

فهرست

ماتریس و کاربردها

۷
۷
۲۰
۳۴

فصل اول: ماتریس و کاربردها

درس اول: ماتریس و اعمال روی آن

درس دوم: وارون ماتریس و دترمینان

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۴۵

فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی

۴۵

درس اول: آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

۴۹

درس دوم: دایره

۶۰

درس سوم: بیضی و سهمی

۷۵

پاسخ سؤال‌های امتحانی

بردارها

۹۲

فصل سوم: بردارها

۹۲

درس اول: معرفی فضای \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3

۱۰۷

درس دوم: ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها

۱۱۸

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱۳۰

آزمون‌های نیم‌سال اول

۱۳۳

آزمون‌های نیم‌سال دوم

۱۳۹

پاسخ‌نامه آزمون‌های نیم‌سال اول

۱۴۶

پاسخ‌نامه آزمون‌های نیم‌سال دوم



۱ ماتریس و اعمال روی آن

تعریف ماتریس هر آرایش مستطیل شکل از اعداد حقیقی را یک ماتریس می‌نامند.

برای نمایش ماتریس، اعداد آن را داخل دو کروشه قرار می‌دهند.

به عنوان مثال؛ عبارت زیر، یک ماتریس است. همان‌گونه که مشاهده می‌کنید این ماتریس دارای دو سطر و سه ستون می‌باشد و اصطلاحاً می‌گوییم این ماتریس از مرتبه 2×3 است.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{ستون اول} \\ \text{ستون دوم} \\ \text{ستون سوم} \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \text{سطر اول} \\ \text{سطر دوم} \end{matrix}$$

به طور کلی، اگر ماتریس A دارای m سطر و n ستون باشد، می‌گوییم **ماتریس A** از مرتبه $m \times n$ است و آن را با نماد $A_{m \times n}$ نمایش می‌دهیم. هر یک از عددهای موجود در ماتریس را یک «درایه» از ماتریس می‌نامند. اگر درایه‌ای در محل برخورد سطر دوم و ستون سوم قرار داشته باشد، آن را با نماد a_{23} نمایش می‌دهیم. به عنوان مثال، در ماتریس فوق درایه $\sqrt{2}$ در محل برخورد سطر دوم با ستون سوم قرار دارد، پس می‌گوییم $a_{23} = \sqrt{2}$ و یا $a_{12} = 0$. به طور کلی درایه‌ای که در سطر m ام و ستون n ام قرار دارد با a_{ij} نمایش داده می‌شود.

تذکره مهم: هر ماتریس از مرتبه 1×1 را معادل با یک عدد حقیقی در نظر می‌گیریم؛ یعنی اگر $A = [a]_{1 \times 1}$ ، آن‌گاه می‌گوییم $A = [a]_{1 \times 1} = a$.

نمایش مختصاری ماتریس‌ها

فرض کنیم ماتریس B از مرتبه $m \times n$ به صورت روبه‌رو باشد:

چون نمایش این ماتریس به صورت فوق به فضای زیادی نیاز دارد و ضمناً زمان زیادی برای نوشتن و خواندن آن لازم است، معمولاً آن را به صورت مختصر $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ نمایش می‌دهند و اگر مرتبه آن برای ما مشخص باشد و بیم اشتباه نرود، آن‌گاه آن را به صورت $B = [b_{ij}]$ نیز نمایش می‌دهند.

$$B_{m \times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{ستون زام} \\ \uparrow \\ \text{سطر نام} \end{matrix}$$

مثال و پاسخ

مثال ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\forall i, j, 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 2: \begin{cases} a_{ij} = i + j : i > j \\ a_{ij} = i \times j : i = j \\ a_{ij} = i - j : i < j \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

این ماتریس را با درایه‌هایش نمایش دهید.

پاسخ چون A از مرتبه 3×2 است، پس ماتریس A باید به صورت مقابل باشد:

در درایه a_{11} ، چون $i = j = 1$ ، پس $a_{11} = 1 \times 1 = 1$.

در درایه a_{12} ، $i < j$ است، پس $a_{12} = 1 - 2 = -1$.

در درایه a_{21} ، $i > j$ است، پس $a_{21} = 2 + 1 = 3$.

در درایه a_{22} ، $i = j$ ، پس $a_{22} = 2 \times 2 = 4$.

در درایه a_{31} ، $i > j$ ، پس $a_{31} = 3 + 1 = 4$.

و سرانجام در درایه a_{32} نیز $i > j$ است و در نتیجه $a_{32} = 3 + 2 = 5$.

اکنون واضح است که ماتریس A به صورت زیر خواهد بود:

مثال و پاسخ

مثال ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\forall i, j: \begin{cases} a_{ij} = i \times j^2 : i < j \\ a_{ij} = i + 2j : i \geq j \end{cases}$$

مجموع درایه‌های ماتریس A را پیدا کنید.

پاسخ همانند مثال قبل داریم:

$$\begin{array}{l} a_{11} = 1 + 2 \times 1 = 3, \quad a_{12} = 1 \times 2^2 = 4, \quad a_{13} = 1 \times 3^2 = 9 \\ a_{21} = 2 + 2 \times 1 = 4, \quad a_{22} = 2 + 2 \times 2 = 6, \quad a_{23} = 2 \times 3^2 = 18 \\ a_{31} = 3 + 2 \times 1 = 5, \quad a_{32} = 3 + 2 \times 2 = 7, \quad a_{33} = 3 + 2 \times 3 = 9 \end{array} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 4 & 6 & 18 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

اکنون به سادگی معلوم می‌شود که مجموع درایه‌های این ماتریس برابر ۶۵ است.

مثال و پاسخ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j : i \geq j \\ 4 : i < j \end{cases}$$

مثال یک ضابطه برای ماتریس مقابل به دست آورید.

پاسخ یکی از ضابطه‌ها می‌تواند به صورت زیر باشد:

مثال و پاسخ

مثال اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ و $a_{ij} = i \times j - 2$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A چه قدر است؟

پاسخ مجموع درایه‌های ستون دوم

$$= a_{12} + a_{22} + a_{32} \\ = (1 \times 2 - 2) + (2 \times 2 - 2) + (3 \times 2 - 2) = 0 + 2 + 4 = 6$$

چند ماتریس خاص

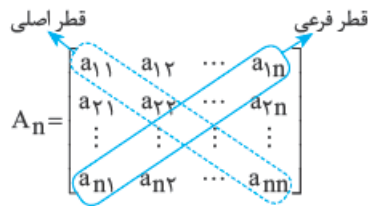
۱- ماتریس مربعی

اگر تعداد سطرها و ستون‌های یک ماتریس با هم برابر باشند، آن ماتریس را ماتریس مربعی می‌نامند. اگر A ماتریسی از مرتبه $n \times n$ باشد، اصطلاحاً آن را ماتریس مربعی از مرتبه n می‌نامند و معمولاً با A_n نمایش می‌دهند.

تعریف قطر اصلی در ماتریس مربعی در هر ماتریس مربعی، درایه‌هایی که شماره سطر و ستون آن‌ها برابر باشند، قطر اصلی را تشکیل می‌دهند:

به بیان دیگر در یک ماتریس مربعی، تمام درایه‌هایی که به صورت a_{ii} هستند روی قطر اصلی قرار دارند.

در یک ماتریس مربعی، درایه‌هایی که روی قطر عمود بر قطر اصلی قرار دارند، قطر فرعی را تشکیل می‌دهند.



در ماتریس مربعی مقابل، قطرهای اصلی و فرعی نمایش داده شده‌اند.

نکته اگر a_{ij} روی قطر فرعی یک ماتریس $n \times n$ باشد، آن‌گاه $i + j = n + 1$.

مثال و پاسخ

مثال در یک ماتریس از مرتبه $n \times n$ ، درایه a_{ij} هم روی قطر اصلی و هم روی قطر فرعی است. مرتبه ماتریس را بر حسب i پیدا کنید.

پاسخ چون a_{ij} روی قطر اصلی است، پس $i = j$ و چون a_{ij} روی قطر فرعی هم قرار دارد، بنا بر نکته فوق باید داشته باشیم $i + j = n + 1$.

که در آن n مرتبه ماتریس است. از این دو رابطه داریم:

$$i + j = n + 1 \xrightarrow{i=j} 2i = n + 1 \Rightarrow n = 2i - 1$$

۲- ماتریس سطری

ماتریسی که فقط یک سطر داشته باشد، ماتریس سطری می‌نامند.

$$A_{1 \times n} = [a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}]$$

۳- ماتریس ستونی

ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد، ماتریس ستونی می‌نامند.

$$A_{n \times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

۴- ماتریس قطری

ماتریس مربعی را که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند، ماتریس قطری می‌نامند. (توجه داشته باشیم که درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند صفر باشند و می‌توانند مخالف صفر باشند.) در زیر چند ماتریس قطری ارائه شده‌اند:

$$A = [\Delta], \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

۵- ماتریس اسکالر

اگر در یک ماتریس قطری، تمام درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را ماتریس اسکالر می‌نامند. در زیر چند ماتریس اسکالر ارائه شده‌اند:

$$A = [\Delta], \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

مثال و پاسخ

مثال در عبارت زیر، جاهای خالی را با واژه‌های مناسب پر کنید تا گزاره‌ای درست حاصل شود:
هر ماتریس قطری یک ماتریس ولی هر ماتریس یک ماتریس
پاسخ اسکالر نیست - اسکالر - قطری است

۶. ماتریس صفر

ماتریسی را که تمام درایه‌های آن صفر باشند، ماتریس صفر می‌نامند. معمولاً ماتریس صفر از مرتبه $n \times p$ را با نماد $\bar{O}_{n \times p}$ نمایش می‌دهند. در زیر چند ماتریس صفر نمایش داده شده‌اند.

$$\bar{O}_{1 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{O}_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{O}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس زمانی مساوی هستند که هر دو شرط زیر را داشته باشند:
(a) دو ماتریس هم‌مرتبه باشند.

(b) تمام درایه‌های نظیر در دو ماتریس برابر باشند.

با توجه به تعریف فوق می‌توان گفت اگر $A = [a_{ij}]_{n \times p}$ و $B = [b_{ij}]_{k \times t}$ ، آن‌گاه زمانی این دو ماتریس برابرند که:

$$\begin{cases} k = n \\ t = p \\ \forall i, j: a_{ij} = b_{ij} \end{cases}$$

مثال و پاسخ

مثال اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x+2y & 1 \\ 2 & x^2+1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & x+2 \\ 2 & z+1 \end{bmatrix}$ برابر باشند، مقادیر x ، y و z را پیدا کنید.

پاسخ هر دو ماتریس از مرتبه 2×2 هستند، پس شرط اول تساوی دو ماتریس برقرار است. اکنون باید شرط دوم برقرار باشد، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x+2y=5 \xrightarrow{x=-1} y=3 \\ x+2=1 \Rightarrow x=-1 \\ z+1=x^2+1 \xrightarrow{x=-1} z=1 \end{cases}$$

مثال و پاسخ

مثال اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{x} + \sqrt{y+1} \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} z-2 & 0 \end{bmatrix}$ برابر باشند، حاصل $z^x + y$ چه قدر است؟

پاسخ دو ماتریس از مرتبه 1×2 هستند، پس کافی است درایه‌های نظیر برابر باشند:

$$\begin{cases} z-2=1 \Rightarrow z=3 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 0 \end{cases}$$

می‌دانیم $\sqrt{x} \geq 0$ و $\sqrt{y+1} \geq 0$ ، پس: $\sqrt{x} + \sqrt{y+1} \geq 0$ و تنها زمانی $\sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 0$ می‌تواند صفر باشد که هر کدام از عامل‌های جمع، صفر باشند؛ یعنی $x=0$ و $y=-1$. اکنون داریم:

$$z^x + y = 3^0 + (-1) = 1 - 1 = 0$$

جمع ماتریس‌ها

دو ماتریس وقتی قابل جمع هستند که آن دو ماتریس هم‌مرتبه باشند و مجموع دو ماتریس هم‌مرتبه، ماتریسی از همان مرتبه است و هر درایه آن، حاصل جمع دو درایه نظیر از آن دو ماتریس باشد.

پس اگر $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ، $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ و $C = A + B$ ، آن‌گاه $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ طوری که:

$$\forall i, j: c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

مثال و پاسخ

مثال اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه حاصل $A + B$ را پیدا کنید.

پاسخ چون هر دو ماتریس از مرتبه 2×2 هستند، پس هم‌مرتبه می‌باشند و جمع‌پذیرند؛ بنا بر تعریف جمع دو ماتریس داریم:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+4 & 3+(-1) \\ -5+2 & 0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس

اگر r عددی حقیقی و A ماتریسی از مرتبه $n \times p$ باشد، حاصل $r \cdot A$ یک ماتریس از مرتبه $n \times p$ است که هر درایه آن، r برابر درایه نظیر از ماتریس A می‌باشد؛ به بیان دیگر، برای این‌که عدد حقیقی r را در یک ماتریس ضرب کنیم، کافی است r را در تک‌تک درایه‌های آن ماتریس ضرب کنیم.

$$r \in \mathbb{R}, A = [a_{ij}]_{n \times p} \Rightarrow r \cdot A = [r \cdot a_{ij}]_{n \times p}$$

به زبان ریاضی داریم:

مثال و پاسخ

مثال اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه $2A + 3B$ را پیدا کنید.

$$2A + 3B = 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + 3 \times \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 7 & 9 \\ 14 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

قرینه یک ماتریس

اگر تمام درایه‌های یک ماتریس را قرینه کنیم، ماتریسی که حاصل می‌شود، قرینه ماتریس اولیه می‌نامند. در واقع قرینه ماتریس A همان ماتریس $A \times (-1)$ است که با نماد $-A$ نمایش داده می‌شود.

واضح است که حاصل جمع هر ماتریس با قرینه همان ماتریس، برابر ماتریس صفر از همان مرتبه است؛ یعنی:

$$A + (-A) = \bar{O}$$

مثال و پاسخ

مثال دو ماتریس 2×2 مثال بزنید که مجموع آن‌ها برابر ماتریس صفر باشد.

پاسخ فرض کنیم A و B دو ماتریس 2×2 باشند، طوری که $A + B = \bar{O}_{2 \times 2}$ ، پس $B = \bar{O}_{2 \times 2} - A$ یا $B = -A$ ؛ یعنی کافی

است تمام درایه‌های ماتریس A را قرینه کنیم، بنابراین به عنوان نمونه، اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه $B = -A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

ویژگی‌های جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

اگر A, B, C سه ماتریس از مرتبه $n \times p$ و r و s دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه ویژگی‌های زیر برقرار هستند:

- (ویژگی جابه‌جایی جمع دو ماتریس)
- (ویژگی شرکت‌پذیری عمل جمع در ماتریس)
- (ویژگی وجود عضو بی‌اثر یا عضو خنثی در عمل جمع ماتریس)
- (ویژگی وجود عضو قرینه در عمل جمع ماتریس)
- (ویژگی توزیع‌پذیری ضرب عدد در جمع ماتریس)
- (ویژگی توزیع‌پذیری ضرب ماتریس در جمع دو عدد حقیقی)
- (ویژگی حذف ضرب عدد در ماتریس)

- ۱) $A + B = B + A$
- ۲) $A + (B + C) = (A + B) + C$
- ۳) $A + \bar{O} = \bar{O} + A = A$
- ۴) $A + (-A) = (-A) + A = \bar{O}$
- ۵) $r \cdot (A + B) = r \cdot A + r \cdot B$
- ۶) $(r + s) \cdot A = r \cdot A + s \cdot A$
- ۷) اگر $r \neq 0$ باشد، آن‌گاه $A = B \Leftrightarrow r \cdot A = r \cdot B$

مثال و پاسخ

مثال ویژگی جابه‌جایی جمع دو ماتریس: یعنی ویژگی (الف) را ثابت کنید.

پاسخ فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{n \times p}$ و $B = [b_{ij}]_{n \times p}$. بنا بر تعریف جمع دو ماتریس هم‌مرتبه داریم:

$$\begin{aligned} A + B &= [a_{ij}]_{n \times p} + [b_{ij}]_{n \times p} \\ &= [a_{ij} + b_{ij}]_{n \times p} && \text{بنا به تعریف عمل جمع دو ماتریس} \\ &= [b_{ij} + a_{ij}]_{n \times p} && \text{ویژگی جابه‌جایی عمل جمع در مجموعه اعداد حقیقی} \\ &= [b_{ij}]_{n \times p} + [a_{ij}]_{n \times p} && \text{بنا به تعریف عمل جمع ماتریس‌ها} \\ &= B + A \end{aligned}$$

مثال و پاسخ

مثال ویژگی توزیع‌پذیری ضرب یک ماتریس در جمع دو عدد حقیقی: یعنی ویژگی (ج) را ثابت کنید.

پاسخ فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{n \times p}$ یک ماتریس و r و s دو عدد حقیقی باشند. اکنون داریم:

$$\begin{aligned} (r+s) \cdot A &= (r+s) \cdot [a_{ij}]_{n \times p} && \text{بنا بر تعریف ضرب عدد در یک ماتریس} \\ &= [(r+s) \cdot a_{ij}]_{n \times p} && \text{ویژگی توزیع‌پذیری ضرب در جمع در مجموعه اعداد حقیقی} \\ &= [r \cdot a_{ij} + s \cdot a_{ij}]_{n \times p} && \text{بنا به تعریف عمل جمع دو ماتریس} \\ &= [r \cdot a_{ij}]_{n \times p} + [s \cdot a_{ij}]_{n \times p} && \text{بنا بر تعریف ضرب عدد در ماتریس} \\ &= r \cdot [a_{ij}]_{n \times p} + s \cdot [a_{ij}]_{n \times p} \\ &= r \cdot A + s \cdot B \end{aligned}$$

ضرب دو ماتریس

الف) ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی

اگر A ماتریس سطری از مرتبه $1 \times n$ و B ماتریس ستونی از مرتبه $n \times 1$ باشد، آن‌گاه ضرب A در B تعریف‌پذیر است و حاصل آن ماتریسی از مرتبه 1×1 می‌باشد که معادل با یک عدد حقیقی است. برای پیدا کردن حاصل ضرب $A \times B$ هر درایه از ماتریس A مانند a_{1i} را در درایه b_{i1} از ماتریس B ضرب می‌کنیم و مجموع این حاصل‌ضرب‌ها را به دست می‌آوریم.

به عنوان مثال؛ اگر $A = [4 \ 5 \ -2]_{1 \times 3}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$ ، آن‌گاه داریم:

$$A \times B = [4 \ 5 \ -2] \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = [4 \times 3 + 5 \times 2 + (-2) \times 1]_{1 \times 1} = [20]_{1 \times 1} = 20$$

و به طور کلی اگر $A = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}]_{1 \times n}$ و $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}_{n \times 1}$ باشند، آن‌گاه داریم:

$$\begin{aligned} A \times B &= [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}]_{1 \times n} \times \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}_{n \times 1} \\ &= [a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1}]_{1 \times 1} \\ &= a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1} \end{aligned}$$

تکرار وقتی یک ماتریس سطری در ماتریس ستونی قابل ضرب است که اگر ماتریس سطری از مرتبه $1 \times n$ و ماتریس ستونی از مرتبه $p \times 1$ باشد، آن‌گاه باید $n = p$ باشد.

ب) ضرب ماتریس در ماتریس

اگر A و B دو ماتریس باشند، آن‌گاه به شرطی ماتریس $A \times B$ تعریف‌پذیر است (وجود دارد) که تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد؛ یعنی اگر A از مرتبه $n \times p$ است، باید B از مرتبه $p \times m$ باشد و حاصل ضرب آن‌ها ماتریسی از مرتبه $n \times m$ است.

پس اگر $A = [a_{ij}]_{n \times p}$ و $B = [b_{ij}]_{p \times m}$ ، آن‌گاه $C = A \times B$ طوری که $C = [c_{ij}]_{n \times m}$.

$$\begin{array}{l} \text{مرتبهٔ ماتریس اول} \\ \text{مرتبهٔ ماتریس دوم} \\ \text{مرتبهٔ ماتریس حاصل ضرب} \end{array} \quad \begin{array}{c} n \times p \\ p \times m \\ n \times m \end{array}$$

طرح‌وارهٔ روبه‌رو برای این منظور می‌تواند مفید باشد:

برای پیدا کردن درایهٔ سطر n ام، ستون m ام ماتریس حاصل ضرب، باید سطر n ام ماتریس A را در ستون m ام ماتریس B ضرب کنیم.

مثال و پاسخ

مثال اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ، آیا ماتریس $A \times B$ وجود دارد؟ چرا؟ اگر جواب مثبت است، ماتریس حاصل ضرب را پیدا کنید.

پاسخ مرتبهٔ ماتریس A 3×3 و ماتریس B 3×2 است. چون تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم، برابر است، پس ماتریس $A \times B$ تعریف‌پذیر است و ماتریس حاصل ضرب از مرتبهٔ 3×2 است.

اکنون هر یک از سطرهای ماتریس A را در هر یک از ستون‌های ماتریس B ضرب می‌کنیم: (اگر سطر n ام ماتریس A را در ستون m ام ماتریس B ضرب کنیم، آن‌گاه حاصل آن، درایهٔ سطر n ام، ستون m ام از ماتریس حاصل ضرب است)

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 4 + (-1) \times 3 & 2 \times 5 + 3 \times (-2) + (-1) \times 0 \\ 0 \times 1 + 2 \times 4 + 4 \times 3 & 0 \times 5 + 2 \times (-2) + 4 \times 0 \\ 2 \times 1 + 1 \times 4 + 0 \times 3 & 2 \times 5 + 1 \times (-2) + 0 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 20 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

توجه کنید که ضرب دو ماتریس در حالت کلی دارای خاصیت جابه‌جایی نیست؛ یعنی گاهی $A \times B$ قابل تعریف است ولی $B \times A$ قابل تعریف نیست و حتی گاهی $A \times B$ و $B \times A$ هر دو تعریف‌پذیرند ولی با هم برابر نیستند.

دوماتریس تعویض‌پذیر اگر A و B دو ماتریس باشند به طوری که $A \times B = B \times A$ ، آن‌گاه می‌گوییم این دو ماتریس تعویض‌پذیرند.

اگر A و B بخواهند تعویض‌پذیر باشند هر دو باید ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باشند، زیرا اگر A از مرتبهٔ $m \times p$ باشد، برای این که $A \times B$ وجود داشته باشد باید B از مرتبهٔ $p \times k$ باشد و در نتیجه ماتریس $A \times B$ از مرتبهٔ $m \times k$ است.

ضمناً برای این که $B \times A$ تعریف‌شده باشد، باید $k = m$ باشد، پس مرتبهٔ ماتریس B باید $p \times m$ باشد و در این صورت $B \times A$ از مرتبهٔ $p \times p$ است و چون $A \times B$ از مرتبهٔ $p \times k$ است برای این که این دو ماتریس برابر باشند، باید $k = p = m$ باشد در نتیجه $k = p = m$ ؛ یعنی هر دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه هستند.

به جای این عبارات‌های طولانی می‌توان به صورت زیر استدلال کرد:

$$\begin{array}{l} A \text{ مرتبه} = m \times p \\ B \text{ مرتبه} = p \times k \end{array} \Rightarrow A \times B \text{ مرتبه} = m \times k$$

$$\begin{array}{l} B \text{ مرتبه} = p \times k \\ A \text{ مرتبه} = m \times p \end{array} \Rightarrow B \times A \text{ مرتبه} = p \times p$$

باید $k = m$ باشد.

چون $A \times B$ باید با $B \times A$ برابر باشد، بنابراین $k = p$ و $m = p$ ؛ یعنی هر دو ماتریس، مربعی و هم‌مرتبه هستند.

مثال و پاسخ

مثال اگر $A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه ماتریسی مانند B چنان پیدا کنید که $A \times B = B \times A$.

پاسخ بنا بر مطالب صفحه قبل باید ماتریس B نیز از مرتبه 2×2 باشد، پس اگر فرض کنیم $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، آن گاه باید داشته باشیم:

$$A \times B = B \times A \Rightarrow \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 11a + 3c & 11b + 3d \\ 4a + c & 4b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11a + 4b & 3a + b \\ 11c + 4d & 3c + d \end{bmatrix}$$

بنا بر تساوی دو ماتریس داریم:

$$\begin{cases} 11a + 3c = 11a + 4b \Rightarrow c = \frac{4}{3}b \\ 11b + 3d = 3a + b \\ 4a + c = 11c + 4d \Rightarrow \begin{cases} 10b = 3(a - d) \\ 10c = 4(a - d) \end{cases} \Rightarrow a - d = \frac{10}{3}b \\ 4b + d = 3c + d \Rightarrow c = \frac{4}{3}b \end{cases}$$

پس کافی است $c = \frac{4}{3}b$ و $a - d = \frac{10}{3}b$ باشد، در نتیجه به عنوان مثال، اگر فرض کنیم $b = 6$ ، آن گاه $c = 8$ و $a - d = 20$. در

نتیجه اگر $a = 5$ ، آن گاه $d = -15$ و بنابراین یکی از ماتریس‌هایی مانند B به صورت زیر است:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & -15 \end{bmatrix}$$

(به عنوان آزمایش، حاصل‌های دو ماتریس $A \times B$ و $B \times A$ را به دست آورید و عملاً مشاهده کنید که برابرند.)

توجه داشته باشید که به ازای هر a و b یک مقدار برای c و d به دست می‌آید و در نتیجه بی‌شمار ماتریس مانند B می‌توان یافت طوری که $A \times B = B \times A$ باشد.

مثال و پاسخ

مثال ماتریس $A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. ماتریسی ناصفر و از مرتبه 2×2 مانند B ، مثال بزنید که $A \times B = \bar{O}$. آیا $B \times A = \bar{O}$ نیز برابر ماتریس صفر است؟

پاسخ فرض کنیم $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، پس باید داشته باشیم:

$$A \times B = \bar{O} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6a + 9c & 6b + 9d \\ 2a + 3c & 2b + 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

می‌دانیم دو ماتریس، زمانی برابرند که تمام درایه‌های نظیر از دو ماتریس، با هم برابر باشند، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \begin{cases} 6a + 9c = 0 \\ 2a + 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{این دو معادله یکسان هستند} \Rightarrow 2a + 3c = 0 \Rightarrow c = -\frac{2}{3}a \\ \begin{cases} 6b + 9d = 0 \\ 2b + 3d = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{این دو معادله یکسان هستند} \Rightarrow 2b + 3d = 0 \Rightarrow d = -\frac{2}{3}b \end{cases}$$

به ازای هر مقدار a ، یک مقدار برای c و به ازای هر مقدار b ، یک مقدار برای d به دست می‌آید؛ مثلاً اگر فرض کنیم $a = 3$ باشد،

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

آن گاه $c = -2$ و اگر فرض کنیم $b = -6$ ، آن گاه $d = 4$ ، پس در این صورت داریم:

(توجه داشته باشیم که به ازای هر مقدار دلخواهی که به a و b نسبت دهیم، یک مقدار برای c و d حاصل می‌شود، در نتیجه تعداد بی‌شمار ماتریس مانند B وجود دارد که $A \times B = \bar{O}$). اکنون حاصل $B \times A$ را پیدا می‌کنیم.

$$B \times A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18-12 & 27-18 \\ -12+8 & -18+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} \neq \bar{O}$$

نتیجه می‌گیریم که اگر $A \times B = \bar{O}$ باشد، دلیلی ندارد $B \times A$ نیز برابر ماتریس صفر باشد.

مثال و پاسخ

مثال اگر A ماتریس ناصفر از مرتبه 2×2 و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه ماتریس A را چنان مشخص کنید که $A \times B = \bar{O}$ باشد. از این مثال چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

پاسخ فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ t & k & p \end{bmatrix}$ ، پس باید داشته باشیم:

$$A \times B = \bar{O} \Rightarrow \begin{bmatrix} x & y & z \\ t & k & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x+2y+4z & 2x+4y+8z & 3x+6y+12z \\ t+2k+4p & 2t+4k+8p & 3t+6k+12p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنا بر تساوی دو ماتریس باید داشته باشیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y+4z=0 \\ 2x+4y+8z=0 \\ 3x+6y+12z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+4z=0 \\ \text{این سه معادله یکسان هستند زیرا هر کدام مضربی از دیگری است.} \end{cases} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t+2k+4p=0 \\ 2t+4k+8p=0 \\ 3t+6k+12p=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+2k+4p=0 \\ \text{این سه معادله یکسان هستند زیرا هر کدام مضربی از دیگری است.} \end{cases} \quad (2)$$

هر یک از رابطه‌های (۱) یا (۲) در واقع یک معادله با سه مجهول هستند، پس هر کدام از آن‌ها دارای بی‌شمار جواب می‌باشند؛ مثلاً اگر $x=2$ و $y=1$ باشد، آن‌گاه $2+2 \times 1+4z=0$ یا $z=-1$ و اگر $t=0$ و $k=6$ ، آن‌گاه $0+2 \times 6+4p=0$ یا $p=-3$.

پس ماتریس A می‌تواند به صورت $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ باشد. (توجه داشته باشیم که بی‌شمار ماتریس مانند A می‌توان ارائه داد).

در این مثال و مثال قبلی دیدیم که A و B هر دو مخالف صفر هستند ولی $AB = \bar{O}$. در حوزه اعداد حقیقی می‌دانیم اگر حاصل ضرب دو عدد برابر صفر باشد، آن‌گاه حداقل یکی از آن دو عدد باید برابر صفر باشد ولی در ضرب ماتریس‌ها این ویژگی وجود ندارد؛ یعنی شاید ضرب دو ماتریس، برابر ماتریس صفر باشد ولی هیچ‌یک از دو ماتریس، ماتریس صفر نباشند.

ماتریس واحد (ماتریس همانی) یک ماتریس اسکالر را که تمام درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن ۱ باشند، ماتریس واحد (ماتریس همانی) می‌نامند و با I نمایش می‌دهند.

در زیر، دو نوع ماتریس واحد از مرتبه‌های مختلف نمایش داده شده‌اند:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال و پاسخ

مثال ماتریس دلخواهی از مرتبه 3×3 مانند A را در نظر بگیرید. حاصل $A \times I_3$ و $I_3 \times A$ را پیدا کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$A \times I_3 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = A$$

پاسخ فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ پس داریم:

$$I_3 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = A$$

هم‌چنین داریم:

به نظر می‌رسد که ماتریس I_3 ، عضو بی‌اثر عمل ضرب ماتریس‌ها از مرتبه 3×3 باشد و هم‌چنین به گونه‌ای استثنایی دارای ویژگی جابه‌جایی نیز می‌باشد.

ویژگی‌های عمل ضرب ماتریس‌ها

ویژگی (۱) در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت جابه‌جایی نیست.

ویژگی (۲) اگر A ، ماتریس $n \times n$ و I ماتریس واحد از همان مرتبه باشد، آن‌گاه داریم:

$$A \times I = I \times A = A$$

ویژگی (۳) ضرب ماتریس‌ها در حاصل جمع دو ماتریس، خاصیت توزیع‌پذیری دارد؛ یعنی اگر A ماتریسی $n \times p$ و B و C ماتریس‌هایی از مرتبه

$p \times k$ باشند، آن‌گاه رابطه زیر برقرار است:

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

توزیع‌پذیری از چپ

یا

$$(B + C) \times A = B \times A + C \times A$$

توزیع‌پذیری از راست

ویژگی (۴) عمل ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت شرکت‌پذیری است؛ یعنی اگر A ماتریسی از مرتبه $n \times p$ ، B از مرتبه $p \times k$ و C از مرتبه

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها

$k \times m$ باشد، آن‌گاه رابطه مقابل برقرار است:

مثال و پاسخ

مثال برای ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ نشان دهید رابطه $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ برقرار است.

برقرار است.

$$B + C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 6 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

پاسخ

$$A \times (B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 6 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 29 \\ 77 & 73 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$A \times B + A \times C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

از طرفی:

$$= \begin{bmatrix} 22 & 24 \\ 62 & 64 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 15 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 29 \\ 77 & 73 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

توان های طبیعی یک ماتریس مربعی

اگر A ماتریسی مربعی باشد، آن گاه $A^2 = A \times A$ ، $A^3 = A^2 \times A = A \times A^2$ ، $A^4 = A^3 \times A = A \times A^3$ و ...
در حالت کلی اگر n عددی طبیعی باشد، آن گاه $A^n = A^{n-1} \times A = A \times A^{n-1}$.

مثال پاسخ

مثال اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ، آن گاه مجموع درایه های سطر دوم A^2 را پیدا کنید.

پاسخ

ماتریس $A \times$ سطر دوم = سطر دوم A^2

$$= [1 \ 0 \ -1] \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = [-1 \ 1 \ 5]$$

پس مجموع درایه های سطر دوم ماتریس A^2 برابر ۵ است.

مثال پاسخ

مثال اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، آن گاه ماتریس های A^2 ، A^3 و A^4 را مشخص کنید و سپس با استدلال استقرایی ماتریس A^n را حدس بزنید.

پاسخ

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & -2 \\ 2 & -2+1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+1 & -3 \\ 3 & -3+1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \times A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 & -4 \\ 4 & -4+1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{bmatrix}$$

با توجه به موارد بالا با استدلال استقرایی می توان حدس زد که:

سؤال های امتحانی

۱- اگر $M = [m_{ij}]_{3 \times 3}$ و $m_{ij} = \begin{cases} 2 & : i < j \\ 1 & : i \geq j \end{cases}$ ، آن گاه مجموع درایه های ماتریس M را پیدا کنید.

۲- اگر ماتریس های $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$a_{ij} = \begin{cases} i^2 - j & : i < j \\ 2i - 1 & : i = j \\ j^2 - i & : i > j \end{cases}, \quad b_{ij} = \text{Min}\{i, j\}$$

آن گاه حاصل $2A - 3B$ را به دست آورید.

۳- اگر $A - B = B - A$ ، آن گاه کدام درست است؟

(ت) $A = -B$

(پ) $A = B$

(ب) $B = \bar{O}$

(ف) $A = \bar{O}$

۴- اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه و k و t دو عدد حقیقی و متمایز باشند و داشته باشیم $kA + tB = kB + tA$ ، آن گاه نشان دهید $A = B$.

۵- اگر A ماتریس 2×3 و B ماتریس 4×3 باشد، کدام یک از ماتریس های زیر تعریف شده است؟

(پ) BA^T

(ب) BA

(ف) AB

۶- اگر $A = [a_{ij}]_{5 \times 5}$ ، آن گاه چندتا از درایه‌های $a_{۲۵}$ ، $a_{۳۳}$ ، $a_{۴۲}$ ، $a_{۱۴}$ روی قطر فرعی آن قرار دارند؟

۷- اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ ، آن گاه درایه سطر دوم، ستون اول ماتریس $M = ABA$ را پیدا کنید.

۸- اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ ، $B = [a_{ij} - ۱]$ و $C = [a_{ij} + ۲]$ ، آن گاه درایه سطر دوم، ستون سوم ماتریس $M = ABC$ را مشخص کنید.

۹- اگر $A = [a_{ij}]_{۳ \times ۳}$ با درایه‌های $a_{ij} = i + j$ و $B = [b_{ij}]_{۳ \times ۳}$ با درایه‌های $b_{ij} = i - j$ ، آن گاه مجموع درایه‌های AB را پیدا کنید.

۱۰- اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A^{۱۳۹۷} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، آن گاه $a + b + c + d$ چه قدر است؟

۱۱- اگر در حاصل ضرب $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & a & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۲a \end{bmatrix}$ بدائیم مجموع درایه‌های روی قطر اصلی و زیر آن برابر -۷ است، مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی آن چه قدر است؟

۱۲- ریشه‌های معادله $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰$ را پیدا کنید.

۱۳- اگر $\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ x & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ x \\ ۲ \end{bmatrix} = ۱۴$ باشد، مقدار x چه قدر است؟

۱۴- اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & -۶ \\ -۳ & ۲ & ۹ \\ ۲ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}$ ، حاصل $A^{۱۷}$ را پیدا کنید.

۱۵- اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۴ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ -۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ ، آن گاه ماتریس $M = A^۲ + B^۲ + AB + BA$ را پیدا کنید.

۱۶- حاصل $\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۳ & -۱ \\ ۶ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ را مشخص کنید.

۱۷- مجموع درایه‌های ماتریس $\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۱ \\ ۴ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۳ & -۱ \end{bmatrix}^۲ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ چه قدر است؟

۱۸- هرگاه $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & -۱ \\ ۴ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ ، آن گاه درایه‌های سطر دوم، ستون سوم ماتریس $A^۲$ و درایه سطر سوم، ستون اول ماتریس $A^۳$ را به دست آورید.

۱۹- اگر $A = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۷ \end{bmatrix}$ ، $B = [۳ \quad -۲]$ و $M = A \times B$ ، آن گاه حاصل $M^{۱۲۱}$ را پیدا کنید.

۲۰- اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \\ -۱ \end{bmatrix}$ ، $B = [۱ \quad -۱ \quad -۲]$ و $M = A \times B$ ، آن گاه مجموع درایه‌های ماتریس $M^۵$ را پیدا کنید.

۲۱- اگر $D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ ، آن گاه ماتریس‌های D^x و D^y را پیدا کنید. چه نتیجه کلی می‌توان گرفت؟ نتیجه را بیان کنید.

۲۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و k عددی طبیعی باشد، ماتریس $A^k - A^{k-1}$ را پیدا کنید.

۲۳- اگر $A^2 = I - 2A$ ، آن گاه نشان دهید $(A^2 + I)^2 = A + I$.

۲۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، آن گاه حاصل $A^{53} - A^{46}$ را مشخص کنید.

۲۵- اگر ماتریس‌های $\begin{bmatrix} n & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 & m \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشند، $m + n$ چه قدر است؟

۲۶- a و b را چنان بیابید که دو ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشند.

۲۷- اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم مرتبه باشند و بین این دو ماتریس، رابطه $(A - B) \times (A + B) = A^2 - B^2$ برقرار باشد، آن گاه نشان دهید این دو ماتریس تعویض پذیرند.

۲۸- اگر $(A + B)^2 = A^2 + B^2$ ، آن گاه ثابت کنید $AB = BA$.

۲۹- اگر A ماتریس مربعی مرتبه n و I ماتریس واحد از همان مرتبه باشد، حاصل $(A - I)^2 - (A + I)^2$ را پیدا کنید.

۳۰- اگر $A^2 + A = I$ باشد، حاصل A^5 را پیدا کنید.

۳۱- اگر $A^2 = A$ و داشته باشیم $(I + A)^n = I + 3^k A$ ، مقدار n را به دست آورید.

۳۲- اگر m و k دو عدد حقیقی و A و B ماتریس‌های مربعی هم مرتبه و I ماتریس واحد از همان مرتبه باشند و داشته باشیم $A = mB + kI$ ، آن گاه ثابت کنید A و B تعویض پذیرند.

۳۳- اگر $A^2 = A$ باشد، درستی یا نادرستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $(A - I)^2 = A - I$

ب) $(I - A)^2 = I - A$

۳۴- اگر $A^2 = A - I$ ، آن گاه ثابت کنید $A^5 + A = I$.

۳۵- اگر $AB - 3BA = \bar{O}$ و $AB^2 + mB^2A = \bar{O}$ ، آن گاه مقدار m را مشخص کنید.

۳۶- اگر $A^2 = 3A$ و $B = 2A - 3I$ ، آن گاه ماتریس B^2 را مشخص کنید.

۳۷- اگر $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ، ثابت کنید $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$.

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱- با توجه به این که $m_{ij} = \begin{cases} 2 & : i < j \\ 1 & : i \geq j \end{cases}$ داریم:

$$\left. \begin{matrix} m_{11}=1, m_{12}=2, m_{13}=2 \\ m_{21}=1, m_{22}=1, m_{23}=2 \\ m_{31}=1, m_{32}=1, m_{33}=1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های این ماتریس، برابر ۱۲ می‌باشد.

۲- با توجه به تعریفی که از a_{ij} داده شده است، داریم:

$$\left. \begin{matrix} a_{11}=2 \times 1 - 1 = 1, a_{12}=1^2 - 2 = -1, a_{13}=1^2 - 3 = -2 \\ a_{21}=1^2 - 2 = -1, a_{22}=2 \times 2 - 1 = 3, a_{23}=2^2 - 3 = 1 \\ a_{31}=1^2 - 3 = -2, a_{32}=2^2 - 3 = 1, a_{33}=2 \times 3 - 1 = 5 \end{matrix} \right\} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

توجه داشته باشیم که به عنوان مثال، $\text{Min}\{5, 1\} = 1$ یا $\text{Min}\{2, -3\} = -3$ ، هم‌چنین $\text{Min}\{2, 2\} = 2$. اکنون با توجه به تعریفی که از b_{ij} داده شده است، داریم:

$$\left. \begin{matrix} b_{11}=1, b_{12}=1, b_{13}=1 \\ b_{21}=1, b_{22}=2, b_{23}=2 \\ b_{31}=1, b_{32}=2, b_{33}=3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

اکنون داریم:

$$2A - 3B = 2 \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} - 3 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -7 \\ -5 & 0 & -4 \\ -7 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

۳- از رابطه $A - B = B - A$ نتیجه می‌شود: $A + A = B + B$ یا $2A = 2B$ و چون $2 \neq 0$ ، پس $A = B$: یعنی گزاره (پ) درست است.

۴- $kA + tB = kB + tA \Rightarrow kA - tA = kB - tB \Rightarrow (k-t)A = (k-t)B$

چون k و t دو عدد حقیقی متمایزند، پس $k-t \neq 0$ و در نتیجه $A = B$.

۵- دو ماتریس وقتی قابل ضرب هستند که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد.

الف) ماتریس AB تعریف نشده است، زیرا تعداد ستون‌های ماتریس A برابر ۳ و تعداد سطرهای ماتریس B برابر ۴ است.

ب) ماتریس BA نیز تعریف نشده است، زیرا تعداد ستون‌های ماتریس B برابر ۳ و تعداد سطرهای ماتریس A برابر ۲ است.

پ) چون A از مرتبه 2×3 است، پس ماتریس $A^2 = A \times A$ تعریف نشده، زیرا تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس A برابر نیست و در نتیجه BA^2 نیز تعریف نخواهد شد.

۶- در یک ماتریس مربعی از مرتبه n ، اگر درایه a_{ij} روی قطر فرعی واقع باشد، آن‌گاه $i + j = n + 1$.

درایه a_{14} روی قطر فرعی ماتریس 5×5 قرار ندارد، زیرا $1 + 4 \neq 5 + 1$.

درایه a_{42} روی قطر فرعی ماتریس 5×5 واقع است، زیرا $4 + 2 = 5 + 1$.

درایه a_{33} نیز روی قطر فرعی قرار دارد و درایه a_{25} روی قطر فرعی نیست.

۷- برای جلوگیری از اتلاف زمان و انجام عملیات کم‌تر، درایه سطر دوم، ستون اول ماتریس $M = ABA$ را به صورت زیر پیدا می‌کنیم:

(ستون اول ماتریس A) \times B \times (سطر دوم ماتریس A)

$$m_{21} \text{ درایه} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 8 - 1 = 7$$

پس داریم:

۸- با توجه به تعریفی که از ماتریس‌های B و C ارائه شده است؛ داریم:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

با توجه به توضیحی که در پاسخ به سؤال ۷ داده شده، خواهیم داشت:

$$m_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 25 + 15 + 40 = 80$$

۹- با توجه به این که $a_{ij} = i + j$ و $b_{ij} = i - j$ ؛ داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

اکنون حاصل AB را پیدا می‌کنیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 2 & -7 \\ 14 & 2 & -10 \\ 17 & 2 & -13 \end{bmatrix}$$

اکنون به سادگی معلوم می‌شود که مجموع درایه‌های ماتریس AB برابر ۱۸ است.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

-۱۰

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با استدلال استقرایی نتیجه می‌شود $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و در نتیجه $A^{1397} = \begin{bmatrix} 1 & 1397 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و بنابراین:

$$a + b + c + d = 1399$$

-۱۱

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5+2a \\ 0 & -a & 2a \\ 0 & 0 & 2a \end{bmatrix}$$

در ماتریس فوق، مجموع درایه‌های روی قطر اصلی و زیر آن، برابر $a + 2$ است، پس $a + 2 = -7$ یا $a = -9$. اکنون داریم:

$$\text{مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی} = 4 + (5 + 2a) + 2a = 5a + 9 = -45 + 9 = -36$$

$$\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -x+2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

-۱۲

$$\Rightarrow x(-x+2)+3=0 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ x & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 14$$

-۱۳

$$\Rightarrow [x^2+3 \quad x+4] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 14 \Rightarrow x^2+3+2(x+4)=14 \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

-۱۴

$$A^T = A^T \cdot A = \begin{bmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = A$$

$$A^{17} = (A^T)^5 \times A^T = A^5 \times A^T = A^6 \times A = (A^T)^T \times A = A^T \times A = A^T = A$$

یعنی $A^T = A$ است؛ اکنون داریم:

۱۵- به جای محاسبه مستقیم، راحت‌تر آن است که ابتدا عبارت داده‌شده را ساده کنیم.

$$M = A^T + B^T + AB + BA = (A^T + AB) + (B^T + BA) = A(A+B) + B(B+A) = A(A+B) + B(A+B) \\ = (A+B)(A+B) = (A+B)^T$$

پس کافی است $A+B$ را پیدا کرده به توان ۲ برسانیم:

$$A+B = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$M = (A+B)^T = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 & 42 & -26 \\ 12 & 29 & -2 \\ 3 & 33 & 36 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 26$$

۱۶-

۱۷- برای راحتی کار ابتدا حاصل ماتریس زیر را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 17 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{عبارت} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 17 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 136 \\ 107 \\ 48 \end{bmatrix}$$

اکنون داریم:

مجموع درایه‌های این ماتریس، برابر با ۲۹۱ است.

۱۸-

ستون سوم A \times سطر دوم A = درایه سطر دوم، ستون سوم A^T

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 \end{bmatrix} = -4 + 3 + 3 = 2$$

$$A^T = (A^T \text{ سطر سوم}) \times A \times (A \text{ ستون اول}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 14 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 42 + 56 + 10 = 108$$

$$M = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -10 \\ 21 & -14 \end{bmatrix}$$

۱۹-

$$M^T = \begin{bmatrix} 15 & -10 \\ 21 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 & -10 \\ 21 & -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -10 \\ 21 & -14 \end{bmatrix} = M$$

از طرفی:

پس $M^T = M^T \cdot M = M$ و با استقرا نتیجه می‌شود $M^{121} = M$.

$$M = AB = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 4 & -4 & -8 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad -20$$

$$M^T = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 4 & -4 & -8 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 4 & -4 & -8 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 4 & -4 & -8 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = M$$

پس $M^T = M^T \times M = M \times M = M^T = M$ و با استقرا نتیجه می‌شود $M^{\Delta} = M$ ؛ در نتیجه، مجموع درایه‌های M^{Δ} ، برابر مجموع درایه‌های M ؛ یعنی برابر ۱۲ است.

$$D^T = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^T & 0 & 0 \\ 0 & b^T & 0 \\ 0 & 0 & c^T \end{bmatrix} \quad -21$$

$$D^T = D^T \times D = \begin{bmatrix} a^T & 0 & 0 \\ 0 & b^T & 0 \\ 0 & 0 & c^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^T & 0 & 0 \\ 0 & b^T & 0 \\ 0 & 0 & c^T \end{bmatrix}$$

$$D^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$$

با استقرا می‌توان پیش‌بینی کرد که

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

اگر یک ماتریس قطری را به توان n برسانیم، حاصل نیز ماتریسی قطری است که درایه‌های قطر اصلی آن، توان n ام ماتریس اولیه است.

۲۲- ماتریس A قطری است و بنا بر نتیجه تمرین قبل داریم:

$$A^k - A^{k-1} = \begin{bmatrix} \gamma^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \gamma^{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^k - \gamma^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A^T + I)^T = (A^T + I)(A^T + I) = A^T + A^T + A^T + I = A \times A^T + 2A^T + I = A(I - 2A) + 2A^T + I \quad -23$$

$$= A - 2A^T + 2A^T + I = A + I$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad -24$$

از طرفی $A^T = A^T A = IA = A$ ، بنابراین می‌توان حدس زد: $A^n = \begin{cases} A & : \text{فرد باشد } n \\ I & : \text{زوج باشد } n \end{cases}$ با توجه به نتیجه فوق، داریم:

$$A^{53} - A^{46} = A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

۲۵- چون دو ماتریس موردنظر، تعویض‌پذیر هستند، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{bmatrix} n & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & m \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & m \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} n-3 & mn+6 \\ 3 & 2m-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+2m & 3-m \\ -n+4 & -5 \end{bmatrix}$$

پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} n - 3 = n + 2m \Rightarrow m = -\frac{3}{2} \\ 3 = -n + 4 \Rightarrow n = 1 \\ mn + 6 = 3 - m \\ 2m - 2 = -5 \end{cases}$$

این دو مقدار، در دو رابطه بعدی نیز صدق می کنند، پس قابل قبول هستند، در نتیجه $m + n = -\frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

۲۶- چون دو ماتریس تعویض پذیرند، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{bmatrix} -1 & a + 3b \\ 4 & 2a + 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 3a & 6 + 2a \\ -1 + 3b & -3 + 2b \end{bmatrix}$$

از تساوی دو ماتریس نتیجه می شود:

$$\begin{cases} -1 = 2 + 3a \Rightarrow a = -1 \\ 4 = -1 + 3b \Rightarrow b = \frac{5}{3} \\ a + 3b = 6 + 2a \Rightarrow 3b = 6 + a \\ 2a + 2b = -3 + 2b \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

جواب های به دست آمده از دستگاه فوق در معادله سوم نیز صدق می کند، پس دستگاه سازگار است و در نتیجه $a = -1$ و $b = \frac{5}{3}$

$$(A - B) \times (A + B) = A^T - B^T \Rightarrow A^T + AB - BA - B^T = A^T - B^T \quad -27$$

$$\Rightarrow AB - BA = \vec{0} \Rightarrow AB = BA \Rightarrow A \text{ و } B \text{ تعویض پذیرند.}$$

۲۸-

$$(A + B)^T = A^T + B^T \Rightarrow (A + B) \times (A + B) = A^T + B^T \Rightarrow A^T + AB + BA + B^T = A^T + B^T \Rightarrow AB = -BA \quad (1)$$

$$A^T B = A \cdot (AB) = A \cdot (-BA) = -A(BA) = -(AB)A \stackrel{(1)}{=} -(-BA)A = BA^T$$

اکنون داریم:

$$(A - I)^T - (A + I)^T = (A - I)(A - I) - (A + I)(A + I) = (A^T - AI - IA + I^T) - (A^T + AI + IA + I^T) \quad -29$$

$$= A^T - 2A + I - A^T - 2A - I = -4A$$

۳۰- رابطه را به صورت $A^T = I - A$ تبدیل می کنیم و طرفین این رابطه را در A ضرب می کنیم:

$$A(A^T) = A(I - A) \Rightarrow A^T = A - A^T \Rightarrow A^T = A - (I - A) = 2A - I$$

$$A^5 = A^T \cdot A^T = (2A - I)(I - A) = 2AI - 2A^T - I^T + IA = 2A - 2(I - A) - I + A = 5A - 3I$$

۳۱- چون $A^T = A$ ، پس $A^T = A(A^T) = AA = A^T = A = A$ و در نتیجه $A^n = A$: اکنون داریم:

$$(I + A)^T = (I + A)(I + A) = I + 2A + A^T = I + 2A + A = I + 3A = I + (3^T - 1)A$$

$$(I + A)^T = (I + A)(I + A)^T = (I + A)(I + 3A)$$

$$= I + 4A + 3A^T = I + 4A + 3A = I + 7A = I + (7^T - 1)A$$

پس با استقرا نتیجه می شود $(I + A)^n = I + (n^T - 1)A$

$$3^n - 1 = 31 \Rightarrow 3^n = 32 \Rightarrow n = 5$$

در نتیجه داریم:

۳۲- تساوی $A = mB + kI$ را یک بار از طرف چپ در B ضرب می‌کنیم و یک بار هم از طرف راست، پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} BA &= B(mB + kI) = mB^2 + kB \\ AB &= (mB + kI)B = mB^2 + kB \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = BA \Rightarrow A \text{ و } B \text{ تعویض پذیرند.}$$

الف) $(A - I)^2 = (A - I)(A - I) = A^2 - A - A + I^2 = A^2 - 2A + I = A - 2A + I = -A + I \neq A - I$ ۳۳-

پس تساوی (الف) نادرست است.

ب) $(I - A)^2 = (I - A) \cdot (I - A) = I^2 - A - A + \underbrace{A^2}_{=A} = I - A$

پس تساوی (ب) درست است.

$A^2 = A - I \xrightarrow{\text{به توان ۲}} A^4 = (A - I)^2 = \underbrace{A^2}_{A-I} - 2A + I = -A$ ۳۴-

$A^5 = A^4 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = -(A - I) = -A + I \Rightarrow A^5 + A = I$

۳۵- از رابطه اول نتیجه می‌شود $AB = 3BA$. اکنون داریم:

$AB^2 = (AB)B^2 = 3(BA)BB = 3B(AB)B = 3B(3BA)B = 9B^2(AB) = 9B^2(3BA) = 27B^2A$

پس $AB^2 - 27B^2A = \bar{O}$ و در نتیجه $m = -27$.

۳۶- دو طرف رابطه $B = 2A - 3I$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$B^2 = (2A - 3I)(2A - 3I) = 4A^2 - 6AI - 6IA + 9I^2$

$= 4A^2 - 12A + 9I = 4(3A) - 12A + 9I \Rightarrow B^2 = 9I$

$A^2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix}$ ۳۷-

$A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$ می‌دانیم $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ و $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ پس: