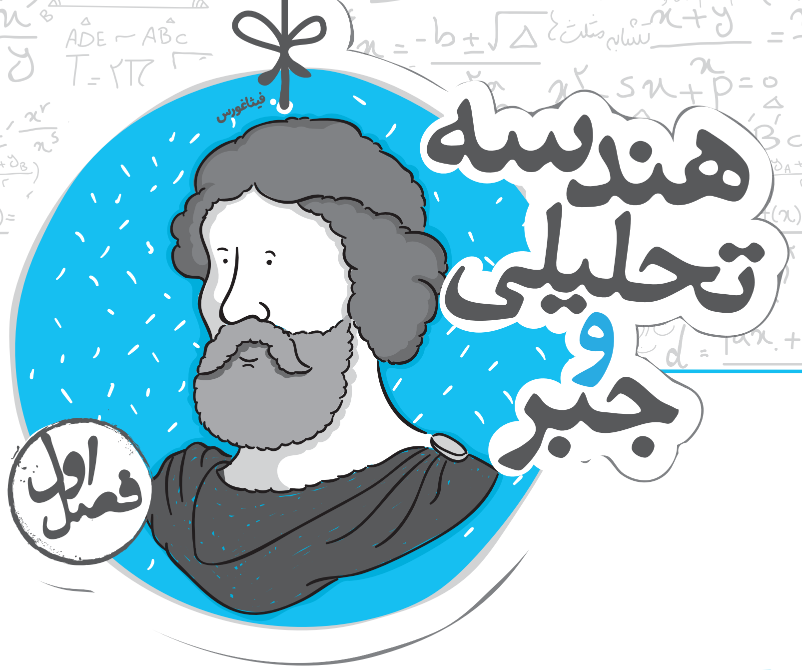
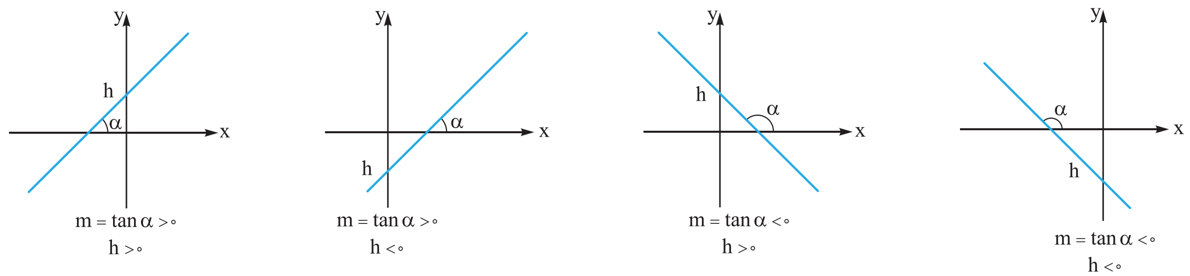
فهرست



۱ هندسه تحلیلی

معادلهٔ خط راست معادلهٔ هر خط راست به شکل $y = mx + h$ است **(یعنی یک معادلهٔ درجهٔ اول برحسب x و y)** که در این رابطه m شیب خط و h عرض از مبدأ آن است.

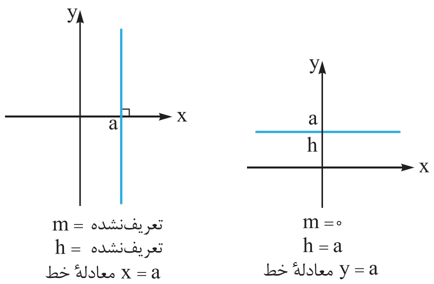


شیب خط برابر تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد اگر این زاویه حاده باشد $m > 0$ و اگر این زاویه منفرجه باشد $m < 0$ است.

عرض از مبدأ خط برابر عرض نقطه‌ای است که خط در آن، محور عرض‌ها را قطع می‌کند.

در حالتی که خط موازی محور عرض‌ها است شیب و عرض از مبدأ خط تعریف نشده‌اند و در حالتی که خط موازی محور طول‌ها است $m = 0$ است و h ممکن است هر عدد دلخواه باشد.

اگر در معادلهٔ خط $h = 0$ باشد، خط از مبدأ مختصات عبور می‌کند. یعنی خط به معادلهٔ $y = mx$ از مبدأ مختصات عبور می‌کند.



نوشتن معادلهٔ خط

برای نوشتن معادلهٔ خط دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱ اگر شیب (m) و مختصات یک نقطه $A(x_1, y_1)$ از خط را داشته باشیم معادله را به یکی از دو روش زیر می‌نویسیم:

$y - y_1 = m(x - x_1)$ یا $y = mx + h$

۲ اگر مختصات دو نقطه از خط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را داشته باشیم معادله را به یکی از دو صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ y = mx + h \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ y - y_1 = m(x - x_1) \end{cases}$$

مثال و پاسخ

مثال **معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ (۲,۵) بگذرد و با محور طول‌ها زاویهٔ ۴۵° بسازد.**

پاسخ شیب خط برابر $m = \tan ۴۵^\circ = ۱$ است پس:

روش اول

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$
$$y - ۵ = ۱(x - ۲)$$
$$y = x - ۲ + ۵$$
$$y = x + ۳$$

روش دوم

$$y = mx + h$$
$$y = x + h$$
$$(۲,۵) \Rightarrow ۵ = ۲ + h \Rightarrow h = ۳$$
$$y = x + ۳$$

معمولاً روش دوم روش سریع‌تری است و خیلی وقت‌ها بعد از نوشتن $y = mx$ با جاگذاری مقادیر x و y نقطه می‌توانیم h را به طور مستقیم حساب کنیم.

مثال و پاسخ

مثال **سه نقطهٔ $A(۲,۳)$ ، $B(۵,۳)$ و $C(۲,۱)$ سه رأس یک مثلث‌اند. معادلهٔ اضلاع مثلث را بنویسید.**

پاسخ باید معادلهٔ AB و AC و BC را بنویسیم:

معادلهٔ AB: $A\left|\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}\right. \ , \ B\left|\begin{matrix}۵\\۳\end{matrix}\right. \Rightarrow m = \frac{۳-۳}{۵-۲} = ۰ \Rightarrow y = ۳$

معادلهٔ AC: $A\left|\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}\right. \ , \ C\left|\begin{matrix}۲\\۱\end{matrix}\right. \Rightarrow \frac{۳-۱}{۲-۲} = \text{تعریف‌نشده} \Rightarrow x = ۲$

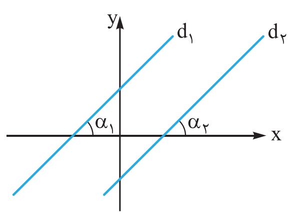
معادلهٔ BC: $B\left|\begin{matrix}۵\\۳\end{matrix}\right. \ , \ C\left|\begin{matrix}۲\\۱\end{matrix}\right. \Rightarrow m = \frac{۱-۳}{۲-۵} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow y - ۱ = \frac{۲}{۳}(x - ۲) \Rightarrow y = \frac{۲}{۳}x - \frac{۴}{۳} + ۱ \Rightarrow y = \frac{۲}{۳}x - \frac{۱}{۳}$

نکته همان‌طور که در مثال بالا دیدید معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ هم‌عرض به شکل $A\left|\begin{matrix}x_۱\\y_۱\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}x_۲\\y_۱\end{matrix}\right.$ به شکل $y = y_۱$ و معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ هم طول به شکل $A\left|\begin{matrix}x_۱\\y_۱\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}x_۱\\y_۲\end{matrix}\right.$ به شکل $x = x_۱$ است.

خط عمودی و موازی

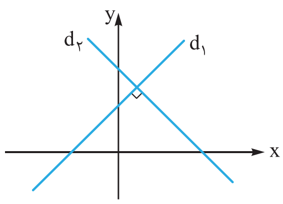
۱) اگر دو خط با هم موازی باشند شیب‌هایشان با هم برابر است.

$$d_۱ \parallel d_۲ \Rightarrow \alpha_۱ = \alpha_۲ \Rightarrow m_۱ = m_۲$$



۲) اگر دو خط بر هم عمود باشند، شیب هر کدام عکس قرینهٔ شیب دیگری است، یعنی حاصل‌ضرب شیب‌هایشان برابر ۱− است.

$$d_۱ \perp d_۲ \Rightarrow \begin{cases} m_۱ m_۲ = -۱ \\ \text{یا} \\ m_۱ = -\frac{۱}{m_۲} \end{cases}$$



نکته در حالتی که شیب خط صفر یا تعریف‌نشده است می‌گوییم:

دو خط به معادله‌های $x = a$ و $y = b$ بر هم عمودند چون یکی موازی محور yها (اولی) و دیگری موازی محور xها (دومی) است.

مثال و پاسخ

مثال چهار خط با معادله‌های زیر مفروض‌اند:

$d_1: ۳x-۲y=۴$ $\quad d_۲: y=-\frac{۲}{۳}x+۱$ $\quad d_۳: ۶y+۴x=-۱$ $\quad d_۴=y=\frac{۳}{۲}x+۵$

تعیین کنید هر کدام از جفت خط‌های زیر نسبت به هم چه وضعی دارند:

الف) $d_1, d_۲$ ب) $d_1, d_۴$ پ) $d_۲, d_۳$ ت) $d_۳, d_۴$

پاسخ اول شیب هر کدام از خط‌ها را به دست می‌آوریم:

$$d_1: ۳x-۲y=۴ \Rightarrow -۲y=-۳x+۴ \Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x-۲ \Rightarrow m_1=\frac{۳}{۲}$$

$$d_۲: y=-\frac{۲}{۳}x+۱ \Rightarrow m_۲=-\frac{۲}{۳}$$

$$d_۳: ۶y+۴x=-۱ \Rightarrow ۶y=-۴x-۱ \Rightarrow y=\frac{-۴}{۶}x-\frac{۱}{۶} \Rightarrow y=\frac{-۲}{۳}x-\frac{۱}{۶} \Rightarrow m_۳=\frac{-۲}{۳}$$

$$d_۴: y=\frac{۳}{۲}x+۵ \Rightarrow m_۴=\frac{۳}{۲}$$

حالا وضعیت خط‌ها را با توجه به شیبشان تعیین می‌کنیم:

الف) $d_1, d_۲ \Rightarrow m_1.m_۲=-۱$ بر هم عمودند

ب) $d_1, d_۴ \Rightarrow m_1=m_۴$ با هم موازی‌اند

پ) $d_۲, d_۳ \Rightarrow m_۲=m_۳$ با هم موازی‌اند

ت) $d_۳, d_۴ \Rightarrow m_۳.m_۴=-۱$ بر هم عمودند

مثال و پاسخ

مثال مقدار a را طوری پیدا کنید که خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(۲,۳)$ و $B(۵,۳)$ و خط $(a+۱)x+(a-۲)y=۲a+۱$:

الف) با هم موازی باشند

ب) بر هم عمود باشند.

پاسخ شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(۲,۳)$ و $B(۵,۳)$ برابر صفر است یعنی خط گذرنده از A و B موازی محور xها است پس:

الف) خط $(a+۱)x+(a-۲)y=۲a+۱$ هم باید موازی محور xها باشد پس $a+۱=۰$ یعنی $a=-۱$.

ب) خط $(a+۱)x+(a-۲)y=۲a+۱$ باید موازی محور yها باشد پس $a-۲=۰$ یعنی $a=۲$.

مثال و پاسخ

مثال سه نقطهٔ $A(۱,۲)$ و $B(۳,۵)$ و $C(۱,۴)$ سه رأس یک مثلث‌اند. از نقطهٔ A خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم. معادلهٔ این خط را بنویسید.

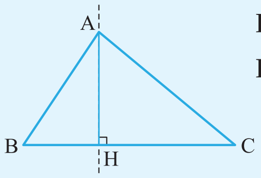
پاسخ چون خط رسم‌شده (**اسمش را می‌گذاریم d**) موازی BC است پس شیبش با شیب BC مساوی است:

$$m_{BC}=\frac{۵-۴}{۳-۱}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow m_d=\frac{۱}{۲}$$

$$A(۱,۲), m_d=\frac{۱}{۲} \Rightarrow y-۲=\frac{۱}{۲}(x-۱) \Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲}$$ معادلهٔ خط

مثال و پاسخ

مثال نقاط $A(۳,۱)$ و $B(۲,۳)$ و $C(۱,۱)$ سه رأس یک مثلث‌اند. مختصات نقطهٔ H، پای ارتفاع AH را پیدا کنید.



پاسخ اگر یک شکل فرضی برای مثلث ABC رسم کنیم، نقطهٔ H محل برخورد ارتفاع AH و ضلع BC است. یعنی باید اول معادلهٔ ارتفاع AH را پیدا کنیم و بعد نقطهٔ برخورد AH و BC را که همان نقطهٔ H است به دست آوریم.

AH بر BC عمود است پس شیبش عکس قرینهٔ BC است:

$$m_{BC}=\frac{۳-۱}{۲-۱}=۲ \Rightarrow m_{AH}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\text{معادلهٔ AH}: A(۳,۱)\ ,\ m_{AH}=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow y-۱=-\frac{۱}{۲}(x-۳) \Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲}+۱ \Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}$$

حالا معادلهٔ BC را پیدا می‌کنیم:

$$B(۲,۳), m_{BC}=۲ \Rightarrow y-۳=۲(x-۲) \Rightarrow y=۲x-۱$$

حالا نقطهٔ برخورد BC و AH را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲} \\ y=۲x-۱ \end{cases} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}=۲x-۱ \Rightarrow \frac{۵}{۲}x=\frac{۷}{۲} \Rightarrow x=\frac{۷}{۵} \Rightarrow y=\frac{۹}{۵} \Rightarrow H(\frac{۷}{۵},\frac{۹}{۵})$$

مثال و پاسخ

مثال مقدار m را چنان پیدا کنید که دو خط $۳x+۲y=۴$ و $ax+(۲a-۱)y=۷$:

الف با هم موازی باشند. **ب** برهم عمود باشند.

پاسخ اول شیب هر کدام از خط‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$۳x+۲y=۴ \Rightarrow ۲y=-۳x+۴ \Rightarrow y=\frac{-۳}{۲}x+۲ \Rightarrow m_۱=-\frac{۳}{۲}$$

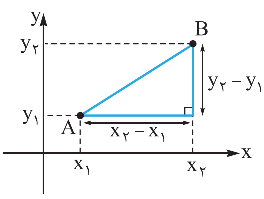
$$ax+(۲a-۱)y=۷ \Rightarrow (۲a-۱)y=-ax+۷ \Rightarrow y=(\frac{-a}{۲a-۱})x+\frac{۷}{۲a-۱} \Rightarrow m_۲=\frac{-a}{۲a-۱}$$

حالا داریم:

الف با هم موازی باشند: $m_۱=m_۲ \Rightarrow -\frac{۳}{۲}=\frac{-a}{۲a-۱} \Rightarrow ۶a-۳=۲a \Rightarrow ۴a=۳ \Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$

ب بر هم عمود باشند: $\Rightarrow m_۱m_۲=-۱ \Rightarrow (-\frac{۳}{۲})(\frac{-a}{۲a-۱})=-۱ \Rightarrow \frac{۳a}{۴a-۲}=-۱ \Rightarrow ۳a=-۴a+۲ \Rightarrow ۷a=۲ \Rightarrow a=\frac{۲}{۷}$

طول پاره‌خط طول پاره‌خط AB **(یعنی فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B)** را از رابطهٔ زیر به دست می‌آوریم:



$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}$$

چند نکته

۱) رابطهٔ طول پاره‌خط AB با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه به دست می‌آید.

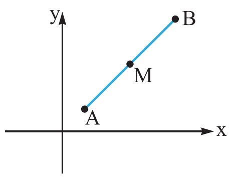
۲) اگر $A\begin{vmatrix}x_۱\\y_۱\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}x_۱\\y_۲\end{vmatrix}$ باشد **(یعنی A و B هم‌طول باشند)** داریم: $AB=|y_۲-y_۱|$

۳) اگر $A\begin{vmatrix}x_۱\\y_۱\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}x_۲\\y_۱\end{vmatrix}$ باشد **(یعنی A و B هم‌عرض باشند)** داریم: $AB=|x_۲-x_۱|$

۴) چون مبدأ مختصات $O(۰,۰)$ است پس فاصلهٔ یک نقطه تا مبدأ مختصات برابر است با $OA=\sqrt{x_A^۲+y_A^۲}$.

نقطهٔ وسط پاره‌خط

اگر $A\left|\begin{matrix}x_۱\\y_۱\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}x_۲\\y_۲\end{matrix}\right.$ دو سر یک پاره‌خط باشند، مختصات نقطهٔ M، نقطهٔ وسط پاره‌خط AB از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$M\left|\begin{matrix}\dfrac{x_۱+x_۲}{۲}\\[2mm]\dfrac{y_۱+y_۲}{۲}\end{matrix}\right. \quad \text{یا} \quad x_M=\frac{x_۱+x_۲}{۲} \ \text{و}\ y_M=\frac{y_۱+y_۲}{۲}$$

مثال و پاسخ

مثال نقاط $A(۲,۵)$ و $B(۲,۱)$ و $C(۶,۱)$ سه رأس یک مثلث‌اند. نوع مثلث را تعیین کنید.

پاسخ طول هر کدام از اضلاع مثلث را پیدا می‌کنیم:

$$A(۲,۵),B(۲,۱)\ \Rightarrow\ AB=|۵-۱|=۴$$

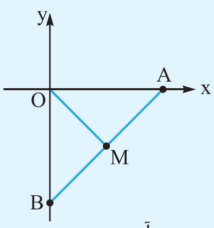
$$B(۲,۱),C(۶,۱)\ \Rightarrow\ BC=|۶-۲|=۴$$

$$A(۲,۵),C(۶,۱)\ \Rightarrow\ AC=\sqrt{(۲-۶)^۲+(۵-۱)^۲}=\sqrt{۱۶+۱۶}=\sqrt{۳۲}=۴\sqrt{۲}$$

می‌بینیم که $AB=BC$، پس مثلث متساوی‌الساقین است و از طرف دیگر $AB^۲+BC^۲=AC^۲$ چون $۴^۲+۴^۲=(۴\sqrt{۲})^۲$، یعنی مثلث قائم‌الزاویه هم هست پس مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.

مثال و پاسخ

مثال نقطهٔ A به طول ۸ روی محور xها و نقطهٔ B به عرض ۶- روی محور yها مفروض‌اند. اگر A و B و O سه رأس یک مثلث باشند، طول میانهٔ OM را به دست آورید.**



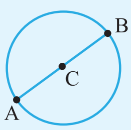
پاسخ با توجه به شکل باید اول مختصات نقطهٔ M، وسط پاره‌خط AB را پیدا کنیم و بعد طول پاره‌خط OM را به دست آوریم:

$$A(۸,۰),B(۰,-۶)\ \Rightarrow\ M\left|\begin{matrix}\dfrac{۸+۰}{۲}\\[2mm]\dfrac{۰+(-۶)}{۲}\end{matrix}\right.\ \Rightarrow\ M\left|\begin{matrix}۴\\-۳\end{matrix}\right. \qquad OM=\sqrt{x_M^۲+y_M^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}=۵$$

مثال و پاسخ

مثال نقاط $A(۶,-۱)$ و $B(-۲,۵)$ دو سر قطر یک دایره‌اند مختصات مرکز و طول شعاع دایره را پیدا کنید.**

پاسخ طبق شکل روبه‌رو مرکز دایره، نقطهٔ‌وسط پاره‌خط AB است، پس:



$$A\left|\begin{matrix}۶\\-۱\end{matrix}\right.,B\left|\begin{matrix}-۲\\۵\end{matrix}\right.\ \Rightarrow\ C_{\text{مرکز}}\left|\begin{matrix}\dfrac{x_A+x_B}{۲}=\dfrac{۶+(-۲)}{۲}=۲\\[2mm]\dfrac{y_A+y_B}{۲}=\dfrac{(-۱)+۵}{۲}=۲\end{matrix}\right.\ \Rightarrow\ C\left|\begin{matrix}۲\\۲\end{matrix}\right.$$

از طرف دیگر طول پاره‌خط AB برابر قطر دایره است پس:

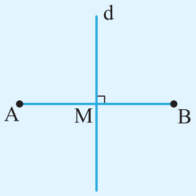
$$\text{قطر دایره}\ AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\sqrt{(۶-(-۲))^۲+(-۱-۵)^۲}=\sqrt{۶۴+۳۶}=\sqrt{۱۰۰}=۱۰$$

پس اندازهٔ شعاع دایره برابر نصف قطر یعنی ۵ $R=\frac{۱۰}{۲}=۵$ است.

مثال و پاسخ

مثال **اگر $A(۲,-۱)$ و $B(۴,۷)$ دو سر یک پاره‌خط باشند، معادلهٔ عمود منصف پاره‌خط AB را بنویسید.**

پاسخ می‌دانیم عمود منصف یک پاره‌خط، خطی است که از نقطهٔ وسط پاره‌خط بر آن عمود می‌شود. پس باید مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB و شیب پاره‌خط AB را به دست آوریم و سپس معادلهٔ عمود منصف را بنویسیم:



$$A\left|\begin{matrix}۲\\-۱\end{matrix}\right., B\left|\begin{matrix}۴\\۷\end{matrix}\right. \Rightarrow M\left|\begin{matrix}\dfrac{x_A+x_B}{۲}=\dfrac{۲+۴}{۲}\\ \dfrac{y_A+y_B}{۲}=\dfrac{-۱+۷}{۲}\end{matrix}\right. \Rightarrow M\left|\begin{matrix}۳\\۳\end{matrix}\right.$$

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۷-(-۱)}{۴-۲}=\frac{۸}{۲}=۴ \Rightarrow m_d=-\frac{۱}{۴}\ (\text{چون } d\perp AB)$$

حالا با داشتن مختصات M و شیب عمود منصف، معادلهٔ عمود منصف را می‌نویسیم:

$$M\left|\begin{matrix}۳\\۳\end{matrix}\right., m_d=-\frac{۱}{۴} \Rightarrow y-۳=-\frac{۱}{۴}(x-۳) \Rightarrow y=-\frac{۱}{۴}x+\frac{۳}{۴}+۳ \Rightarrow y=-\frac{۱}{۴}x+\frac{۱۵}{۴}$$

مثال و پاسخ

مثال **مختصات نقطه‌ای از محور طول‌ها را پیدا کنید که از دو نقطهٔ $A(-۱,-۱)$ و $B(۷,۷)$ به یک فاصله باشد.**

پاسخ **روش اول** می‌دانیم نقاطی که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله‌اند، روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارند. پس باید معادلهٔ عمود منصف پاره‌خط AB را بنویسیم و بعد نقطهٔ برخورد عمود منصف و محور xها را پیدا کنیم:

$$A\left|\begin{matrix}-۱\\-۱\end{matrix}\right., B\left|\begin{matrix}۷\\۷\end{matrix}\right. \Rightarrow \underset{\text{وسط } AB}{M}\left|\begin{matrix}\dfrac{-۱+۷}{۲}\\ \dfrac{-۱+۷}{۲}\end{matrix}\right. \Rightarrow M\left|\begin{matrix}۳\\۳\end{matrix}\right.$$

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۷-(-۱)}{۷-(-۱)}=۱ \Rightarrow m_{d_{\text{عمود منصف}}}=-۱$$

$$M\left|\begin{matrix}۳\\۳\end{matrix}\right., m_d=-۱ \Rightarrow y=-x+۶ \ \text{معادلهٔ عمود منصف}$$

حالا عمود منصف را با محور xها قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases}y=-x+۶\\y=۰\end{cases} \Rightarrow -x+۶=۰ \Rightarrow x=۶, y=۰ \Rightarrow C(۶,۰)$$

نقطهٔ $C(۶,۰)$ جواب سؤال است.

روش دوم چون نقطهٔ موردنظر (C) باید روی محور xها باشد، پس مختصاتش به صورت $C(x_۱,۰)$ است از طرف دیگر باید $AC=BC$ باشد پس:

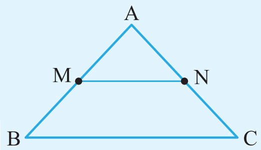
$$AC=BC \Rightarrow \sqrt{(x_A-x_C)^۲+(y_A-y_C)^۲}=\sqrt{(x_B-x_C)^۲+(y_B-y_C)^۲}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(-۱-x_۱)^۲+(-۱-۰)^۲}=\sqrt{(۷-x_۱)^۲+(۷-۰)^۲} \Rightarrow \sqrt{۱+۲x_۱+x_۱^۲+۱}=\sqrt{۴۹-۱۴x_۱+x_۱^۲+۴۹}$$

$$\text{توان ۲} \Rightarrow x_۱^۲+۲x_۱+۲=x_۱^۲-۱۴x_۱+۹۸ \Rightarrow ۱۶x_۱=۹۶ \Rightarrow x_۱=۶$$

پس مختصات نقطهٔ C به صورت $C(۶,۰)$ است.

مثال و پاسخ



مثال نقاط $A(۲,۳)$ و $B(۴,۷)$ و $C(۶,۱)$ سه رأس یک مثلث هستند. از نقطهٔ M وسط ضلع AB به نقطهٔ N وسط ضلع AC رسم می‌کنیم، طول پاره‌خط MN را پیدا کنید.

پاسخ **روش اول** مختصات M وسط AB و N وسط AC را پیدا و طول پاره‌خط MN را محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} A\left|\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}\right. , B\left|\begin{matrix}۴\\۷\end{matrix}\right. \Rightarrow M\left|\begin{matrix}\frac{۲+۴}{۲}=۳\\ \frac{۳+۷}{۲}=۵\end{matrix}\right. \\ A\left|\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}\right. , C\left|\begin{matrix}۶\\۱\end{matrix}\right. \Rightarrow N\left|\begin{matrix}\frac{۲+۶}{۲}=۴\\ \frac{۳+۱}{۲}=۲\end{matrix}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow MN=\sqrt{(x_M-x_N)^۲+(y_M-y_N)^۲}=\sqrt{(۳-۴)^۲+(۵-۲)^۲}$$

$$=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰}$$

روش دوم می‌دانیم پاره‌خطی که نقطهٔ وسط ضلع AB را به نقطهٔ وسط ضلع AC وصل می‌کند موازی ضلع BC و نصف آن است. پس می‌توانیم طول BC را محاسبه و بعد نصف کنیم:

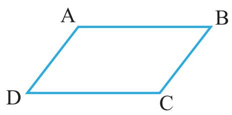
$$B\left|\begin{matrix}۴\\۷\end{matrix}\right. , C\left|\begin{matrix}۶\\۱\end{matrix}\right. \Rightarrow BC=\sqrt{(x_B-x_C)^۲+(y_B-y_C)^۲}=\sqrt{(۴-۶)^۲+(۷-۱)^۲}$$

$$=\sqrt{۴+۳۶}=\sqrt{۴۰}=۲\sqrt{۱۰} \Rightarrow MN=\frac{۱}{۲}BC=\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۱۰})=\sqrt{۱۰}$$

نکته برای پیداکردن نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث (مرکز ثقل مثلث) باید معادلهٔ دوتا از میانه‌ها را بنویسیم و محل تقاطعشان را مشخص کنیم. اما اگر این سؤال را در حالت کلی حل کنیم می‌بینیم که در یک مثلث با رئوس A، B و C مختصات نقطهٔ برخورد میانه‌ها برابر است با:

$$G_{\text{نقطهٔ همرسی میانه‌ها}}\left|\begin{matrix}\frac{x_A+x_B+x_C}{۳}\\ \frac{y_A+y_B+y_C}{۳}\end{matrix}\right.$$

نکته در هر چهارضلعی که قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند (مثل متوازی الاضلاع، مستطیل، مربع، لوزی) مجموع طول‌ها و مجموع عرض‌های دو رأس مقابل با هم برابر است. یعنی به عنوان مثال اگر متوازی‌الاضلاع ABCD به شکل روبه‌رو باشد داریم:



$$x_A+x_C=x_B+x_D$$

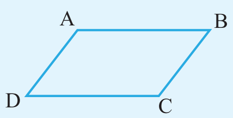
$$y_A+y_C=y_B+y_D$$

مثال و پاسخ

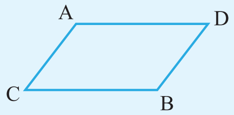
مثال سه نقطهٔ $(۲,۱)$ و $(-۳,۲)$ و $(۷,۳)$ سه رأس یک متوازی‌الاضلاع‌اند. مختصات رأس چهارم را پیدا کنید.

پاسخ چون در صورت سؤال مشخص نشده است که کدام رأس‌ها روبه‌روی هم هستند پس باید رأس‌ها را نام‌گذاری کنیم و تمام حالت‌هایی را که ممکن است این چهار رأس دوبه‌دو روبه‌روی هم باشند بررسی کنیم؛ پس اگر $A(۲,۱)$ و $B(-۳,۲)$ و $C(۷,۳)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع باشند و رأس چهارم را D بنامیم، داریم:

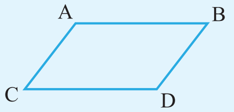
$$A\left|\begin{matrix}۲\\۱\end{matrix}\right. , B\left|\begin{matrix}-۳\\۲\end{matrix}\right. , C\left|\begin{matrix}۷\\۳\end{matrix}\right.$$



$$\left.\begin{array}{l} A,C \text{ روبه‌روی هم} \\ B,D \text{ روبه‌روی هم}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_A+x_C=x_B+x_D \Rightarrow ۲+۷=(-۳)+x_D \\ \Rightarrow x_D=۱۲ \\ y_A+y_C=y_B+y_D \Rightarrow ۱+۳=۲+y_D \\ \Rightarrow y_D=۲ \end{array}\right. \Rightarrow D\left|\begin{matrix}۱۲\\۲\end{matrix}\right.$$



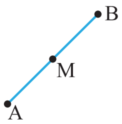
$$\left.\begin{matrix} B,A \text{ روبه‌روی هم} \\ D,C \text{ روبه‌روی هم}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B = x_C + x_D \Rightarrow ۲+(-۳) = ۷ + x_D \\ \Rightarrow x_D = -۸ \\ y_A + y_B = y_C + y_D \Rightarrow ۱+۲ = ۳ + y_D \\ \Rightarrow y_D = ۰ \end{cases} \Rightarrow D\left|\begin{matrix} -۸ \\ ۰ \end{matrix}\right.$$



$$\left.\begin{matrix} D,A \text{ روبه‌روی هم} \\ B,C \text{ روبه‌روی هم}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_D = x_B + x_C \Rightarrow ۲ + x_D = -۳ + ۷ \\ \Rightarrow x_D = ۲ \\ y_A + y_D = y_B + y_C \Rightarrow ۱ + y_D = ۲ + ۳ \\ \Rightarrow y_D = ۴ \end{cases} \Rightarrow D\left|\begin{matrix} ۲ \\ ۴ \end{matrix}\right.$$

قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ M

اگر دو نقطهٔ $A\left|\begin{matrix} x_۱ \\ y_۱ \end{matrix}\right.$ و $M\left|\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}\right.$ را داشته باشیم و بخواهیم قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به نقطهٔ M پیدا کنیم طبق شکل زیر اگر این نقطه را B بنامیم نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB است، پس:



قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix} x_A \\ y_A \end{matrix}\right.$ نسبت به نقطهٔ $M\left|\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}\right.$ برابر است با $B\left|\begin{matrix} ۲\alpha - x_A \\ ۲\beta - y_A \end{matrix}\right.$.

مثال و پاسخ

مثال **قرینهٔ نقطهٔ (۲,۵) را نسبت به نقطهٔ $M\left|\begin{matrix} ۳ \\ ۱ \end{matrix}\right.$ پیدا کنید.**

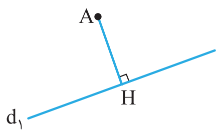
پاسخ **راه اول** از همان روشی که در بالا گفتیم استفاده می‌کنیم:

$$A\left|\begin{matrix} ۲ \\ ۵ \end{matrix}\right. , B\left|\begin{matrix} x_B \\ y_B \end{matrix}\right., AB \text{ وسط } M\left|\begin{matrix} ۳ \\ ۱ \end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{cases} ۳ = \dfrac{۲ + x_B}{۲} \Rightarrow x_B + ۲ = ۶ \Rightarrow x_B = ۴ \\ ۱ = \dfrac{۵ + y_B}{۲} \Rightarrow y_B + ۵ = ۲ \Rightarrow y_B = -۳ \end{cases} \Rightarrow B\left|\begin{matrix} ۴ \\ -۳ \end{matrix}\right.$$

راه دوم از روابطی که به دست آوردیم استفاده می‌کنیم:

$$A\left|\begin{matrix} ۲ \\ ۵ \end{matrix}\right. , M\left|\begin{matrix} ۳ \\ ۱ \end{matrix}\right. \Rightarrow B\left|\begin{matrix} ۲\alpha - x_A = ۲(۳) - ۲ \\ ۲\beta - y_A = ۲(۱) - ۵ \end{matrix}\right. \Rightarrow M\left|\begin{matrix} ۴ \\ -۳ \end{matrix}\right.$$

فاصلهٔ نقطه از خط



$d_۱$ فاصلهٔ نقطهٔ A از خط $= AH$

فاصلهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix} x_۱ \\ y_۱ \end{matrix}\right.$ از خط به معادلهٔ $ax + by + c = ۰$ برابر طول پاره‌خط عمودی است که از A بر خط رسم می‌شود:

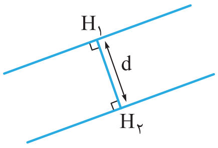
این فاصله را از رابطهٔ زیر پیدا می‌کنیم:

$$AH = d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

یعنی مختصات نقطه را در معادلهٔ خط قرار می‌دهیم (معادله‌ای که همهٔ اجزای آن به یک طرف منتقل شده است) و حاصلش را داخل قدرمطلق می‌گذاریم و بر جذر مجموع مربع‌های ضریب x و ضریب y در معادلهٔ خط تقسیم می‌کنیم.

فاصلهٔ دو خط موازی

اگر معادلهٔ دو خط موازی به صورت $ax + by + c_۱ = ۰$ و $ax + by + c_۲ = ۰$ باشد **(دقت کنید که ضریب‌های x و y یکسان‌اند)** فاصلهٔ این دو خط از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



$$H_۱H_۲ = d = \frac{|c_۱ - c_۲|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

مثال و پاسخ

مثال: **نقطهٔ $A(۲,۳)$ به کدام خط زیر نزدیک‌تر است؟**

$d_۱ = ۳x + ۴y - ۷ = ۰$ $\qquad\qquad$ $d_۲ = ۴x + ۳y - ۱ = ۰$

پاسخ: فاصلهٔ نقطهٔ A را از هر کدام از خط‌ها پیدا می‌کنیم:

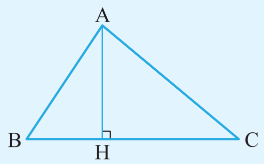
$$A(۲,۳), d_۱ : ۳x + ۴y - ۷ = ۰ \Rightarrow AH = \frac{|۳(۲) + ۴(۳) - ۷|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{|۶ + ۱۲ - ۷|}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۱۱}{۵}$$

$$A(۲,۳), d_۲ : ۴x + ۳y - ۱ = ۰ \Rightarrow AH' = \frac{|۴(۲) + ۳(۳) - ۱|}{\sqrt{۴^۲ + ۳^۲}} = \frac{|۸ + ۹ - ۱|}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۱۶}{۵}$$

و چون $\frac{۱۶}{۵} < \frac{۱۱}{۵}$ است، پس نقطهٔ A به خط اول نزدیک‌تر است.

مثال و پاسخ

مثال: **نقاط $A(۲,۴)$ و $B(۳,۵)$ و $C(۱,۷)$ سه رأس یک مثلث‌اند. مساحت مثلث را پیدا کنید.**



پاسخ: طبق شکل مقابل برای پیداکردن مساحت مثلث باید طول ضلع BC و طول ارتفاع AH را پیدا کنیم و سپس از رابطهٔ $S = \frac{۱}{۲}(BC)(AH)$ مساحت را به دست آوریم. برای محاسبهٔ طول BC داریم:

$$B\left|\begin{matrix}۳\\۵\end{matrix}\right., C\left|\begin{matrix}۱\\۷\end{matrix}\right. \Rightarrow BC = \sqrt{(x_B - x_C)^۲ + (y_B - y_C)^۲} = \sqrt{(۳-۱)^۲ + (۵-۷)^۲} = \sqrt{۴+۴} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

و برای پیداکردن طول ارتفاع AH، باید معادلهٔ ضلع BC را بنویسیم و فاصلهٔ نقطهٔ A را از این خط پیدا کنیم:

$$B\left|\begin{matrix}۳\\۵\end{matrix}\right., C\left|\begin{matrix}۱\\۷\end{matrix}\right. \Rightarrow m_{BC} = \frac{۷-۵}{۱-۳} = -۱ \Rightarrow y - ۷ = -۱(x - ۱) \Rightarrow x + y - ۷ - ۱ = ۰ \Rightarrow x + y - ۸ = ۰$$

$$A\left|\begin{matrix}۲\\۴\end{matrix}\right. \Rightarrow AH = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۱(۲) + ۱(۴) - ۸|}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \frac{|۲ + ۴ - ۸|}{\sqrt{۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}}$$

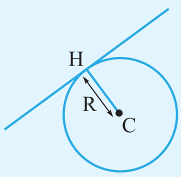
پس مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲}(BC)(AH) = \frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۲})(\frac{۲}{\sqrt{۲}}) = ۲ \Rightarrow S = ۲$$

مثال و پاسخ

مثال: **نقطهٔ $C(۲,-۱)$ مرکز دایره‌ای است که بر خط به معادلهٔ $y = \frac{۳}{۴}x$ مماس است. اندازهٔ مساحت دایره را پیدا کنید.**

پاسخ: طبق شکل روبه‌رو، چون شعاع نقطهٔ مماس خط و دایره بر خط مماس عمود است پس اندازهٔ شعاع دایره برابر فاصلهٔ نقطهٔ $C(۲,-۱)$ از خط $y = \frac{۳}{۴}x$ است:



$$C(۲,-۱), y = \frac{۳}{۴}x \Rightarrow ۴y = ۳x \Rightarrow ۳x - ۴y = ۰$$

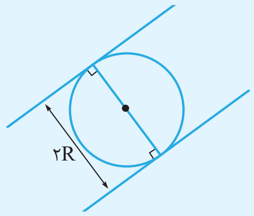
$$CH = R = \frac{|۳(۲) - ۴(-۱)|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{|۶ + ۴|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

و چون شعاع دایره $R = ۲$ است، پس مساحت دایره برابر است با $S = \pi R^۲ = ۴\pi$.

مثال و پاسخ

مثال دایره‌ای بر دو خط $y = \frac{۱}{۲}x + ۴$ و $x - ۲y - ۲ = ۰$ مماس است. اندازهٔ شعاع دایره را پیدا کنید.

پاسخ خط $y = \frac{۱}{۲}x + ۴$ که مرتب‌شده‌اش می‌شود $۲y = x + ۸$ یا $x - ۲y + ۸ = ۰$ و خط $x - ۲y - ۲ = ۰$ با هم موازی‌اند. پس طبق شکل شعاع دایره برابر نصف فاصلهٔ بین این دو خط است.



$$\begin{cases} x - ۲y + ۸ = ۰ \\ x - ۲y - ۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow d = \frac{|c_۱ - c_۲|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۸ - (-۲)|}{\sqrt{۱^۲ + (-۲)^۲}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۵}} = \frac{۱۰\sqrt{۵}}{۵} = ۲\sqrt{۵}$$

پس شعاع دایره برابر است با $R = \frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۵}) = \sqrt{۵}$.

سؤال‌های امتحانی

۱- نقاط $A(۱,۶)$ و $B(۲,۳)$ و $C(۵,۹)$ سه رأس یک مثلث‌اند. ارتفاع گذرنده از رأس A را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد ارتفاع با ضلع مقابل را پیدا کنید.

۲- نقاط $A(۱,-۳)$ و $B(۱,۱)$ و $C(۴,۱)$ سه رأس یک مثلث‌اند. محیط مثلث را پیدا کنید.

۳- نقاط $A(۱,۲)$ و $B(-۱,۸)$ و $C(-۳,۴)$ سه رأس یک مثلث‌اند. معادله و طول میانهٔ AM را پیدا کنید.

۴- نقاط $A(۲,۳)$ و $B(۳,۵)$ و $C(-۱,۷)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم و محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید.

۵- قرینهٔ نقطهٔ $A(۳,۲)$ را نسبت به نقطهٔ $B(۵,-۱)$ پیدا کنید.

۶- نقطه‌ای روی محور yها بیابید که از دو نقطهٔ $A(۱,-۳)$ و $B(۵,۵)$ به یک فاصله باشد.

۷- مقدار a را طوری پیدا کنید که سه نقطهٔ $A(۳,۴)$ و $B(۵,۸)$ و $C(a,-۲)$ روی یک خط راست باشند.

۸- نقاط $A(-۱,۲)$ و $B(۹,۲)$ دو سر قطر یک دایره‌اند. مختصات مرکز و شعاع دایره را پیدا کنید و مشخص کنید کدام‌یک از نقاط زیر روی دایره هستند: $M(۷,۶), N(۱,-۱), P(۸,۵), Q(۰,-۶)$

۹- نقاط $A(۲,۰)$ و $B(۶,۲)$ و $C(۰,۲)$ سه رأس یک مثلث‌اند. محل برخورد عمود منصف‌های مثلث را پیدا کنید.

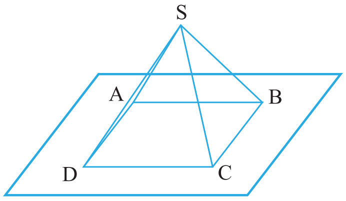
۱۰- اگر $A(۱,۲)$ مختصات یک رأس و $۳x + ۴y + ۴ = ۰$ معادلهٔ یکی از اضلاع یک مربع باشد، محیط و مساحت مربع را پیدا کنید.

۱۱- نقطهٔ $A(-۱,۱)$ یک رأس و نقطهٔ $M(۲,۱)$ نقطهٔ برخورد قطرهای یک مربع‌اند. مختصات سه رأس دیگر مربع را پیدا کنید.

۱۲- نقاط $O(۰,۰)$ و $A(۶,۰)$ دو رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند مختصات رأس سوم مثلث را پیدا کنید.

۱۳- از نقاط $A(۱,۰)$ و $B(۱,۱)$ هر کدام یک خط موازی خط $y = \frac{-۳}{۴}x$ رسم کرده‌ایم. مساحت مربعی را که دو ضلع مقابلش روی این دو خط قرار دارند پیدا کنید.

۱۴- نقاط $A(۳,-۲)$ و $B(۸,۱)$ دو رأس مربع $ABCD$ هستند. اگر رأس D روی محور yها واقع باشد، مختصات رأس C و D را پیدا کنید.



۱۵- نقاط $A(-۲,-۱)$ و $B(۴,۵)$ و $C(-۱,۷)$ طبق شکل روبه‌رو، بر روی صفحهٔ مختصات واقع‌اند. مختصات نقطهٔ D را چنان پیدا کنید که اگر از نقطهٔ S خارج از صفحه‌ای که این سه نقطه روی آن قرار دارند، چهار نخ به نقاط A، B، C و D وصل کنیم به طوری که یک هرم منتظم ساخته شود.

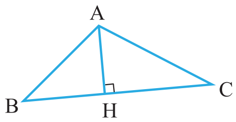
۱۶- نقاط $A(۲,۳)$ و $B(۳,۵)$ و $C(-۱,۷)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. مساحت متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید.

۱۷- طول و عرض جغرافیایی شهر A، ۲۱ درجهٔ شرقی و ۱۳ درجهٔ شمالی و طول و عرض جغرافیایی شهر B، ۶۶ درجهٔ شرقی و ۷۳ درجهٔ شمالی است. اگر مسافت فیزیکی هر درجهٔ طول یا عرض جغرافیایی برابر ۱۱۰ کیلومتر باشد، فاصلهٔ مستقیم این دو شهر را حساب کنید.

۱۸- نشان دهید دو نقطهٔ $M(a,b)$ و $N(b,a)$ نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند.

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱- اگر یک مثلث فرضی رسم کنیم، می‌دانیم که برای پیداکردن نقطهٔ H یعنی محل برخورد ارتفاع AH با ضلع BC باید معادلهٔ AH و BC را در یک دستگاه حل کنیم؛ پس باید معادلهٔ BC و AH را بنویسیم:



$$BC: B(۲,۳)\,,\, C(۵,۹) \Rightarrow m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{۹-۳}{۵-۲} = ۲ \Rightarrow y - ۳ = ۲(x-۲) \Rightarrow y = ۲x - ۱$$

$$AH \perp BC \Rightarrow m_{AH} = -\frac{۱}{m_{BC}} = -\frac{۱}{۲} \;,\; A(۱,۶) \Rightarrow AH: y - ۶ = -\frac{۱}{۲}(x-۱) \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۱۳}{۲}$$

حالا معادلهٔ AH و BC را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = ۲x - ۱ \\ y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۱۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow ۲x - ۱ = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۱۳}{۲} \Rightarrow \frac{۵}{۲}x = \frac{۱۵}{۲} \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow y = ۵ \Rightarrow H(۳,۵)$$

۲- برای پیداکردن محیط مثلث باید طول اضلاع آن را پیدا و با هم جمع کنیم:

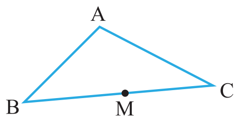
$$A(۱,-۳)\;,\; B(۱,۱) \Rightarrow AB = |y_A - y_B| = |-۳-۱| = ۴$$

$$A(۱,-۳)\;,\; C(۴,۱) \Rightarrow AC = \sqrt{(x_A - x_C)^۲ + (y_A - y_C)^۲} = \sqrt{(۱-۴)^۲ + (-۳-۱)^۲} = \sqrt{۹+۱۶} = ۵$$

$$B(۱,۱)\;,\; C(۴,۱) \Rightarrow BC = |x_B - x_C| = |۱-۴| = ۳$$

پس محیط مثلث برابر است با $AB + AC + BC = ۴ + ۵ + ۳ = ۱۲$.

۳- اگر یک مثلث فرضی رسم کنیم، می‌بینیم که M وسط BC است و برای پیداکردن معادله و طول میانهٔ AM اول باید مختصات نقطهٔ M را پیدا کنیم.



$$B(-۱,۸)\;,\; C(-۳,۴) \Rightarrow M\left|\begin{array}{l} \frac{x_B + x_C}{۲} \\ \frac{y_B + y_C}{۲} \end{array}\right. \Rightarrow M\left|\begin{array}{l} \frac{-۱-۳}{۲} \\ \frac{۸+۴}{۲} \end{array}\right. \Rightarrow M\left|\begin{array}{l} -۲ \\ ۶ \end{array}\right.$$

حالا طول AM را پیدا می‌کنیم:

$$A(۱,۲)\;,\; M(-۲,۶) \Rightarrow AM = \sqrt{(x_A - x_M)^۲ + (y_A - y_M)^۲} = \sqrt{(۱-(-۲))^۲ + (۲-۶)^۲} = \sqrt{۹+۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

و برای پیداکردن معادلهٔ میانهٔ AM داریم:

$$A(۱,۲)\;,\; M(-۲,۶) \Rightarrow m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{۶-۲}{-۲-۱} = -\frac{۴}{۳}$$

$$AM: y - ۲ = -\frac{۴}{۳}(x-۱) \Rightarrow y = \frac{-۴}{۳}x + \frac{۱۰}{۳}$$

۴- چون A، B و C سه رأس متوالی متوازی‌الاضلاع ABCD هستند، پس رأس A مقابل رأس C و رأس B مقابل رأس D است؛ یعنی:

$A(۲,۳)\;,\; B(۳,۵)\;,\; C(-۱,۷)$

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲ + (-۱) = ۳ + x_D \\ ۳ + ۷ = ۵ + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -۲ \\ y_D = ۵ \end{cases} \Rightarrow D(-۲,۵)$$

محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع نقطهٔ وسط دو رأس مقابل آن است، پس:

$$O\left|\begin{array}{l} \frac{x_A + x_C}{۲} \\ \frac{y_A + y_C}{۲} \end{array}\right. \Rightarrow O\left|\begin{array}{l} \frac{۲+(-۱)}{۲} \\ \frac{۳+۷}{۲} \end{array}\right. \Rightarrow O\left|\begin{array}{l} \frac{۱}{۲} \\ ۵ \end{array}\right. \Rightarrow O(\frac{۱}{۲},۵)$$

۵- از رابطهٔ نقطهٔ قرینه استفاده می‌کنیم:

$$A\left|\begin{array}{l} ۳ \\ ۲ \end{array}\right. ,\; B\left|\begin{array}{l} ۵ \\ -۱ \end{array}\right. \Rightarrow A'\left|\begin{array}{l} ۲x_B - x_A \\ ۲y_B - y_A \end{array}\right. \Rightarrow A'\left|\begin{array}{l} ۲(۵) - ۳ \\ ۲(-۱) - ۲ \end{array}\right. \Rightarrow A\left|\begin{array}{l} ۷ \\ -۴ \end{array}\right.$$

۶- روش اول: چون نقطهٔ موردنظر روی محور yها است، پس طولش برابر صفر است و می‌توانیم مختصاتش را به شکل $M(۰,a)$ در نظر بگیریم:

$$A(۱,-۳)\ ,\ B(۵,۵)\ ,\ MA=MB \Rightarrow \sqrt{(x_M-x_A)^۲+(y_M-y_A)^۲}=\sqrt{(x_M-x_B)^۲+(y_M-y_B)^۲}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(۰-۱)^۲+(a+۳)^۲}=\sqrt{(۰-۵)^۲+(a-۵)^۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱+(a+۳)^۲=۲۵+(a-۵)^۲$$

$$\Rightarrow ۱+a^۲+۶a+۹=۲۵+a^۲-۱۰a+۲۵ \Rightarrow ۱۶a=۴۰ \Rightarrow a=\frac{۴۰}{۱۶}=\frac{۵}{۲} \Rightarrow M(۰,\frac{۵}{۲})$$

روش دوم: چون قرار است فاصلهٔ نقطهٔ M از نقاط A و B یکسان باشد، پس روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد؛ یعنی می‌توانیم معادلهٔ عمودمنصف AB را بنویسیم و بعد محل برخوردش را با محور yها پیدا کنیم.

$$A(۱,-۳)\ ,\ B(۵,۵) \Rightarrow N_{\text{وسط } AB}\left|\begin{array}{l}\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۱+۵}{۲}\\ \frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{-۳+۵}{۲}\end{array}\right. \Rightarrow N\left|\begin{array}{l}۳\\ ۱\end{array}\right.$$

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۵-(-۳)}{۵-۱}=۲ \Rightarrow m_{\text{عمودمنصف}}=-\frac{۱}{۲}$$

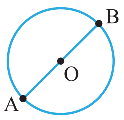
معادلهٔ عمودمنصف: $y-۱=-\frac{۱}{۲}(x-۳) \Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}$

$$\begin{cases} y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}\\ x=۰\end{cases} \Rightarrow y=\frac{۵}{۲} \Rightarrow M(۰,\frac{۵}{۲})$$

۷- اگر سه نقطهٔ $A(۳,۴)$، $B(۵,۸)$ و $C(a,-۲)$ روی یک خط راست باشند، باید شیب AB و BC یکسان باشد؛ پس:

$$m_{AB}=m_{BC} \Rightarrow \frac{۴-۸}{۳-۵}=\frac{۸-(-۲)}{۵-a} \Rightarrow ۲=\frac{۱۰}{۵-a} \Rightarrow ۵-a=۵ \Rightarrow a=۰$$

۸- طبق شکل روبه‌رو مرکز دایره نقطهٔ وسط قطر AB و طول شعاع دایره برابر نصف طول پاره‌خط AB است:



$$A(-۱,۲)\ ,\ B(۹,۲) \Rightarrow O\left|\begin{array}{l}\frac{x_A+x_B}{۲}\\ \frac{y_A+y_B}{۲}\end{array}\right. \Rightarrow O\left|\begin{array}{l}\frac{-۱+۹}{۲}\\ \frac{۲+۲}{۲}\end{array}\right. \Rightarrow O(۴,۲)$$

$$AB=|x_A-x_B|=|-۱-۹|=۱۰ \Rightarrow ۲R=۱۰ \Rightarrow R=۵$$

برای آن‌که هر کدام از نقاط داده‌شده روی دایره باشد، باید فاصله‌اش تا مرکز دایره برابر شعاع دایره باشد. مرکز دایره نقطهٔ $O(۴,۲)$ است، پس فاصلهٔ هر کدام از نقاط داده‌شده را از مرکز دایره حساب می‌کنیم:

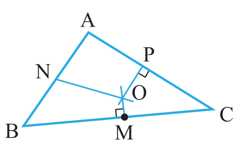
$$O(۴,۲)\ ,\ M(۷,۶): OM=\sqrt{(۴-۷)^۲+(۲-۶)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵ \checkmark$$

$$O(۴,۲)\ ,\ N(۱,-۱): ON=\sqrt{(۴-۱)^۲+(۲-(-۱)^۲)}=\sqrt{۹+۹}=\sqrt{۱۸} \times$$

$$O(۴,۲)\ ,\ P(۸,۵): OP=\sqrt{(۴-۸)^۲+(۲-۵)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵ \checkmark$$

$$O(۴,۲)\ ,\ Q(۰,-۶): OQ=\sqrt{(۴-۰)^۲+(۲-(-۶))^۲}=\sqrt{۱۶+۶۴}=\sqrt{۸۰} \times$$

۹- در شکل می‌بینیم که سه عمودمنصف مثلث در یک نقطه همرس‌اند، پس برای پیداکردن محل برخورد عمودمنصف‌ها باید معادلهٔ دوتا از آن‌ها را بنویسیم و با هم قطع دهیم. معادلهٔ عمودمنصف اضلاع AB و BC را می‌نویسیم:



$$A(۲,۰)\ ,\ B(۶,۲) \Rightarrow N_{\text{وسط } AB}\left|\begin{array}{l}\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۲+۶}{۲}=۴\\ \frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۰+۲}{۲}=۱\end{array}\right. \Rightarrow N(۴,۱)$$

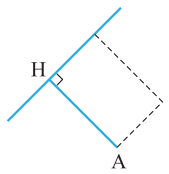
$$m_{AB}=\frac{۲-۰}{۶-۲}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow m_{\text{عمودمنصف}}=-۲ \Rightarrow y-۱=-۲(x-۴) \Rightarrow y=-۲x+۹$$

$$B(۶,۲)\ ,\ C(۰,۲) \Rightarrow M_{BC}\ \text{وسط} \left| \begin{array}{l} \frac{x_B+x_C}{۲}=\frac{۶+۰}{۲}=۳ \\ \frac{y_B+y_C}{۲}=\frac{۲+۲}{۲}=۲ \end{array} \right. \Rightarrow M(۳,۲)$$

$$m_{BC}=\frac{۲-۲}{۶-۰}=۰ \Rightarrow m_{\text{عمودمنصف}}=\text{تعریف‌نشده} \Rightarrow \text{معادلهٔ عمودمنصف}:\ x=۳$$

حالا معادلهٔ دو عمودمنصف را با هم قطع می‌دهیم:

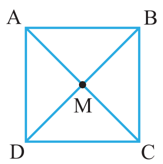
$$\begin{cases} y=-۲x+۹ \\ x=۳ \end{cases} \Rightarrow y=۳ \Rightarrow O(۳,۳)$$



۱۰- طبق شکل چون مختصات $A(۱,۲)$ در معادلهٔ $۳x+۴y+۴=۰$ صدق نمی‌کند، پس نقطهٔ A روی ضلع داده‌شده نیست و بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ A با خط داده‌شده برابر ضلع مربع است:

$$AH=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۳(۱)+۴(۲)+۴|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

بنابراین محیط و مساحت مربع برابرند با: $\text{مساحت}=۳^۲=۹$ $\qquad$ $\text{محیط}=۴\times۳=۱۲$



۱۱- با استفاده از مختصات نقطهٔ $A(-۱,۱)$ و $M(۲,۱)$ مختصات رأس C را می‌توانیم به راحتی حساب کنیم. چون M وسط AC است، پس C قرینهٔ A نسبت به M است:

$$\begin{cases} x_C=۲x_M-x_A=۲(۲)-(-۱)=۵ \\ y_C=۲y_M-y_A=۲(۱)-۱=۱ \end{cases} \Rightarrow C(۵,۱)$$

برای پیداکردن مختصات نقاط B و D می‌دانیم اولاً نقاط B و D روی عمودمنصف AC قرار دارند و ثانیاً فاصلهٔ نقطهٔ B و D از نقطهٔ M برابر اندازهٔ AM یا CM است. برای اولاً داریم:

$$A(-۱,۱)\ ,\ C(۵,۱) \Rightarrow m_{AC}=۰ \Rightarrow m_{\text{عمودمنصف}}=\text{تعریف‌نشده}\ ,\ M(۲,۱) \Rightarrow \text{معادلهٔ عمودمنصف}:\ x=۲$$

حالا باید نقطه‌ای روی خط $x=۲$ پیدا کنیم که فاصله‌اش از نقطهٔ M برابر AM باشد. AM برابر است با:

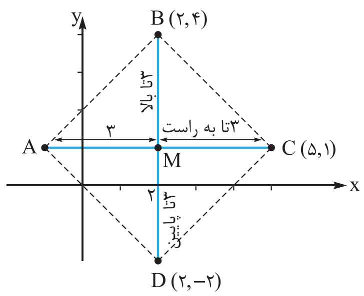
$$A(-۱,۱)\ ,\ M(۲,۱) \Rightarrow AM=|x_A-x_M|=|-۱-۲|=۳$$

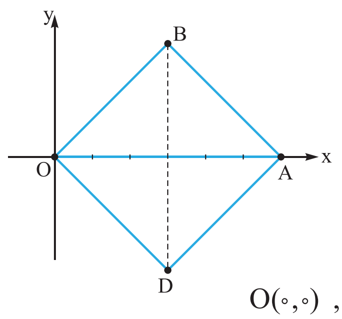
بنابراین اگر B یا D به صورت $B(۲,a)$ باشد (چون روی عمودمنصف واقع‌اند پس طولشان برابر ۲ است)، باید داشته باشیم:

$$BM=۳ \Rightarrow |y_B-y_M|=۳ \Rightarrow |y_B-۱|=۳ \Rightarrow \begin{cases} y_B-۱=۳ \Rightarrow y_B=۴ \\ y_B-۱=-۳ \Rightarrow y_B=-۲ \end{cases}$$

پس مختصات نقاط B و D به صورت $B(۲,۴)$ و $D(۲,-۲)$ است.

نکته این سؤال با کمک شکل خیلی سریع‌تر حل می‌شود:



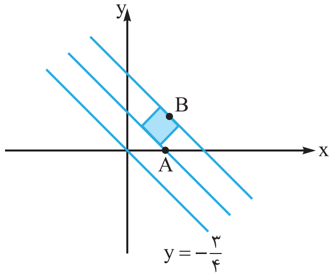


۱۲- طبق شکل مقابل چون قرار است مثلث OAB متساوی‌الاضلاع باشد، نقطهٔ B باید روی عمودمنصف ضلع OA قرار داشته باشد؛ یعنی از همین اول مشخص است که مسئله دو جواب دارد و نقطهٔ B می‌تواند با عرض مثبت یا با عرض منفی (روی شکل نقطهٔ D) باشد. طول نقطهٔ B برابر ۳ است، پس می‌توانیم آن را به صورت $B(۳,a)$ در نظر بگیریم. از طرف دیگر فاصلهٔ B تا O یعنی طول پاره‌خط OB باید برابر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع یعنی برابر ۶ باشد، پس:

$$O(۰,۰)\ ,\ B(۳,a)\ ,\ OB=۶ \Rightarrow \sqrt{(x_O-x_B)^۲+(y_O-y_B)^۲}=۶ \Rightarrow \sqrt{(۰-۳)^۲+(۰-a)^۲}=۶$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۹+a^۲=۳۶ \Rightarrow a^۲=۲۷ \Rightarrow a=\pm۳\sqrt{۳}$$

پس مختصات رأس سوم $B(۳,۳\sqrt{۳})$ و یا $D(۳,-۳\sqrt{۳})$ است.



۱۳- طبق شکل روبه‌رو اندازهٔ ضلع مربع برابر است با فاصلهٔ دو خط موازی، پس اول معادلهٔ خط‌هایی را که از نقاط $A(۱,۰)$ و $B(۱,۱)$ موازی خط $y=-\frac{۳}{۴}x$ رسم می‌شوند، می‌نویسیم:

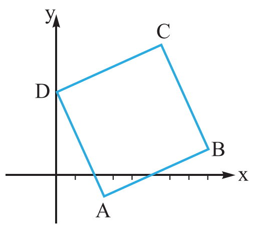
$$A(۱,۰)\ ,\ m=-\frac{۳}{۴} \Rightarrow y-۰=-\frac{۳}{۴}(x-۱) \Rightarrow y=-\frac{۳}{۴}x+\frac{۳}{۴} \Rightarrow ۴y=-۳x+۳ \Rightarrow ۳x+۴y-۳=۰$$

$$B(۱,۱)\ ,\ m=-\frac{۳}{۴} \Rightarrow y-۱=-\frac{۳}{۴}(x-۱) \Rightarrow y=-\frac{۳}{۴}x+\frac{۷}{۴} \Rightarrow ۴y=-۳x+۷ \Rightarrow ۴y+۳x-۷=۰$$

حالا فاصلهٔ این دو خط موازی را پیدا می‌کنیم:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|-۳-(-۷)|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۴}{۵}$$

پس مساحت مربع برابر است با $(\frac{۴}{۵})^۲=\frac{۱۶}{۲۵}$.



۱۴- رأس $A(۳,-۲)$ و $B(۸,۱)$ را داریم، پس اول رأس D را پیدا می‌کنیم. چون رأس D روی محور yها است، پس می‌توانیم D را به مختصات $D(۰,a)$ در نظر بگیریم.

طول پاره‌خط‌های AD و AB باید با هم برابر باشد، چون هر دو ضلع مربع‌اند، پس:

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\sqrt{(۳-۸)^۲+(-۲-۱)^۲}=\sqrt{۲۵+۹}=\sqrt{۳۴}$$

$$AD=\sqrt{(x_A-x_D)^۲+(y_A-y_D)^۲}=\sqrt{(۳-۰)^۲+(-۲-a)^۲}=\sqrt{۹+a^۲+۴a+۴}$$

پس باید داشته باشیم:

$$\sqrt{a^۲+۴a+۱۳}=\sqrt{۳۴} \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^۲+۴a+۱۳=۳۴ \Rightarrow a^۲+۴a-۲۱=۰ \Rightarrow (a+۷)(a-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-۷ \\ a=۳ \end{cases}$$

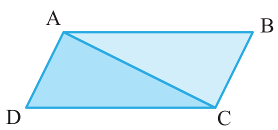
که با توجه به شکل $a=۳$ قابل‌قبول است، پس مختصات D به صورت $D(۰,۳)$ است. حالا رأس C را با توجه به این‌که مربع یک متوازی‌الاضلاع است، پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳+x_C=۸+۰ \Rightarrow x_C=۵ \\ -۲+y_C=۱+۳ \Rightarrow y_C=۶ \end{cases} \Rightarrow C(۵,۶)$$

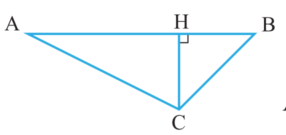
۱۵- برای این‌که هرم ساخته‌شده منتظم باشد باید چهارضلعی ACBD متوازی‌الاضلاع باشد، پس:

$$A(-۲,-۱)\ ,\ B(۴,۵)\ ,\ C(-۱,۷)$$

$$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲-۱=۴+x_D \Rightarrow x_D=-۷ \\ -۱+۷=۵+y_D \Rightarrow y_D=۱ \end{cases} \Rightarrow D(-۷,۱)$$



۱۶- طبق شکل روبه‌رو مساحت متوازی‌الاضلاع دو برابر مساحت مثلث ABC است، پس لازم نیست رأس چهارم متوازی‌الاضلاع را پیدا کنیم بلکه کافی است مساحت مثلث ABC را پیدا و دو برابر کنیم.



برای پیداکردن مساحت مثلث ABC، با رئوس $A(۲,۳)$، $B(۳,۵)$ و $C(-۱,۷)$، طول قاعدهٔ AB و طول ارتفاع AH را پیدا می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\sqrt{(۲-۳)^۲+(۳-۵)^۲}=\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۵}$$

$$\text{معادلهٔ } AB:\ m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۵-۳}{۳-۲}=۲ \Rightarrow y-۵=۲(x-۳) \Rightarrow y=۲x-۱ \Rightarrow ۲x-y-۱=۰$$

حالا فاصلهٔ C را از خط AB پیدا می‌کنیم:

$$CH=d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۲(-۱)-(۷)-۱|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}$$

پس مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{\text{مثلث}}=\frac{۱}{۲}AB\times CH=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۵})\times\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}=۵$$

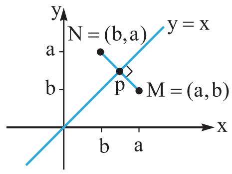
و در نتیجه مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با:

$$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}}=۲\times ۵=۱۰$$

۱۷- فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(۲۱,۱۳)$ و $B(۶۶,۷۳)$ را حساب و در عدد ۱۱۰ ضرب می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^{۲}+(y_A-y_B)^{۲}}=\sqrt{(۲۱-۶۶)^{۲}+(۱۳-۷۳)^{۲}}=\sqrt{۴۵^{۲}+۶۰^{۲}}=\sqrt{۱۵^{۲}(۳^{۲}+۴^{۲})}=۱۵\sqrt{۹+۱۶}=۱۵\times ۵=۷۵$$

پس فاصلهٔ دو شهر برحسب کیلومتر برابر است با: $۷۵\times ۱۱۰=۸۲۵۰$ کیلومتر



۱۸- **روش اول** برای آن‌که نشان دهیم دو نقطهٔ $M(a,b)$ و $N(b,a)$ نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند، نشان می‌دهیم اولاً پاره‌خط MN بر خط $y=x$ عمود است و ثانیاً نقطهٔ وسط پاره‌خط MN روی خط $y=x$ قرار دارد:

اولاً: $m_{MN}=\dfrac{b-a}{a-b}=-۱ \Rightarrow$ پاره‌خط AB بر خط $y=x$ عمود است.

ثانیاً: $P_{\text{وسط}\,MN}\left|\begin{array}{l}\dfrac{x_M+x_N}{۲}=\dfrac{a+b}{۲}\\[2mm] \dfrac{y_M+y_N}{۲}=\dfrac{b+a}{۲}\end{array}\right. \Rightarrow P(\dfrac{a+b}{۲},\dfrac{a+b}{۲}) \Rightarrow$ نقطهٔ P روی خط $y=x$ قرار دارد.

روش دوم اگر دو نقطهٔ M و N نسبت به خط $y=x$ قرینه باشند، خط $y=x$ باید عمودمنصف پاره‌خط MN باشد؛ یعنی باید فاصلهٔ هر نقطهٔ دلخواه از خط $y=x$ از دو نقطهٔ M و N یکی باشد. نقاط روی خط $y=x$؛ دارای مختصاتی به شکل $Q(t,t)$ هستند، پس:

$$MQ=\sqrt{(x_M-x_Q)^{۲}+(y_M-y_Q)^{۲}}=\sqrt{(a-t)^{۲}+(b-t)^{۲}}$$

$$NQ=\sqrt{(x_N-x_Q)^{۲}+(y_N-y_Q)^{۲}}=\sqrt{(b-t)^{۲}+(a-t)^{۲}}$$

همان‌طور که می‌بینیم $MQ=NQ$ است؛ یعنی خط $y=x$ عمودمنصف پاره‌خط MN است.

۱۹- در هر کدام از معادله‌ها، مجهول معادله دارای یک توان و توان دو برابر آن است، توان کوچک‌تر را برابر u فرض می‌کنیم و معادله را حل می‌کنیم:

الف) $x^{۴}-x^{۲}-۱۲=۰ \xrightarrow{x^{۲}=u} u^{۲}-u-۱۲=۰ \Rightarrow (u-۴)(u+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases}u=۴\\ u=-۳\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^{۲}=۴ \Rightarrow \begin{cases}x=۲\\ x=-۲\end{cases} \text{غ ق ق}\\ x^{۲}=-۳ \ \text{غ ق ق}\end{cases}$

ب) $x^{۴}-۲۰x^{۲}+۶۴=۰ \xrightarrow{x^{۲}=u} u^{۲}-۲۰u+۶۴=۰ \Rightarrow (u-۴)(u-۱۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases}u=۴\\ u=۱۶\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^{۲}=۴ \Rightarrow \begin{cases}x=۲\\ x=-۲\end{cases}\\ x^{۲}=۱۶ \Rightarrow \begin{cases}x=۴\\ x=-۴\end{cases}\end{cases}$

پ) $x^{۶}+۹x^{۳}+۸=۰ \xrightarrow{x^{۳}=u} u^{۲}+۹u+۸=۰ \Rightarrow (u+۱)(u+۸)=۰ \Rightarrow \begin{cases}u=-۱\\ u=-۸\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^{۳}=-۱\\ x^{۳}=-۸\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-۱\\ x=-۲\end{cases}$

ت) $x^{۸}-۱۷x^{۴}+۱۶=۰ \xrightarrow{x^{۴}=u} u^{۲}-۱۷u+۱۶=۰ \Rightarrow (u-۱)(u-۱۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases}u=۱\\ u=۱۶\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^{۴}=۱ \Rightarrow \begin{cases}x=۱\\ x=-۱\end{cases}\\ x^{۴}=۱۶ \Rightarrow \begin{cases}x=۲\\ x=-۲\end{cases}\end{cases}$

۲۰- باز هم در هر کدام از معادله‌ها یک توان از x و توان دو برابرش را داریم. توان کوچک‌تر را برابر u فرض می‌کنیم و معادله را حل می‌کنیم:

الف) $x+۲\sqrt{x}-۸=۰ \xrightarrow{\sqrt{x}=u} u^{۲}+۲u-۸=۰ \Rightarrow (u+۴)(u-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases}u=-۴\\ u=۲\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x}=-۴ \ \text{غ ق ق}\\ \sqrt{x}=۲ \Rightarrow x=۴\end{cases}$

ب) $x^{\frac{۱}{۳}}-x^{\frac{۱}{۶}}-۶=۰ \xrightarrow{x^{\frac{۱}{۶}}=u} u^{۲}-u-۶=۰ \Rightarrow (u-۳)(u+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases}u=۳\\ u=-۲\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^{\frac{۱}{۶}}=۳ \Rightarrow x=۳^{۶}=۷۲۹\\ x^{\frac{۱}{۶}}=-۲ \ \text{غ ق ق}\end{cases}$