بسم الله الرحمن الرحیم

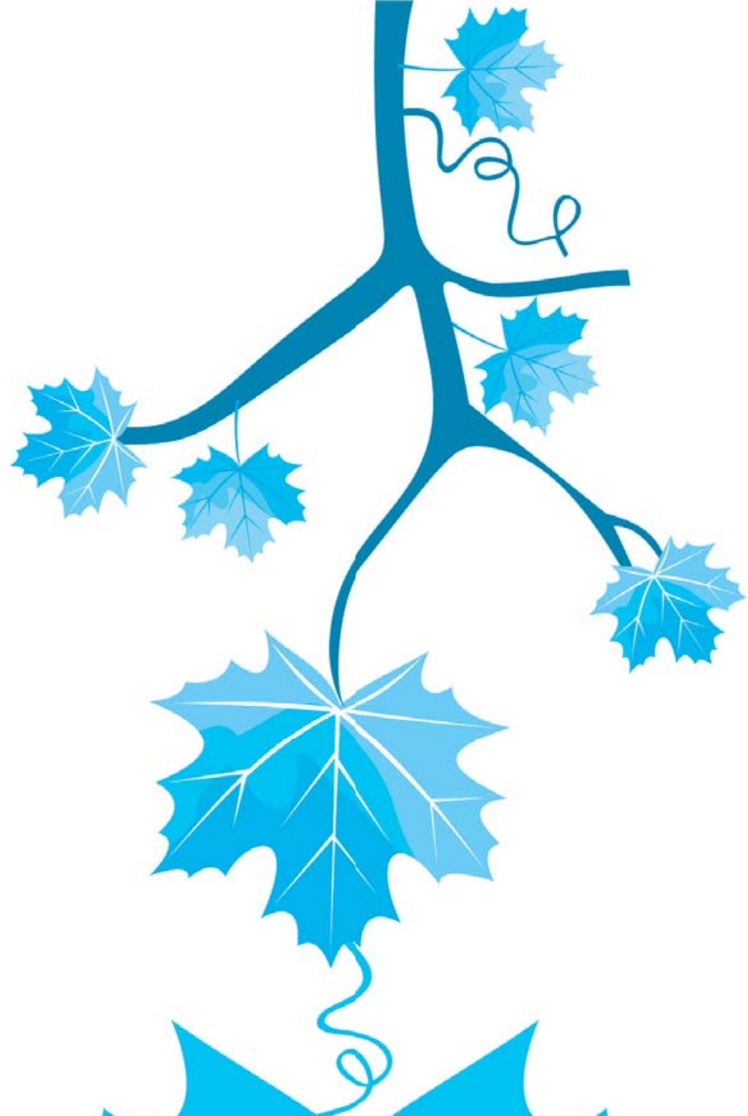
برگی از درخت المپیاد ریاضی

معادلات تابعی

مؤلف:

محمد جعفری

انتشارات خوشخوان



درخت المپیاد درختی است که توسط
انتشارات خوشخوان کاشته شده وهریک
از کتاب های این پروژه برگی ازآن است.
وظیفه ما نگهداری وآبیاری این درخت است.امیدواریم
باعنایات حضرت حق این درخت، تنومند شده
وبه بارواقعی بنشیند.فراموش نکنید که بار ومیوه ی
این درخت شما
عزیزان می باشید.

التماس دعا

پروژه‌ی درخت المپیاد

- اعتقاد بر این است که شروع فعالیت‌های المپیاد به صورت حرفه‌ای، باید از ابتدای دوره‌ی دبیرستان شروع شود. اکثر المپیادهای علمی در زمستان سال سوم دبیرستان تعیین تکلیف می‌شوند. بنابراین از شروع دبیرستان تا اواسط سال سوم حدوداً ۸ ترم تحصیلی می‌شود (با احتساب فصل و ترم تابستان) که لازم است برنامه‌ریزی دقیقی برای این چند ترم انجام شود.
- انتشارات خوشخوان این برنامه‌ریزی را در قالب پروژه‌ی درخت المپیاد انجام داده است که هر شاخه از درخت، مبحثی از آن المپیاد و هر برگ از آن شاخه شماره‌ای از آن مبحث می‌باشد.

- به عنوان مثال اپتیک (۱) کتابی است که در یک ترم تحصیلی در یک کلاس ممتاز می‌توان برای داوطلبان المپیاد فیزیک تدریس کرد.

با عنایات حضرت حق و با کمک تنی چند از همکاران گرامی کتب مربوط به این درخت در هر رشته‌ای از المپیاد معرفی خواهد شد.

- منتظر پیشنهادات و نظرات شما سروران هستیم.

گروه المپیاد

انتشارات خوشخوان

مسابقه ها، کنکورها و المپیادهای علمی همایش هایی هستند که کم وبیش در سرتاسر دنیای پهناور به صورت داخلی وبین المللی برگزارمی شود وسال به سال به تنوع، جذبه وعظمت آن ها افزوده می‌شود. یکی ازاین همایش های باشکوه که هرسال درچندین رشته درسطح دانش آموزان سنوات آخر دوره متوسطه برگزارمی‌شود المپیادهای علمی‌می باشد که قدیمی ترین آن المپیاد ریاضی بوده و ازسال ۱۹۵۹ آغاز و تا به حال ادامه داشته است.

در حال حاضر نتیجه ی کسب شده در المپیادهای علمی برای هر کشوری یکی از شاخص های قدرت علمی آن کشور محسوب شده و نفرات ممتاز این المپیادها به راحتی جذب دانشگاه ها وآکادمی های ممتاز جهان شده وپس ازگذشت سنواتی چند به موفقیت های چشم‌گیری نایل می شوند چنانچه بسیاری از دانشمندان حال حاضر در رشته های مختلف از جمله شیمی، فیزیک، IT و ... در سال های نه چندان دور از مدال آوران این المپیادها بوده اند.

جمهوری اسلامی ایران برای اولین باردر سال ۱۳٦٦ در المپیاد ریاضی جهان که در کشور کوبا برگزار می شد شرکت‌کرده و باکسب یک مدال برنز به مقام ۲٦ جهان نائل آمد که تعجب همگان را برانگیخت چراکه درآن سال ایران درگیرجنگ تحمیلی بوده و جهانیان به غیر از جنگ و درگیری چیزی از ایران سراغ نداشتند و درخشش دانش آموزان ایران در آن سال و سنوات بعد نگاه ها را به سمت ایران معطوف کرده وچشم خفته آن ها را تا حدود زیادی بیدار کرد. همانطورکه از رسانه های‌گروهی مطلع شده اید درتمام المپیادهای علمی تیم اعزامی‌کشورعزیزمان درسنوات گذشته جزءکشورهای برتر بوده وضمن‌کسب مدال های رنگارنگ رتبه های بسیار درخشانی ازجمله رتبه اول را حائز شده اند.

نحوه‌گزینش نفرات اعزامی به المپیادهای جهانی تا حدود زیادی مشابه یکدیگرند به این صورت که درابتدا درمسابقه ای سراسری تحت عنوان مرحله اول‌که معمولاً به صورت پرسش های چندگزینه ای مطرح می شود حدوداً هزارنفر پذیرفته شده و در رقابتی معمولاً تشریحی که مرحله ی دوم نامیده می شود شرکت می‌کنند. دراین مرحله در هر رشته حدوداً چهل نفر پذیرفته شده و دردوره ی تابستانی درباشگاه دانش پژوهان جوان‌که متولی برگزاری تمام المپیاد های علمی می باشد شرکت‌کرده و پس ازگذراندن این دوره مرحله ی سوم آزمون برگزار شده و عده ای (در حدود ده نفر) مدال طلا، عده ای مدال نقره و عده ای دیگر مدال برنز

کسب می کنند (دراین مرحله معمولاً همه‌ی افراد شرکت کننده دردوره مدال کسب می کنند) دارندگان مدال طلا حدود یک سال در آن باشگاه آموزش دیده و پس از آن اعضاء تیم اعزامی شناسایی می شوند. دارندگان مدال طلا همگی بدون کنکور و در رشته و دانشگاه دلخواه خود پذیرفته شده و ادامه ی تحصیل می دهند اما دارندگان مدال های نقره و برنز همانند سایر داوطلبان درکنکور سراسری شرکت کرده و برای کسب رتبه دلخواه جهت پذیرفته شدن در رشته ودانشگاه مورد علاقه خود درقابت می کنند با این تفاوت که این افراد سهمیه‌ی ویژه ای در پذیرفته شدن در رشته ودانشگاه مورد علاقه ی خود دارند که جزئیات آن در سایت باشگاه دانش پژوهان جوان تشریح شده است.

متأسفانه درسال های اخیر در بعضی از مدارس افرادی مثلاً لباس کارشناسی به تن کرده و علیه فعالیت های المپیاد جبهه می گیرند و ادعا می کنند فعالیت برای المپیادهای علمی مانع موفقیت درکنکور سراسری بوده و هرچه دانش آموز به سمت المپیاد سوق پیدا کند ازکنکورفاصله گرفته و در صورت عدم کسب مدال طلا (که بسیار محتمل است) آینده ی خود را تباه کرده است درحالی که با تحقیقی که درسال های گذشته انجام شده است فعالیت درزمینه المپیادهای علمی نه تنها مانع فعالیت برای کنکورنیست بلکه مسیرفعالیت برای کسب رتبه مناسب درکنکور را بسیار هموارتر می سازد به عنوان مثال می توانید تمام مدال آوران نقره و برنز ویا حتی آن هایی که در مرحله اول پذیرفته شده ولی به دوره تابستانی راه پیدا نکرده اند را دریک رشته شناسایی کرده و موفقیت های تحصیلی آن ها را در دانشگاه ها جویا شوید که نگارنده ی این متن بارها این تحقیق را انجام داده و به مثبت بودن آن یقین پیدا کرده است.

به هرحال ادعا این است که فعالیت دانش آموز دریک رشته از رشته های المپیاد فواید بسیاری دارد که به تعدادی ازآن ها به صورت گذرا اشاره می شود:

۱. همان طورکه خداوند به بشرتن سالم داده و انتظار می رود با ورزش ها و نرمش های مناسب ازاین نعمت خدادادی محافظت شود به هردانش آموزی نیزاستعدادی داده است که باید شکوفا وبهره ور شود. اغلب باشگاه های کشور اعم ازخصوصی و دولتی داوطلب زیادی در رشته های متفاوت ورزشی دارند که مشغول فعالیت دریکی از رشته های ورزشی مانند کشتی، تکواندو، بدن سازی و ... می باشند که وقتی ازآن افراد راجع به اهدافشان ازاین فعالیت سؤال می شود سالم نگه داشتن بدن را عنوان داشته وانتخاب شدن درتیم ملی را درنهایت عنوان می کنند. چه بسا افرادی که در این رشته ها فعالیت می کنندو هرگز به تیم ملی راه پیدا

نمی کنند که وقتی ازاین افراد راجع به موفقیت هایشان سوأل می شود هرگزخود را ناموفق معرفی نمی کنند و همین که توانسته اند از بدن سالم خود به روش مناسب محافظت کنند را پیروزی بزرگی می‌دانند بنابرین فعالیت دریکی اززمینه های المپیاد چه در نهایت به کسب مدال منجر شود و یا نشود همین که استعداد خدادادی پرورش می یابد موفقیتی است بس بزرگ.

۲. کتب درسی به اذعان اکثر کارشناس ها و اساتید سال به سال ساده تر شده و برای عموم دانش آموزان دلچسب هستند ولی برای دانش آموزان ممتاز و تیزهوش به هیچ عنوان اغنا کننده نمی باشند لذا لازم است این سری ازدانش آموزان فعالیت ویژه ای را در رشته‌ی مورد علاقه‌ی خود داشته باشند تا احساس کنند این فعالیت ها برای آن ها اغنا کننده است.

۳. فعالیت های المپیادی که درنهایت به حل سوألات پیچیده و عمیق در رشته ی مربوطه می شود باعث می شود تا فرد به تمام مسائل جامعه و پیش آمده درزندگی به دید یک مسأله ی المپیاد نگاه کرده و درحل آن نسبت به سایر رقبا موفق تر باشند. تحقیقات نشان می دهد افرادی که با علاقه و اشتیاق حداقل یکی ازشاخه های المپیاد را دنبال می کنند (نه به نیت کسب مدال بلکه به نیت پرورش ذهن) نسبت به سایر افراد در زندگی موفق ترند.

٤. زیربنای اکثر دروس پیش دانشگاهی در دروس المپیاد بنا نهاده می شود بنابرین افرادی که به سبک المپیادی دروس خود را مطالعه می کنند در دوره پیش دانشگاهی با پایه ی بسیار قوی تری با دروس مواجه می شوند و نسبت به رقبای خود راحت تر ازعهده آن ها برمی آیند.

٥. با توجه به مصوبه های موجود، کسب مدال دریکی ازالمپیاد های علمی(حتی مدال برتر) باعث اعطای امتیازهای ویژه ای برای داوطلبان کنکور در ورود به دانشگاه های سراسری می شود که جزئیات آن درسایت های معتبرمخصوصاً سایت باشگاه دانش پژوهان جوان موجود است.

٦. همچنین با توجه به مصوبه های موجود اکثر داوطلبان المپیادها به عضویت نهادهای مختلف ازجمله بنیاد ملی نخبگان درمی آیند که با رجوع به سایت های مرتبط با این نهادها و بنیادها امتیازات تعلق یافته به اعضاء را مشاهده خواهید کرد.

انتشارات خوشخوان مفتخراست از بدو تأسیس به فکرتدوین و تألیف منابعی مناسب برای دانش آموزان ممتاز و داوطلبان المپیاد بوده است که خوشبختانه با یاری خداوند متعال وبا بهره گیری ازاساتید مجربی که خود درسنواتی نه چندان دورمدال آوریکی ازالمپیادهای علمی بوده اند، کتب متعددی به بازار عرضه شده است که مورد توجه داوطلبان قرار گرفته است. بعد ازکسب تجربیات لازم به این نتیجه رسیده ایم که لازم است کتبی به صورت کار تدوین وتألیف شود که درآن هرکتاب مخصوص یک ترم تحصیلی باشد. این پروژه به نام درخت المپیاد نام گرفته است و هرکتاب ازاین پروژه که دراختیار دارید برگی از آن درخت خواهد بود.

بدیهی است انجام چنین پروژه ی عظیمی نظر و همت دسته جمعی می طلبد لذا لازم است ازتمام دوستان و همکارانی که ما را در انجام این پروژه یاری نموده اند، تشکر و قدردانی می نمایم و درنهایت نیز ازعوامل زحمت کش انتشارات اعم ازمشاورین، حروف چین ها، طراحان وکارمندان وکارگران عزیزکمال امتنان را دارم.

با تشکر

رسول حاجی زاده مدیر انتشارات خوشخوان

پیشگفتار مؤلف

به نام یزادن پاک

دل هر ذره را که بشکافی   آفتابیش در میان بینی

چرا این کتاب را نوشتم؟

از سال ۸۴ که به تدریس جبر در المپیاد ریاضی پرداختم، خلاء کتابی در زمینه‌ی معادلات تابعی را احساس کردم. از همان زمان شروع به گردآوری و همچنین طرح سؤالاتی در زمینه‌ی معادلات تابعی کردم (می‌توانید این سؤالات تالیفی را در سایت *www.mathlinks.ro* و یا در کانال تلگرامی *@jabr360* ملاحظه نمایید). در نهایت با نوشتن این کتاب سعی کردم این خلا را در حد امکان پر کنم.

نحوه‌ی مطالعه‌ی سه بخش اصلی کتاب

آشنایی با توابع (ساده):

در این بخش سعی شده مفاهیمی از تابع که در حل معادلات تابعی با آنها روبه‌رو می‌شوید مطرح شود. پیشنهاد می‌کنم قبل از شروع این فصل یک آشنایی مقدماتی با تابع داشته باشید (مثلاً می‌توانید فصل تابع کتاب ریاضی دهم را مطالعه نمایید).

روش‌های کلاسیک در حل معادلات تابعی (متوسط):

در این قسمت ایده‌های اصلی و پر تکرار در حل معادلات تابعی مطرح شده است. در هر فصل ابتدا با مثال‌های درسنامه روبه‌رو می‌شوید و سپس با قسمت تمرینات آن فصل مواجه خواهید شد. تمرینات علامت‌دار (دایره سیاه) را حتماً حل نمایید و بعد به سراغ فصل بعدی بروید (سایر تمرینات مستحبی هستند). در این بخش قبل از دیدن راه‌حل مثال‌های درسنامه لازم است حداقل نیم‌ساعت روی هر کدام از آنها فکر کنید. در انتهای این بخش با مسایلی برای حل (۱) روبه‌رو می‌شوید که جهت تمرین بیشتر و ورزیده شدن شما در حل مسئله آورده شده است.

روش‌های غیرکلاسیک در حل معادلات تابعی (پیشرفته):

در این قسمت با ایده‌ها و تکنیک‌هایی آشنا می‌شوید که طی سال‌های گذشته در ویدیوهای دوره (مرحله‌ی سوم) و یا کلاس‌های دوره‌ی طلا و تیم مطرح نموده‌ام، پیشنهاد می‌کنم در حل مسایل این بخش کمی با حوصله‌تر باشید و اگر خواستید سراغ راه‌حل سؤالی بروید حداقل یک ساعت روی آن مسئله فکر کرده باشید.

پشنهاد می‌کنم قسمت آشنایی با توابع و روش‌های کلاسیک را در سال دهم و روش‌های غیرکلاسیک را در سال یازدهم مطالعه بفرمایید. اما اگر زمان کافی ندارید، مباحث آشنایی با توابع از روش‌های کلاسیک معادلات تک متغیره، مقدارگذاری‌های اولیه در معادلات چند متغیره، مقدارگذاری تقارنی، مقدارگذاری حذفی، مقدارگذاری دوگانه، توابع یک به یک، پوشا بودن توابع، استفاده از استقرا، توابع کوشی و از روش‌های غیرکلاسیک به‌دست آوردن $f(0)$ و $f(1)$، یک به یک بودن توابع، پوشا بودن عبارت‌های جبری، متناوب بودن توابع، توابع شبه متناوب، استفاده از ساختار تابع و استفاده از تقارن عبارت‌های جبری را در اولویت بگذارید.

تشکر و قدردانی

در نهایت از استاد حاجی‌زاده و آقای وزیرزاده که در زمینه‌ی چاپ کتاب و از آقای صادقی و آقای کاظمی که در زمینه‌ی علمی بنده را یاری نمودند تشکر می‌نمایم. همچنین از تمام دانش‌آموزان عزیزم که من را در ویرایش این کتاب یاری نمودند سپاسگزارم.

از شما مخاطبان محترم تقاضا دارم پیشنهادات و نظرات اصلاحی خود را از طریق پست الکترونیکی *mohamad.jafari66@yahoo.com* به اینجانب منتقل سازید.

محمد جعفری - زمستان ۹۶

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
آشنایی با توابع	۱
روش‌های کلاسیک حل معادلات تابعی	۱۱
معادلات تک متغیره	۱۲
مقدارگذاری‌های اولیه در معادلات چند متغیره	۱۷
یک متغیره کردن معادلات تابعی	۲۹
مقدارگذاری تقارنی	۳۴
بررسی توابع دو ضابطه‌ای	۴۱
مقدارگذاری حذفی	۴۶
مقدارگذاری‌های دوگانه	۵۲
ساختن معادله‌ی درجه دوم	۵۹
محاسبه‌ی یک نقطه از تابع	۶۴
توابع یک به یک	۶۹
پوشا بودن توابع	۷۹
استفاده از استقرا	۸۷
توابع کوشی	۹۶
نابرابری‌های تابعی	۱۰۳
توابع پیوسته	۱۱۱
توابع متناوب	۱۱۵
سایر مقدارگذاری‌ها	۱۱۸
مسایلی برای حل (۱)	۱۳۷
روش‌های غیرکلاسیک حل معادلات تابعی	۱۸۲
به دست آوردن $f(0)$ و $f(1)$	۱۸۳
یک به یک بودن توابع	۱۹۱
پوشا بودن عبارت‌های جبری	۱۹۸
عبارات پوشا در معادلات و دستگاه‌های تابعی	۲۰۱
متناوب بودن توابع	۲۰۶
توابع شبه متناوب	۲۱۱
استفاده از ساختار تابع	۲۱۴
استفاده از تقارن عبارت‌های جبری	۲۲۳
توابع جمعی (۱)	۲۲۸
توابع جمعی (۲)	۲۳۶
توابع جمعی (۳)	۲۴۱
توابع جمعی (۴)	۲۴۷

عنوان	صفحه
توابعی در اعداد صحیح	۲۵۱
نابرابری‌های تابعی (۱)	۲۵۹
نابرابری‌های تابعی (۲)	۲۶۵
فضای برداری	۲۷۲
مسایلی برای حل (۲)	۲۷۵
تمرینات تکمیلی	۳۱۱

روش‌های
کلاسیک

حل معادلات تابعی

توابع یک به یک

یکی از مهمترین و پرکاربردترین ویژگی‌هایی که یک تابع می‌تواند داشته باشد، یک به یک بودن است. اگر تابعی یک به یک باشد (یادآوری شرط یک به یک بودن: $f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$) نتایج مناسبی می‌توان گرفت. به عنوان مثال اگر در مورد تابع یک به یک $f(x)$ بدانیم $f(\circ)=\circ$ ، آنگاه با فرض $x\neq\circ$ داریم $f(x)\neq\circ$.

همچنین اگر تابع $f(x)$ یک به یک باشد و $f(x)=f(f(x))$ باشد داریم:

$$f\big(f(x)\big)=f(x)\xrightarrow{(\text{طبق یک به یک بودن})} f(x)=x$$

یا اگر تابع f صعودی و یک به یک باشد، اکیداً صعودی خواهد بود.

همچنین اگر تابع f یک به یک و پیوسته باشد، اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی) خواهد بود (چرا ؟)و ...

حال می‌توانید به مسایل آموزشی این بخش بپردازید.

مثال ۱ **یـک به یک بودن تمـام توابع $f:R^+\to R^+$ که برای هر x حقیقی و مثبت در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند را بررسی نمایید:**

$$۲f(x)+f(f(x))=۳x$$

حل: فرض کنید $f(x)=f(y)$ باشد، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=f(y)\Rightarrow f(f(x))=f\big(f(y)\big) \\ ۲f(x)=۲f(y) \end{array}\right\}\Rightarrow ۲f(x)+f\big(f(x)\big)=۲f(y)+f\big(f(y)\big)$$

$$\Rightarrow ۳x=۳y$$

پس با فرض $f(x)=f(y)$ نتیجه می‌گیریم $x=y$ بنابراین تابع یک به یک است.

مثال ۲ **یک به یک بودن تابع $f:R^+ \to R^+$ که به ازای هر x و y حقیقی و مثبت در معادله‌ی زیر صدق می‌کند را بررسی نمایید.**

$$f\big(x+f(y)\big)=y+f(x)$$

حل: فرض کنید $f(y_۱)=f(y_۲)$ باشد،داریم:

$$\begin{aligned} f(y_۱)=f(y_۲) &\Rightarrow f(y_۱)+x=f(y_۲)+x \\ &\Rightarrow f(f(y_۱)+x)=f(f(y_۲)+x) \\ &\Rightarrow y_۱+f(x)=y_۲+f(x) \\ &\Rightarrow y_۱=y_۲ \end{aligned}$$

پس تابع مورد نظر یک به یک می‌باشد.

مثال ۳ **یک به یک بودن توابع $f:R^+ \to R^+$ که به ازای هر x و y حقیقی و مثبت در معادله ی زیر صدق می‌کنند را بررسی نمایید.**

$$f\big(xf(y)\big)=y\ f(x)$$

حل: فرض کنید $f(y_۱)=f(y_۲)$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned} f(y_۱)=f(y_۲) &\Rightarrow xf(y_۱)=xf(y_۲) \\ &\Rightarrow f\big(xf(y_۱)\big)=f\big(x\,f(y_۲)\big) \\ &\Rightarrow y_۱ f(x)=y_۲ f(x) \\ &\Rightarrow y_۱=y_۲ \end{aligned}$$

پس $f(x)$ تابعی یک به یک است.

مثال ٤ **تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که برای اعداد حقیقی x و y داشته باشیم:**

$$f\big(x+f(x)+۲f(y)\big)=۲f(x)+y+f(y)$$

حل: فرض کنید $p(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد

اگر $f(y_۲)=f(y_۱)$ باشد، از مقایسه‌ی $p(x,y_۱)$ و $p(x,y_۲)$ نتیجه می‌گیریم $f(x)$ یک به یک است. با توجه به یک به یک بودن $f(x)$ و از مقایسه‌ی $p(۰,x)$ و $p(x,۰)$ نتیجه می‌گیریم:

$$f(x)=x+f(۰)$$

از جایگذاری $f(x)=x+f(۰)$ در معادله‌ی اصلی مسئله نتیجه می‌گیریم $f(۰)=۰$ و $f(x)=x$ است.

مثال ۵ **تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که برای اعداد حقیقی x و y داشته باشیم:**

$$f(۲x+۲f(y))=x+f(x)+y+f(y)$$

حل: فرض کنید $p(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد.

اگر $f(y_۲)=f(y_۱)$ باشد، از مقایسه‌ی $p(x,y_۱)$ و $p(x,y_۲)$ نتیجه می‌گیریم $f(x)$ یک به یک است. با توجه به یک به یک بودن $f(x)$ و از مقایسه‌ی $p(۰,x)$ و $p(x,۰)$ نتیجه می‌گیریم: $f(x)=x+f(۰)$

از جایگذاری $f(x)=x+f(۰)$ در معادله‌ی اصلی نتیجه می‌گیریم $f(۰)=۰$ و $f(x)=x$ است.

مثال ۶ تمام توابع $f:R^+ \to R^+$ را بیابید که به ازای هر x, و y حقیقی و مثبت داشته باشیم:

$i) f(f(x)) = ۲f(x) - x$

$ii) f(f(x)+y) = f(x+y)$

حل: فرض کنید $f(x)=f(y)$ باشد، داریم:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=f(y) \Rightarrow f\big(f(x)\big)=f\big(f(y)\big) \\ -۲f(x)=-۲f(y) \end{array}\right\} \Rightarrow f\big(f(x)\big)-۲f(x)=f\big(f(y)\big)-۲f(y)$$

$$\xRightarrow{\text{طبق}(i)} -x=-y$$

از آنجا که با فرض $f(x)=f(y)$ نتیجه گرفتیم: $x=y$، پس f تابعی یک به یک است.

از شرط (ii) و طبق یک به یک بودن تابع داریم:

$$f\big(f(x)+y\big)=f(x+y) \xrightarrow{(\text{طبق یک به یک بودن } f)} f(x)+y=x+y$$

$$\Rightarrow f(x)=x \quad (\forall x \in R^+)$$

مثال ۷ یک به یک بودن تمام توابع $f:N \to N$ که برای هر n طبیعی در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند را بررسی نمایید.

$۲n \le f(n)+f(f(n)) \le ۲n+۱$

حل: فرض کنید: $f(m)=f(n)$ و $(m \ne n) m>n$ باشد، داریم:

$$\left.\begin{array}{r} f(m)=f(n) \Rightarrow f\big(f(m)\big)=f\big(f(n)\big) \\ f(m)=f(n) \end{array}\right\} \Rightarrow f\big(f(m)\big)+f(m)=f\big(f(n)\big)+f(n) \qquad (*)$$

از طرفی طبق فرض مسئله داریم:

$$f\big(f(m)\big)+f(m) \ge ۲m > ۲n+۱ \ge f\big(f(n)\big)+f(n)$$

$$\Rightarrow f\big(f(m)\big)+f(m) > f\big(f(n)\big)+f(n) \qquad (**)$$

از تناقض حاصل (*) و (**) می‌فهمیم که فرض $f(m)=f(n)$ (با شرط $m>n$) نمی‌تواند صحیح باشد.

پس اگر $f(m)=f(n)$ باشد، $m=n$ خواهد بود.

پس f تابعی یک به یک است.

مثال ۸ یک به یک بودن تابع $f:R^+ \to R^+$ که به ازای هر x و y حقیقی و مثبت در رابطه مقابل صدق می‌کند را بررسی نمایید:

$f(x+y)=۲f(x)-x+f(f(y))$

(طراح مسئله: محمد جعفری)

حل: فرض کنید: $P(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد. اگر $f(x_۱)=f(x_۲)$ باشد از مقایسه‌ی $P(x_۱,x_۲)$ و $P(x_۲,x_۱)$ نتیجه بگیرید تابع یک به یک است.

تمرین ۱. **یک به یک بودن تابع $f: R^+ \to R^+$ که به ازای هر x و y حقیقی و مثبت در رابطه‌ی مقابل صدق می کند را بررسی نمایید:**

(طراح مسئله: محمد جعفری)

$$f(2x+2y)=f(f(2x))+2f(2y)-2y$$

راهنمایی: از تقارن سمت چپ تساوی استفاده نمایید و مشابه سؤال قبل مسئله را حل نمایید.

مثال ۹ **تمام توابع $f: R^+ \to R^+$ را بیابید که به ازای هر x و y حقیقی و مثبت داشته باشیم:**

(طراح مسئله: محمد جعفری)

$$i)\ f(x+f(x)+f(2y))=2f(x)+y+f(y)$$

$$ii)\ f(2f(x)+1)=f(2x+1)$$

حل: فرض کنید $p(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد (i) با فرض اینکه $f(2x_1)=f(2x_2)$ داریم:

$$p(x,x_1), p(x,x_2) \text{ از مقایسه ی} \Rightarrow x_1+f(x_1)=x_2+f(x_2): \quad (*)$$

بنابر (*) و از مقایسه‌ی $p(x_1,x)$ و $p(x_2,x)$ داریم:

$$p(x_2,x), p(x_1x) \text{ از مقایسه ی} \Rightarrow f(x_1)=f(x_2): \quad (**)$$

از مقایسه‌ی (*) و (**) نتیجه می‌گیریم $x_1=x_2$ است. پس f تابعی یک به یک است.

از معادله‌ی (ii) و طبق یک به یک بودن f داریم:

$$f(2f(x)+1)=f(2x+1)$$

$$\Rightarrow 2f(x)+1=2x+1 \Rightarrow f(x)=x \quad \forall x \in R^+$$

تمرین ۲. **یک به یک بودن تابع $f: R^+ \to R^+$ را بررسی نمایید. به طوری که به ازای هر x و y حقیقی و مثبت داشته باشیم:**

(طراح مسئله: محمد جعفری)

$$f(x+2f(x)+f(3y))=3f(x)+y+2f(y)$$

مثال ۱۰ **تمام توابع $f: R^+ \to R^+$ را بیابید که به ازای هر x و y حقیقی و مثبت داشته باشیم :**

(طراح مسئله: محمد جعفری)

$$i)\ f\big(x+f(x)+f(2y)\big)=f(4x)-f(2x)+y+f(y)$$

$$ii)\ f\big(2f(x)\big)=f\big(x+f(x)\big)$$

حل: فرض کنید $p(x,y)$ بیانگر معادله‌ی (i) باشد. با فرض اینکه $f(2x_1)=f(2x_2)$ و از مقایسه‌ی $p(x,x_1)$ و $p(x,x_2)$ نتیجه می‌گیریم $x_1+f(x_1)=x_2+f(x_2):\ (*)$. بنابر نتیجه (*) و از مقایسه‌ی $p(x_1x)$ و $p(x_2,x)$ و بنابر فرض اولیه‌ی $f(2x_1)=f(2x_2)$ داریم:

$$f(4x_1)-f(2x_1)=f(4x_2)-f(2x_2)$$

$$\Rightarrow \quad f(4x_1)=f(4x_2) \qquad (**)$$

بنابر نتیجه‌ی (**) و از مقایسه‌ی $p(x,2x_1)$ و $p(x,2x_2)$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(2x_1)+2x_1=2x_2+f(2x_2) \\ \text{فرض اولیه}: f(2x_1)=f(2x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow 2x_1=2x_2$$

بنابراین f تابعی یک به یک است. با توجه به یک به یک بودن f و معادله ی (ii) داریم:

$$f(2f(x))=f(x+f(x))$$
$$\Rightarrow 2f(x)=x+f(x)$$
$$\Rightarrow f(x)=x \quad \forall x\in R^+$$

مثال ۱۱ **تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که برای اعداد حقیقی x و y داشته باشیم:**

$$f(f(x+f(y)))=x+f(y)+f(x+y)$$

حل: فرض کنید $p(x,y)$ بیانگر معادله ی اصلی باشد.

با فرض $f(y_1)=f(y_2)$ ، از مقایسه ی $p(f(y_2),y_1)$ و $p(f(y_1),y_2)$ نتیجه می‌گیریم :

$$f(f(y_2)+y_1)=f(f(y_1)+y_2)\Rightarrow f(f(y_1+f(y_2)))=f(f(y_2+f(y_1)))$$

با توجه به نتیجه‌ی حاصل و از مقایسه‌ی $p(y_2,y_1)$ و $p(y_1,y_2)$ نتیجه می‌گیریم $f(x)$ تابعی یک به یک است.

با توجه به یک به یک بودن $f(x)$ داریم: $p(-f(x),x)\Rightarrow f(x)=x+c$

از جایگذاری $f(x)=x+c$ در معادله‌ی اصلی نتیجه می‌گیریم چنین c وجود نداشته، پس چنین تابعی وجود ندارد.

مثال ۱۲ **تمام توابع $f:R^+\cup\{0\}\to R^+\cup\{0\}$ را بیابید که برای اعداد حقیقی و غیر منفی x و y داشته باشیم:**

$$f(f(x+f(y)))=2x+f(x+y)$$

حل: فرض کنید $p(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد.

اگر $f(y_1)=f(y_2)$ باشد، از مقایسه‌ی $p(f(y_2),y_1)$ و $p(f(y_1),y_2)$ نتیجه می‌گیریم:

$$f(f(y_1)+y_2)=f(f(y_2)+y_1)$$

پس داریم:

$$f(f(f(y_1)+y_2))=f(f(f(y_2)+y_1))$$
$$\Rightarrow 2y_2+f(y_1+y_2)=2y_1+f(y_1+y_2)$$
$$\Rightarrow y_2=y_1 \quad \Rightarrow \text{تابعی یک به یک است}\ f(x)$$

با توجه به یک به یک بودن $f(x)$ داریم: $p(0,x)\Rightarrow f(f(x))=x$

$$p(x,y)\Rightarrow x+f(y)=2x+f(x+y)\Rightarrow f(x+y)=f(y)-x:(1)$$
$$p(y,x)\Rightarrow y+f(x)=2y+f(x+y)\Rightarrow f(x+y)=f(x)-y:\ (2)$$

از مقایسه‌ی (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$f(y)-x=f(x)-y\Rightarrow f(x)=c-x$$

از جایگذاری $f(x)=c-x$ در معادله‌ی اصلی مسئله نتیجه می‌گیریم چنین تابعی وجود ندارد.

مثال ۱۳ **تمام توابع** $f:R^+\to R^+$ **را بیابید که برای هر** $x,y\in R^+$ **داشته باشیم:**

$$(x+y)f\big(f(x)y\big)=x^{2}f\big(f(x)+f(y)\big)$$

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم تابع $f(x)$ یک به یک است. داریم:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\frac{f(f(x_1)+f(y))}{f\big(f(x_1)y\big)}=\frac{f\big(f(x_1)+f(y)\big)}{f\big(f(x_2)y\big)}$$

$$\Rightarrow\frac{x_1+y}{x_1^{2}}=\frac{x_2+y}{x_2^{2}}\qquad(*)$$

حال اگر $x_1\neq x_2$ باشد، فرض می‌کنیم $x_1>x_2>0$ است. داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{x_1}<\dfrac{1}{x_2}\\[2mm]\dfrac{y}{x_1^{2}}<\dfrac{y}{x_2^{2}}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{x_1}+\frac{y}{x_1^{2}}<\frac{1}{x_2}+\frac{y}{x_2^{2}}\ (**)$$

از مقایسه‌ی (*) و (**) نتیجه می‌گیریم فرض $x_1\neq x_2$ غلط بوده است. بنابراین $x_1=x_2$ می‌باشد. پس تابع f یک به یک است.

حال اگر $x>1$ باشد آنگاه $x^{2}-x>0$ خواهد بود. اگر $y=x^{2}-x$ را در معادله جایگذاری کنیم، داریم:

$$y=x^{2}-x\quad(\text{با فرض }x>1)\Rightarrow x^{2}f\big(f(x)(x^{2}-x)\big)=x^{2}f\big(f(x)+f(x^{2}-x)\big)$$

$$\Rightarrow f\big(f(x)(x^{2}-x)\big)=f\big(f(x)+f(x^{2}-x)\big)\xrightarrow{\text{طبق یک به یک بودن}}f(x)(x^{2}-x)=$$

$$=f(x)+f(x^{2}-x)\Rightarrow f(x^{2}-x)=f(x)(x^{2}-x-1)\xrightarrow{x=\frac{3}{2}}f(\tfrac{3}{4})=-\tfrac{1}{4}f(\tfrac{3}{2})$$

نتیجه‌ی حاصل با فرض مثبت بودن برد تابع در تناقض است. پس چنین تابعی نداریم.

مثال ۱۴ **تمام توابع** $f:N\to N$ **را بیابید که برای هر دو عدد طبیعی** m **و** n **داشته باشیم:**

$$f\big(f(m)+f(n)\big)=m+n$$

حل: اگر $f(m_1)=f(m_2)$ باشد،داریم:

$$f(m_1)+f(n)=f(m_2)+f(n)$$
$$\Rightarrow f\big(f(m_1)+f(n)\big)=f\big(f(m_2)+f(n)\big)$$
$$\Rightarrow m_1+n=m_2+n\ \Rightarrow m_1=m_2$$

بنابراین f تابعی یک به یک است.

از طرفی داریم:

$$\left.\begin{array}{l}f\big(f(n)+f(1)\big)=n+1\\ f\big(f(n-1)+f(2)\big)=n+1\end{array}\right\}\Rightarrow f\big(f(n)+f(1)\big)=f\big(f(n-1)+f(2)\big)$$

$$\Rightarrow f(n)+f(1)=f(n-1)+f(2)\quad(*)$$

بنابر (*) داریم

$$\begin{array}{l} f(n)+f(۱)=f(n-۱)+f(۲) \\ f(n-۱)+f(۱)=f(n-۲)+f(۲) \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ \underline{\quad f(۳)+f(۱)=f(۲)+f(۲)} \\ f(n)+(n-۲)f(۱)=(n-۱)f(۲) \end{array}$$

(از جمع طرفین تساوی‌های بالا)

از جایگذاری $f(n)=(n-۱)f(۲)-(n-۲)f(۱)$ در معادله اصلی مسئله داریم:

$$f((n-۱)f(۲)-(n-۲)f(۱)+(m-۱)f(۲)-(n-۲)f(۱))=n+m$$

$$\Rightarrow[(n-۱)f(۲)-(n-۲)f(۱)+(m-۱)f(۲)-(n-۲)f(۱)-۱]f(۲)+$$

$$[(n-۱)f(۲)-(n-۲)f(۱)+(m-۱)f(۲)-(n-۲)f(۱)-۲]f(۱)=m+n$$

از متحد قرار دادن ضرایب m و n در اتحاد بالا، $f(۱)=۱$ و $f(۲)=۲$ بدست می‌آید.

پس جواب مسئله به صورت زیر است:

$$f(n)=n \qquad (\forall n\in N)$$

مثال ۱۵ تمام توابع $f:R^+\to R^+$ را بیابید که به ازای هر x، y و z حقیقی و مثبت داشته باشیم:

(طراح مسئله: محمد جعفری)

$$f\big(x+f(x)+۲y+f(۲z)\big)=x+f(x)+y+f(y)+۲f(z)$$

حل: فرض کنید $p(x,y,z)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد. با فرض اینکه $f(x_۱)=f(x_۲)$ داریم:

$$p(x,y,\frac{x_۱}{۲}),p(x,y,\frac{x_۲}{۲}) \text{ از مقایسه ی} \Rightarrow f(\frac{x_۱}{۲})=f(\frac{x_۲}{۲})$$

$$p(x_۱,\frac{x_۲}{۲},z),p(x_۲,\frac{x_۱}{۲},z) \text{ از مقایسه ی} \Rightarrow x_۱=x_۲$$

بنابراین f تابعی یک به یک است. طبق یک به یک بودن f داریم:

$$p(x,y,z),p(y,x,z) \text{ از مقایسه ی} \Rightarrow f(x)+y=f(y)+x\Rightarrow f(x)=x+a$$

از جایگذاری این نتیجه در معادله‌ی اصلی مسئله، نتیجه می شود $a=۰$ است و داریم:

$$f(x)=x \quad (\forall x\in R^+)$$

مثال ۱۶ آیا توابع $f,g:R\to R$ موجود هستند که برای هر x حقیقی داشته باشیم:

$$f\big(g(x)\big)=x^۲$$

$$g\big(f(x)\big)=x^۳$$

حل: از معادله‌ی $g(f(x))=x^۳$ نتیجه می‌گیریم f تابعی یک به یک است. از طرفی داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f\big(g(x)\big)=x^۲\Rightarrow f\big(g(f(x))\big)=f(x)^۲ \\ g\big(f(x)\big)=x^۳\Rightarrow f(g(f(x)))=f(x^۳) \end{array}\right\}\Rightarrow f(x)^۲=f(x^۳)$$

از جایگذاری ۱، ۰ و ۱- در نتیجه‌ی بدست آمده داریم:

$$f(x)^۲=f(x^۳)\Rightarrow\begin{cases} f(۱)=۰ \text{ یا } ۱ \\ f(۰)=۰ \text{ یا } ۱ \\ f(-۱)=۰ \text{ یا } ۱ \end{cases}$$

طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو تا از مقادیر $f(0)$ ، $f(1)$ و $f(-1)$ برابرند که با یک به یک بودن تابع تناقص دارد. پس چنین تابعی نداریم.

مثال ۱۷ تمام توابع $f,g,h:R\to R$ را بیابید که به ازای هر x و y حقیقی داشته باشیم:

$$f\big(x+f(y)\big)=g(x)+h(y)$$
$$g\big(x+g(y)\big)=h(x)+f(y)$$
$$h\big(x+h(y)\big)=f(x)+g(y)$$

حل: فرض کنید در معادله‌ی اول مقدار $x=x+g(z)$ را بگذاریم، خواهیم داشت:

$$f\big(x+g(z)+f(y)\big)=h(x)+h(y)+f(z):Q(x,y,z)$$

از مقایسه‌ی $Q(x.y,z)$ و $Q(y,x,z)$ و بنابر یک به یک بودن f می‌توان نتیجه گرفت:

$$x+f(y)=y+f(x)\Rightarrow f(x)=x+c$$

به طور مشابه می‌توان نتیجه گرفت $h(x)=x+c'$ و $g(x)=x+c''$. اما در نهایت با جایگذاری نتایج بدست آمده در معادلات اصلی مسئله، می‌توان گفت $c=c'=c''$ پس داریم :

$$f(x)=g(x)=h(x)=x+c \quad (\forall x\in R)$$

مثال ۱۸ تمام توابع $f:R^+\to R^+$ را در نظر بگیرید که به ازای هر x،y و z حقیقی و مثبت داشته باشیم:

$$f\big(x+y+f(y)\big)+f\big(x+z+f(z)\big)=f\big(2f(z)\big)+f(2y)+2x$$

(طراح مسئله: محمد جعفری)

ثابت کنید $f(x)$ تابعی یک به یک است.

حل: فرض کنید $P(x,y,z)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد. اگر $f(x_1)=f(x_2)$ باشد، از مقایسه‌ی $P(x,x_1,x_2)$ و $P(x,x_2,x_1)$ نتیجه می‌گیریم $f(2x_1)=f(2x_2)$ است. با توجه به این نتیجه و از مقایسه‌ی $P(x_1,x_2,x_2)$ و $P(x_2,x_1,x_1)$ نتیجه می‌گیریم $2x_1=2x_2$ است. بنابراین تابع یک به یک است.

ایده‌های مربوط به یک به یک بودن یک معادله‌ی تابعی به این‌جا ختم نمی‌شود. می‌توانید از مسایل روز که در سایت *mathlinks.ro* گذاشته می‌شود جهت آشنایی با ایده‌های جدیدتر استفاده نمایید.

تمرینات

۱. تابع $f:R^+ \to R^+$ به ازای هر x و y حقیقی و مثبت در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند. ثابت کنید $f(x)$ یک به یک است.

$$f(3x+f(y))=f(2x)+x+2f(y)-y$$

(طراح مسئله: محمد جعفری)

۲. تابع $f:R^+ \to R^+$ به ازای هر x و y حقیقی و مثبت در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند. ثابت کنید $f(x)$ یک به یک است.

$$f(3xy)=2f(xy)+xf(y)$$

(طراح مسئله: محمد جعفری)

۳. تابع $f:R^+ \to R^+$ به ازای هر x و y حقیقی و مثبت در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند. ثابت کنید $f(x)$ یک به یک است.

$$f(f(3x)+3f(y))=x+2f(x)+f(3y)$$

(طراح مسئله: محمد جعفری)

۴. تابع $f:R^+ \to R^+$ به ازای هر x و y حقیقی و مثبت در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند. ثابت کنید $f(x)$ یک به یک است.

$$f(f(x)+f(y))=f(2x)-f(x)+f(2y)-y$$

(طراح مسئله: محمد جعفری)

۵. تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر x و y حقیقی داشته باشیم:

$$f\left(x^2+f(y)\right)=f(x)+y$$

۶. تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که

$$f\left(xf(y)\right)+f\left(f(x)+f(y)\right)=yf(x)+f\left(x+f(y)\right)\quad (\forall x,y\in R)$$

۷. در مورد تابع $f:R\to R$ که به ازای هر x, y حقیقی با شرط $x>y$ داریم: $f(x)^2\le f(y)$ نشان دهید:

$$f(x)\in[0,1]\qquad \forall x\in R$$

۸. تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر x و y حقیقی داشته باشیم:

$$f\left(x+y+f(y)\right)=f\left(f(x)\right)+2y$$

۹. تمام توابع $f:N\to N$ را بیابید که برای اعداد طبیعی m و n داشته باشیم:

$$f(f(n)+f(m)+1)=n+m+2011$$

۱۰. تمام توابع اکیداً صعودی $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر x و y حقیقی داشته باشیم:

$$f\left(f(x)+y\right)=f(x+y)+1$$

پاسخ تمرینات

۱. فرض کنید $p(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی باشد. اگر $f(x_1)=f(x_2)$ باشد، از مقایسه‌ی $p(x,x_1)$ و $p(x,x_2)$ یک به یک بودن $f(x)$ را نتیجه بگیرید.

۲. فرض کنید $p(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد. اگر $f(x_1)=f(x_2)$ باشد، از مقایسه‌ی $p(x_1,x_2)$ و $p(x_2,x_1)$ نتیجه بگیرید تابع یک به یک است.

۳. با فرض این‌که $f(x_1)=f(x_2)$ است نتیجه بگیرید $f(3x_1)=f(3x_2)$ است و در ادامه از این نتیجه‌ی به‌دست آمده به این برسید که $x_1+2f(x_1)=x_2+2f(x_2)$ و نتیجه بگیرید $f(x)$ یک به یک است.

۴. فرض کنید $p(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد. اگر $f(x_1)=f(x_2)$ باشد، از مقایسه‌ی $p(x_1,x_2)$ و $p(x_2,x_1)$ نتیجه بگیرید $f(x)$ یک به یک است.

۵. f تابعی یک به یک است. اگر $p(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد. از $p(0,0)$ نتیجه می گیریم $f(0)=0$ است و از $p(x,0)$ نتیجه می‌گیریم چنین تابعی وجود ندارد.

۶. فرض کنید $p(x,y)$ بیانگر معادله اصلی باشد. روی جواب بدیهی $f(x)=0$ بحث نمی‌کنیم. در این صورت f تابعی یک به یک است اگر $f(0)=a$ در نظر بگیریم، داریم:

$$p(0,1)\Rightarrow a+f\big(a+f(1)\big)=a+f\big(f(1)\big)$$
$$\Rightarrow f\big(a+f(1)\big)=f\big(f(1)\big)\Rightarrow a=0$$
$$p(x,0)\Rightarrow f\big(f(x)\big)=f(x)=x$$
$$\xrightarrow{\text{جواب ها}}\begin{cases} f(x)=0 & \forall x\in R\\ f(x)=x & \forall x\in R\end{cases}$$

۷. به وضوح طبق شرط مسئله به ازای هر x حقیقی $f(x)\geq 0$ است. حال اگر $f(x_0)=a>1$ باشد. به ازای متغیر x با شرط $x<x_0$ می‌توان به کمک استقرا نشان داد برای دنباله‌ی $x_{i+1}=\frac{x+x_i}{2}$ (که در آن $i=0,1,2,\dots$ می‌باشد.) داریم:

$$f(x)>f(x_i)\geq a^{2^i}$$

۸. فرض کنید $p(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد. اگر $f(a)=f(b)=c$ باشد، داریم:

$$\left.\begin{aligned}p(a,b)&\Rightarrow f(a+b+c)=f(c)+2b\\ p(b,a)&\Rightarrow f(b+a+c)=f(c)+2a\end{aligned}\right\}$$
$$\Rightarrow a=b\Rightarrow \text{یک به یک است } f$$
$$p(x,0)\Rightarrow f(x+f(0))$$
$$=f(f(x))\Rightarrow x+f(0)=f(x)$$
$$\Rightarrow f(x)=x+a\quad \forall x\in R$$

۹. فرض کنید $p(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد، f تابعی یک به یک است (چرا؟)، از مقایسه‌ی $p(x,y+1)$ و $p(x+1,y)$ داریم:

$$f\big(f(x)+f(y+1)+1\big)=f\big(f(x+1)+f(y)+1\big)$$
$$\Rightarrow f(y+1)-f(y)=f(x+1)-f(x)$$
$$\Rightarrow f(x+1)=f(x)+c\Rightarrow f(x)=cx+f(1)-c$$

حال اگر $f(x)=ax+b$ را در معادله‌ی اصلی قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$f(x)=x+670\quad(\forall x\in N)$$

۱۰. چون f تابعی اکیداً صعودی است، پس یک به یک است. اگر جای x و y را عوض کنیم از یک به یک بودن تابع f داریم:

$$f(x)+y=f(y)+x\Rightarrow f(x)=x+c$$
$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در حکم}} f(x)=x+1\quad(\forall x\in R)$$

روش‌های

غیر کلاسیک

حل معادلات تابعی

یک به یک بودن توابع

یکی از مهم‌ترین ایده‌های حل معادلات تابعی، استفاده از یک به یک بودن توابع می‌باشد. در مسایل این فصل می‌خواهیم به اثبات یک به یک بودن برخی توابع بپردازیم.

مثال ۱ تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر y,x حقیقی داشته باشیم:

$$f(y)+f(x+f(y))=y+f(f(x)+f(f(y)))$$

حل: فرض کنید $p(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد. از مقایسه‌ی $p(x,y_1)$ و $p(x,y_2)$ نتیجه می‌شود f یک به یک است. از $p(0,0)$ نتیجه بگیرید عدد حقیقی k وجود دارد که $f(k)=k$ باشد و از $p(x,k)$ نتیجه بگیرید $k+f(x+k)=k+f(f(x)+k)$ پس جواب مسئله $f(x)=x$ می‌باشد.

تمرین ۱. تمام توابع یک به یک $f:N\to N$ را بیابید که:

$$f(f(n))\le\frac{n+f(n)}{2}\qquad(\forall n\in N)$$

تمرین ۲. تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر y,x حقیقی داشته باشیم:

$$f(x^3-y)+2y(2f(x)^2+y^2)=f(y+f(x))$$

مثال ۲ تمام توابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را بیابید، به‌طوری‌که:

$$f(f(x)+y)=2x+f(f(f(y))-x)\qquad(\forall x,y\in\mathbb{R})$$

حل: فرض کنید $p(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد:

$$p(x,y)\Rightarrow f(f(x)+y)=۲x+f(f(f(y))-x) \qquad (\forall x,y\in\mathbb{R})$$

همچنین فرض کنید: $a=f(۰)$

$$p(\frac{a-x}{۲},-f(\frac{a-x}{۲}))\Rightarrow x=f(f(f(-f(\frac{a-x}{۲})))-\frac{a-x}{۲})$$

پس $f(x)$ یک تابع پوشا است.

اگر $f(u)=f(v)$ باشد، آنگاه با مقایسه‌ی $p(x,u)$ و $p(x,v)$، داریم:

$$f(u+f(x))=f(v+f(x))$$

چون $f(x)$ تابعی پوشا است داریم: $f(x)=f(x+u-v) \qquad (\forall x\in\mathbb{R})$

با مقایسه‌ی $p(x,y)$ با $p(x+u-v\,,\,y)$، داریم: $u-v=۰$

در نتیجه $f(x)$ یک به یک است. پس داریم: $p(۰,x)\Rightarrow f(x+a)=f(f(f(x)))$

پس، از آنجا که $f(x)$ تابعی یک به یک است، داریم: $f(f(x))=x+a$

پس $p(x,y)$، به صورت زیر در می‌آید:

$$f(f(x)+y)=۲x+f(y-x+a)$$

با قرار دادن $y=۰$ در خط بالا داریم:

$$x+a=۲x+f(a-x)\Rightarrow f(a-x)=a-x\Rightarrow f(x)=x \quad (\forall x\in R)$$

مثال ۳ **چند تابع یک به یک $f:R^+\to R^+$ داریم که به ازای هر x حقیقی و مثبت داشته باشیم:**

$$f(x)^۳+f(x)=f(x^۴-۵x^۲+۲۰۱۵)^۳+f(x^۴-۵x^۲+۲۰۱۵)^۲$$

(طراح مسئله: محمد جعفری)

حل: از آن‌جا که به ازای $x=۲,x=۱$ ، $x^۴-۵x^۲+۲۰۱۵$ مقداری ثابت و برابر با $۱^۴-۵\times(۱)^۲+۲۰۱۵=۲^۴-۵(۲)^۲+۲۰۱۵=۲۰۱۱$ تولید می‌کند، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x=۱\Rightarrow f(۱)^۳+f(۱)=f(۲۰۱۱)^۳+f(۲۰۱۱)^۲ \\ x=۲\Rightarrow f(۲)^۳+f(۲)=f(۲۰۱۱)^۳+f(۲۰۱۱)^۲ \end{array}\right\}\Rightarrow f(۱)^۳+f(۱)=f(۲)^۳+f(۲)$$

$$(f(۱)^۳-f(۲)^۳)+(f(۱)-f(۲))=۰\Rightarrow(f(۱)-f(۲))(f(۱)^۲+f(۲)^۲+f(۱)f(۲)+۱)=۰\Rightarrow$$

$$(f(۱)-f(۲))(۲f(۱)^۲+۲f(۲)^۲+۲f(۱)f(۲)+۲)=۰$$

$$(f(۱)-f(۲))(\underbrace{f(۱)^۲+f(۲)^۲+(f(۱)+f(۲))^۲+۲}_{\text{یک عبارت همواره مثبت است}})=۰\Rightarrow f(۱)-f(۲)=۰\Rightarrow f(۱)=f(۲)$$

این نتیجه با یک به یک بودن تابع f در تناقض است.

مثال ٤ **تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که:**

$$f(x+y+f(xy))=f(f(x+y))+xy \qquad (\forall x,y\in R)$$

حل: مسئله را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$f(k+f(L))=f(f(k))+L$$

به‌طوری که $k^{2} \geq 4L$ (چرا؟)

نشان می‌دهیم f تابعی یک به یک است. اگر $f(L_1)=f(L_2)$ باشد و $k_0>2\sqrt{|L_1|}\,,\,k_0>2\sqrt{|L_2|}$ باشد، داریم:

$$f(L_2)=f(L_1)\Rightarrow f(L_2)+k_0=f(L_1)+k_0 \Rightarrow f(f(L_2)+k_0)=f(f(L_1)+k_0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_1=L_2 \Rightarrow \text{تابعی یک به یک است } f$$

حال اگر $y=0$ باشد داریم:

$$f(x+f(0))=f(f(x))\Rightarrow f(x)=x+a$$

$$\text{جایگذاری در حکم} \Rightarrow f(x)=x+a \qquad (\forall x \in R)$$

مثال ۵ **تمام توابع $g\,,f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر $y\,,x$ حقیقی داشته باشیم:**

(طراح مسئله: محمد جعفری)

$$f(x+3y+g(xy^{3}))=f(f(x+3y))+xy^{3}$$

$$g(x+3y+f(xy^{3}))=g(g(x+3y))+xy^{3}$$

حل: فرض کنید $x+3y=A$ و $xy^{3}=B$ باشند. در این صورت معادلات به صورت زیر در می‌آیند:

$$f(A+g(B))=f(f(A))+B \quad : p(A\,,B)$$

$$g(A+f(B))=g(g(A))+B \quad : q(A\,,B)$$

چون $|x|+|y|+|y|+|y|\geq 4\sqrt[4]{xy^{3}}$ (طبق نامساوی حسابی هندسی)، بنابراین کافی است فرض کنیم $A\geq 4\sqrt[4]{|B|}$ است. حال ثابت می‌کنیم $g\,,f$ یک به یک هستند. اگر $f(B_1)=f(B_2)$ باشند و $A\geq 4\sqrt[4]{|B_1|}\;,\;\; A\geq 4\sqrt[4]{|B_2|}$ داریم:

$$q(A,B_2)\,,\; q(A\,,B_1) \;\text{مقایسه‌ی}\Rightarrow B_1=B_2 \Rightarrow \text{تابعی یک به یک است } f(x)$$

به‌طور مشابه نتیجه می‌گیریم $g(x)$ نیز یک به یک است. بنابراین:

$$p(x\,,0) \Rightarrow f(x)=x+c$$

$$q(x\,,0) \Rightarrow g(x)=x+c'$$

از جایگذاری این نتایج در معادلات اصلی مسئله نتیجه می‌گیریم $c=c'$ است. بنابراین داریم:

$$f(x)=x+c \qquad (\forall x\in R)$$

$$g(x)=x+c \qquad (\forall x\in R)$$

مثال ۶ **تمام توابع $f:R^{+}\cup\{0\}\to R^{+}\cup\{0\}$ را بیابید که برای هر $y\,,x$ حقیقی داشته باشیم:**

(طراح مسئله: محمد جعفری)

$$f(x+f(x)+2y)=2x+f(2f(y))$$

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم $f(x)$ تابعی یک به یک است.

$$f(y_1)=f(y_2)\xrightarrow{(\forall x\in R)} 2x+f(2f(y_1))=2x+f(2f(y_2))$$

$$\Rightarrow f(\underbrace{x+f(x)+2y_1}_{B})=f(\underbrace{x+f(x)+2y_2}_{A})$$

بنابراین داریم:

$$A+f(A)+2y_1=B+f(B)+2y_2 \Rightarrow f(A+f(A)+2y_1)=f(B+f(B)+2y_2)$$

$\Rightarrow ۲A + f(۲f(y_۱)) = ۲B + f(۲f(y_۲)) \Rightarrow ۲A = ۲B \Rightarrow A = B \Rightarrow y_۱ = y_۲ \Rightarrow$ یک به یک است $f(x)$

با توجه به اینکه $f(x)$ تابعی یک به یک است، اگر در معادله‌ی اصلی قرار دهیم:

$$x = y = ۰ \Rightarrow f(f(۰)) = f(۲f(۰)) \Rightarrow f(۰) = ۲f(۰) \Rightarrow f(۰) = ۰$$

اگر در معادله‌ی اصلی قرار دهیم $x = ۰$ داریم:

$$x = ۰ \Rightarrow f(۲y) = f(۲f(y)) \Rightarrow f(y) = y$$

مثال ۷ تمام توابع $f: Q \to Q$ را بیابید که برای اعداد گویای x , y داشته باشیم:

$$f(x + f(x) + ۲y) = ۲x + ۲f(f(y))$$

(طراح مسئله: محمد جعفری)

حل: فرض کنید $p(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد. اکنون ثابت می‌کنیم $f(x)$ تابعی یک به یک است.

$$f(y_۱) = f(y_۲) \xrightarrow{(\forall x \in R)} ۲x + ۲f(f(y_۱)) = ۲f(f(y_۲)) + ۲x$$

$$\Rightarrow f(\underbrace{x + f(x) + ۲y_۱}_{A}) = f(\underbrace{x + f(x) + ۲y_۲}_{B})$$

حال برای اثبات یک به یک بودن تابع $f(x)$ کافی است نشان دهیم $A = B$ از طرفی داریم:

$$f(A) = f(B) \Rightarrow f(A) + A + ۲y_۲ = f(B) + B + ۲y_۱ \Rightarrow f(f(A) + A + ۲y_۲) = f(f(B) + B + ۲y_۱)$$

$$\Rightarrow ۲A + ۲f(f(y_۲)) = ۲B + ۲f(f(y_۱))$$

$\Rightarrow A = B \Rightarrow y_۱ = y_۲ \Rightarrow$ تابعی یک به یک است $f(x)$

همچنین از $p(x,۰)$ نتیجه بگیرید $f(x)$ تابعی پوشا است. حال اگر $f(b) = ۰$ در نظر بگیریم داریم:

$$p(۰,۰) \Rightarrow f(f(۰)) = ۰$$

$$p(b,۰) \Rightarrow b = ۰ \Rightarrow f(۰) = ۰$$

از $p(x,۰)$ نتیجه می‌گیریم $f(x + f(x)) = ۲x$ ، چون $f(x)$ پوشا و یک به یک است بنابراین $x + f(x)$ باید پوشا باشد و از $p(۰,y)$ نتیجه می‌گیریم: $f(۲y) = ۲f(f(y))$ از دو نتیجه‌ی بدست آمده داریم:

$$x + f(x) = X \ , \ ۲y = Y \Rightarrow f(X + Y) = f(X) + f(Y) \qquad (\forall X, Y \in Q)$$

بنابراین جواب مسئله به صورت $f(x) = ax$ است که از جایگذاری آن در معادله‌ی اصلی $f(x) = x$ بدست می‌آید.

مثال ۸ ثابت کنید تابع $f: R^+ \to R^+$ که به ازای هر x و y حقیقی و مثبت در معادله‌ی زیر صدق می‌کند، یک به یک است.

$$f(x + ۲f(x) + ۲y) = ۳f(x) + y + f(y)$$

(طراح مسئله: محمد جعفری)

حل: فرض کنید $p(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد اگر $f(x_۱) = f(x_۲)$ باشد، از مقایسه‌ی $p(x_۱,y)$ و $p(x_۱,y)$ نتیجه می‌گیریم:

$$f(x_۱ + ۲f(x_۱) + ۲y) = f(x_۲ + ۲f(x_۲) + ۲y) \qquad (\forall y \in R^+)$$

$$\Rightarrow f(x_۱ + ۲f(x_۱) + y) = f(x_۲ + ۲f(x_۲) + y) \qquad (\forall y \in R^+)$$

$$\Rightarrow f(y) = f(y + x_۲ + ۲f(x_۲) - x_۱ - ۲f(x_۱)) \qquad (\forall y > x_۱ + ۲f(x_۱))$$

$$\Rightarrow f(y) = f(y + \underbrace{(x_۲ - x_۱)}_{T}) \qquad (\forall y > x_۱ + ۲f(x_۱))$$

بنابراین $f(y)=f(y+T)$ است. حال با فرض این‌که $y>x_1+2f(x_1)$، از مقایسه‌ی $p(x,y)$ و $p(x,y+T)$ نتیجه می‌گیریم $T=0$ است. بنابراین $x_2-x_1=0$ است.
پس $x_1=x_2$ است. بنابراین f تابعی یک به یک است.

مثال ۹ **تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر x و y حقیقی و مثبت داشته باشیم:**

$$f(f(x)+y)=2x+f(f(f(y))-x)$$

حل: فرض کنید $p(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد، از $p(x,-f(y))$ نتیجه می‌گیریم f تابعی پوشا است.
حال با فرض این که $f(x_1)=f(x_2)$، از مقایسه‌ی $p(x,x_1)$ و $p(x,x_2)$ نتیجه می‌گیریم:

$$f(f(x)+x_1)=f(f(x)+x_2)\quad:\quad(1)$$

چون $f(x)$ تابعی پوشا است، می‌توانیم نتیجه‌ی (۱) را به صورت زیر بنویسیم:

$$f(y+x_1)=f(y+x_2)\qquad(\forall y\in R)$$
$$\Rightarrow f(y)=f(y+\underbrace{(x_2-x_1)}_{T}\qquad(\forall y\in R)$$

بنابراین با فرض $T=x_2-x_1$ می‌توان گفت f تابعی متناوب با دوره تناوب $T=x_2-x_1$ است. حال از مقایسه‌ی $p(x,y)$ و $p(x+T,y)$ نتیجه می‌گیریم $T=0$ است. بنابراین $x_1=x_2$ است. پس تابع یک به یک است و داریم:

$$p(0,0)\Rightarrow f(0)=0$$
$$p(0,y)\Rightarrow f(f(y))=y$$
$$p(x,0)\Rightarrow f(f(x))=2x+f(-x)\Rightarrow x=2x+f(-x)\Rightarrow f(-x)=-x\Rightarrow f(x)=x\qquad(\forall x\in R)$$

مثال ۱۰ **تمام توابع $f:R^+\to R^+$ را بیابید که به ازای هر x و y حقیقی و مثبت داشته باشیم:**

$$f(x+f(x)+y)=f(2x)+f(y)$$

(طراح مسئله: محمد جعفری)

حل: فرض کنید $p(x,y)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد، داریم:

$$p(x,x-f(x))\Rightarrow f(2x)=f(2x)+f(x-f(x))\Rightarrow 0=f(x-f(x))$$

با توجه به این‌که صفر در برد تابع نیست، بنابراین $x-f(x)$ نمی‌تواند مثبت باشد. یعنی $f(x)\geq x$ خواهد بود.
حال اگر $f(x_1)=f(x_2)$ باشد، از مقایسه‌ی $p(x_1,x_2)$ و $p(x_2,x_1)$ نتیجه می‌گیریم $f(2x_2)=f(2x_1)$. از طرف دیگر از مقایسه‌ی $p(x_1,y)$ و $p(x_2,y)$ داریم:

$$p(x_1,y),\ p(x_2,y)\Rightarrow f(x_1+f(x_1)+y)=f(x_2+f(x_2)+y)\Rightarrow f(y)=f(y+T)\qquad(*)$$

که در رابطه‌ی $(*)$ $T=x_1-x_2$ (با فرض $x_1\geq x_2$) و $y>x_2+f(x_2)$ است. بنابراین تابع به ازای $y>A$ (که $A=x_2+f(x_2)$ است) متناوب خواهد بود. اما تابعی که در شرط $f(x)\geq x$ صدق می‌کند، نمی‌تواند متناوب باشد (زیرا $f(x)=f(x+nT)\geq x+nT$ خواهد بود که با افزایش n، مقدار $f(x)$ به سمت بی‌نهایت می‌رود و امکان‌پذیر نیست). پس $T=0$ است. یعنی $x_1=x_2$ است. یعنی تابع $f(x)$ یک به یک است.

حال از مقایسه‌ی $p(x,2y)$ و $p(y,2x)$ داریم:

$$f(x+f(x)+2y)=f(y+f(y)+2x)$$
$$\Rightarrow x+f(x)+2y=y+f(y)+2x\Rightarrow f(y)=y+(f(x)-x):\ (1)$$

اگر در رابطه‌ی (۱) مقدار $x=1$ را قرار دهیم، جواب $f(y)=y+c$ به‌دست می‌آید. که از جایگذاری این نتیجه در معادله‌ی اصلی می‌توان فهمید c مقداری نامنفی است.

مثال ۱۱ **تمام توابع $f:R^{+}\cup\{0\}\to R^{+}\cup\{0\}$ را بیابید که برای اعداد غیرمنفی z,y,x داشته باشیم:**

$$f(\frac{x+f(x)}{2}+y+f(2z))=2x-f(x)+f(f(y))+2f(z)$$

(طراح مسئله: محمد جعفری)

حل: فرض کنید $p(x,y,z)$ بیانگر معادله‌ی اصلی مسئله باشد.

ابتدا نشان می‌دهیم f تابعی یک به یک است. با فرض $f(y_1)=f(y_2)$ برای تمام مقادیر نامنفی z,x داریم:

$$2x-f(x)+f(f(y_1))+2f(z)=2x-f(x)+f(f(y_2))+2f(z)\Rightarrow$$
$$f(\underbrace{\frac{x+f(x)}{2}+y_1+f(2z)}_{A})=f(\underbrace{\frac{x+f(x)}{2}+y_2+f(2z)}_{B})$$
$$\frac{A+f(A)}{2}+\frac{y_2}{2}=\frac{B+f(B)}{2}+\frac{y_1}{2}\Rightarrow f(\frac{A+f(A)}{2}+\frac{y_2}{2}+f(2z))=f(\frac{B+f(B)}{2}+\frac{y_1}{2}+f(2z))$$
$$\Rightarrow 2A+f(f(\frac{y_2}{2}))=2B+f(f(\frac{y_1}{2}))\qquad (*)$$

از طرف دیگر با فرض $f(y_1)=f(y_2)$ و از مقایسه‌ی $p(x,x,\frac{y_1}{2})$ و $p(x,x,\frac{y_2}{2})$ نتیجه می‌شود $f(\frac{y_1}{2})=f(\frac{y_2}{2})$. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(\frac{y_1}{2})=f(\frac{y_2}{2}) \\ (*):2A+f(f(\frac{y_2}{2}))=2B+f(f(\frac{y_1}{2}))\end{array}\right\}\Rightarrow A=B\Rightarrow y_1=y_2$$

بنابراین f تابعی یک به یک است. اکنون $f(0)=a$ را بدست می‌آوریم:

$$p(0,0,0)\Rightarrow f(\frac{3}{2}a)=a+f(a)$$
$$\left.\begin{array}{l} p(\frac{3}{2}a,0,0)\Rightarrow f(\frac{9}{4}a+\frac{1}{2}f(a))=4a \\ p(a,0,0)\Rightarrow f(\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}f(a))=4a\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{9}{4}a+\frac{1}{2}f(a)=\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}f(a)\Rightarrow a=0\Rightarrow f(0)=0$$

بنابراین داریم:

$$p(0,y,0)\Rightarrow f(y)=f(f(y))\Rightarrow f(y)=y\qquad \forall y\in R^{+}\cup\{0\}$$

مثال ۱۲ **تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر دو عدد حقیقی $y\,,\,x$ داشته باشیم:**

$$f(f(x)-f(y))=f(y^2)-2x^2f(y)+f(f(x))$$

حل: فرض می‌کنیم $p(x,y)$ بیانگر معادله‌ی تابعی صورت مسئله باشد.

حال اگر $f(y_1)=f(y_2)$ باشد، از مقایسه‌ی $p(x,y_2)$ و $p(x,y_1)$ نتیجه می‌شود.

$p(x,y_1)$ و $p(x,y_2)$ از مقایسه‌ی $\Rightarrow f(y_1^2)=f(y_2^2)$ (*)

و از مقایسه‌ی $p(y_1,y_2)$ و $p(y_2,y_1)$ و بنابر (*) نتیجه می‌گیریم: $y_1^2=y_2^2\Rightarrow y_1=\pm y_2$

بنابراین: $f(y_1)=f(y_2)\Rightarrow y_1=\pm y_2$ (**)

اکنون داریم:

$$p(0\,,\,0)\Rightarrow f(f(0))=0\,,\quad p(0\,,\,y)\Rightarrow f(-f(y))=f(y^2)\Rightarrow -f(y)=\pm y^2\Rightarrow f(y)=\pm y^2$$

بدیهی است که $f(x)=x^2\ (\forall x\in R)$ جواب معادله است.

به عنوان تمرین ثابت کنید تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in A\\ -x^2 & x\notin A\end{cases}$ نمی‌تواند در معادله صدق کند.

مثال ۱۳ **تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر $z\,,\,y\,,\,x$ حقیقی داشته باشیم:**

$$f(f(x)+f(y)+f(z))=f(f(x)-f(y))+f(2xy+f(z))+2f(xz-yz)$$

حل: ابتدا می‌گوییم f تابعی یک به یک است. $f(z_1)=f(z_2)$

$$p(x\,,\,0\,,\,z_1)\,,\ p(x\,,\,0\,,\,z_2)\Rightarrow \text{مقایسه}\ f(xz_1)=f(xz_2)$$

$$p(x,y\,,\,0)\,,\,p(y,x\,,\,0)\Rightarrow f(f(x)-f(y))=f(f(y)-f(x))$$

$$p(xz_1,yz_2\,,\,1)\ ,\ p(xz_2\,,\,yz_1\,,\,1)\Rightarrow f\,\underbrace{(xz_1-yz_2)}_{a}=f\,\underbrace{(xz_2-yz_1)}_{b}$$

اگر $z_1^2=z_2^2$ نباشد آنگاه $b\,,\,a$ پوشا خواهند بود و f تابعی ثابت خواهد بود. در غیر این صورت $z_1=\pm z_2$ است. از طرفی داریم:

$$p(1\,,1\,,\,0)\,,\ p(1\,,-1\,,\,0)\Rightarrow f(0)=0$$

$$p(x,\,x\,,\,0)\Rightarrow f(x)=x^2\ \text{یا}\ -x^2$$

$$p(x\,,x,\,x)\Rightarrow f(x)=x^2\ \text{یا}\ -\frac{x^2}{2}$$

بنابراین داریم:

$$f(x)=0\qquad(\forall x\in R)$$

$$f(x)=x^2\qquad(\forall x\in R)$$

تمرین ۳. **تمام توابع $f:R\to R$ را بیابید که به ازای هر $y\,,\,x$ حقیقی داشته باشیم:**

$$f(x\,f(x+y))=f(y\,f(x))+x^2$$