به نام خدا

فار آزمون

هندسه دهم

حسین هاشمی طاهری

محسن محمدکریمی

انتشارات علمی فار

phare

مقدمه

مقدمه‌ی مؤلفین

به نام خداوند جان و خرد   کزین برتر اندیشه بر نگذرد

در اهمیت و ارزش دانش، همین بس که اگر فردی آن را به‌درستی نداشته باشد داشتن آن را ادعا می‌کند و زمانی که به او داشتن دانش را نسبت دهند، خوشنود می‌گردد و در نکوهش نادانی همین بس که اگر شخصی در جهالت باشد، منکر آن خواهد شد. «حضرت علی (ع)»

در سال‌های اخیر بین دسته‌ای از دانش‌آموزان، به غلط رایج‌شده است که پاسخ به تست‌های هندسی در زمانی محدود، ناممکن است و متأسفانه بسیاری از مشاوران ناآگاه نیز این دیدگاه نادرست را تقویت می‌کنند و در نتیجه تعدادی از شرکت‌کنندگان در کنکور سراسری نیز برای این دستورالعمل ارزش قائل می‌شوند و درس هندسه را نادیده می‌گیرند؛ در عوض، دانش‌آموزانی که از این تصور باطل دوری می‌جویند، در این مسابقه پیشی می‌گیرند و چه بسا دانش‌آموزانی که از استعداد بیش‌تری برخوردارند، مسابقه را واگذار می‌کنند.

اگر درسه هندسه توأم با تمرین مناسب باشد، تست‌های آن بسیار ساده‌تر از بعضی مطالب درس‌های دیگر، قابل حل هستند و تعدادی از آن‌ها به زمان کمتری برای پاسخ‌گویی نیاز دارند. از طرفی ذکر این نکته لازم است که در هر رقابتی، پرسش‌های ساده را اغلب شرکت‌کنندگان پاسخ می‌دهند و میدان رقابت به قسمت‌های متوسط و سخت منتقل خواهد شد. توصیه می‌شود که به درس هندسه اهمیت بیش‌تری بدهید، زیرا حدود ٪۲۵ سؤالات ریاضی در رشته‌های مهندسی را تشکیل می‌دهند و علاوه بر آن، ورزیدگی در درس هندسه به علت ماهیت آن، توانایی شما را در دیگر درس‌های ریاضی و هم چنین درس فیزیک افزایش چشم‌گیری می‌دهد، پس تسلط بر هندسه باعث غلبه بر مشکلات دیگر درس‌ها خواهد شد. برای تسلط در این درس، باید به اندازه کافی تلاش کنید، برای یادگیری شنا باید به آب بزنید حتی اگر ناخواسته چند قلوپ آب هم بخورید و برای فراگیری هندسه نیز باید خود را در گرداب حل مسئله بیندازید و با چالش‌های آن برخورد کنید.

در این کتاب سعی شده است که تا حد امکان، زمینه لازم برای فراگیری درس هندسه کلاس دهم ریاضی فراهم شود و به دنبال آن زمینه لازم برای توانایی شما در سال‌های بعد نیز فراهم خواهد شد. «حسین هاشمی طاهری ـ محسن محمدکریمی»

راهنمای استفاده از کتاب

۱ـ آزمون‌های مویرگی: ابتدای هر فصل، آزمون‌های مویرگی شروع می‌شود. این آزمون‌ها مبحث به مبحث طراحی شده‌اند تا هر یک از مباحث یک فصل را گام‌به‌گام پوشش دهند، برای پاسخ‌گویی به این آزمون‌ها لازم است ابتدا مبحث مورد نظر را به‌طور دقیق از روی جزوهٔ دبیر یا درس‌نامهٔ کتاب که در انتهای این کتاب قرار گرفته است (در عین کوتاه بودن کامل و دقیق است)، مطالعه کنید و سپس به سراغ این آزمون‌ها بروید. حتماً در پایان هر آزمون پاسخ‌نامهٔ کامل و تشریحی آن را به‌طور دقیق مطالعه کنید. حتی پاسخ تست‌هایی که درست پاسخ داده‌اید را دوباره بررسی کنید، این کار سبب می‌شود راه‌های ساده‌تر و نکات مربوط به هر تست را فرابگیرید. از آن جایی که آزمون‌های مویرگی برای تکمیل آموزش ریزبخش‌های هر فصل طراحی شده است لذا رعایت وقت پیشنهادی ضرورتی ندارد بنابراین بدون نگرانی از زمان و به قصد یادگیری از این آزمون‌ها استفاده کنید.

۲ـ آزمون‌های جامع هر فصل: در پایان هر فصل آزمون‌هایی از مباحث کل فصل طراحی شده است. این آزمون‌ها را وقتی پاسخ دهید که مطالعهٔ فصل را به طور کامل انجام داده و مطالب را کاملاً فرا گرفته‌اید. باز هم در پایان هر آزمون پاسخ‌نامه را دقیق مورد بررسی قرار دهید. در این آزمون‌ها سعی کنید کم‌کم بحث زمان‌بندی را هم تمرین کنید.

۳ـ آزمون‌های دوره‌ای و مروری: در پایان بعضی از فصول کتاب، آزمون‌هایی قرار دارد که ۲ یا ۳ فصل قبلی را مورد ارزیابی قرار می‌دهد؛ این آزمون‌ها برای مرور فصل‌های قبلی در نظر گرفته شده است و باعث می‌شود تا با سوالات ترکیبی از آن چند فصل روبه‌رو شوید و هم چنین دوره‌ای از فصل‌های گذشته داشته باشید. در این آزمون‌ها حتماً وقت پیشنهادی را برای پاسخ‌گویی در نظر بگیرید.

۴ـ آزمون‌های جامع پایان کتاب: این آزمون‌ها برای دورهٔ کامل مطالب کتاب طراحی شده است. معمولاً زمان پاسخ‌گویی به این آزمون‌ها حوالی اردیبهشت ماه است (البته برای دانش‌آموزان پایهٔ دهم داوطلبان کنکور می‌توانند هر زمان که مطالب کتاب ریاضی دهم را به طور کامل آموختند سراغ این آزمون‌ها بروند). این آزمون‌ها محک خوبی برای آموخته‌های شما از کتاب ریاضی دهم است. باز هم توصیه می‌کنیم پاسخ‌نامهٔ هر یک از آزمون‌ها که به طور جامع و تشریحی نوشته شده است را در پایان هر آزمون به دقت بررسی کنید.

در انتها توصیه می‌کنیم هر آزمون را در چند نوبت و با فاصلهٔ زمانی مناسب، از خودتان امتحان بگیرید و نتیجه را در هر نوبت یادداشت کنید تا ناقط ضعف خود را به‌طور کامل پوشش داده باشید.

موفق باشید

«روش مطالعهٔ درس ریاضی»

ولفگانگ کُهلر یکی از دانشمندان علم روانشناسی (متولد ۱۸۸۷) آزمایشی را روی یک میمون به نام سلطان انجام داد. او یک موز را با فاصلهٔ زیاد خارج از قفس سلطان قرار می‌دهد و سه تکه چوب کوچک، متوسط و بزرگ را در داخل قفس می‌گذارد و با دوربین حرکات سلطان را زیر نظر می‌گیرد سلطان که بسیار گرسنه بود سعی می‌کند با دست و پا آن موز را بردارد اما به دلیل فاصلهٔ زیاد موفق نمی‌شود. از چوب متوسط و بعد از آن بقیهٔ چوب‌ها استفاده می‌کند ولی باز موفق نمی‌شود. دقایق زیادی این تلاش ادامه می‌یابد و در آخر سلطان بسیار خسته و نا امید در گوشه‌ای از قفس می‌افتد و با چشمانی خسته نظاره‌گر موز، قفس و چوب‌ها می‌شود. بعد از چند دقیقه مکث از جای خودش بلند می‌شود و انتهای چوب‌ها که دارای نری و مادگی بوده را به درون هم چفت کرده و آن چوب را کامل کرده و به بیرون قفس می‌اندازد و موفق می‌شود تا موز را به سمت خود بکشد و در نهایت با حس رضایت آن موز را نوش جان می‌کند. فردای همان روز آقای کُهلر آزمایش دیگری ترتیب می‌دهد و برای دومین بار یک موز از بالای قفس آویزان می‌کند و چند جعبهٔ چوبی در قفس می‌اندازد. در این آزمایش سلطان بدون فکر کردن بلافاصله جعبه‌ها را روی هم می‌گذارد و به موز دست پیدا می‌کند و سریع آن را می‌بلعد. این آزمایش‌ها ثابت کرد که تا قبل از توجه کافی به مسأله، سلطان نتوانست نکته را بیابد. یعنی سلطان می‌خواست موز را به داخل قفس بکشاند ولی توجه کافی به وسایل دور و برش مثل چوب‌ها نداشت اما بعد از توجه عمیق روی مسأله متوجه شده که نری و مادگی (نکتهٔ اصلی مسأله) در سر و ته چوب‌ها است که می‌تواند آن‌ها را به هم وصل کند و چوب بزرگ‌تری که احیاناً به موز می‌رسد را بسازد؛ که بعد از این عمل موفق به خوردن موز شد.

کُهلر نتیجه می‌گیرد: ۱ـ تا زمانی که سلطان به عمق مسأله پی نبرد نتوانست موفق عمل کند. ۲ـ وقتی سلطان به همهٔ ابزارهای داخل قفس به خوبی نگاه کرد و در ذهنش راه حل را به طور کامل چید (یک‌پارچگی راه حل) و آن وقت توانست بلافاصله بدون هیچ اشتباهی مسأله را حل کند. ۳ـ وقتی که سلطان با مسأله‌ای مواجه شد و با تلاش زیاد و تفکر عمیق و یک‌پارچه آن را حل کرد این موضوع باعث شد تا بتواند مسایل مشابه را راحت‌تر و با صرف وقت کم‌تر حل نماید (مثل آزمایش دوم که سلطان باید موز آویزان شده از قفس را بدست می‌آورد).

در سال‌های بعدی دانشمندان دیگری روی موضوع حل مسأله کار کردند و نتیجه گرفتند کسانی که به دنبال حل مسأله هستند را می‌توان به دو گروه تقسیم کرد:

تازه‌کاران و کهنه‌کاران

۱ـ کهنه‌کاران به دلیل حل مسائل زیاد و تمرین‌های پی در پی، الگوی حل مسائل مختلف را در ذهن می‌پرورانند و از اینکه با مسائل سخت روبه‌رو شوند نمی‌ترسند و ساعت‌ها با آن کلنجار می‌روند ولی تازه‌کاران حوصلهٔ بررسی مسأله را ندارند و با چند یا حتی یک خطا سریع به پاسخ آن در پاسخ‌نامه رجوع می‌کنند بنابراین الگوها در ذهنشان تثبیت نمی‌شود.

۲ـ کهنه‌کاران تا به یک‌پارچگی در حل سوال نرسند شروع به حل نمی‌کنند و صرفاً با کشیدن شکل و برانداز کردن سوال سعی در پیدا کردن نکته سوال می‌کنند و بعد از اینکه توانستند به خوبی سوال را کالبدشکافی کنند به صورت یک‌پارچه شروع به پاسخ می‌کنند. ولی تازه‌کاران از همان ابتدا با دیدن سوال شروع به حل می‌کنند و به طور پراکنده هر چه به ذهنشان می‌رسد را می‌نویسند و در آخر نه تنها حل آن را نیافته‌اند بلکه سردرگم‌تر شده‌اند.

۳ـ کهنه‌کاران بر روی سوال تمرکز می‌کنند تا بتوانند ابتدا محتوا و خواست اصلی سوال را دقیق و درست بفهمند، پس از آن است که جواب از دل سوال بیرون می‌آید ولی تازه‌کاران حل مسأله به صورت سوال توجه کافی ندارند و معمولاً شتاب‌زده از روی سوال می‌گذراند و تمرکزشان بر روی جواب است، غافل از این که جواب سوال را نباید ابداع کرد. بلکه جواب را باید در درون سوال کشف کرد.

این دانشمندان بعد از چنین آزمایش‌هایی توصیه می‌کنند که:

۱ـ برای حل مسأله از دیگران کمک نگیرید و سعی کنید خودتان با گذاشتن وقت و بدون خستگی سوال را موشکافی کنید تا نکته‌های آن را درک نمایید.

۲ـ از کشیدن شکل و توضیح موضوع برای خودتان غافل نشوید تا درک بصری از مسأله پیدا کنید.

۳ـ وقتی مسأله‌ای را حل کردید چند مسأله مشابه آن را مجدد حل کنید.

۴ـ بعد از حل مسأله‌هایی که نکته‌دار هستند خودتان پارامترهای آن مسأله را تغییر دهید و یک مسأله شبیه آن طرح کنید این کار باعث می‌شود خودتان را جای طراح سوال حس نمائید.

۵ـ برای جا افتادن الگوهای متعددی که در مسأله‌های مربوط به یک فصل حل کرده‌ای بعد از چند روز دوباره آن‌ها را تکرار کنید تا آن الگوها در ذهنتان نقش ببندد.

حال با توجه به مطالب بالا می‌توان گفت:

۱ـ سعی کنید به طور مستمر در هفته روی درس ریاضی وقت بگذارید مثلاً ۳ روز از هفته به تمرین ریاضی بپردازید.

۲ـ بلافاصله بعد از تدریس بخشی از درس توسط دبیر خود، یک بار دیگر به جزوه، کتاب و نکته‌های خود در منزل نگاهی بیندازید و مثال‌های حل شده توسط دبیر را مجدد خودتان بدون نگاه کردن به جواب حل کنید.

۳ـ در روزهای بعدی تمرین‌های کتاب درسی و کمک آموزشی خود را بدون نگاه کردن به پاسخ‌نامه حل کنید حتی اگر سوال وقت‌گیر بود نگران نشوید و بدون توجه به زمان مشغول حل آن شوید. فراموش نکنید آنالیز سوال است که، شما را توانمند خواهد کرد و به مرور توان حل مسأله را در شما افزایش خواهد داد. مطمئن باشید که پاسخ همیشه در محتوای سوال مستتر و پنهان است و اگر با دقت سوال را آنالیز کنید حتماً پاسخ را خواهید یافت.

به سوال زیر دقت کنید شاید کمی پیچیده به نظر برسد ولی با اندکی دقت و بررسی شکل و محتوای سوال متوجه خواهید شد که سوال کاملاً برایتان آشنا است.

مثال . منحنی به معادلهٔ $y=(2x+1)(x+8)$ ، خطوط $y=mx$ نقطهٔ مشترک ندارد. مجموعهٔ مقادیر *m* کدام است؟

۱) $9<m<25$　　۲) $15<m<23$　　۳) $7<m<15$　　۴) $5<m<13$

پاسخ : اگر قرار باشد نقطهٔ مشترک نداشته باشد یعنی معادلهٔ $mx-(2x+1)(x+8)$ جواب نداشته باشد. این معادله تشکیل معادلهٔ درجه ۲ می‌دهد، در صورتی جواب ندارد که $\Delta<0$ باشد.

حالا به یک تعیین علامت می‌رسیم. باید یک عبارت درجه ۲ را تعیین علامت کنیم. عبارت درجه ۲ را باید به صورت زیر تعیین علامت کنیم:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		موافق a	∘	مخالف a	∘	موافق a	

پس مفهوم جواب نداشتن معادله این است که عبارت درجه ۲ فاقد ریشه بوده و Δ این معادله منفی باشد.

از این مثال نتیجه می‌گیریم که سوال‌هایی به ظاهر، پیچیده مثل سوال بالا با اندکی دقت، ابتکار و پردازش به سوالی ساده تبدیل شده و قابل حل می‌شود.

۴ـ حتماً بعد از انجام تمرین در بخش مورد نظر به کتاب فارآزمون مراجعه کنید و از همان بخش، از خودتان آزمون بگیرید. آزمون‌های اولیهٔ این کتاب مویرگی هستند و به شما کمک می‌کنند تا آن درس در ذهنتان جا بیفتد. از آن‌جایی که سوالات در آزمون‌ها پراکندگی دارند و باعث تمرکز بیش‌تر روی مبحث می‌شوند و ضمناً هنر آزمون دادن را نیز از همین ابتدا به شما آموزش می‌دهند. به علاوه آزمون دادن باعث جمع‌بندی مطالب خوانده شده می‌شود.

۵ـ ضمناً سوالاتی را که از کتاب درسی، کمک آموزشی و فارآزمون نتوانسته‌اید جواب بدهید یا نکته‌دار بوده‌اند را در روزهای بعدی دوباره حل کنید؛ حتی این کار می‌تواند بیش از دو بار اتفاق بیفتد. یادتان باشد با حل مجدد سوالات، ویژگی‌های مطالب یاد گرفته شده و نکته‌های حل مسأله در ذهنتان تثبیت شده و الگوهای لازم (کلید حل مسأله) در حافظه‌تان شکل می‌گیرد؛ یعنی شما را از یک تازه‌کار به یک کهنه‌کار حل مسأله تبدیل می‌کند.

در انتها توصیه می‌کنیم که هرگز از ماشین حساب برای بدست آوردن جواب استفاده نکنید. چنانچه یک روز در میان به مقدار یک ساعت و نیم تا دو ساعت مطالعه و تمرین داشته باشید و سعی کنید که خودتان بدون کمک پاسخ‌نامه و یا دیگران پاسخ را بیابید حتماً در ۴ ماه آینده از پیشرفتتان تعجب خواهید کرد.

تفکر و دقت گام اول برای موفقیت است

در پناه خداوند متعال پیروز و موفق باشید

رامین منوری ـ محمدسجاد ثمودی

پاییز ۹۶

فهرست

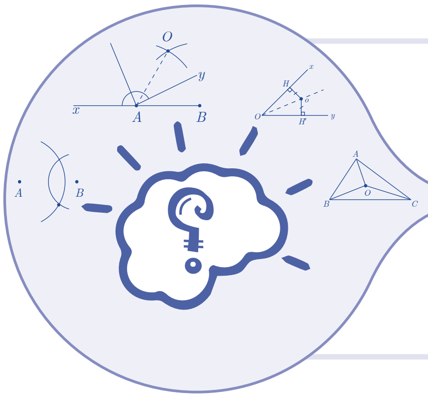
بخش اول آزمون‌ها

بخش دوم آزمون‌ها

بخش سوم آزمون‌ها

بخش اول

آزمون‌ها



آزمون‌های فصل اول

ترسیم‌های هندسی و استدلال

آزمون ۱: درس اول ـ ترسیمات هندسی
۲۰ دقیقه

۱. اگر پاره‌خط AB داده شده باشد، برای رسم عمودمنصف این پاره‌خط، کدام گزینه درست است؟

۱) دو کمان به مرکزهای A و B با شعاع‌های دلخواه رسم می‌کنیم.

۲) دو کمان مساوی به مرکزهای A و B با شعاع دلخواه رسم می‌کنیم.

۳) دو کمان به مرکزهای A و B با شعاع‌های دلخواه ولی بیش‌تر از نصف AB رسم می‌کنیم.

۴) دو کمان مساوی به مرکزهای A و B با شعاع دلخواه ولی بیش‌تر از نصف AB رسم می‌کنیم.

۲. پاره‌خط AB به طول ۵ در صفحه داده شده است. چند نقطه در صفحه می‌توان یافت که از A به فاصلهٔ ۴ و از B به فاصلهٔ ۶ باشد؟

۱) هیچ　　۲) یک　　۳) دو　　۴) بی‌شمار

۳. مثلث متساوی‌الساقین $ABC\ (AB = AC)$ داده شده است. برای رسم نیمساز زاویهٔ درونی A کدام گزینه درست است؟

۱) دو کمان به مرکزهای B و C و با شعاع‌های دلخواه رسم می‌کنیم.

۲) دو کمان مساوی به مرکزهای B و C و با شعاع دلخواه رسم می‌کنیم.

۳) دو کمان به مرکزهای B و C و با شعاع‌های دلخواه ولی بیش‌تر از نصف BC رسم می‌کنیم.

۴) دو کمان مساوی به مرکزهای B و C و با شعاع دلخواه ولی بیش‌تر از نصف BC رسم می‌کنیم.

۴. مثلث $ABC\ (AB \neq AC)$ مفروض است. چند نقطه در صفحهٔ مثلث وجود دارد که از دو ضلع AC و AB به یک فاصله و از دو نقطهٔ B و C نیز به یک فاصله باشد؟

۱) یک　　۲) دو　　۳) سه　　۴) چهار

۵. کدام گزینه عمودمنصف پاره‌خط AB را دقیق توصیف می‌کند؟

۱) مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از پاره‌خط AB به فاصلهٔ مشخص m باشند.

۲) مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از دو نقطهٔ A و B به فاصله مشخص m باشند.

۳) مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشند.

۴) مجموعهٔ خط‌هایی از صفحه که از وسط پاره‌خط AB می‌گذرند.

۶. خط d و نقطهٔ A بیرون آن داده شده است. برای رسم خطی که از A بگذرد و بر d عمود باشد، حداقل چند کمان باید رسم شود؟

۱) دو　　۲) سه　　۳) چهار　　۴) پنج

۷. خط d و نقطهٔ A بیرون آن مفروض‌اند. برای رسم خطی که از A بگذرد و با d موازی باشد، حداقل چند کمان باید رسم شود؟

۱) سه　　۲) چهار　　۳) پنج　　۴) شش

۸. می‌خواهیم متوازی‌الاضلاعی رسم کنیم که طول دو قطر آن ۶ و ۸ باشند. با این مشخصات چند متوازی‌الاضلاع قابل رسم است؟

۱) یک　　۲) دو　　۳) هیچ　　۴) بی‌شمار

۹. پاره‌خط MN داده شده است. اگر بخواهیم مربعی رسم کنیم که یک قطر آن MN باشد، حداقل چند کمان باید رسم کنیم؟

۱) دو ۲) سه ۳) چهار ۴) پنج

۱۰. کدام گزینه نیمساز یک زاویه را مشخص می‌کند؟

۱) مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از رأس زاویه می‌گذرند.

۲) مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشند.

۳) مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از هر ضلع زاویه به فاصله‌ای مشخص باشند.

۴) مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از رأس زاویه به فاصله‌ای مشخص باشند.

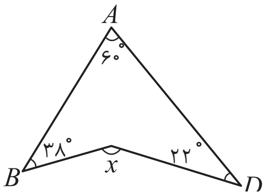
۹ ①②③④	۷ ①②③④	۵ ①②③④	۳ ①②③④	۱ ①②③④
۱۰ ①②③④	۸ ①②③④	۶ ①②③④	۴ ①②③④	۲ ①②③④

پاسخ آزمون ۱ در صفحهٔ ۳

آزمون ۲: درس دوم ـ زاویه

۲۰ دقیقه

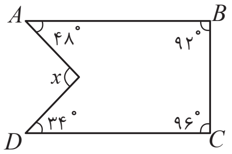
۱. در شکل مقابل، اندازهٔ زاویهٔ x کدام است؟



۱) ۱۰۰° ۲) ۱۱۰°

۳) ۱۲۰° ۴) ۱۳۰°

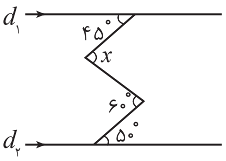
۲. در شکل مقابل، اندازهٔ زاویهٔ x چند درجه است؟



۱) ۹۰° ۲) ۹۵°

۳) ۱۰۰° ۴) ۱۰۵°

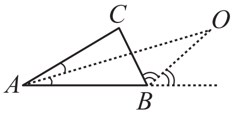
۳. در شکل مقابل، دو خط $d_۱$ و $d_۲$ موازی هستند. با توجه به اندازه‌های روی شکل، زاویهٔ x چند درجه است؟



۱) ۵۰° ۲) ۵۵°

۳) ۶۰° ۴) ۶۵°

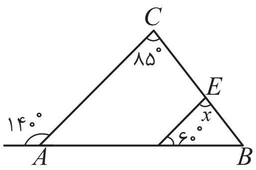
۴. در مثلث ABC، نیمساز زاویهٔ داخلی A و نیمساز زاویهٔ خارجی B یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کرده‌اند. اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{O}B$ کدام است؟



۱) $۹۰^\circ - \frac{c}{۲}$ ۲) $۹۰^\circ - \frac{B+C}{۲}$

۳) $\frac{c}{۲}$ ۴) $۹۰^\circ - \frac{B-C}{۲}$

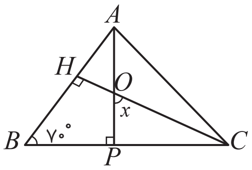
۵. در شکل مقابل، با توجه به اندازه‌های روی شکل، زاویهٔ x چند درجه است؟



۱) ۵۰ ۲) ۵۵

۳) ۶۰ ۴) ۶۵

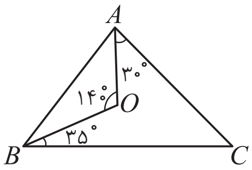
۶. در شکل مقابل، اندازهٔ x چند درجه است؟



۱) ۷۰ ۲) ۷۵

۳) ۶۰ ۴) ۶۵

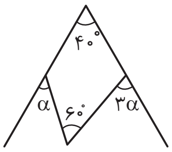
۷. در شکل مقابل، با توجه به اندازه‌های روی آن، زاویهٔ C چند درجه است؟



۱) ۸۰ ۲) ۹۰

۳) ۸۵ ۴) ۹۵

۸. در شکل مقابل، با توجه به اندازه‌های روی شکل مقدار α چند درجه است؟



۱) ۲۰   ۲) ۲۵
۳) ۳۰   ۴) ۳۵

۹. در چهارضلعی محدب $ABCD$ زاویهٔ بین نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ B و C کدام است؟

۱) $\frac{B+C}{۲}$ ۲) $\frac{A+D}{۲}$
۳) $\frac{A+B}{۲}$ ۴) $\frac{B+D}{۲}$

۱۰. در مثلث ABC، $\widehat{A} = ۷۰^{\circ}$ و $\widehat{B} = ۳۰^{\circ}$ است. زاویهٔ حاصل از برخورد نیمساز داخلی C با عمودمنصف AB چند درجه است؟

۱) ۲۰   ۲) ۳۰
۳) ۳۵   ۴) ۴۰

۹ ① ② ③ ④	۷ ① ② ③ ④	۵ ① ② ③ ④	۳ ① ② ③ ④	۱ ① ② ③ ④
۱۰ ① ② ③ ④	۸ ① ② ③ ④	۶ ① ② ③ ④	۴ ① ② ③ ④	۲ ① ② ③ ④

پاسخ آزمون ۲ در صفحه ۴

آزمون ۳: درس دوم ـ ویژگی نقاط   ۲۰ دقیقه

۱. چند نقطه در صفحهٔ مثلث وجود دارد که از سه رأس آن به یک فاصله باشد؟

۱) هیچ   ۲) یک   ۳) دو   ۴) چهار

۲. دو خط ناموازی d و d' را در یک صفحه در نظر بگیرید. مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از این دو خط به یک فاصله هستند، کدام است؟

۱) یک خط   ۲) دو خط موازی
۳) دو خط عمود بر هم   ۴) دو خط متقاطع که لزومی ندارد بر هم عمود باشند.

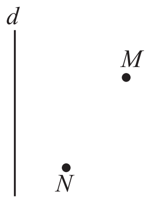
۳. دو خط موازی d و d' و خط D که دو خط d و d' را قطع می‌کند در نظر بگیرید. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از این سه خط به یک فاصله هستند؟

۱) هیچ   ۲) یک   ۳) دو   ۴) بی‌شمار

۴. سه خط $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ که دو به دو متقاطع‌اند ولی هم‌رس نیستند را در نظر بگیرید. چند نقطه در صفحه می‌توان یافت که از این سه خط به یک فاصله باشند؟

۱) یک   ۲) دو   ۳) سه   ۴) چهار

۵. خط d و نقطه‌های M و N در صفحه مفروض‌اند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از d به فاصلهٔ معلوم k و از M و N به یک فاصله باشد؟ (MN بر d عمود نیست)



۱) یک   ۲) دو
۳) سه   ۴) بیشمار

۶. در مثلث ABC، نقطهٔ O، نقطهٔ هم‌رسی عمودمنصف‌ها است. اگر وسط‌های اضلاع مثلث ABC را M، N و P بنامیم، نقطهٔ O برای مثلث MNP مطابق کدام گزینه است؟

۱) نقطهٔ هم‌رسی عمودمنصف‌های مثلث MNP ۲) نقطهٔ هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث MNP
۳) نقطهٔ هم‌رسی نیمسازهای مثلث MNP ۴) نقطهٔ هم‌رسی میانه‌های مثلث MNP

۷. زاویهٔ $x\hat{o}y$ داده شده است. چند نقطه در صفحهٔ این زاویه وجود دارد که از دو ضلع آن به فاصلهٔ مساوی باشد؟

۱) یک   ۲) دو
۳) چهار   ۴) بی‌شمار

۸. **در مثلث ABC نیمسازهای دو زاویهٔ خارجی B و C و نیمساز زاویهٔ درونی A را رسم می‌کنیم. کدام گزینه درست است؟**

۱) این سه خط در اغلب موارد هم‌رس نیستند.

۲) این سه خط در یک نقطه درون مثلث هم‌رس هستند.

۳) این سه خط در یک نقطه بیرون مثلث هم‌رس هستند.

۴) این سه خط در یک نقطه هم‌رس هستند که آن نقطه از سه رأس مثلث به یک فاصله است.

۹. **در چهارضلعی $ABCD$ نقطه‌ای وجود دارد که از هر چهار رأس آن به یک فاصله است. کدام گزینه دربارهٔ این چهارضلعی درست است؟**

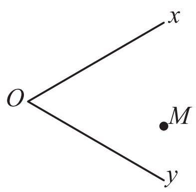
۱) نیمسازهای هر چهار زاویه در یک نقطه بیرون چهارضلعی هم‌رس‌اند.

۲) نیمسازهای هر چهار زاویه در یک نقطه درون چهارضلعی هم‌رس‌اند.

۳) عمود منصف‌های هر چهار ضلع در یک نقطه هم‌رس‌اند.

۴) دو نیمساز A و B و دو عمود منصف اضلاع AC و BD در یک نقطه هم‌رس‌اند.

۱۰. **زاویهٔ xoy و نقطهٔ M درون آن مفروض است. چند نقطه روی صفحه وجود دارد که از ox و oy به یک فاصله‌اند واز M به فاصلهٔ مشخص R باشند؟**



۱) دقیقاً یک نقطه　　۲) حداکثر دو نقطه

۳) دقیقاً دو نقطه　　۴) حداکثر چهار نقطه

۱ (۱)(۲)(۳)(۴)	۳ (۱)(۲)(۳)(۴)	۵ (۱)(۲)(۳)(۴)	۷ (۱)(۲)(۳)(۴)	۹ (۱)(۲)(۳)(۴)
۲ (۱)(۲)(۳)(۴)	۴ (۱)(۲)(۳)(۴)	۶ (۱)(۲)(۳)(۴)	۸ (۱)(۲)(۳)(۴)	۱۰ (۱)(۲)(۳)(۴)

پاسخ آزمون ۳ در صفحهٔ ۵

آزمون ۴: درس دوم ـ نامساوی‌ها　　۲۰ دقیقه

۱. **کدام گزینه دربارهٔ مثلثی که متساوی‌الساقین نیست، درست است؟**

۱) حداقل یک زاویهٔ بزرگ‌تر از 30° دارد.　　۲) حداقل یک زاویهٔ کوچک‌تراز 45° دارد.

۳) حداقل یک زاویهٔ کوچک‌تر از 60° دارد.　　۴) حداقل یک زاویهٔ بزرگ‌تر از 75° دارد.

۲. **کدام گزینه دربارهٔ یک مثلث همواره درست است؟**

۱) هر زاویهٔ خارجی مثلث، از زاویهٔ داخلی نظیرش بزرگ‌تر است.

۲) هر زاویهٔ خارجی مثلث، از زاویهٔ داخلی نظیرش کوچک‌تر است.

۳) هر زاویهٔ خارجی مثلث، کوچک‌تر از هر زاویهٔ داخلی غیر مجاورش است.

۴) هر زاویهٔ خارجی مثلث، بزرگ‌تر از هر زاویهٔ داخلی غیرمجاورش می‌باشد.

۳. **اگر در مثلث ABC، ضلع AB، بزرگ‌ترین ضلع و ضلع BC کوچک‌ترین ضلع باشد، کدام گزینه درست است؟**

۱) زاویهٔ $\widehat{B}$ نمی‌تواند 60° باشد.　　۲) زاویهٔ $\widehat{C}$ بزرگ‌تر از 60° و $\widehat{A}$ کوچک‌تر از 60° است.

۳) زاویهٔ خارجی $\widehat{B}$ نمی‌تواند 120° باشد.　　۴) زاویهٔ $\widehat{B}$ دقیقاً 60° است.

۴. **اگر در چهارضلعی $ABCD$، ضلع AB بزرگ‌ترین ضلع و ضلع CD کوچک‌ترین ضلع باشد، کدام گزینه همواره درست است؟**

۱) $\widehat{C} > \widehat{A}$　　۲) $\widehat{C} > \widehat{B}$

۳) $\widehat{D} > \widehat{A}$　　۴) $\widehat{D} < \widehat{A}$

۵. **در مثلث ABC، نیمسازهای درونی زاویه‌های $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ یکدیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند. اگر $AB < AC$ باشد، کدام گزینه همواره درست است؟**

۱) $OB < OC$　　۲) $OB > OC$

۳) $OB > AC$　　۴) $OC > AB$

۶. در مثلث ABC، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. کدام گزینه همواره درست است؟

۱) ارتفاع AH از ضلع BC بزرگ‌تر است.
۲) ارتفاع AH از ضلع BC کوچک‌تر است.
۳) ارتفاع AH از نصف مجموع دو ضلع AB و AC بزرگ‌تر است.
۴) ارتفاع AH از نصف مجموع دو ضلع AB و AC کوچک‌تر است.

۷. در مثلث ABC که تمام زوایای آن حاده و دوبه‌دو نامساوی هستند، $AB < AC$ می‌باشد و ارتفاع AH رسم شده است. کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $B\hat{A}H < C\hat{A}H$
۲) $B\hat{A}H > C\hat{A}H$
۳) $C\hat{A}H > \hat{C}$
۴) $B\hat{A}H < \hat{B}$

۸. مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است. اگر AM میانهٔ نظیر رأس A و BN میانهٔ نظیر رأس B و CP میانهٔ نظیر رأس C باشد، کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $AM > CP$
۲) $BN > AM$
۳) $BN < CP$
۴) $BN > CP$

۹. در مثلث ABC، ضلع AB از ضلع AC کوچک‌تر و AM میانهٔ نظیر رأس A است. کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $B\hat{A}M < C\hat{A}M$
۲) $B\hat{A}M > \hat{B}$
۳) $C\hat{A}M > \hat{C}$
۴) $B\hat{A}M > C\hat{A}M$

۱۰. در مثلث ABC، ضلع AB از ضلع BC کوچک‌تر است. اگر AH، BP و CK، به ترتیب، ارتفاع‌های نظیر رأس‌های A، B و C باشند، کدام گزینه همواره درست است؟

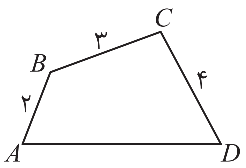
۱) $AH > BP$
۲) $AH < CK$
۳) $BP < CK$
۴) $BP > CK$

۱ (۱) (۲) (۳) (۴)	۳ (۱) (۲) (۳) (۴)	۵ (۱) (۲) (۳) (۴)	۷ (۱) (۲) (۳) (۴)	۹ (۱) (۲) (۳) (۴)
۲ (۱) (۲) (۳) (۴)	۴ (۱) (۲) (۳) (۴)	۶ (۱) (۲) (۳) (۴)	۸ (۱) (۲) (۳) (۴)	۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ آزمون ۴ در صفحهٔ ۶

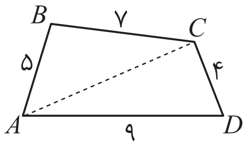
آزمون ۵: درس دوم ـ نامساوی‌ها

۲۰ دقیقه



۱. در شکل مقابل اگر طول AD عددی طبیعی باشد، بیش‌ترین مقدار آن کدام است؟

۱) ۹
۲) ۸
۳) ۷
۴) ۶



۲. در شکل مقابل اندازه AC کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۲
۲) ۵
۳) ۱۳
۴) ۷

۳. اگر نقطه P درون مثلث ABC باشد، کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $PB + PC < AB + BC$
۲) $PB + PC < AB + AC$
۳) $PB + PC < AC + BC$
۴) $PB + PC < BC$

۴. اگر M نقطه‌ای دلخواه درون مثلث ABC و محیط این مثلث $2P$ و مجموع فاصله‌های M از سه رأس مثلث برابر t باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $t < P$
۲) $t > 2P$
۳) $P < t < 2P$
۴) $\frac{4}{3}P < t < \frac{3}{2}P$

۵. کدام گزینه همواره درست است؟

۱) میانهٔ نظیر هر ضلع مثلث از هر یک از دو ضلع دیگر بزرگ‌تر است.
۲) میانهٔ نظیر هر ضلع مثلث از هر یک از دو ضلع دیگر کوچک‌تر است.
۳) میانهٔ نظیر هر ضلع مثلث از نصف مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر است.
۴) میانهٔ نظیر هر ضلع مثلث از تفاضل دو ضلع دیگر کوچک‌تر است.

۶. اگر مجموع میانه‌های مثلثی که محیط آن $۲P$ است، برابر t باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $t < P$
۲) $t < ۲P$
۳) $t < \frac{۳P}{۲}$
۴) هیچ یک از این‌ها

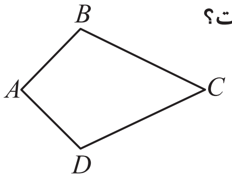
۷. اگر x، عددی حقیقی و سه عدد $۵x+۲$ ، $۱۱-۹x$ و $۲x+۸$ اندازه‌های ضلع مثلثی باشند، مجموع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مقدارهای صحیح x کدام است؟

۱) ۱۴
۲) ۱۳
۳) ۱۲
۴) ۱۱

۸. موقعیت‌های سه دهکدهٔ A ، B و C تشکیل یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌دهند. این سه دهکده به ترتیب ۲۰، ۳۰ و ۱۰ دانش‌آموز دارند و می‌خواهیم مدرسه‌ای برای این سه دهکده بنا کنیم. مدرسه را در چه نقطه‌ای بسازیم تا مجموع مسافت‌هایی که همهٔ دانش‌آموزان برای رسیدن به مدرسه می‌پیمایند، کم‌ترین مقدار ممکن باشد؟

۱) C
۲) B
۳) نقطهٔ هم‌رسی نیمسازها
۴) نقطهٔ هم‌رسی سه عمود منصف

۹. محیط چهارضلعی محدب شکل مقابل $۲P$ و مجموع دو قطر آن t است. کدام گزینه همواره درست است؟



۱) $t < P$
۲) $t \geq ۲P$
۳) $P < t < ۲P$
۴) $t < \frac{۳P}{۲}$

۱۰. کدام گزینه درست است؟

۱) در هر مثلث، ارتفاع نظیر کوچک‌ترین ضلع، کوچک‌ترین ارتفاع مثلث است.
۲) در هر مثلث، نیمساز نظیر کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌ترین نیمساز است.
۳) در هر مثلث، ارتفاع نظیر بزرگ‌ترین ضلع، کوچک‌ترین ارتفاع مثلث است.
۴) در هر مثلث، ارتفاع نظیر هر ضلع، از همان ضلع کوچک‌تر است.

۱ ① ② ③ ④	۳ ① ② ③ ④	۵ ① ② ③ ④	۷ ① ② ③ ④	۹ ① ② ③ ④
۲ ① ② ③ ④	۴ ① ② ③ ④	۶ ① ② ③ ④	۸ ① ② ③ ④	۱۰ ① ② ③ ④

پاسخ آزمون ۵ در صفحه

آزمون ۶: درس دوم ـ استدلال
۲۰ دقیقه

۱. کدام گزینه درست است؟

۱) نتایج حاصل از استدلال استقرایی همیشه درست هستند.
۲) نتایج حاصل از استدلال استنتاجی گاهی می‌توانند نادرست باشند.
۳) استدلال استقرایی نوعی از استدلال است که از جزء به کل می‌رسد.
۴) استدلال استنتاجی از درستی قضایای قبلی سرچشمه می‌گیرد و به اصول وابسته نیست.

۲. کدام گزینه همواره درست است؟

۱) اگر در قضیه‌ای جای فرض و حکم را عوض کنیم، عکس قضیه حاصل می‌شود و همیشه درست است.
۲) اگر در قضیه‌ای حکم را برعکس کنیم، عکس قضیه حاصل می‌شود.
۳) اگر در قضیه‌ای فرض را برعکس کنیم، عکس قضیه حاصل می‌شود.
۴) اگر در قضیه‌ای جای فرض و حکم را عوض کنیم، عکس قضیه حاصل می‌شود و گاهی درست است.

۳. کدام گزینه یک گزاره است؟

۱) امروز به اداره می‌روی؟
۲) کتاب مرا بیاور!
۳) عجب هوای گرمی!
۴) فردا باران می‌بارد.

۴. **نقیض گزارهٔ «x، بزرگ‌تر از y است.» کدام است؟**

۱) x، بزرگ‌تر از y است.
۲) x، کوچک‌تر از y است.
۳) x، مساوی y است.
۴) x، کوچک‌تر یا مساوی y است.

۵. **در کدام گزینه، عکس قضیه درست نیست؟**

۱) در یک متوازی‌الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.
۲) اگر دو زاویه قائمه باشند، آن دو زاویه برابرند.
۳) اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد، ارتفاع‌های نظیر دو ساق، برابرند.
۴) اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه باشد، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

۶. **کدام گزینه برهان غیرمستقیم را توصیف می‌کند؟**

۱) اگر جای فرض و حکم را عوض کنیم، اثبات غیرمستقیم ارایه شده است.
۲) اگر فرض را نادرست بگیریم و ثابت کنیم حکم نادرست است، آن‌گاه اثبات غیرمستقیم ارایه شده است.
۳) اگر حکم را نادرست بگیریم و به تناقض برسیم، آن‌گاه اثبات غیرمستقیم ارایه شده است.
۴) هیچ یک از این‌ها

۷. **شخصی ادعا می‌کند که «هر مسئله‌ای که بدهید، آن را حل می‌کنم». کدام گزینه می‌تواند مثال نقض برای این ادعا باشد؟**

۱) چند مسئله به او بدهیم، اگر حل کرد، ادعایش درست است و قابل نقض نیست.
۲) مسئله‌ای به او بدهیم اگر حل کرد، مسئلهٔ دیگری به او بدهیم و همینطور ادامه دهیم.
۳) مسئله‌ای به او بدهیم که او نتواند حل کند.
۴) هیچ یک از این موارد

۸. **کدام گزینه درست است؟**

۱) اگر $A \subset B$، آن‌گاه A و B نمی‌توانند مساوی باشند.
۲) اگر $A \subset B$ و $B \subset A$، آن‌گاه شاید $A \neq B$
۳) اگر $x \in A$ و $x \in B$، آن‌گاه $x \in A \cap B$
۴) اگر $x \notin A \cap B$، آن‌گاه $x \notin A$

۹. **اگر در مثلث ABC، $AB > AC$ و $BC < AC$، آن‌گاه کدام درست است؟**

۱) $\widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$
۲) $\widehat{C} > \widehat{A} > \widehat{B}$
۳) $\widehat{C} > \widehat{B} > \widehat{A}$
۴) $\widehat{B} > \widehat{C} > \widehat{A}$

۱۰. **کدام گزینه یک مثال نقض برای حکم زیر است؟**

«اگر حاصل‌ضرب دو عدد ۶۴ باشد، لااقل یکی از آن‌ها بزرگ‌تر از ۸ است.»

۱) یکی از عددها ۹ باشد.
۲) یکی از عددها ۵ باشد.
۳) یکی از عددها ۳ باشد.
۴) یکی از عددها ۸ باشد.

۱ (۱) (۲) (۳) (۴)	۳ (۱) (۲) (۳) (۴)	۵ (۱) (۲) (۳) (۴)	۷ (۱) (۲) (۳) (۴)	۹ (۱) (۲) (۳) (۴)
۲ (۱) (۲) (۳) (۴)	۴ (۱) (۲) (۳) (۴)	۶ (۱) (۲) (۳) (۴)	۸ (۱) (۲) (۳) (۴)	۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ آزمون ۶ در صفحهٔ

آزمون ۷: جامع ۱

۲۰ دقیقه

۱. **اگر در مورد مثلث ABC داشته باشیم $BC > AB > AC$ و $\widehat{B}+\widehat{C}=\alpha$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟**

۱) $\alpha > ۶۰^\circ$
۲) $\alpha < ۶۰^\circ$
۳) $\alpha > ۱۲۰^\circ$
۴) $\alpha < ۱۲۰^\circ$

۲. **با معلومات $AB = ۸$، $AC = ۱۳$ و ارتفاع $AH = ۹$، از مثلث ABC، چند مثلث مختلف می‌توان رسم کرد؟**

۱) هیچ
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

۳. در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویهٔ A، ضلع BC را در نقطهٔ D قطع می‌کند. کدام نامساوی همواره درست است؟

۱) $BA > BD$ ۲) $DA > DB$ ۳) $AB > AD$ ۴) $DB > DA$

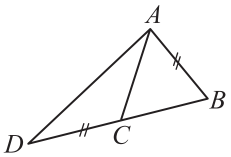
۴. کدام‌یک از عبارت‌های زیر بیان‌گر «استدلال استقرایی» است؟

۱) چگونگی انطباق یک دستور کلی در مورد یک عضو از یک مجموعه.

۲) بررسی بخشی از یک مجموعه و حدس یک ویژگی مشترک برای همهٔ اعضاء.

۳) مطابقت یک دستور کلی با یک یا چند دستور دیگر.

۴) چگونگی استفاده از دلایل جهت اثبات یک حکم کلی.



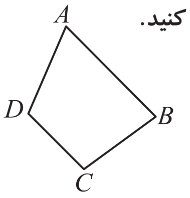
۵. در شکل مقابل اگر $DC = AB$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $AD > AB$ ۲) $CB > AB$

۳) $AD > CB$ ۴) $AC > CB$

۶. سه پاره‌خط به طول‌های $۶x$، $x+۷$ و $۴x-۴$ اضلاع یک مثلث هستند. حدود x کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳} < x < ۳$ ۲) $۳ < x < ۴$ ۳) $\frac{۱۱}{۹} < x < ۴$ ۴) $\frac{۱۱}{۹} < x < ۳$



۷. اگر در چهارضلعی $ABCD$، AB بزرگ‌ترین ضلع و DC کوچک‌ترین ضلع باشد، گزینهٔ صحیح را مشخص کنید.

۱) $A < C$ ۲) $\widehat{B} < \widehat{D}$

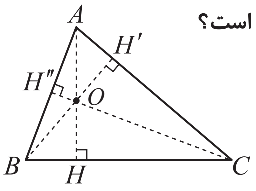
۳) $\widehat{D} > \widehat{C}$ ۴) گزینه‌های ۱ و ۲ صحیح‌اند.

۸. برای این که با استفاده از خط‌کش و پرگار، پاره‌خط AB را به چهارقسمت مساوی تقسیم کنیم، حداقل چند کمان باید بزنیم؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۹. در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ طول نیمساز درونی B، برابر ضلع BC است. زاویهٔ A کدام است؟

۱) ۱۸° ۲) ۵۴° ۳) ۳۶° ۴) ۷۲°



۱۰. ارتفاع‌های مثلث ABC شکل مقابل، در نقطهٔ O هم‌رس‌اند. نقطهٔ A برای مثلث BOC چه نقطه‌ای است؟

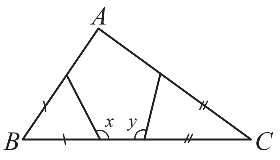
۱) محل هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع ۲) محل هم‌رسی نیمسازها

۳) محل هم‌رسی میانه‌ها ۴) محل هم‌رسی ارتفاع‌ها

۹ ① ② ③ ④	۷ ① ② ③ ④	۵ ① ② ③ ④	۳ ① ② ③ ④	۱ ① ② ③ ④
۱۰ ① ② ③ ④	۸ ① ② ③ ④	۶ ① ② ③ ④	۴ ① ② ③ ④	۲ ① ② ③ ④

پاسخ آزمون ۷ در صفحهٔ

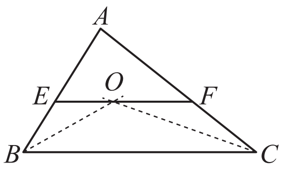
آزمون ۸: جامع ۲ — ۲۰ دقیقه



۱. در شکل مقابل پاره‌خط‌های مساوی مشخص شده‌اند. اگر $x + y = ۲۱۴^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ A کدام است؟

۱) ۷۲° ۲) ۹۸°

۳) ۱۱۲° ۴) ۱۱۸°



۲. **در مثلث ABC نیمسـازهای درونی B و C یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کرده‌اند و از O خطی موازی ضلع BC رسـم شده است تا دو ضلع دیگر را در E و F قطع کند. گزینهٔ صحیح را مشخص کنید.**

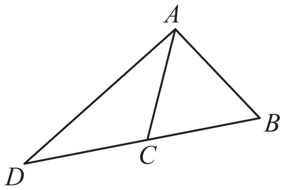
۱) $۲EF < BO + CO$ ‏ ۲) $BO + CO < ۲EF$

۳) $۲BC < BO + CO$ ‏ ۴) $BO + CO < ۲BC$

۳. **کدام دسته از اندازه‌های زیر می‌تواند طول اضلاع یک مثلث باشد؟**

۱) ۲ و ۳ و ۵ ‏ ۲) ۲ و $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$

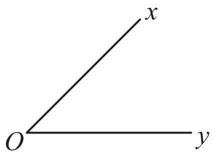
۳) ۴ و ۲/۵ و ۷ ‏ ۴) $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۵}$ و ۵



۴. **در شکل مقابل اگر $AC = AB$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟**

۱) $AD > CB$ ‏ ۲) $AB > CB$

۳) $AD > AB$ ‏ ۴) $AB > DC$



۵. **برای این که با اسـتفاده از خط‌کش و پرگار زاویه‌ای مسـاوی $\frac{۱}{۴}$ زاویهٔ مشخص xoy رسم شود، حداقل چند کمان باید بزنیم؟**

۱) ۴ ‏ ۲) ۵

۳) ۶ ‏ ۴) ۹

۶. **اگر محیط مثلث ABC برابر ۳۶ و ضلع BC بزرگ‌ترین ضلع آن باشد، اندازهٔ ضلع BC برابر کدام گزینه می‌تواند باشد؟**

۱) ۱۱ ‏ ۲) ۱۵

۳) ۱۸ ‏ ۴) ۲۰

۷. **کدام‌یک از عبارت‌های زیر، یک گزاره است؟**

۱) آیا مجید بلندقد است؟ ‏ ۲) عجب، علی‌رضا دانش‌آموز منظمی است!

۳) معدل حسن در سال گذشته بالای ۱۸ بود. ‏ ۴) محسن، به هندسه علاقه نشان بده!

۸. **در مثلثی به اضلاع ۶ و ۸ و ۱۰، فاصلهٔ نقطه هم‌رسی ارتفاع‌ها تا نقطهٔ هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع کدام است؟**

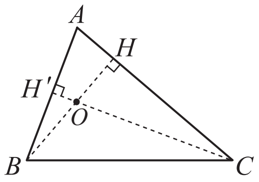
۱) ۶ ‏ ۲) ۴

۳) صفر ‏ ۴) ۵

۹. **برای اثبات هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث، از کدام قضیه استفاده می‌شود؟**

۱) هم‌رس بودن نیمسازهای مثلث ‏ ۲) هم‌رس بودن میانه‌های مثلث

۳) هم‌رس بودن عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ‏ ۴) خاصیت نقاط روی ارتفاع



۱۰. **در مثلث ABC شکل مقابل $AB < AC$ است. کدام گزینه نادرست است؟**

۱) $BH < CH'$ ‏ ۲) $BO < CO$

۳) $\hat{B} > \hat{C}$ ‏ ۴) $BH' > CH$

۱ (۱) (۲) (۳) (۴) ‏ ۳ (۱) (۲) (۳) (۴) ‏ ۵ (۱) (۲) (۳) (۴) ‏ ۷ (۱) (۲) (۳) (۴) ‏ ۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

۲ (۱) (۲) (۳) (۴) ‏ ۴ (۱) (۲) (۳) (۴) ‏ ۶ (۱) (۲) (۳) (۴) ‏ ۸ (۱) (۲) (۳) (۴) ‏ ۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ آزمون ۸ در صفحهٔ

یادداشت:

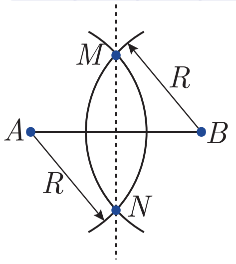
بخش دوم

پاسخ‌نامه تشریحی

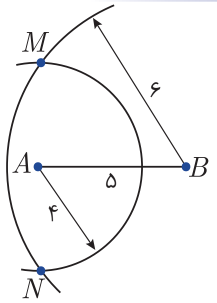
پاسخ‌نامه فصل اول

ترسیم هندسی و استدلال

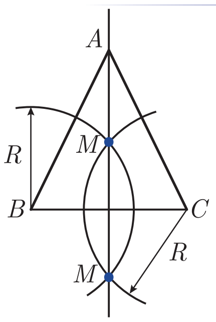
پاسخ‌نامه آزمون ۱: ترسیمات هندسی



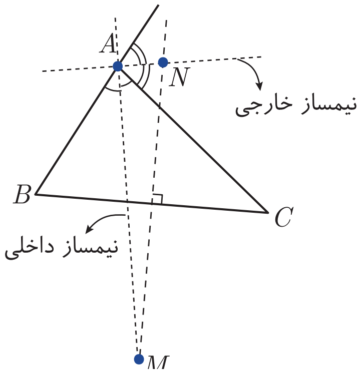
۱. گزینه ۴ بر ای رسم عمود منصف یک پاره‌خط مانند AB باید به مرکزهای A و B دو کمان مساوی با شعاع دلخواه ولی بیش‌تر از نصف AB رسم کنیم تا یک‌دیگر را در دو نقطهٔ M و N قطع کنند. خطی که از دو نقطهٔ M و N می‌گذرد، عمود منصف AB است.



۲. گزینه ۳ اگر به مرکز A و شعاع ۴ و نیز به مرکز B و شعاع ۶ دو دایره رسم کنیم، چون فاصلهٔ دو مرکز از یک‌دیگر از مجموع دو شعاع، کم‌تر و از تفاضل دو شعاع بیش‌تر است، پس این دو دایره یک‌دیگر را در دو نقطهٔ M و N قطع می‌کنند و مسأله دو جواب دارد.



۳. گزینه ۴ می‌دانیم در یک مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز زاویهٔ رأس، همان عمود منصف قاعده است، پس کافی است عمود منصف BC را رسم کنیم، در نتیجه کافی است دو کمان با شعاع‌های مساوی ولی دلخواه و بیش‌تر از نصف BC رسم و نقاط برخورد این دو کمان را به هم وصل کنیم.

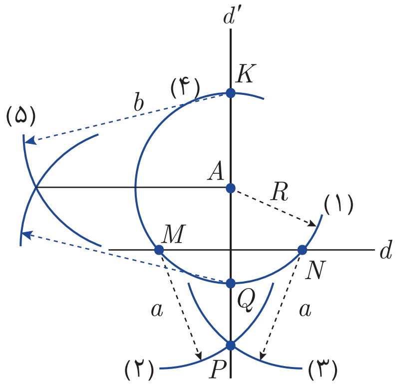


۴. گزینه ۲ نقاطی که از دو ضلع AC و AB به یک فاصله باشند روی نیمسازهای داخلی و خارجی نظیر رأس A قرار دارند. از طرفی دیگر نقاطی که از دو نقطهٔ B و C به یک فاصله باشند، روی عمود منصف پاره‌خط BC هستند. نقطه‌های برخورد عمود منصف BC با نیمسازها، جواب مسأله می‌باشند که دقیقاً دو نقطهٔ M و N هستند.

۵. گزینه ۳ عمود منصف یک پاره‌خط، مجموعهٔ تمام نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله باشند.

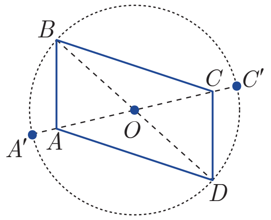
۶. گزینه ۲ ابتدا به مرکز A و شعاع دلخواه، ولی بیش‌تر از فاصلهٔ A از خط d، کمانی رسم می‌کنیم (و آن را کمان (۱) می‌نامیم) تا خط d را در دو نقطهٔ M و N قطع کند. اکنون به مرکزهای M و N و شعاع‌های مساوی ولی دلخواه، که بیش‌تر از نصف MN باشد، دو کمان (کمان‌های (۲) و (۳)) را رسم می‌کنیم تا یک‌دیگر را در P قطع کنند. خطی که از دو نقطهٔ A و P می‌گذرد بر d عمود است، پس حداقل به ۳ کمان نیازمندیم.

۷. گزینه ۳ ابتدا به مرکز A و شعاع دلخواه R که بیش‌تر از فاصلهٔ A از خط d است، کمانی رسم می‌کنیم و آن را کمان (۱) می‌نامیم تا d را در M و N قطع کند، سپس به مرکزهای M و N و شعاع‌های مساوی ولی دلخواه و بیش‌تر از نصف MN دو کمان (۲) و (۳) را رسم می‌کنیم تا یک‌دیگر را در P قطع کنند. خطی که از A و P می‌گذرد را d' می‌نامیم. نقطه‌های برخورد خط d' با کمان (۱) را Q و K می‌نامیم.

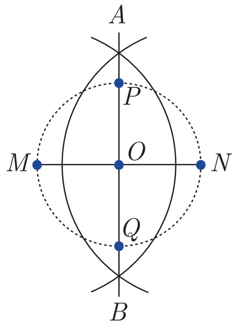


اکنون به مرکزهای Q و K و شعاع‌های مساوی که بیش‌تر از R باشند دو کمان رسم می‌کنیم تا یک‌دیگر را در B قطع کنند (کمان‌های (۴) و (۵)) خطی که از A و B می‌گذرد با خط d موازی است، پس حداقل به پنج کمان نیازمندیم.

۸. گزینه ۴ ابتدا پاره‌خط $AC = ۶$ را رسم می‌کنیم و وسط این پاره‌خط را O می‌نامیم. اکنون دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ ۴ واحد باز می‌کنیم و به مرکز O، دایره‌ای رسم می‌کنیم. هر نقطه از این دایره مانند B (به‌جز A' و C') را به O وصل کنیم و امتداد دهیم تا دایره را در نقطهٔ دیگری مانند D قطع کند. چهار ضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاعی است که طول قطرهای آن ۶ و ۸ هستند. چون B نقطه‌ای دلخواه و روی دایره است، پس مسأله بی‌شمار جواب دارد.



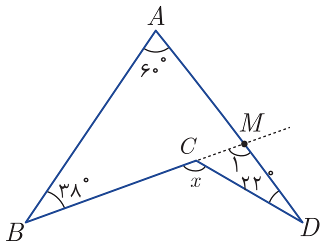
۹. گزینه ۲ به مرکزهای M و N و شعاع‌های مساوی دلخواه ولی بیش‌تر از نصف MN دو کمان می‌زنیم تا یک‌دیگر را از A و B قطع کند (تا این‌جا دو کمان). خطی که A را به B وصل می‌کند را d و نقطهٔ برخورد d با MN را O می‌نامیم. دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ $OM = ON$ باز می‌کنیم و به مرکز O کمانی می‌زنیم تا d را در P و Q قطع کند. چهار ضلعی $MPNQ$ مربع مورد نظر است، پس دست‌کم به سه کمان نیازمندیم.



۱۰. گزینه ۲ از ویژگی‌های مهم نیمساز یک زاویه این است که هر نقطه روی آن از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

پاسخنامه آزمون ۲: زاویه

۱. گزینه ۳ اگر ضلع BC را امتداد دهیم تا AD را در M قطع کنند، آن‌گاه $\widehat{M}_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث ABM است و داریم:

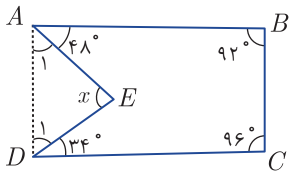


$$\widehat{M}_۱ = \hat{A} + \hat{B} = ۶۰^\circ + ۳۸^\circ = ۹۸^\circ$$

زاویهٔ x برای مثلث CMD زاویه‌ای خارجی است، پس

$$x = \widehat{M}_۱ + \hat{D} = ۹۸^\circ + ۲۲^\circ = ۱۲۰^\circ$$

۲. گزینه ۱ اگـر از A بـه D وصل کنیـم، در چهارضلعـی $ABCD$ مجموع زاویه‌ها ۳۶۰° است، پس



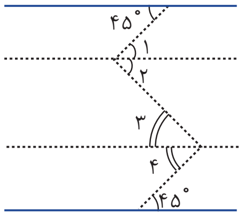
$$\left(\hat{A}_۱ + ۴۸^\circ\right) + ۹۲^\circ + ۹۶^\circ + \left(\hat{D}_۱ + ۳۴^\circ\right) = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ + \hat{D}_۱ = ۹۰^\circ$$

در مثلث ADE داریم

$$\underbrace{\hat{A}_۱ + \hat{D}_۱}_{=۹۰} + x = ۱۸۰^\circ \to ۹۰^\circ + x = ۱۸۰^\circ \to x = ۹۰$$

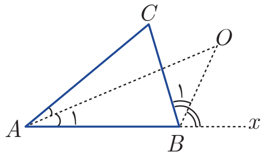
۳. گزینه ۲ از رأس زاویه‌هـا بیـن دو خط موازی، خط‌هایی موازی با آن‌ها رسـم می‌کنیم. با توجه خط‌های موازی و مورب داریم $\hat{۱} = ۴۵^\circ$ و $\hat{۴} = ۵۰^\circ$ پس $\hat{۳} = ۶۰ - ۵۰ = ۱۰^\circ$، بنابراین $\hat{۲} = \hat{۳} = ۱۰^\circ$

.



$$x = \hat{۱} + \hat{۲} = ۴۵^\circ + ۱۰^\circ = ۵۵^\circ$$

۴. گزینه ۳



$$A_۱ = \frac{۱}{۲}\hat{A}$$

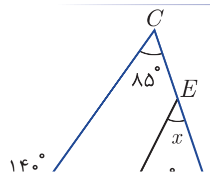
$$\hat{B}_۱ = \frac{۱}{۲}\widehat{CBx} = \frac{۱}{۲}\left(۱۸۰^\circ - \hat{B}\right) = ۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}\hat{B}$$

در مثلث OAB مجموع زاویه‌ها باید ۱۸۰° باشد، پس:

$$A_۱ + \left(\hat{B} + \hat{B}_۱\right) + \hat{O} = ۱۸۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\hat{A} + \left(\hat{B} + ۹۰ - \frac{۱}{۲}\hat{B}\right) + \hat{O} = ۱۸۰^\circ$$

$$\frac{۱}{۲}\hat{A} + \frac{۱}{۲}\hat{B} + ۹۰^\circ + O = ۱۸۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\left(\hat{A} + \hat{B}\right) + \hat{O} = ۹۰^\circ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\left(۱۸۰^\circ - \hat{C}\right) + \hat{O} = ۹۰ \Rightarrow \hat{O} = \frac{\hat{C}}{۲}$$

۵. گزینه ۴ زاویهٔ ۱۴۰° زاویهٔ خارجی مثلث ABC است، پس: $۱۴۰^\circ + ۸۵^\circ + \hat{B} = \hat{B} = ۵۵^\circ$



و در مثلث EFB داریم:

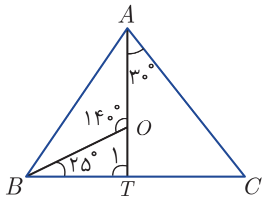
$$x + ۶۰^\circ + ۵۵^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۶۵^\circ$$

۶. گزینه ۱ در چهارضلعی $BHOP$ داریم:

$$\hat{O}_۱ + \hat{H} + \hat{B} + \hat{P} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱ + ۹۰^\circ + ۷۰^\circ + ۹۰^\circ = ۳۶۰^\circ \to \hat{O} = ۱۱۰^\circ$$

اما $x + \hat{O}_۱ = ۱۸۰^\circ$، پس $x = ۷۰^\circ$.

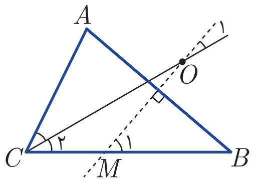
۷. گزینه ۳ AO را امتداد می‌دهیم تا BC را در T قطع کند. زاویهٔ ۱۴۰° خارجی مثلث BOT است و داریم:



$$۲۵^\circ + \hat{T}_۱ = ۱۴۰^\circ \Rightarrow \hat{T}_۱ = ۱۱۵^\circ$$

$\hat{T}_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث ATC است، پس $\hat{T}_۱ = \hat{A}_۱ + \hat{C} \Rightarrow ۱۱۵^\circ = ۳۰^\circ + \hat{C} \Rightarrow \hat{C} = ۸۵^\circ$

۸. گزینه ۲ از A به C وصل می‌کنیم. در مثلث ABC، زاویهٔ α خارجی است و در مثلث ACD، ۳α زاویهٔ خارجی است، پس داریم:

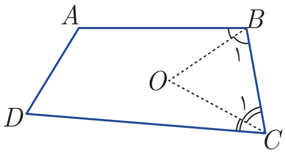


$$\left.\begin{array}{l}\alpha=\widehat{A}_۱+\widehat{C}_۱\\ ۳\alpha=\widehat{A}_۲+\widehat{C}_۲\end{array}\right\}\xrightarrow{+}۴\alpha=\underbrace{\widehat{A}_۱+\widehat{A}_۲}_{=۴۰^\circ}+\underbrace{\widehat{C}_۱+\widehat{C}_۲}_{=۶۰^\circ}=۱۰۰^\circ\Rightarrow\alpha=۲۵^\circ$$

۹. گزینه ۲ اگر نیمسازهای داخلی B و C یک‌دیگر را در نقطهٔ O قطع کنند، آن‌گاه در مثلث OBC داریم:

$$\widehat{O}+\widehat{B}_۱+\widehat{C}_۱=۱۸۰^\circ\Rightarrow\widehat{O}+\frac{\widehat{B}}{۲}+\frac{\widehat{C}}{۲}=۱۸۰^\circ\to\widehat{O}=۱۸۰^\circ-\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{۲}\quad(۱)$$

اما در چهارضلعی $ABCD$ داریم:



$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=۳۶۰^\circ\to\widehat{B}+\widehat{C}=۳۶۰^\circ-(\widehat{A}+\widehat{D})\quad(۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow\widehat{O}=۱۸۰^\circ-\frac{۳۶۰}{۲}+\frac{\widehat{A}+\widehat{D}}{۲}=\frac{\widehat{A}+\widehat{D}}{۲}$$

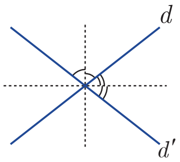
۱۰. گزینه ۱ واضح است که زاویهٔ $\widehat{C}$ برابر ۸۰° است. اگر عمودمنصف ضلع AB را BC در M قطع کند، به سادگی معلوم می‌شود $\widehat{M}_۱=۶۰^\circ$، اما $M_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث OCM است، پس

$$\widehat{M}_۱=\widehat{O}_۱+\widehat{C}_۲\Rightarrow\widehat{O}_۱=\widehat{M}_۱-\frac{\widehat{C}}{۲}=۶۰-\frac{۸۰}{۲}=۲۰^\circ$$

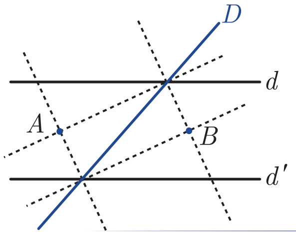
پاسخ‌نامه آزمون ۳: ویژگی نقاط

۱. گزینه ۲ نقطه‌ای که از سه رأس مثلث به یک فاصله باشد، نقطهٔ همرسی عمود منصف‌های مثلث است و این نقطه یکتا است.

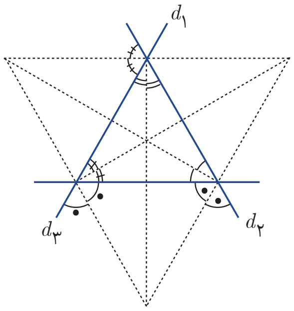
۲. گزینه ۳ مجموعهٔ نقاطی که از دو خط ناموازی به یک فاصله باشند، روی نیمساز زاویه‌های بین آن دو خط قرار دارند و می‌دانیم دو خط متقاطع دو نیمساز دارند، پس مجموعهٔ نقاط مورد نظر روی دو خط هستند ولی می‌دانیم نیم‌سازهای دو زاویهٔ مجانب، بر هم عمودند، در نتیجه این مجموعهٔ نقاط دو خط عمود بر هم را تشکیل می‌دهند.

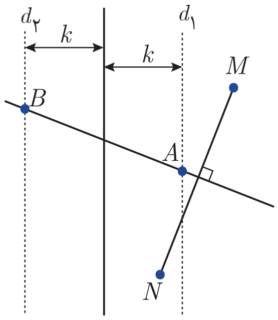


۳. گزینه ۳ نقاطی که از دو خط d و D به یک فاصله‌اند روی نیمسازهای زوایای بین این دو خط است و هم‌چنین است برای d' و D. این نیمسازها در دو نقطه، متقاطع هستند (نقاط A و B)



۴. گزینه ۴ مجموعه نقاطی که از دو خط متقاطع به یک فاصله هستند روی نیمسازهای زوایایی هستند که با آن دو خط تشکیل می‌شوند. به بیان دیگر نقاطی که از $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ به یک فاصله‌اند، همان نقطهٔ همرسی نیمسازهای مثلثی است که با این سه خط تشکیل می‌شود اما یکی از آن نقاط، نقطهٔ همرسی نیمساز داخلی مثلث است.
ضمناً هر دو نیمساز خارجی نظیر دو زاویهٔ مثلث با نیمساز داخلی زاویهٔ سوم نیز همرس هستند، پس در کل چهار نقطه وجود دارد.

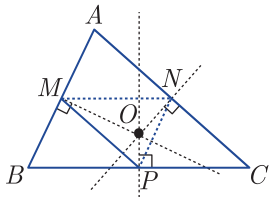




۵. گزینه ۲ مجموعهٔ نقاطی که از خط d به فاصلهٔ معلوم k باشند، دو خط موازی با d هستند. در شکل این دو خط را با d_1 و d_2 نمایش داده‌ایم.

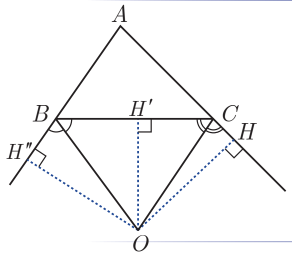
از طرف دیگر مجموعهٔ نقاطی که از N و M به یک فاصله هستند، روی عمودمنصف MN قرار دارند.

نقطهٔ برخورد عمود منصف MN با هر یک از خط‌های d_1 و d_2 جواب مسأله می‌باشد؛ یعنی دو نقطه وجود دارد.



۶. گزینه ۲ اگر وسط‌های دو ضلع مثلثی را به هم وصل کنیم پاره‌خط حاصل، با ضلع سوم موازی است. عمود منصف AC بر پاره‌خط MP نیز عمود است زیرا $AC \parallel MP$ ، پس عمود منصف AC، همان ارتفاع رأس N از مثلث MNP است، پس نقطهٔ O، نقطهٔ هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث MNP می‌باشد.

۷. گزینه ۴ هر نقطه روی نیمساز زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

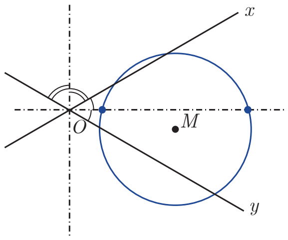


۸. گزینه ۳ اگر نیمسازهای دو زاویهٔ خارجی B و C یک‌دیگر را در نقطهٔ O قطع کنند، آن‌گاه:

$$\left.\begin{array}{l} B \text{ روی نیمساز } O \Rightarrow OH' = OH'' \\ C \text{ روی نیمساز } O \Rightarrow OH' = OH \end{array}\right\} \Rightarrow OH'' = OH$$

چون O از دو ضلع زاویهٔ داخلی A به یک فاصله است؛ روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد. پس، دو نیمساز خارجی B و C و نیمساز داخلی A در یک نقطه هم‌رس هستند.

۹. گزینه ۳ چون نقطهٔ مورد نظر از هر چهار رأس به یک فاصله است، پس این نقطه روی عمودمنصف‌های هر یک از اضلاع چهار ضلعی قرار دارد. به بیان دیگر، در این چند ضلعی، عمودمنصف‌های هر چهار ضلع در آن نقطه، هم‌رس هستند.



۱۰. گزینه ۴ نقاطی که از Ox و Oy به یک فاصله‌اند، روی نیمسازهای زاویه‌های بین این دو خط قرار دارند.

از طرفی نقاطی که از نقطهٔ M به فاصله مشخص R باشد، روی دایره‌ای که به مرکز M و شعاع R قرار دارند. نقطهٔ برخورد دو نیمساز و این دایره، جواب مسأله است.

چون دایره با این دو خط، حداکثر در ۴ نقطه می‌تواند برخورد داشته باشد، پس مسأله حداکثر چهار جواب دارد.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{A}\\ \hat{A}<\hat{B}\\ \hat{A}<\hat{C}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} ۳\hat{A}<\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}<۶۰^\circ$$

پاسخ‌نامه آزمون ۴: نامساوی‌ها

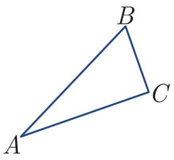
۱. گزینه ۳ مثلثی که متساوی‌الساقین نباشد، اندازهٔ هر سه زاویهٔ آن مخالف یک‌دیگرند. فرض کنیم در مثلث ABC، داشته باشیم $\hat{A}<\hat{B}<\hat{C}$، پس:

یعنی حداقل یک زاویهٔ کوچک‌تر از ۶۰° دارد.

۲. گزینه ۴ می‌دانیم هر زاویهٔ خارجی مثلث، برابر است با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیر مجاور آن پس هر زاویهٔ خارجی از هر زاویهٔ داخلی غیر مجاورش بزرگ‌تر است.

۳. گزینه ۲ چون AB بزرگ‌ترین ضلع و BC کوچک‌ترین ضلع است، پس ترتیب اضلاع مثلث به‌صورت $BC<AC<AB$ است. می‌دانیم در هر مثلث، ضلعی که بزرگ‌تر است، روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر می‌باشد، پس $\hat{A}<\hat{B}<\hat{C}$. از طرفی:

$$۳\hat{A}<\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}\Rightarrow ۳\hat{A}<۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}<۶۰^\circ$$
$$۳\hat{C}>\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}\Rightarrow ۳\hat{C}>۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}>۶۰^\circ$$



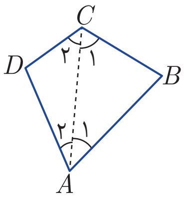
۴. گزینه ۱ چون AB بزرگ‌ترین ضلع است، پس $AB>BC$، در نتیجه در مثلث ABC داریم

$\hat{C}_۱>\hat{A}_۱$ (۱)

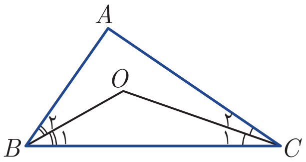
و از آن‌جا که CD کوچک‌ترین ضلع است، پس $AD>CD$ و در نتیجه در مثلث ACD داریم

$\hat{C}_۲>\hat{A}_۲$ (۲)

اگر رابطه‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم خواهیم داشت: $\hat{C}_۱+\hat{C}_۲>\hat{A}_۱+\hat{A}_۲$ یا $\hat{C}>A$.



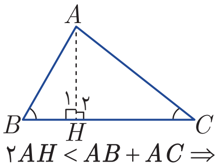
۵. گزینه ۱ چون بنا به فرض $AB<AC$، پس $\hat{C}<\hat{B}$، در نتیجه $\frac{\hat{C}}{۲}<\frac{\hat{B}}{۲}$ یا $\hat{C}_۱<\hat{B}_۱$. اکنون در مثلث OBC داریم $OB<OC$.



۶. گزینه ۴ اگر ارتفاع AH درون مثلث باشد، خواهیم داشت: $\Delta ABH:\hat{B}<\hat{H}_۱\Rightarrow AH<AB$

$\Delta ACH:\hat{C}<\hat{H}_۲\Rightarrow AH<AC$

اگر این دو نامساوی هم‌جهت را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت:

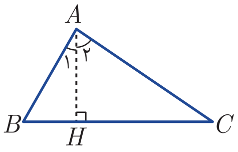


$$۲AH<AB+AC\Rightarrow AH<\frac{AB+AC}{۲}$$

اگر مثلث ABC قائم‌الزاویه و یا ارتفاع AH بیرون مثلث باشد نیز به روش مشابه می‌توان نشان داد که ازنصف مجموع دو ضلع مجاورش کوچک‌تر است.

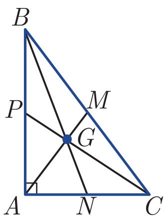
۷. گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{l}AB<AC\Rightarrow C<B\Rightarrow ۹۰-C>۹۰-B\\ ۹۰-C=A_۲\ ,\ ۹۰-B=A_۱\end{array}\right\}\Rightarrow A_۲>A_۱$$

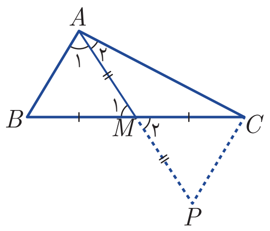


۸. گزینه ۲ پاره‌خط GN را در نظر می‌گیریم. با توجه به این که زاویهٔ $\widehat{BMN}$ منفرجه است و از زاویهٔ $\widehat{BNM}$ بزرگ‌تر است، پس $BN>BM$ است. پس: $BN>\frac{BC}{۲}\Rightarrow BN>AM$

البته به همین ترتیب ثابت می‌شود: $CP>AM$ است.



۹. گزینه ۴ اگر AM را به اندازهٔ خودش از طرف M امتداد دهیم تا نقطهٔ P به دست آید و P را به C وصل کنیم. آن‌گاه:

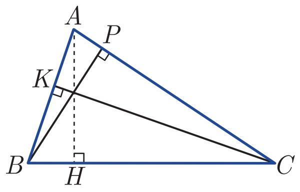


$$\left.\begin{array}{l} BM=MC\\ AM=MP\\ \widehat{M}_1=\widehat{M}_2\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ABM}\cong\overset{\Delta}{PCM}\Rightarrow AB=CP \text{ و } \widehat{P}=\widehat{A}_1$$

چون $AB<AC$، پس $PC<AC$.

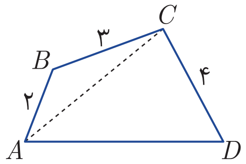
اکنون در مثلث ACP نتیجه می‌شود $\widehat{A}_2<\widehat{P}$ و چون $\widehat{P}=\widehat{A}_1$ در نتیجه $\widehat{A}_2<\widehat{A}_1$ یا $\widehat{CAM}<\widehat{BAM}$.

۱۰. گزینه ۲ اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، ارتفاع نظیر ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌تر از ارتفاع نظیر ضلع بزرگ‌تر است. چون $AB<BC$، پس $CK>AH$



پاسخنامه آزمون ۵ : نامساوی‌ها

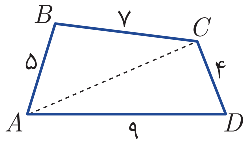
۱. گزینه ۲ از A به C وصل می‌کنیم.



$$\Delta ABC: AC<AB+BC\Rightarrow AC<۵$$
$$\Delta ACD: AD<AC+CD<۵+۴\Rightarrow AD<۹$$

پس حداکثر مقدار طبیعی AD، برابر ۸ است.

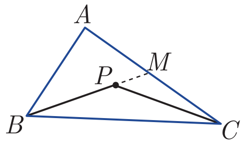
۲. گزینه ۴



$$\Delta ABC: BC-AB<AC<AB+BC\Rightarrow ۲<AC<۱۲\quad(۱)$$
$$\Delta ACD: AD-CD<AC<AD+CD\Rightarrow ۵<AC<۱۳\quad(۲)$$
$$(۱)\cap(۲)\Rightarrow ۵<AC<۱۲$$

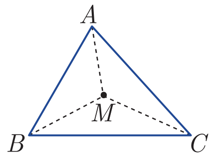
در بین گزینه‌ها تنها گزینهٔ «۴» در این نامساوی صدق می‌کند.

۳. گزینه ۲ اگر امتداد PB، ضلع AC را در M قطع کند، آن‌گاه



$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABM: BP+PM<AB+AM\\ \Delta PMC: PC<PM+MC\end{array}\right\}\overset{+}{\Rightarrow} PB+PC<AB+\underbrace{AM+MC}_{=AC}$$

۴. گزینه ۳

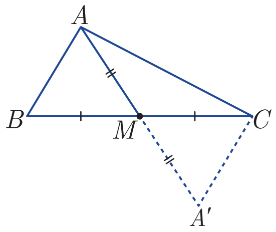


$$\Delta MBC\Rightarrow BC<BM+MC<AB+AC$$
$$\Delta MAB\Rightarrow AB<MA+MB<AC+BC$$
$$\Delta MAC\Rightarrow AC<MA+MC<AB+BC$$

این سه رابطه را که هم‌جهت هستند با هم جمع می‌کنیم:

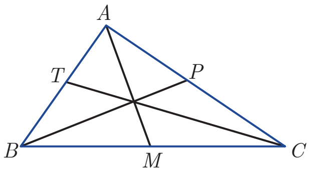
$$BC+AB+AC<۲(BM+CM+AM)<۲(AB+AC+BC)$$
$$۲P<۲t<۲\times ۲P\Rightarrow P<t<۲P$$

۵. گزینه ۳ اگر میانهٔ AM را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ A' امتداد دهیم، دو مثلث ABM و $A'CM$ هم‌نهشت هستند، پس $A'C=AB$ و داریم:



$$\Delta AA'C: AA'<AC+A'C\Rightarrow ۲AM<AC+AB$$
$$\Rightarrow AM<\frac{AB+AC}{۲}$$

۶. گزینه ۲ بنابر تست قبلی داریم:



$$\left.\begin{array}{l} AM < \dfrac{AB+AC}{۲} \\ BP < \dfrac{AB+BC}{۲} \\ CT < \dfrac{AC+BC}{۲} \end{array}\right| \xRightarrow{+} AM+BP+CT < \dfrac{۲(AB+AC+BC)}{۲} \Rightarrow t < ۲P$$

---

۷. گزینه ۳ باید هر یک از اضلاع مثبت باشند، پس کافی است داشته باشیم $۹x-۱۱>۰$ یا $x>\frac{۱۱}{۹}$ (۱).

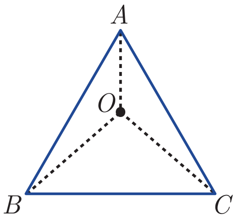
از طرفی هر ضلع باید از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر باشد:

$$\left\{\begin{array}{l} ۹x-۱۱<(۵x+۲)+(۲x+۸) \Rightarrow x<\dfrac{۲۱}{۲} \\ ۵x+۲<(۹x-۱۱)+(۲x+۸) \Rightarrow x>\dfrac{۵}{۶} \\ ۲x+۸<(۹x-۱۱)+(۵x+۲) \Rightarrow x>\dfrac{۱۷}{۱۲} \end{array}\right| \xRightarrow{\text{اشتراک}} \dfrac{۱۷}{۱۲}<x<\dfrac{۲۱}{۲} \quad (۲) \Rightarrow (۱)\cap(۲) \Rightarrow \dfrac{۱۷}{۱۲}<x<\dfrac{۲۱}{۲}$$

بیش‌ترین مقدار صحیح x، برابر ۱۰ و کم‌ترین مقدار صحیح آن ۲ است و مجموع آن‌ها ۱۲ است.

---

۸. گزینه ۲ فرض کنیم طول ضلع مثلث x باشد و نقطه‌ای دلخواه مانند O در نظر می‌گیریم:



$$\Delta AOB: AB-OA<OB \Rightarrow OA>x-OB$$

$$\Delta BOC: BC-OC<OB \Rightarrow OC>x-OB$$

$$\text{مجموع مسافت‌های پیموده‌شده} = ۲۰OA+۳۰OB+۱۰OC > ۲۰(x-OB)+۳۰OB+۱۰(x-OB)$$

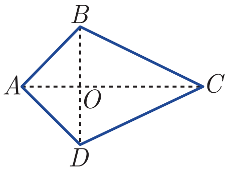
$$\text{مجموع مسافت‌های پیموده‌شده} > ۳۰x+۴۰OB$$

اگر O بر B منطبق باشد $\Leftarrow$ $\text{مجموع مسافت‌ها} = ۲۰AB+۱۰BC=۳۰x$

چون $۳۰x<۳۰x+۱۰OB$، پس کم‌ترین مجموع مسافت‌های پیموده‌شده زمانی است که O بر B منطبق باشد.

---

۹. گزینه ۳



$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC: AB+BC>AC \\ \Delta ADC: AD+DC>AC \\ \Delta ABD: AB+AD>BD \\ \Delta BCD: BC+CD>BD \end{array}\right| \xRightarrow{\text{جمع می‌کنیم}}$$

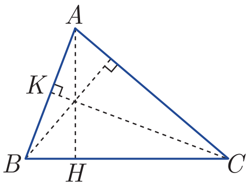
$$\cancel{۲}(AB+AC+CD+AD) > \cancel{۲}(AC+BC) \Rightarrow ۲P>t \quad (۱)$$

از طرفی

$$\left.\begin{array}{l} \Delta AOB: AB<OA+OB \\ \Delta BOC: BC<OB+OC \\ \Delta COD: CD<OC+OD \\ \Delta AOD: AD<AO+OD \end{array}\right| \xRightarrow{+} ۲P<۲(\underbrace{OA+OC}_{AC}+\underbrace{OB+OD}_{BD}) \Rightarrow P<t \quad (۲) \Rightarrow (۱),(۲) \Rightarrow P<t<۲P$$

---

۱۰. گزینه ۳ اگر BC بزرگ‌ترین ضلع و AB کوچک‌ترین ضلع مثلث ABC باشد.



$$\left.\begin{array}{l} S_{ABC}=\dfrac{۱}{۲}BC\times AH \\ S_{ABC}=\dfrac{۱}{۲}AB\times CK \end{array}\right| \Rightarrow BC\times AH = AB\times CK$$

چون $BC>AB$، پس $AH<CK$؛ یعنی ارتفاع نظیر بزرگ‌ترین ضلع، کوچک‌ترین ارتفاع مثلث است.

پاسخنامه آزمون ۶: استدلال

۱. گزینه ۳ استدلال استقرایی از جزء به کل رسیدن است.

توجه داشته باشیم که استدلال استقرایی می‌تواند درست یا نادرست باشد، پس گزینهٔ «۱» نادرست است.

هم‌چنین نتایج حاصل از استدلال استنتاجی همیشه درست هستند و گزینهٔ «۲» نادرست می‌باشد.

ضمناً استدلال استنتاجی از درستی قضایای قبلی و اصول پذیرفته شده سرچشمه می‌گیرند، پس گزینهٔ «۴» نیز نادرست است.

۲. گزینه ۴ اگر در قضیه‌ای جای فرض و حکم را عوض کنیم، گزارهٔ شرطی جدیدی به دست می‌آید که آن را عکس قضیه می‌نامند. توجه داشته باشیم که عکس یک قضیه دلیلی ندارد که درست باشد.

۳. گزینه ۴ گزاره جمله‌ای خبری است و جمله‌های امری، پرسشی و تعجبی نمی‌توانند گزاره باشند.

گزینهٔ «۱»: جمله‌ای پرسشی است و گزاره نمی‌باشد.

گزینهٔ «۲»: جمله‌ای امری است و نمی‌تواند گزاره باشد.

گزینهٔ «۳»: نیز جملهٔ ای تعجبی است و گزاره نمی‌باشد.

گزینهٔ «۴»: خبری است که می‌تواند درست یا نادرست باشد، پس یک گزاره است.

۴. گزینه ۴ نقیض گزارهٔ «x، بزرگ‌تر از y است.» به‌صورت زیر است:

«چنین نیست که x، بزرگ‌تر از y نیست.» و این معادل است با «x، کوچک‌تر یا مساوی y است.»

۵. گزینه ۲ عکس قضیهٔ «اگر دو زاویه قائمه باشند، آن دو زاویه برابرند.» به‌صورت زیر است:

«اگر دو زاویه برابر باشند، آن دو زاویه قائمه هستند.»

این گزارهٔ شرطی، درست نیست، زیرا دو زاویهٔ 25° با هم برابرند ولی قائمه نیستند؛ یعنی قضیهٔ عکس، خودش یک قضیه نیست.

در سه گزینهٔ دیگر عکس قضیه‌های داده شده درست هستند.

۶. گزینه ۳ در برهان غیرمستقیم یا همان برهان خلف به جای این که درستی حکم را نشان دهیم، نادرستی نقیض حکم را اثبات می‌کنیم؛ یعنی فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد و به تناقض می‌رسیم.

۷. گزینه ۳ نقیض گزارهٔ «هر مسأله‌ای که بدهید، آن را حل می‌کنم.» به‌صورت زیر است:

«مسأله‌ای وجود دارد که نمی‌توانم آن را حل کنم.»

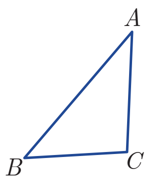
پس کافی است مسأله‌ای به او بدهیم که نتواند حل کند.

۸. گزینه ۳ اگر عنصری در دو مجموعه وجود داشته باشد، آن عنصر در اشتراک آن دو مجموعه نیز وجود دارد.

توجه کنید که اگر $A \subset B$ باشد، شاید A و B مساوی هم باشند، پس گزینهٔ «۱» نادرست است. هم‌چنین اگر $A \subset B$ و $B \subset A$ باشد، آن‌گاه $A = B$ است و گزینهٔ «۲» نادرست است. ضمناً شاید x، عضوی از $A \cap B$ نباشد ولی x، عضوی از A باشد. پس گزینهٔ «۴» هم نادرست است.

۹. گزینه ۳ چون $AB > AC$ و $AC > BC$، نتیجه می‌گیریم $AB > AC > BC$. ضمناً می‌دانیم اگر در مثلثی دو ضلع، نابرابر باشند، ضلعی که بزرگ‌تر است، زاویهٔ مقابل به آن نیز بزرگ‌تر است، پس:

$$\widehat{C} > \widehat{B} > \widehat{A}$$



۱۰. گزینه ۴ اگر یکی از عددها ۸ باشد، چون حاصل‌ضرب آن‌ها ۶۴ است، پس عدد دوم نیز ۸ است و در این مثال، هیچ‌کدام از عددها بزرگ‌تر از ۸ نیست.

پاسخنامه آزمون ۷: جامع ۱

۱. گزینه ۴

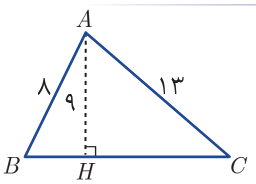
$$BC > AB > AC \Rightarrow \widehat{A} > \widehat{C} > \widehat{B} \Rightarrow ۳\widehat{A} = \widehat{A}+\widehat{A}+\widehat{A} > \widehat{A}+\widehat{C}+\widehat{B} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{A} > ۶۰^\circ \quad (۱)$$

از طرفی

$$\widehat{A} + \underbrace{\widehat{B}+\widehat{C}}_{=\alpha} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{A} = ۱۸۰^\circ - \alpha \quad (۲)$$

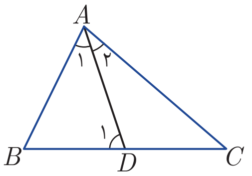
$$(۱)\,,\,(۲) \Rightarrow ۱۸۰^\circ - \alpha > ۶۰^\circ \Rightarrow \alpha < ۱۲۰^\circ$$

۲. گزینه ۱ اگـر فـرض کنیم مثلث ABC جواب مسـئله باشـد، آن‌گاه چـون در مثلث ABH، $\widehat{H} > \widehat{B}$، پـس باید $AB > AH$ باشـد ولـی چون $AB = ۸$ و $AH = ۹$، چنیـن مثلثی وجود ندارد.



۳. گزینه ۱ $\widehat{D}_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث ACD است، پس $\widehat{D}_۱ > \widehat{A}_۲$.

چون $\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲$، در نتیجه $\widehat{D}_۱ > \widehat{A}_۱$ و بنابراین در مثلث ABD نتیجه می‌شود: $AB > BD$



۴. گزینه ۲ بررسی درستی بخشی از یک مجموعه و تعمیم آن به کل مجموعه را استدلال استقرایی نامند.

۵. گزینه ۳ هر ضلع مثلث باید از تفاضل دو ضلع دیگر، بزرگ‌تر باشد، پس در مثلث ABD داریم:

$$AD > BD - AB = (\cancel{DC} + BC) - \cancel{AB} = BC$$

پس $AD > BC$.

۶. گزینه ۳ باید هر یک از اضلاع، کوچک‌تر از مجموع دو ضلع دیگر باشد، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} ۶x < (۴x-۴)+(x+۷) \\ x+۷ < (۴x-۴)+۶x \\ ۴x-۴ < (x+۷)+۶x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < ۳ \\ ۱۱ < ۹x \Rightarrow x > \frac{۱۱}{۹} \\ -۱۱ < ۳x \Rightarrow x > -\frac{۱۱}{۳} \end{cases}$$

اشـــتراک این سه نامساوی به صورت $\frac{۱۱}{۹} < x < ۳$ است. توجه داشته باشـــیم که اگر $\frac{۱۱}{۹} \leq x < ۳$ باشد هر یک از اضلاع مثبت هستند، پس این فاصله قابل قبول می‌باشد.

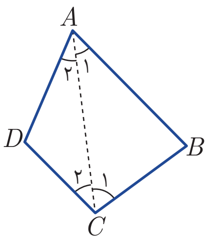
۷. گزینه ۴ چون AB بزرگ‌ترین ضلع اسـت، پس $AB > BC$ و در مثلث ABC نتیجه می‌شـود:

$$\widehat{C}_۱ > \widehat{A}_۱ \quad (۱)$$

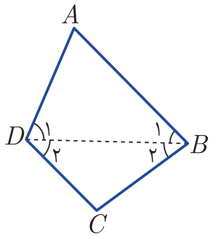
و چون CD کوچک‌ترین ضلع است، پس $AD > CD$ و در مثلث ACD داریم: $\widehat{C}_۲ > \widehat{A}_۲ \quad (۲)$

طرفین نامساوی‌های هم جهت (۱) و (۲) را جمع می‌کنیم: $\widehat{C}_۱ + \widehat{C}_۲ > \widehat{A}_۱ + \widehat{A}_۲ \Rightarrow \widehat{C} > \widehat{A}$

از طرفی چون AB بزرگ‌ترین ضلع است، پس $AB > AD$ و در مثلث ABD نتیجه می‌شود:



$$\widehat{D}_۱ > \widehat{B}_۱ \quad (۳)$$



و چون CD کوچک‌ترین ضلع است، پس $BC > CD$ و در مثلث BCD نتیجه می‌شود:

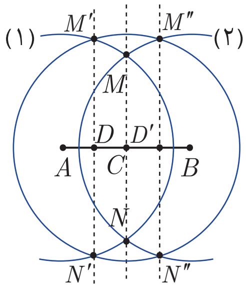
$\widehat{D}_۱ > \widehat{B}_۲ \quad (۴)$

طرفین نامساوی‌های هم‌جهت (۳) و (۴) را جمع می‌کنیم: $\widehat{D}_۱ + \widehat{D}_۲ > \widehat{B}_۱ + \widehat{B}_۲ \Rightarrow \widehat{D} > \widehat{B}$

پس گزینه‌های «۱» و «۲» درست هستند.

---

۸. گزینه ۱ ابتدا به مرکزهای A و B دو کمان با شعاع‌های مساوی دل‌خواه و بزرگ‌تر از نصف AB رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در M و N قطع کنند. (کمان به مرکز A را شمارهٔ (۱) و کمان به مرکز B را شمارهٔ (۲) می‌نامیم.) محل برخورد MN با AB را C می‌نامیم و به مرکز C و همان شعاع قبلی کمانی می‌زنیم تا کمان (۱) را در M' و N' و کمان (۲) را در M'' و N'' قطع کند. $M'N'$ عمودمنصف پاره‌خط AC و $M''N''$ عمودمنصف پاره‌خط BC است. با رسم پاره‌خط‌های $M'N'$ و $M''N''$ پاره‌خط AB به چهارقسمت مساوی تقسیم می‌شود و به این ترتیب رسم سه کمان رسم کرده‌ایم.

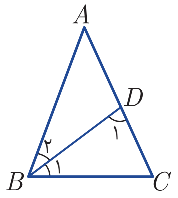


---

۹. گزینه ۳ اگر $\widehat{B}_۱ = \widehat{B}_۲ = \alpha$ باشد چون $\widehat{B} = \widehat{C}$، پس $\widehat{B} = \widehat{C} = ۲\alpha$ و چون $BD = BC$، در نتیجه $\widehat{D}_۱ = \widehat{C} = ۲\alpha$.

$\Delta BCD : \widehat{B}_۱ + \widehat{D}_۱ + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha + ۲\alpha + ۲\alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۶^\circ$

$\Delta ABC : \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{A} + ۲\alpha + ۲\alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{A} = ۱۸۰^\circ - ۴\alpha = ۱۸۰^\circ - ۴ \times ۳۶^\circ = ۳۶^\circ$

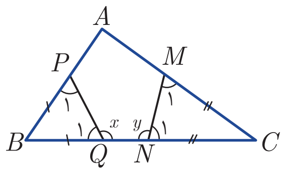


---

۱۰. گزینه ۴ در مثلث BOC، CH' ارتفاع نظیر OB و BH'' ارتفاع نظیر OC هستند و این دو ارتفاع در نقطهٔ A به هم می‌رسند.

پاسخ‌نامه آزمون ۸: جامع ۲

۱. گزینه ۳



$MC = NC \Rightarrow \widehat{M}_۱ = \widehat{N}_۱ = ۱۸۰^\circ - y$

پس در مثلث MNC داریم: $\widehat{C} = ۱۸۰^\circ - ۲\widehat{N}_۱ = ۲y - ۱۸۰^\circ \quad (۱)$

$BP = BQ \Rightarrow \widehat{P}_۱ = \widehat{Q}_۱ = ۱۸۰^\circ - x$

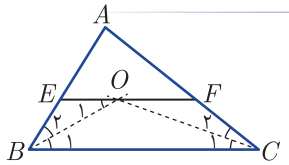
پس در مثلث BPC داریم: $\widehat{B} = ۱۸۰^\circ - ۲\widehat{Q}_۱ = ۲x - ۱۸۰^\circ \quad (۲)$

$\Delta ABC : \widehat{A} = ۱۸۰^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = ۱۸۰^\circ - (۲x + ۲y - ۳۶۰^\circ)$

$A = ۵۴۰^\circ - ۲(x+y) = ۵۴۰^\circ - ۲ \times ۲۱۴ = ۱۱۲^\circ$

---

۲. گزینه ۲



$$\left.\begin{array}{l} EO \parallel BC \xrightarrow{\text{مورب } OB} \widehat{O}_۱ = \widehat{B}_۱ \\ \widehat{B}_۱ = \widehat{B}_۲ \end{array}\right| \Rightarrow \widehat{O}_۱ = \widehat{B}_۲$$

پس $EO = BE$، به دلیل مشابه $OF = FC$

$\Delta BOE : BO < BE + OE \Rightarrow BO < ۲OE$

به همین ترتیب ثابت می‌شود $OF = FC$ و در نتیجه

$\Delta COF : CO < OF + FC \Rightarrow CO < ۲OF$

اگر این دو رابطه هم‌جهت را با هم جمع کنیم خواهیم داشت:

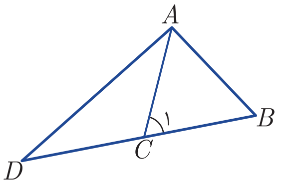
$BO + CO < ۲(OE + OF) \Rightarrow BO + CO < ۲EF$

---

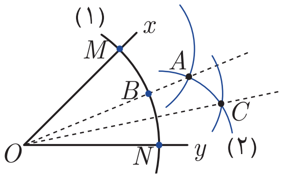
۳. گزینه ۴ باید هر ضلع مثلث از مجموع دو ضلع دیگر، کوچک‌تر باشد و برای این منظور کافی است بزرگ‌ترین ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر باشد. در گزینهٔ «۴»، بزرگ‌ترین ضلع، ۵ است و داریم: $۵ > \sqrt{۵} + \sqrt{۵}$

زیرا اگر $۵ > ۲\sqrt{۵}$، آن‌گاه $۵^۲ > (۲\sqrt{۵})^۲$ یا $۲۵ > ۲۰$ که همیشه درست است.

۴. گزینه ۳ در مثلث ACD، $\widehat{C}_۱$ زاویهٔ خارجی است، پس $\widehat{C}_۱ > \widehat{D}$ (۱)
و چون $AC = AB$، پس $\widehat{B} = \widehat{C}_۱$ (۲)، از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\widehat{B} > \widehat{D}$،
بنابراین در مثلث ABD داریم: $AD > AB$.



۵. گزینه ۱ ابتدا به مرکز O و شعاع دلخواه، کمانی رسم می‌کنیم (کمان (۱)) تا اضلاع زاویه را در M و N قطع کند. اکنون به مرکزهای M و N دو کمان به شعاع R $(R > \frac{MN}{۲})$ رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در A قطع کنند. OA نیمساز زاویهٔ xoy است. نقطهٔ برخورد OA با کمان (۱) را B می‌نامیم. اکنون به مرکز B و همان شعاع R کمانی رسم می‌کنیم تا کمان (۲) را در نقطهٔ C قطع کند. OC نیمساز Aoy است، پس زاویهٔ Coy یک چهارم زاویهٔ xoy است، پس دست‌کم به چهار کمان نیاز داریم.



۶. گزینه ۲ می‌دانیم هر ضلع مثلث از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر است، پس:

$$BC < AB + AC \Rightarrow ۲BC < AB + AC + BC = ۳۶ \Rightarrow BC < ۱۸ \quad (۱)$$

چون BC بزرگ‌ترین ضلع مثلث است. پس:

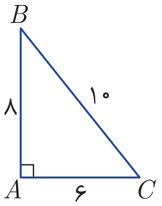
$$\left.\begin{array}{l} BC > AB \\ BC > AC \end{array}\right| \Rightarrow ۲BC > AB + AC \Rightarrow ۳BC > AB + AC + BC = ۳۶ \Rightarrow BC > ۱۲ \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow ۱۲ < BC < ۱۸$$

در بین گزینه‌ها فقط ۱۵ در این نابرابری صدق می‌کند.

۷. گزینه ۳ می‌دانیم گزاره جمله‌ای خبری است که می‌تواند درست یا نادرست باشد. گزینهٔ «۱»، جمله‌ای سؤالی است. گزینهٔ «۲»، جملهٔ تعجبی است. گزینهٔ «۴»، جمله‌ای امری است. فقط گزینهٔ «۳» جمله‌ای خبری می‌باشد.

۸. گزینه ۴ طول‌های اضلاع این مثلث در رابطهٔ فیثاغورس صدق می‌کنند، پس مثلث، قائم‌الزاویه است.
نقطهٔ هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث قائم‌الزاویه همان رأس قائم است و نقطهٔ هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث قائم‌الزاویه، نقطهٔ وسط وتر است، پس فاصلهٔ این دو نقطه، برابر میانهٔ نظیر وتر است و می‌دانیم میانهٔ وارد بر وتر، نصف وتر است، پس این فاصله برابر ۵ می‌باشد.

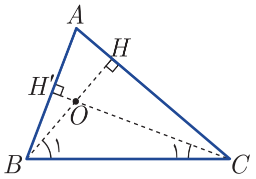


۹. گزینه ۳ بـرای اثبـات هم‌رس بودن ارتفاع‌های هر مثلث، از هر رأس، خطی موازی ضلع مقابل رسـم می‌کنیم تا مثلث جدیدی حاصل شود. عمودمنصف‌های مثلث جدید همان ارتفاع‌های مثلث اولیه است.

۱۰. گزینه ۴ چون $AB < AC$ است، پس $B > C$ است. در نتیجه $۹۰ - B < ۹۰ - C$؛ یعنی $C_۱ < B_۱$ و در نتیجه در مثلث BOC می‌توان گفت $BO < CO$ است.

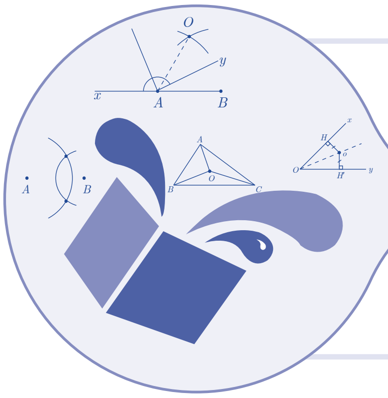
از طرفی بنابر رابطهٔ مساحت مثلث داریم: $BH \times AC = CH' \times AB \Rightarrow \frac{BH}{CH'} = \frac{AB}{AC} < ۱$

در نتیجه $BH < CH$.



بخش سوم

درس‌نامه

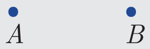


درس‌نامه فصل اول

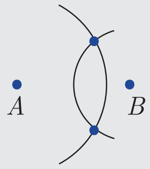
ترسیم هندسی و استدلال

درس اول: ترسیم

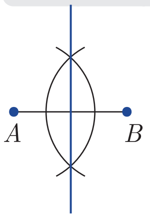
مجموعه نقاطی که از یک نقطه مشخص مانند O به فاصله مشخص r هستند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع r می‌باشند.



مثال . **نقطه A و نقطه B را در نظر بگیرید. نقاطی را مشخص کنید که از A به فاصله ۳ سانتی‌متر و از B به فاصله ۲ سانتی‌مترا‌ند.**



پاسخ: دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ سانتی‌متر و دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۲ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو دایره نقاطی هستند که هر دو ویژگی را دارا هستند.

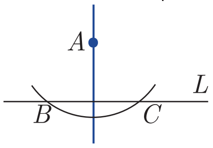


نحوه رسم عمودمنصف یک پاره‌خط: فرض کنیم پاره‌خط AB داده شده باشد. برای رسم عمودمنصف این پاره‌خط به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱ دهانه پرگار را بیش از نصف پاره‌خط AB باز می‌کنیم و کمانی به مرکز A و کمانی به مرکز B می‌زنیم تا یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند.

۲ دو نقطه به وجود آمده را به هم وصل می‌کنیم که همان خط عمودمنصف پاره‌خط AB است.

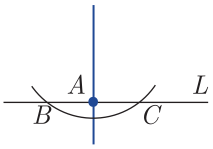
نحوه رسم خطی عمود بر یک خط از یک نقطه بیرون آن: فرض کنیم خط L و نقطه A بیرون آن داده شده‌اند. برای رسم خطی عمود بر خط L از نقطه A به صورت زیر عمل می‌کنیم:



۱ کمانی به مرکز A و شعاع دل‌خواه و بیش از فاصله A تا خط L می‌زنیم تا خط L را در دو نقطه B و C قطع کند.

۲ عمودمنصف پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم که حتماً از نقطه A می‌گذرد و بر خط L هم عمود است.

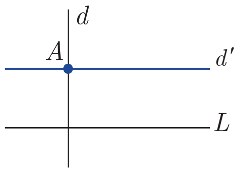
نحوه رسم خطی عمود بر یک خط از یک نقطه روی آن: فرض کنیم خط L و نقطهٔ A روی آن داده شده‌اند. برای رسم خطی عمود بر خط L و گذرنده از A، به صورت زیر عمل می‌کنیم:



۱ دهانه پرگار را به مقدار دل‌خواه باز کرده، کمانی به مرکز A می‌زنیم تا خط L را در دو نقطه B و C قطع کند.

۲ عمودمنصف پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم که حتماً در نقطه A بر خط L عمود است.

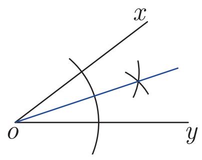
نحـوه رسـم خطی موازی یـک خـط از یک نقطه بیرون آن: فـرض کنیم خط L و نقطــه A بیرون آن داده شده‌اند. برای رسم خطی موازی خط L از نقطه A، باید از دو مسأله رسم قبلی استفاده کنیم. یعنی:



۱ از نقطه A خط d را بر خط L عمود می‌کنیم.

۲ از نقطه A خط d' را بر خط d عمود می‌کنیم که حتماً با خط L موازی است.

نحوه رسم نیمساز یک زاویه: فرض کنیم زاویه xoy داده شده است. برای رسم نیمساز این زاویه:

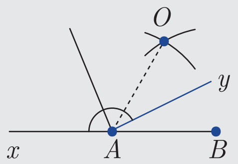


۲ کمانی به مرکز O و شعاع دل‌خواه می‌زنیم تا هر یک از اضلاع زاویه را قطع کند.

۲ دو کمان به مراکز نقاط به دست آمده و شعاع برابر و دل‌خواه می‌زنیم تا یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند.

۲ نقطه O را به نقطه به دست آمده وصل می‌کنیم که همان نیمساز زاویه xoy است.

مثال . یک زاویه 75° درجه رسم کنید.



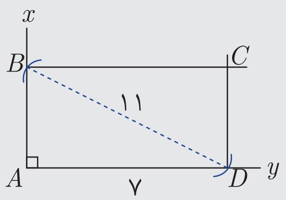
پاسخ : ۱) ابتدا پاره‌خط AB را به طول دل‌خواه رسم می‌کنیم.

۲) دو کمان به مراکز A و B و شعاع AB می‌زنیم تا از برخورد آن‌ها نقطه O پدید آید.

۳) O را به A وصل می‌کنیم و سپس نیمساز زاویه OAB را رسم می‌کنیم و آن را Ay می‌نامیم.

۴) نیمساز زاویه بین امتداد AB (یعنی Ax) با Ay را رسم می‌کنیم که در این صورت دو زاویه ۷۵ درجه رسم می‌شود.

مثال . یک مستطیل به قطر ۱۱ سانتی‌متر و یک ضلع ۷ سانتی‌متر رسم کنید.



پاسخ : ۱) زاویه xAy را برابر ۹۰ درجه رسم می‌کنیم.

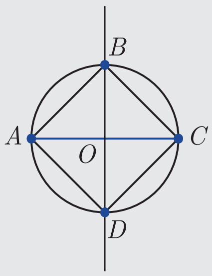
۲) کمانی به مرکز A و شعاع ۷ می‌زنیم تا Ay را در D قطع کند.

۳) کمانی به مرکز D و شعاع ۱۱ می‌زنیم، تا Ax را در B قطع کند.

۴) در نقطه B خطی را بر Ax و در نقطه D خطی را بر Ay عمود می‌کنیم و محل برخورد آن‌ها را C می‌نامیم.

چهارضلعی $ABCD$ همان مستطیل موردنظر است.

مثال . پاره‌خط AC داده شده است. مربعی رسم کنید که پاره‌خط AC قطر آن باشد.



پاسخ : ۱) عمودمنصف پاره‌خط AC را رسم می‌کنیم تا AC را در نقطه O قطع کند.

۲) دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA می‌زنیم تا خط عمودمنصف را در B و D قطع کند.

۳) B و D را به A و C وصل می‌کنیم.

چهارضلعی $ABCD$ همان مربع موردنظر است.

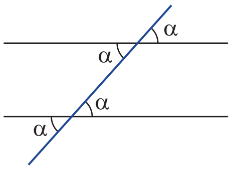
درس دوم: استدلال

الف) انواع استدلال

- **استدلال استقرایی:** در این نوع از استدلال، از مشاهده و بررسی موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی در آن موضوع گرفته می‌شود یا به اصطلاح «از جزء به کل» می‌رسیم.
- **استدلال استنتاجی:** این نوع استدلال براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه واقعیت‌هایی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.
- **قضیه:** نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به دست می‌آیند، قضیه نامیده می‌شوند.
- **عکس قضیه:** اگر جای فرض و حکم یک قضیه را عوض کنیم، آن چه حاصل می‌شود، «عکس قضیه» است. که البته می‌تواند درست یا نادرست باشد.
- **قضیه دو شرطی:** اگر یک قضیه و عکس آن، هر دو درست باشند، آن دو را می‌توان یک جا به صورت یک قضیه دو شرطی بیان کرد. به این صورت که یک طرف قضیه را بیان می‌کنیم و در آخر آن کلمه «و بالعکس» اضافه می‌کنیم و یا این که از عبارت «اگر و تنها اگر» استفاده می‌کنیم.
- **مثلا:** اگر مثلث متساوی‌الساقین باشد، آنگاه دارای دو ارتفاع برابر است و به عکس.
- **یا:** مثلث متساوی‌الساقین است، اگر و تنها اگر دارای دو ارتفاع برابر باشد.
- **گزاره:** یک جمله خبری است که دقیقاً «درست» یا «نادرست» باشد. اگرچه درستی یا نادرستی آن بر ما معلوم نباشد.
- گزاره می‌تواند یک خبر را اعلام کند که به آن گزاره ساده می‌گویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزاره ساده باشد که به آن گزاره مرکب می‌گویند.
- **نقیض یک گزاره:** ارزش یک گزاره دقیقاً درست یا نادرست است. نقیض یک گزاره به صورت «چنین نیست که ...» ساخته می‌شود و ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود آن گزاره است.
- **برهان خلف:** نوعی از استدلال که به جای این که به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) و به یک تناقض یا به یک نتیجه غیرممکن می‌رسیم. به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می‌شود.
- **مثال نقض (نوعی دیگر از استدلال):** مثالی که از آن برای رد یک حکم کلی استفاده می‌شود.

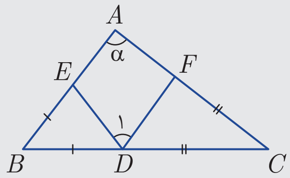
ب) زاویه

- اگر خط موربی دو خط متقاطع را قطع کند، زوایای حاده‌ای که ایجاد می‌شوند با هم و زوایای منفرجه‌ای که ایجاد می‌شوند با هم برابرند.

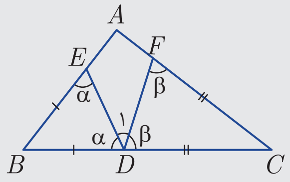


- مجموع زوایای درونی هر مثلث برابر ۱۸۰ درجه است.
- هر زاویه بیرونی مثلث برابر مجموع دو زاویه درونی آن است.
- مجموع زوایای درونی هر چهارضلعی برابر °۳۶۰ درجه است.
- مجموع زوایای درونی هر n ضلعی برابر $(n-۲)$۱۸۰ درجه است.
- مجموع زوایای بیرونی هر n ضلعی برابر ۳۶۰ درجه است.

مثال . در شکل مقابل پاره‌خط‌های مساوی مشخص شده‌اند. زاویهٔ $E\widehat{D}F$ را برحسب زاویهٔ A محاسبه کنید.



پاسخ : در پاسخ به این گونه سؤالات، برای سرعت بخشیدن به حل و واضح شدن اطلاعات سؤال برایمان، زوایای برابر را روی شکل برحسب α، β ، ... نشان می‌دهیم.



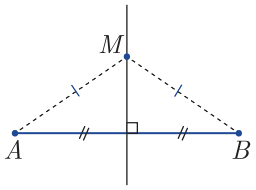
$$\left.\begin{array}{l}۲\alpha+B=۱۸۰\\ ۲\beta+C=۱۸۰\end{array}\right\}\xRightarrow{+}۲\alpha+۲\beta+B+C=۳۶۰\rightarrow ۲\alpha+۲\beta+(۱۸۰-A)=۳۶۰$$

$$\rightarrow \alpha+\beta=۹۰+\frac{A}{۲}$$

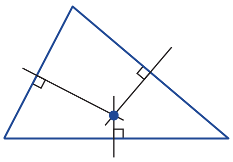
$$D_۱=۱۸۰-(\alpha+\beta)=۱۸۰-(۹۰+\frac{A}{۲})=۹۰-\frac{A}{۲}$$

پ) ویژگی‌های نقاط روی برخی اشکال

- هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از اضلاع آن زاویه به یک فاصله است و اگر نقطه‌ای از اضلاع یک زاویه به یک فاصله باشد، حتماً روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.



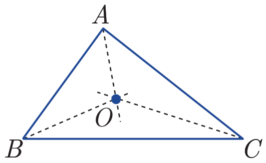
- عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث همرس‌اند.
- نقطه همرسی عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث، نقطه‌ای است که از سه رأس آن به یک فاصله است. به عبارت دیگر برای هر سه نقطه غیرواقع بر یک راستا، یک نقطه وجود دارد که از آن‌ها به یک فاصله است.



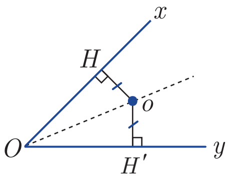
توجه! اگر زوایای مثلث حاده باشند، نقطه همرسی عمودمنصف‌ها، درون مثلث و اگر زاویه منفرجه داشته باشد، نقطه همرسی عمودمنصف‌ها، بیرون مثلث قرار می‌گیرد. اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، نقطه همرسی عمودمنصف‌ها، دقیقاً وسط وتر است.

توجه! در یک چهارضلعی اگر عمودمنصف‌های سه ضلع همرس باشند، عمودمنصف ضلع چهارم هم حتماً از آن نقطه همرسی، می‌گذرد.

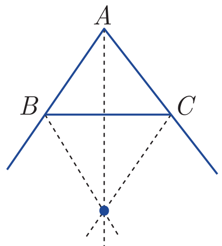
- نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث همرس‌اند.



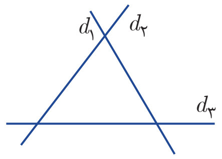
- هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و اگر نقطه‌ای از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله باشد، حتماً روی عمودمنصف آن قرار دارد.



- در هر مثلث هر دو نیمساز خارجی با نیمساز داخلی رأس سوم همرس‌اند.



- نقطه همرسی نیمسازهای مثلث، نقطه‌ای است که از اضلاع آن به یک فاصله‌اند. به عبارت دیگر برای هر سه خط دو به دو متقاطع، چهار نقطه وجود دارد که از آن‌ها به یک فاصله‌اند.

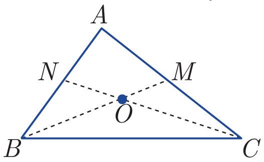


- با استفاده از همرسی عمود منصف‌های اضلاع مثلث می‌توان نشان داد: «ارتفاع‌های هر مثلث همرس‌اند.»
- اگر زوایای مثلث همگی حاده باشند، نقطه همرسی ارتفاع‌ها، درون آن و اگر مثلث دارای زاویه منفرجه باشد، نقطه همرسی ارتفاع‌ها، بیرون آن واقع می‌شوند.
- در مثلث قائم‌الزاویه نقطه همرسی ارتفاع‌ها دقیقاً بر روی

رأس قائمه آن منطبق است.

■ در هر مثلث هر دو میانه یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند. یعنی در شکل روبه‌رو داریم:

$$\frac{BO}{MO}=\frac{CO}{NO}=۲$$



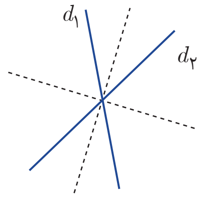
■ با استفاده از این خاصیت میانه‌ها می‌توان ثابت کرد:

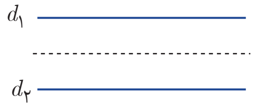
ـ «میانه‌های هر مثلث همرس‌اند.»

ـ نقطه همرسی میانه‌های هر مثلث را «مرکز ثقل» آن می‌گوئیم.

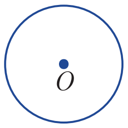
ـ نقاطی کـه از دو خط متقاطع $d_۱$ و $d_۲$ بـه یک فاصله‌اند، نیمسـازهای زوایای بین این دو خط را تشکیل می‌دهند، که دو خط عمود برهم‌اند.

■ نقاطـی که از دو خط مـوازی $d_۱$ و $d_۲$ به یک فاصله‌اند، خطی موازی آن‌ها و بین آن دو خط را تشکیل می‌دهند.

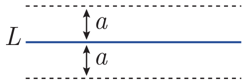




■ نقاطی که از یک نقطه مانند O به فاصلهٔ a هستند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع a را تشکیل می‌دهند.

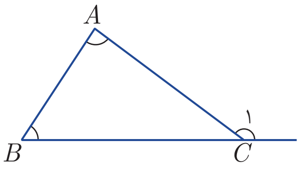


■ نقاطی که از یک خط مانند L به فاصله a هستند، دو خط موازی در دو طرفش را تشکیل می‌دهند.

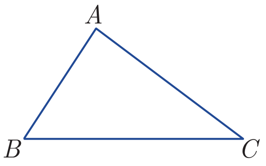


نامساوی‌ها

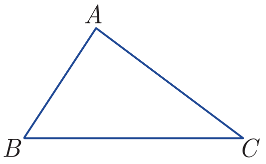
۱) در هـر مثلث، هـر زاویه خارجی از هر زاویـه داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است. $C_۱ > A$ و $C_۱ > B$



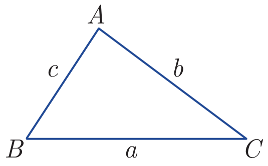
۲) در مثلثی کـه دو ضلع نابرابر دارد، زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، از زاویـهٔ روبـه‌رو بـه ضلـع کوچک‌تـر، بزرگ‌تـر اسـت.
$AB < AC \Rightarrow C < B$



۳) در مثلثـی که دو زاویه نابرابر دارد، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر، بزرگ‌تر است. $B > C \Rightarrow AC > AB$



۴) در هر مثلث اندازه هر ضلع، از مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر آن کوچک‌تر است. (قضیه حمار) $a < b+c$ و $b < a+c$ و $c < a+b$

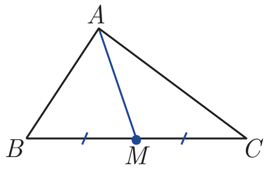


با استفاده از قضیه حمار می‌توان ثابت کرد:

الف) در هر مثلث اندازه هر ضلع، از تفاضل اندازه‌های دو ضلع دیگر آن بزرگ‌تر است.

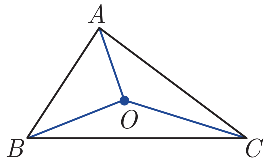
ب) اندازه هـر میانه مثلـث، از نصف تفاضل دو ضلـع مجاور به آن بزرگ‌تر و از نصف مجموع دو ضلع مجاور به آن کوچک‌تر است.

$$\frac{|AB-AC|}{۲} < AM < \frac{AB+AC}{۲}$$



پ) مجمـوع فواصل هر نقطه دل‌خـواه درون یک مثلث تا رأس‌های آن، از نصف محیط آن مثلث بزرگ‌تر است.

$$\frac{AB+AC+BC}{۲} < AO+BO+CO$$



ت) اگـر اندازه‌هـای ارتفاع‌های یک مثلث را با h_a، h_b، h_c نشـان دهیم، بین آن‌ها رابطه زیر برقرار است:

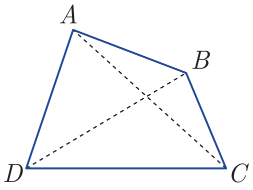
$$\left|\frac{۱}{h_b}-\frac{۱}{h_c}\right| < \frac{۱}{h_a} < \frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}$$

ث) چون میانه‌های هر مثلث، خودشان تشکیل مثلث می‌دهند، پس هر کدام آن‌ها از تفاضل دو تای دیگر بزرگ‌تر و از مجموع دو تای دیگر کوچک‌تر است.

$$|m_b-m_c| < m_a < m_b+m_c$$

ج) در هـر چهارضلعی، مجموع دو قطر از نصف محیط آن بزرگ‌تر و از محیط آن کوچک‌تر است.

$$\frac{AB+BC+CD+DA}{۲} < AC+BD < AB+BC+CD+DA$$



چ) در هر مثلث اندازه هر ضلع، از نصف محیط آن کوچک‌تر است.