



اعداد سه رقمی مضرب ۵ برابر است با:

$$\left[\frac{999}{5} \right] - \left[\frac{99}{5} \right] = 199 - 19 = 180$$

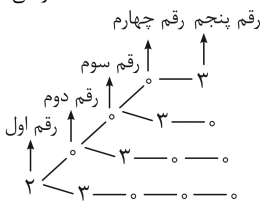
اعداد کوچکتر اعداد کوچکتر از
از ۱۰۰ و مضرب ۵ ۱۰۰۰ و مضرب ۵

پس تعداد اعداد سه رقمی که مضرب ۵ نیست برابر است با:

$$900 - 180 = 720$$

کل اعداد

رقمی ۳



۲۷- (۳) راه اول: از نمودار درختی

استفاده می‌کنیم:

۴ عدد ۵ رقمی وجود دارد که با ۲ شروع

می‌شود. به‌طور مشابه ۴ عدد ۵ رقمی نیز

وجود دارد که با ۳ شروع می‌شود، پس

مجموعاً ۸ عدد ۵ رقمی وجود دارد.

راه دوم:

نکته (۱): اگر ترتیب قرار گرفتن n شیء متمایز مهم باشد، به هر یک از حالت‌هایی که این n شیء می‌توانند در یک ردیف کنار هم قرار بگیرند، یک جایگشت از این n شیء می‌گوییم. بنا به اصل ضرب تعداد کل جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با:

$$\frac{n}{\text{مکان اول}} \times \frac{n-1}{\text{مکان دوم}} \times \dots \times \frac{1}{\text{مکان } n\text{ام}} = n!$$

نکته (۲): تعداد جایگشت‌های n شیء در یک ردیف به‌طوری‌که، m_1 شیء مثل هم، m_2 شیء دیگر مثل هم و ... و m_k شیء نیز مثل هم باشند، برابر است با:

$$\frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!}$$

نتیجه: به‌طور کلی تعداد حالت‌های مطلوب برای n شیء غیر متمایز برابر با نسبت تعداد حالت‌های مطلوب برای n شیء متمایز به جایگشت اشیاء غیر متمایز است.

ابتدا توجه کنید که اولین رقم ۲ یا ۳ می‌تواند باشد، پس برای اولین رقم ۲ حالت داریم و ترتیب قرار گرفتن ۴ رقم دیگر، حالت‌های مختلف ایجاد می‌کند پس تعداد اعداد پنج رقمی مطلوب برابر است با:

$$2 \times \frac{4!}{3!} = 2 \times 4 = 8$$

حالت‌های جایگشت رقم اول بقیه ارقام

توجه دارید که در ۴ رقم باقی‌مانده ۳ رقم مشابه‌اند (برابر صفرند)، پس تعداد جایگشت‌ها را بر تعداد جایگشت‌های این سه رقم تقسیم می‌کنیم.

۲۸- (۳)

نکته: تعداد حالت‌هایی که n شیء متمایز می‌توانند کنار هم دور یک میز (در یک صف بسته) قرار گیرند، برابر با $(n-1)!$ است.

بنابر نکته‌ی بالا این ۶ نفر به $5! = (6-1)!$ حالت می‌توانند کنار هم بنشینند.

۲۳- (۲) تابع $f: A \rightarrow B$ یک‌به‌یک است و شامل عضو $(1,1)$ ، پس

داریم $f(1) = 1$. اما چون f یک‌به‌یک است، برای $f(2)$ ، حالت ۳، برای $f(3)$ ، حالت ۲، و برای $f(4)$ تنها یک حالت باقی می‌ماند. لذا تعداد توابع

یک‌به‌یک مطلوب برابر است با:

$$\frac{1}{f(1)} \times \frac{3}{f(2)} \times \frac{2}{f(3)} \times \frac{1}{f(4)} = 6$$

۲۴- (۱)

نکته: در حل مسائل با استفاده از اصل ضرب، شمارش را از جایی آغاز می‌کنیم که دارای شرط یا محدودیت باشد.

چون اعداد زوج شش رقمی مورد نظر است، لذا یکان رقمی زوج است و در نتیجه یکی از ارقام ۰، ۲ یا ۴ می‌باشد. بنابراین ۲ حالت در نظر می‌گیریم: الف) رقم یکان صفر باشد:

$$120 = \frac{5}{\text{رقم صفر}} \times \frac{4}{\text{غیر صفر}} \times \frac{3}{\text{غیر صفر}} \times \frac{2}{\text{غیر صفر}} \times \frac{1}{\text{غیر صفر}} \times \frac{1}{\text{غیر صفر}}$$

ب) رقم یکان ۲ یا ۴ باشد:

$$192 = \frac{4}{\text{رقم ۲ یا ۴}} \times \frac{4}{\text{غیر صفر و غیر یکان}} \times \frac{3}{\text{غیر صفر و غیر یکان}} \times \frac{2}{\text{غیر صفر و غیر یکان}} \times \frac{1}{\text{غیر صفر و غیر یکان}} \times \frac{2}{\text{غیر صفر و غیر یکان}}$$

لذا بنا به اصل جمع تعداد کل اعداد شش رقمی زوج برابر است با:

$$120 + 192 = 312$$

۲۵- (۳) راه اول: به کمک اصل متممی، ابتدا تعداد کل اعداد چهار

رقمی را تعیین می‌کنیم، سپس منه‌ای تعداد اعداد چهار رقمی می‌کنیم که ارقام دهگان و صدگان آن‌ها هر دو فرد هستند:

$$\begin{cases} \text{تعداد کل چهار رقمی‌ها: } 9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000 \\ \text{تعداد چهار رقمی‌ها با دهگان و صدگان فرد: } 9 \times 5 \times 5 \times 10 = 2250 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{جواب} = 9000 - 2250 = 6750$$

راه دوم: دو حالت داریم:

الف) دهگان عددی زوج باشد، لذا صدگان می‌تواند هم زوج و هم فرد باشد:

$$\frac{9}{\text{رقم غیر صفر}} \times \frac{10}{\text{ارقام زوج}} \times \frac{5}{\text{ارقام زوج}} \times \frac{10}{\text{ارقام زوج}} = 9 \times 5 \times 10 \times 10 = 4500$$

ب) دهگان عددی فرد باشد، لذا صدگان باید عدد زوج باشد:

$$\frac{9}{\text{رقم غیر صفر}} \times \frac{5}{\text{ارقام زوج}} \times \frac{5}{\text{ارقام زوج}} \times \frac{10}{\text{ارقام زوج}} = 9 \times 5 \times 5 \times 10 = 2250$$

بنابراین تعداد کل اعداد مطلوب برابر است با:

$$4500 + 2250 = 6750$$

۲۶- (۴) راه اول: برای آن که عددی مضرب ۵ باشد، باید رقم یکان آن

صفر یا ۵ باشد. پس تعداد اعداد سه رقمی بخش‌پذیر بر ۵ برابر است با:

$$\frac{9}{\text{رقم غیر صفر}} \times \frac{10}{\text{رقم ۰ یا ۵}} \times \frac{2}{\text{رقم ۰ یا ۵}} = 9 \times 10 \times 2 = 180$$

حال از کل اعداد سه رقمی، اعداد مضرب ۵ را کم می‌کنیم.

$$900 - 180 = 720$$

راه دوم:

نکته: تعداد اعداد طبیعی مضرب m که کوچک‌تر یا مساوی n

$$\left[\frac{n}{m} \right]$$

باشند $(m, n \in \mathbb{N})$ ، برابر است با: $\left[\frac{n}{m} \right]$

(علامت جزء صحیح است.)