a$  کدام می‌تواند باشد؟

- $30^\circ$  (۱)       $45^\circ$  (۲)       $60^\circ$  (۳)       $90^\circ$  (۴)

پاسخ: **ب** رابطه را طرفین وسطین می‌کنیم.

$$2 \sin a + 2 \cos a = \sin a + 3 \cos a \Rightarrow \cos a = 0 \Rightarrow a = 90^\circ$$

مثال. حاصل کسر  $\frac{\tan a + \tan b}{\cot a + \cot b}$  برابر کدام است؟

- $\tan a + \tan b$  (۱)       $\tan a \tan b$  (۲)       $\cot a + \cot b$  (۳)       $\cot a \cot b$  (۴)

پاسخ: **ب** از رابطه  $\cot x = \frac{1}{\tan x}$  استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\tan a + \tan b}{\frac{1}{\tan a} + \frac{1}{\tan b}} = \frac{\tan a + \tan b}{\frac{\tan a + \tan b}{\tan a \tan b}} = \tan a \tan b$$



**مثال . حاصل  $(\cos^2 x - \sin^2 x)(1 + \tan^2 x) + \tan^2 x$  کدام است؟**

۴) صفر

۳) ۱

۲) ۲

۱) ۳

**پاسخ: گزینه ۳** با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} + \tan^2 x = 1 - \tan^2 x + \tan^2 x = 1$$

از طرفی  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$  بنابراین عبارت برابر است با

**نکته:** این گونه مسائل را می‌توانید با عددگذاری حل کنید. کافی است یک زاویه در عبارت قرار دهید و حاصل آن را محاسبه نمایید.

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \Rightarrow \text{عبارت} = (1-0)(1+0) + 0 = 1 \\ \tan x = 0 \end{cases}$$

در این سوال  $x = 0$  را قرار می‌دهیم.

**مثال . در مثلث  $ABC$ ،  $\tan \hat{C} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ،  $AC = 2BC = 6$  است. مساحت مثلث کدام است؟**

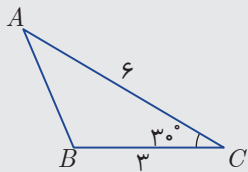
۴) ۹

۳) ۶

۲) ۵/۴

۱) ۳

**پاسخ: گزینه ۲**

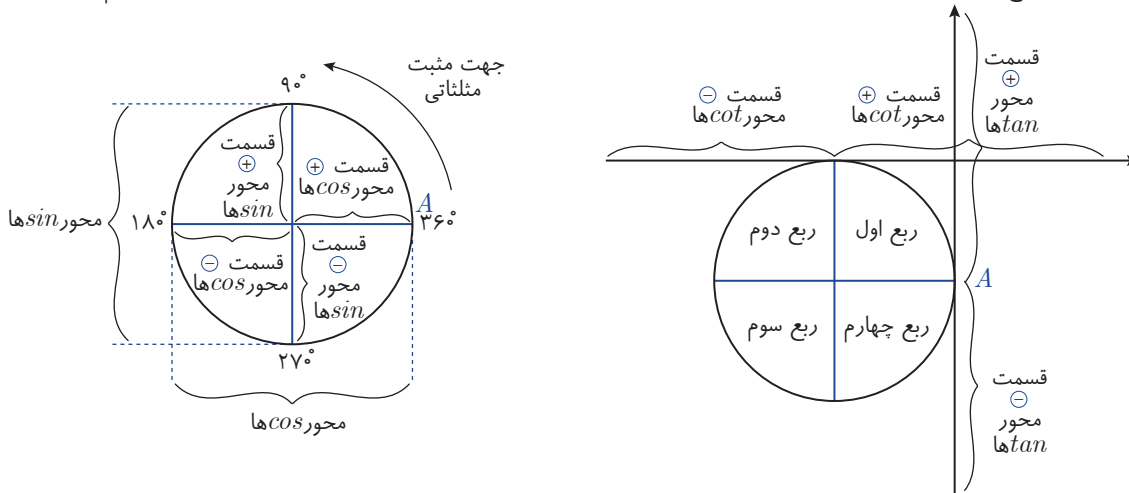


$$\tan C = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \hat{C} = 30^\circ \Rightarrow \sin C = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

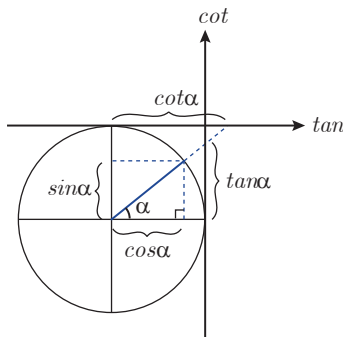
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \times BC \times \sin C = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 \times \frac{1}{2} = 4.5$$

**دایره مثلثاتی**

دایره‌ای به شعاع  $R=1$  واحد است. جهت مثبت مثلثاتی خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت و نقطه  $A$  مبدأ حرکت برای رسم زاویه است.

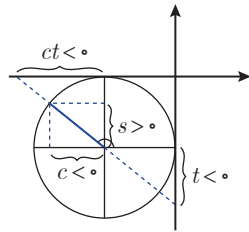


**به دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه از روی دایره مثلثاتی**



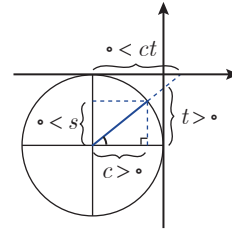
برای هر زاویه دلخواه:  $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$  و  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$  و  $\tan \alpha \in \mathbb{R}$  و  $\cot \alpha \in \mathbb{R}$  است.

علامت هر یک از نسبت‌های مثلثاتی در ۴ ناحیه دایره



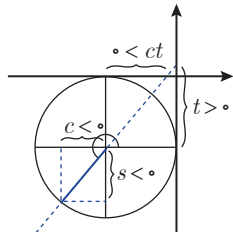
$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

در ربع دوم، فقط  $\sin \oplus$  است.



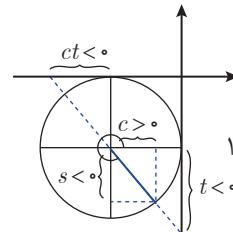
$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

در ربع اول همه نسبت‌ها،  $\oplus$  اند.



$$180^\circ < \alpha < 270^\circ$$

در ربع سوم،  $\sin$  و  $\cos \ominus$  اند و بنابراین  $\tan$  و  $\cot \oplus$  اند.



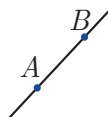
$$270^\circ < \alpha < 360^\circ$$

در ربع چهارم، فقط  $\cos \oplus$  است.

نتیجه:

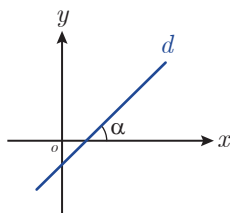
- (۱) در دو ربع اول و دوم، سینوس مثبت و در دو ربع سوم و چهارم، منفی است.
- (۲) در دو ربع اول و چهارم، کسینوس مثبت و در دو ربع دوم و سوم، منفی است.
- (۳) در دو ربع اول و سوم،  $\tan$ ،  $\cot$  هر دو مثبت و در دو ربع دوم و چهارم، هر دو منفی اند.

شیب خط



شیب هر خط مایل در دستگاه محورهای مختصات نسبت تفاضل عرض دو نقطه به تفاضل طول همان دو نقطه است.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \text{شیب خط گذرا از } A \text{ به } B$$



**تذکر:** اگر خط افقی باشد شیب آن برابر صفر و اگر خط قائم باشد شیب آن تعریف نشده است.

**تذکر:** شیب هر خط برابر با تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد.

$$m_d = \tan \alpha$$

**یادآوری:** معادله خط گذرا از نقطه  $A(x_0, y_0)$  با شیب  $m$  عبارت است از:  $y - y_0 = m(x - x_0)$

**مثال.** اگر  $\tan x = -\frac{1}{4}$  و  $\cos x > 0$ ، مقدار  $\sin x$  کدام است؟

$-\frac{\sqrt{5}}{5}$  (۴)

$-\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۳)

$\frac{\sqrt{5}}{5}$  (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۱)

**پاسخ:**  $\frac{1}{4}$  فرض می‌کنیم  $\alpha$  حاده و  $\tan \alpha = \frac{1}{4}$  باشد، با استفاده از مثلث ،  $\sin \alpha = \frac{1}{5}$  می‌شود.

چون  $\tan x < 0$  و  $\cos x > 0$  است پس  $\sin x < 0$  در نتیجه  $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$  خواهد بود.

**مثال .** اگر  $\sin \alpha \cos \alpha > 0$  و  $\cos \alpha \tan \alpha < 0$ ، انتهای کمان  $\alpha$  در کدام ناحیه دایره مثلثاتی قرار دارد؟  
 (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

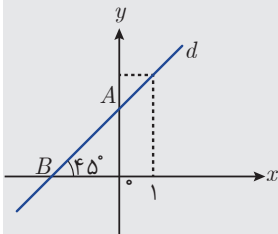
**پاسخ:** گزینه ۳

$$\left. \begin{aligned} \cos x \tan \alpha < 0 &\Rightarrow \cos \alpha \left( \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) < 0 \Rightarrow \sin \alpha < 0 \\ \sin \alpha \cos \alpha &> 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos \alpha < 0 \Rightarrow \text{سینوس و کسینوس در ناحیه سوم منفی هستند}$$

**مثال .** خطی از نقطه  $A(1, 3)$  گذشته و با جهت مثبت محور طول‌ها زاویه  $45^\circ$  می‌سازد. مساحت مثلثی که این خط با محوره‌های مختصات ایجاد می‌کند چقدر است؟

(۱) ۱ (۲) ۵/۱ (۳) ۲ (۴) ۳

**پاسخ:** گزینه ۳



$$\tan 45^\circ = 1 \Rightarrow \text{معادله } d: y - 3 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x + 2$$

$$\left. \begin{aligned} x_A = 0 &\Rightarrow y_A = 2 \\ y_B = 0 &\Rightarrow x_B = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}(2)(2) = 2$$