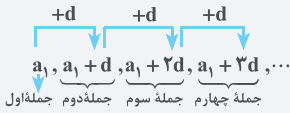


درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

یادآوری

اگر جمله اول یک دنباله حسابی a_1 و قدرنسبت آن d باشد، آن‌گاه جملات این دنباله به صورت زیر می‌باشند:



نکات

در هر دنباله حسابی نکات زیر برقرار می‌باشد:

۱. جمله n ام به صورت $a_n = a_1 + (n-1)d$ یا $a_n = a_m + (n-m)d$ می‌باشد. به عنوان مثال $a_{14} = a_1 + 13d$ ، $a_{14} = a_6 + 8d$ و $a_{14} = a_7 + 7d$ می‌باشد.

۲. قدرنسبت دنباله را می‌توان از رابطه‌های $d = a_n - a_{n-1}$ و $d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$ به دست آورد.

۳. جمله n ام، عبارتی درجه یک بر حسب n است که در آن ضریب n ، همان قدرنسبت دنباله (d) می‌باشد. به عنوان مثال $a_n = 5 - 2n$ و $b_n = \frac{n}{4} + 1$ جملات

n ام (یا عمومی) دو دنباله حسابی هستند که قدرنسبت آن‌ها به ترتیب -3 و $\frac{1}{4}$ است، ولی $c_n = 3n^2 + 5$ نمی‌تواند جمله عمومی یک دنباله حسابی باشد چون درجه یک نیست.

۴. اگر $d > 0$ ، آن‌گاه دنباله صعودی و اگر $d < 0$ ، آن‌گاه دنباله نزولی می‌باشد.

۵. اگر a ، b و c سه جمله متوالی یا متساوی‌الفاصله از یک دنباله حسابی (عددی) باشند، آن‌گاه $2b = a + c$ ، یعنی دو برابر جمله وسط، برابر است با مجموع دو جمله دیگر، در این صورت b را واسطه حسابی (یا عددی) بین a و c می‌نامند.

تست آموزشی

جمله سوم یک دنباله حسابی 7 و قدرنسبت آن 2 می‌باشد. جمله عمومی این دنباله کدام است؟

(۲) $a_n = 2n + 1$

(۱) $a_n = 3n - 2$

(۴) $a_n = 2n + 5$

(۳) $a_n = n + 4$

گزینه «۲»؛ روش اول: جمله عمومی دنباله حسابی برابر $a_n = a_1 + (n-1)d$ می‌باشد. $a_3 = 7$ و $d = 2$ ، بنابراین داریم:

$$a_3 = 7 \Rightarrow a_1 + 2d = 7 \Rightarrow a_1 + 2 \times 2 = 7 \Rightarrow a_1 = 3 \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 3 + (n-1) \times 2 \Rightarrow a_n = 2n + 1$$

روش دوم: چون قدرنسبت دنباله برابر 2 می‌باشد، پس $a_n = 2n + \text{[]}$ ، حال برای تعیین [] ، چون $a_3 = 7$ ، پس در جمله عمومی، اگر $n = 3$ را جایگذاری کنیم، حاصل باید 7 شود. بنابراین $1 = \text{[]}$ و در نتیجه $a_n = 2n + 1$ می‌باشد.

در یک دنباله حسابی $20 = a_4 + 3a_7 - a_9$ است، جمله پنجم این دنباله، کدام است؟

(۴) 4

(۳) 5

(۲) 10

(۱) 20

پاسخ: با استفاده از رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ ، کافی است جملات را بر حسب a_1 و d بنویسیم:

$$2(a_1 + 3d) + 3(a_1 + 6d) - (a_1 + 8d) = 20 \Rightarrow 2a_1 + 6d + 3a_1 + 18d - a_1 - 8d = 20 \Rightarrow 4a_1 + 16d = 20 \Rightarrow \underbrace{a_1 + 4d}_{a_5} = 5 \Rightarrow a_5 = 5$$

در یک دنباله حسابی، جملات چهارم و هفدهم به ترتیب 7 و -13 می‌باشند. جمله سی‌ام این دنباله کدام است؟

(۴) $-\frac{20}{13}$

(۳) $\frac{20}{13}$

(۲) -33

(۱) 33

پاسخ:

روش اول: با استفاده از رابطه $d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$ قدرنسبت را پیدا می‌کنیم:

$$a_{17} = -13 \text{ و } a_4 = 7 \Rightarrow d = \frac{a_{17} - a_4}{17 - 4} = \frac{-13 - 7}{13} = -\frac{20}{13}$$

$$a_4 = a_1 + 3d \Rightarrow 7 = a_1 + 3 \times (-\frac{20}{13}) \Rightarrow a_1 = \frac{151}{13} \Rightarrow a_{30} = a_1 + 29d = \frac{151}{13} + 29 \times (-\frac{20}{13}) = -\frac{429}{13} = -33$$

روش دوم: می‌توانیم از رابطه $a_n = a_m + (n-m)d$ استفاده کنیم:

$$a_{17} = a_4 + 13d \Rightarrow -13 = 7 + 13d \Rightarrow d = -\frac{20}{13} \Rightarrow a_{30} = a_{17} + 13d = -13 + 13 \times (-\frac{20}{13}) = -13 - 20 = -33$$

دنباله $1, -129, -141, -153, \dots$ چند جمله منفی دارد؟

- گزینه «۱» ۱۰ گزینه «۲» ۱۳ گزینه «۳» ۱۴ گزینه «۴» ۱۳

پاسخ: جملات فوق یک دنباله حسابی هستند (چرا؟)، بنابراین داریم:

$$d = a_2 - a_1 = -141 - (-153) = 12, \quad a_1 = -153 \Rightarrow a_n = -153 + (n-1)12 \Rightarrow a_n = 12n - 165 \xrightarrow{a_n < 0} 12n - 165 < 0 \Rightarrow n < \frac{165}{12}$$

$$\Rightarrow n < 13.75 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 1, 2, \dots, 13 \Rightarrow 13 \text{ جمله منفی دارد.}$$

شمعی به طول ۲۰ سانتی متر پس از روشن شدن، در هر ۳ دقیقه $\frac{2}{3}$ میلی متر کوتاه می شود. در چندمین دقیقه، طول شمع به $\frac{15}{4}$ سانتی متر می رسد؟

- گزینه «۱» ۲۰ گزینه «۲» ۲۱ گزینه «۳» ۶۰ گزینه «۴» ۶۳

پاسخ: بعد از ۳ دقیقه $\frac{2}{3}$ میلی متر از طول شمع کاسته می شود، پس طول شمع تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۲۰ cm و قدرنسبت $-\frac{2}{3}$ mm می دهد.

$$a_1 = 20 \text{ cm} = 200 \text{ mm}, \quad d = -\frac{2}{3} \text{ mm} \quad \text{و} \quad a_n = 15/4 \text{ cm} = 154 \text{ mm}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 154 = 200 + (n-1) \times (-\frac{2}{3}) \Rightarrow n = \frac{46}{2/3} + 1 = 21 \Rightarrow \text{زمان مورد نیاز} = (21-1) \times 3 = 60 \text{ دقیقه}$$

یعنی پس از گذشت ۶۰ دقیقه طول شمع به $\frac{15}{4}$ سانتی متر می رسد. (توجه کنید که برای $a_1 = 20 \text{ cm}$ هنوز زمانی سپری نشده است و پس از گذشت ۳ دقیقه اول طول شمع به a_2 می رسد و ...)

تعیین تعداد جملات یک دنباله حسابی

اگر a و b به ترتیب جملات اول و آخر یک دنباله حسابی با قدرنسبت d باشند، آنگاه تعداد جملات این دنباله از رابطه زیر به دست می آید:

$$n = \frac{b-a}{d} + 1$$

چند عدد سه رقمی طبیعی و بخش پذیر بر ۱۳ وجود دارد؟

- گزینه «۱» ۷۹ گزینه «۲» ۷۸ گزینه «۳» ۶۸ گزینه «۴» ۶۹

پاسخ: اولین عدد سه رقمی طبیعی و بخش پذیر بر ۱۳، عدد ۱۰۴ و آخرین آن ۹۸۸ می باشد، پس اعداد سه رقمی طبیعی بخش پذیر بر ۱۳، یک دنباله حسابی

$$n = \frac{988-104}{13} + 1 = 68 + 1 = 69 \quad \text{با قدرنسبت ۱۳ و جمله اول ۱۰۴ و جمله آخر ۹۸۸ تشکیل می دهند، بنابراین تعداد آن ها برابر است با:}$$

درج n واسطه حسابی بین دو عدد

برای درج n واسطه حسابی بین دو عدد a و b ، می توان قدرنسبت دنباله حاصل را از رابطه مقابل به دست آورد:

$$d = \frac{b-a}{n+1}$$

توجه با استفاده از رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ نیز می توان مسائل مربوط به واسطه های حسابی را حل کرد. به عنوان مثال، اگر بخواهیم بین دو عدد a و b ،

۵ واسطه حسابی درج کنیم، آنگاه a را جمله اول و b را جمله هفتم در نظر می گیریم و از رابطه $a_7 = a_1 + 6d$ می توان d را محاسبه می کنیم.

بین دو عدد ۳ و ۶۵، هفده واسطه حسابی درج می کنیم. مجموع ۳ واسطه وسط کدام است؟

- گزینه «۱» ۱۰۲ گزینه «۲» ۶۸ گزینه «۳» ۳۴ گزینه «۴» ۱۳۶

پاسخ: روش اول: $a = 3, b = 65, n = 17$ ، بنابراین با استفاده از رابطه $d = \frac{b-a}{n+1}$ داریم:

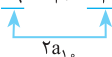
در مجموع ۱۹ جمله داریم، پس جمله وسط، جمله دهم است، در نتیجه:

$$\text{مجموع سه واسطه وسط} = a_9 + a_{10} + a_{11} = (a + 8d) + (a + 9d) + (a + 10d) = 3a + 27d = 3 \times 3 + 27 \times \frac{31}{9} = 9 + 93 = 102$$

روش دوم: می دانیم جمله وسط، دو برابر مجموع جملات طرفین است، پس:

$$2a_{10} = a + b \Rightarrow 2a_{10} = 3 + 65 \Rightarrow a_{10} = 34$$

$$\text{مجموع سه واسطه وسط} = a_9 + a_{10} + a_{11} = a_{10} + 2a_{10} = 3a_{10} = 3 \times 34 = 102$$



به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ محور x ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند؟

- گزینه «۱» (۱) $m > 1$ یا $m < -2$ (۲) $-2 < m < 1$ (۳) فقط $m < -2$ (۴) فقط $m > 1$

پاسخ: باید علامت ریشه‌ها متفاوت باشد، یعنی $\frac{c}{a} < 0$ که در این صورت $\Delta > 0$ می‌باشد.

به ازای کدام مقدار a ، معادله درجه دوم $x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$ دارای دو ریشه مثبت است؟

- گزینه «۴» (۱) $-2 < a < 2$ (۲) $2 < a < 5$ (۳) $2 < a < 14$ (۴) $5 < a < 14$

پاسخ: برای اینکه معادله درجه دوم، دو ریشه مثبت داشته باشد، باید $\Delta > 0$ و حاصل ضرب و حاصل جمع ریشه‌ها نیز مثبت باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} P = \frac{14-a}{1} > 0 \Rightarrow a < 14 & (1) \\ S = \frac{2a-4}{1} > 0 \Rightarrow a > 2 & (2) \\ \Delta = 4(a-2)^2 - 4(14-a) > 0 \Rightarrow 4(a^2 - 4a + 4 - 14 + a) > 0 \\ \Rightarrow 4(a^2 - 3a - 10) > 0 \Rightarrow (a-5)(a+2) > 0 \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 5 & (3) \end{cases} \Rightarrow (1) \cap (2) \cap (3): 5 < a < 14$$

اگر معادله $x^2 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0$ دارای ۴ ریشه حقیقی متمایز باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

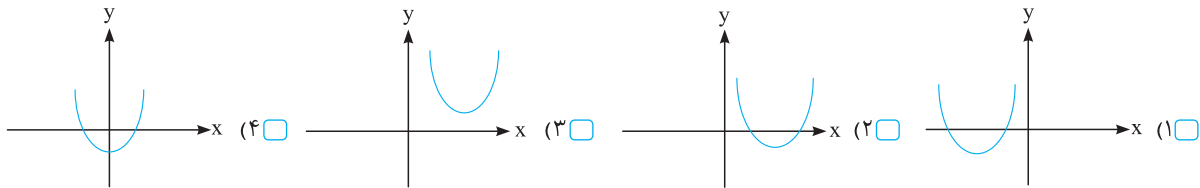
- گزینه «۲» (۱) $m < -4$ (۲) $m > 4$ (۳) $-4 < m < 4$ (۴) $4 < m < 9$

پاسخ: با تغییر متغیر $x^2 = t$ به یک معادله درجه دوم می‌رسیم. معادله درجه دوم حاصل باید دو ریشه مثبت داشته باشد تا معادله درجه چهارم، چهار ریشه حقیقی داشته باشد:

$$\begin{cases} t_1 t_2 = \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow m + 5 > 0 \Rightarrow m > -5 & (I) \\ t_1 + t_2 = \frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow m + 2 > 0 \Rightarrow m > -2 & (II) \\ \Delta = (m+2)^2 - 4(m+5) > 0 \Rightarrow m^2 - 16 > 0 \Rightarrow m > 4 \text{ یا } m < -4 & (III) \end{cases} \Rightarrow (I) \cap (II) \cap (III) = \{m > 4\}$$

یادآوری اگر بخواهیم معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دو ریشه مثبت داشته باشد، باید $\Delta > 0$ ، $S = \frac{-b}{a} > 0$ و $P = \frac{c}{a} > 0$ باشند.

در کدام یک از نمودارهای زیر، $\Delta > 0$ ، $P > 0$ و $S < 0$ می‌باشد؟



پاسخ: $\Delta > 0$ یعنی معادله دو ریشه دارد، پس گزینه (۳) نادرست است. از طرفی ضرب ریشه‌ها مثبت است، پس هر دو ریشه مثبت یا هر دو منفی‌اند، بنابراین گزینه (۴) حذف می‌شود. اما مجموع ریشه‌ها منفی است، در نتیجه هر دو ریشه منفی‌اند و گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

تعیین معادله درجه دوم به کمک ریشه‌ها

الف) اگر یکی از ریشه‌ها معلوم باشد، کافی است آن را به توان دو برسانیم.

مثال آموزشی

معادله درجه دومی با ضرایب گویا بنویسید که یکی از ریشه‌های آن $5 + \sqrt{3}$ باشد.

طرفین به توان ۲ $x = 5 + \sqrt{3} \Rightarrow x - 5 = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (x-5)^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow x^2 - 10x + 22 = 0$

پاسخ

ب) اگر هر دو ریشه معادله (α و β) معلوم باشند، ابتدا $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ را به دست می‌آوریم و از رابطه $x^2 - Sx + P = 0$ ، معادله درجه دوم را می‌نویسیم. در ضمن می‌توانیم معادله را به صورت $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ بنویسیم.

اگر u, v و a سه عدد حقیقی باشند، روابط زیر همواره برقرار است:

- ۱. $u = v \Rightarrow |u| = |v|$
- ۲. $|u| = |v| \Rightarrow u = \pm v$
- ۳. $|a| = |-a| \Rightarrow |u - v| = |v - u|$
- ۴. $|u \cdot v| = |u| \cdot |v|$
- ۵. $\left| \frac{u}{v} \right| = \frac{|u|}{|v|} \quad (v \neq 0)$
- ۶. نامساوی مثلث: $|u + v| \leq |u| + |v|$
- ۷. $|u - v| \geq |u| - |v|$
- ۸. $|u - v| \leq |u| + |v|$
- ۹. $||u| - |v|| \leq |u - v|$
- ۱۰. $\sqrt{u^2} = |u|$; $|u|^2 = u^2$
- ۱۱. $|u| = a \Leftrightarrow u = \pm a$; $a > 0$
- ۱۲. $|u| < a \Leftrightarrow -a < u < a$; $a > 0$
- ۱۳. $|u| > a \Leftrightarrow u < -a$ یا $u > a$; $a > 0$

۱۱۶ اگر x عددی حقیقی باشد، کدام گزینه همواره درست است؟

- ۱. $|x - 1| - |2x + 3| \geq |x + 4|$
- ۲. $|x - 1| - |2x + 3| \geq |3x + 2|$
- ۳. $|x - 1| + |2x + 3| \geq |x + 4|$
- ۴. $|x - 1| + |2x + 3| \geq |3x - 4|$

پاسخ: روش اول: فرض کنیم $u = x - 1$ و $v = 2x + 3$ ، می‌دانیم $|u| - |v| \leq |u - v|$ پس گزینه (۱) نادرست است. همچنین $|u| - |v| \leq |u - v|$ ، در نتیجه گزینه (۲) نادرست است. از طرفی $|u| + |v| \geq |u - v|$ پس گزینه (۳) درست است. دقت کنید که گزینه (۴) به ازای $x = -1$ نادرست است.
روش دوم: با استفاده از عددگذاری، گزینه‌های نادرست را رد می‌کنیم. گزینه‌های (۱) و (۲) به ازای $x = 0$ برقرار نیستند و گزینه (۴) به ازای $x = -1$ نادرست است، بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۱۱۷ مجموعه جواب نامعادله $|x - 1| - 2 < 3$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱. (۱)
- ۲. (۲)
- ۳. (۳)
- ۴. (۴) بی‌شمار

پاسخ: می‌دانیم اگر $a > 0$ ، آن‌گاه $|u| < a \Leftrightarrow -a < u < a$ ، بنابراین داریم:
 همواره برقرار است. $|x - 1| > -1 \Rightarrow |x - 1| < 5 \Rightarrow -1 < x - 1 < 5 \Rightarrow -2 < x < 6 \Rightarrow -1 < x < 6$
 تعداد جواب‌های صحیح $= 6 - (-1) - 1 = 9$

۱۱۸ مجموعه جواب معادله $|x^2 + |x^2 - 3| = 3$ به صورت بازه $[a, b]$ است، $b - a$ کدام است؟

- ۱. $2\sqrt{3}$
- ۲. $3\sqrt{2}$
- ۳. (۳)
- ۴. (۴)

پاسخ: می‌دانیم اگر $|u| = -u$ ، آن‌گاه $u \leq 0$ ، بنابراین داریم:
 $x^2 + |x^2 - 3| = 3 \Rightarrow |x^2 - 3| = 3 - x^2 \Rightarrow x^2 - 3 = -(x^2 - 3)$
 $x^2 - 3 \leq 0 \Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \Rightarrow a = -\sqrt{3}, b = \sqrt{3} \Rightarrow b - a = \sqrt{3} - (-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

معادلات و نامعادلات قدر مطلق

روش کلی برای حل معادله یا نامعادله قدرمطلق، آن است که عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت کنیم و با در نظر گرفتن علامت آن در محدوده‌های مختلف، قدرمطلق را برداشته و معادله حاصل را ساده و در نهایت حل کنیم. دقت کنید که جواب‌هایی قابل قبول هستند که در شرایط اولیه (محدوده تعیین علامت) قرار داشته باشند.

- نکات:** ۱. برای حل معادله $|f(x)| = |g(x)|$ ، کافی است جواب‌های دو معادله $f(x) = g(x)$ و $f(x) = -g(x)$ را به دست آوریم.
 ۲. برای حل نامعادله $|f(x)| < |g(x)|$ ، می‌توان طرفین نامعادله را به توان ۲ رساند و سپس نامعادله $f^2(x) < g^2(x)$ را حل کرد.

تست آموزشی

مجموع ریشه‌های معادله $|2x^2 - 3x + 1| = |x^2 + x - 2|$ کدام است؟

- ۱. $\frac{17}{3}$
- ۲. $\frac{14}{3}$
- ۳. (۳)
- ۴. $\frac{17}{2}$

پاسخ: گزینه (۲)
 مجموع ضرایب صفر است. $f(x) = g(x) \Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = x^2 + x - 2 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = 3$
 مجموع ضرایب صفر است. $f(x) = -g(x) \Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = -x^2 - x + 2 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_3 = 1, x_4 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{3}$
 مجموع ریشه‌های معادله قدر مطلق $= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 3 + 1 - \frac{1}{3} = \frac{14}{3}$

(تقریبی داخل ۹۱)

۴ در تابع با ضابطه $b > 0$ ، $f(x) = a \cdot b^x$ داریم $f(0) = \frac{3}{4}$ و $f(-2) = \frac{3}{16}$ ، مقدار $f(\frac{3}{4})$ کدام است؟

- گزینه «۳» (۱) ۶ (۲) ۲۴ (۳) ۱۲ (۴) ۸

پاسخ:

$$f(0) = \frac{3}{4} \Rightarrow f(0) = a \cdot b^0 = a = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$f(-2) = a \cdot b^{-2} \Rightarrow \frac{3}{4} \times b^{-2} = \frac{3}{16} \Rightarrow b^{-2} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{1}{16} \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4 \xrightarrow{b > 0} b = 4$$

$$f(x) = \frac{3}{4} \times 4^x \Rightarrow f(\frac{3}{4}) = \frac{3}{4} \times (4)^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \times \sqrt[4]{4^3} = \frac{3}{4} \times 8 = 12$$

نکته اگر مجموعه‌ای m عضوی و B مجموعه‌ای n عضوی باشد، آن‌گاه n^m تابع مختلف از A به B می‌توان تعریف کرد.

۵ از مجموعه $A = \{a, b, c\}$ به مجموعه $B = \{d, e\}$ چند تابع وجود دارد؟

- گزینه «۳» (۱) ۵ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۶

پاسخ:

به ازای هر عضو از مجموعه A، دو انتخاب از مجموعه B وجود دارد، پس تعداد توابع از مجموعه A به مجموعه B برابر با $2 \times 2 \times 2 = 8$ است.

تساوی دو تابع

توابع f و g مساوی هستند هرگاه:

الف) $D_f = D_g$ ب) به ازای هر x از دامنه فوق داشته باشیم $f(x) = g(x)$

به عبارت دیگر دو تابع f و g مساوی هستند، هرگاه قبل از ساده کردن، دامنه یکسان و بعد از ساده کردن، ضابطه یکسان داشته باشند. به عنوان مثال دو تابع $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ و $g(x) = 1$ با هم برابرند زیرا اولاً $D_f = D_g = \mathbb{R}$ و ثانیاً به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ یعنی $f(x) = g(x)$ بنابراین f و g با هم برابرند.

توجه هنگامی که دو تابع با هم مساوی باشند، نمودارهای آن‌ها کاملاً برهم منطبق است.

مثال آموزشی

آیا توابع $f(x) = \frac{x-2}{x-2}$ و $g(x) = 1$ با هم برابرند؟

پاسخ:

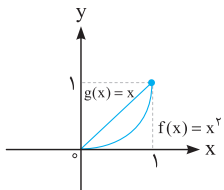
خیر، زیرا دامنه آن‌ها با هم مساوی نیست.

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\} \text{ و } D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

۶ کدام گزینه، نادرست است؟

- گزینه «۴» (۱) بُرد و هم دامنه تابع می‌توانند یکی باشند. (۲) بی‌شمار تابع با دامنه $(-1, 1)$ وجود دارد. (۳) برد تابع، زیرمجموعه‌ای از هم دامنه تابع است. (۴) اگر دامنه دو تابع با هم برابر و برد آن‌ها هم برابر باشند، دو تابع برابرند.

پاسخ: به عنوان مثال نقض گزینه (۴)، نمودار دو تابع f و g با دامنه و برد یکسان رسم شده است ولی دو تابع برابر نیستند.



۷ برای تابع $f(x) = x^2$ ، کدام یک از نمایش‌های زیر قابل قبول نیست؟

- گزینه «۴» (۱) $f: [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \rightarrow [0, \frac{1}{4}]$ (۲) $f: [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \rightarrow [0, +\infty)$ (۳) $f: [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \rightarrow [0, +\infty)$ (۴) $f: [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$
- همچنین در این بخش، دو تابع $f(x) = x\sqrt{x^2}$ و $g(x) = x^2$ در نظر گرفته شده‌اند.

پاسخ: در واقع باید تابعی را انتخاب کنیم که با تابع داده شده مساوی نباشد. در گزینه (۴) داریم: $f(x) = x\sqrt{x^2} = x|x| = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$ پس برای x های منفی، گزینه (۴) با تابع داده شده مساوی نیست.

دقت کنید که هم دامنه تابع را می‌توان هر مجموعه دلخواهی شامل برد تابع در نظر گرفت. در تابع $f(x) = x^2$ ، اگر $D_f = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ باشد، آن‌گاه $R_f = [0, \frac{1}{4}]$ است. بنابراین هم دامنه تابع را می‌توان هر مجموعه‌ای شامل بازه $[0, \frac{1}{4}]$ نیز در نظر گرفت. پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) نمایش‌های دیگری از تابع داده شده هستند. در گزینه (۳) نیز $f(x) = x\sqrt{x^2} = xx = x^2$ می‌باشد.

توجه برای انجام اعمال جبری روی توابعی که به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب می‌باشند، کافی است مولفه‌های اول مشترک زوج‌های مرتب را در نظر بگیریم و عملیات مورد نظر را بر روی مولفه‌های دوم این زوج مرتب‌ها انجام دهیم. در مورد تقسیم، اگر مخرج کسر در مولفه دوم صفر شود، آن زوج مرتب را حذف می‌کنیم.

مثال آموزشی

توابع $f = \{(1, 2), (-1, 0), (3, -1), (0, 3), (2, 4)\}$ و $g = \{(1, 1), (0, -1), (3, 0), (5, 3)\}$ مفروض‌اند. توابع $-3f$ ، g^2 ، $f + g$ ، $f \cdot g$ ، $\frac{1}{f}$ و $\frac{f}{g}$ را مشخص کنید.

پاسخ

برای به دست آوردن تابع $-3f$ ، طول نقاط تابع f را تغییر نمی‌دهیم ولی عرض آن‌ها را در -3 ضرب می‌کنیم:

$$D_{-3f} = D_f = \{1, -1, 3, 0, 2\} \Rightarrow -3f = \{(1, -6), (-1, 0), (3, 3), (0, -9), (2, -12)\}$$

برای تعیین تابع g^2 کافی است عرض نقاط تابع g را به توان ۲ برسانیم:

$$D_{g^2} = D_g = \{1, 0, 3, 5\} \Rightarrow g^2 = \{(1, 1), (0, 1), (3, 0), (5, 9)\}$$

برای تعیین $f + g$ کافی است عرض نقاطی که طول‌های مساوی دارند را با هم جمع کنیم:

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{0, 1, 3\} \Rightarrow f + g = \{(0, 3-1), (1, 2+1), (3, -1+0)\} = \{(0, 2), (1, 3), (3, -1)\}$$

برای تعیین $f \cdot g$ کافی است عرض نقاطی از f و g که طول‌های مساوی دارند را در هم ضرب کنیم:

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = \{1, 3, 0\} \Rightarrow f \cdot g = \{(1, 2), (3, 0), (0, -3)\}$$

برای تعیین تابع $\frac{1}{f}$ ، کافی است عرض نقاط متعلق به دامنه f (جز $x = -1$) را معکوس کنیم:

$$D_{\frac{1}{f}} = D_f - \{x \mid f(x) = 0\} = \{1, -1, 3, 0, 2\} - \{-1\} = \{1, 3, 0, 2\} \Rightarrow \frac{1}{f} = \{(1, \frac{1}{2}), (3, -1), (0, \frac{1}{3}), (2, \frac{1}{4})\}$$

برای تعیین تابع $\frac{f}{g}$ ، کافی است عرض نقاطی از f و g که طول‌های مساوی دارند را بر هم تقسیم کنیم (به غیر از نقاطی از g که به ازای آن‌ها $g = 0$ می‌باشد):

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \{1, 3, 0\} - \{3\} = \{1, 0\} \Rightarrow \frac{f}{g} = \{(1, \frac{2}{1}), (0, \frac{3}{-1})\} = \{(1, 2), (0, -3)\}$$

۹۱ اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ باشد، مقدار $(2f-g)(3)$ کدام است؟

- گزینه «۱» ۱ - ۲ صفر ۳ ۴

پاسخ:

$$(2f-g)(3) = 2f(3) - g(3) = 2\sqrt{3+1} - \frac{3+1}{3-2} = 4 - 4 = 0$$

۹۲ اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ و $g = \{(1, 5), (2, 6), (3, 0)\}$ ، آن‌گاه تابع $\frac{2f}{g}$ کدام است؟

- گزینه «۴» $\{(2, \frac{2}{3})\}$ $\{(1, \frac{4}{5}), (3, 1)\}$ $\{(1, \frac{4}{5}), (2, \frac{1}{2})\}$ $\{(2, 1), (1, \frac{4}{5})\}$

پاسخ: ابتدا دامنه $\frac{2f}{g}$ را تعیین می‌کنیم:

$$D_{\frac{2f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \{1, 2, 3\} - \{3\} = \{1, 2\}$$

حال داریم:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{2f}{g}\right)(1) &= \frac{2f(1)}{g(1)} = \frac{2 \times 2}{5} = \frac{4}{5} \\ \left(\frac{2f}{g}\right)(2) &= \frac{2f(2)}{g(2)} = \frac{2 \times 3}{6} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2f}{g} = \left\{ \left(1, \frac{4}{5}\right), (2, 1) \right\}$$

۹۳ اگر $f(x) = mx + 3$ و $g(x) = (1 - 2m^2)x - 4$ ، به ازای کدام مقدار m ، رابطه $(f^2 - g)(-2) = 18$ برقرار است؟

- گزینه «۱» $-\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

پاسخ:

$$f(x) = mx + 3 \Rightarrow f(-2) = -2m + 3$$

ابتدا (-2) و (-2) را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = (1 - 2m^2)x - 4 \Rightarrow g(-2) = (1 - 2m^2)(-2) - 4 = 4m^2 - 6$$

حال داریم:

$$(f^2 - g)(-2) = (f(-2))^2 - g(-2) = (-2m + 3)^2 - (4m^2 - 6) = 4m^2 - 12m + 9 - 4m^2 + 6 = 18 \Rightarrow -12m = 3 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$$

جزء صحیح لگاریتم اعشاری:

حالت اول: اگر $a > 1$ ، آن‌گاه جزء صحیح لگاریتم a در پایه ۱۰ یک واحد از تعداد ارقام صحیح a کمتر است. به عنوان مثال: $[\log 978] = 2$ یا $[\log 2457/92] = 3$ بنابراین اگر a عددی طبیعی باشد و $[\log a] = n$ ، آن‌گاه a عددی $n+1$ رقمی است. به عنوان مثال اگر $[\log a] = 14$ ، آن‌گاه a عددی ۱۵ رقمی است.

حالت دوم: اگر $0 < a < 1$ ، آن‌گاه جزء صحیح لگاریتم a در پایه ۱۰ برابر است با قرینه تعداد صفرهای قبل و بعد از ممیز a می‌باشد. به عنوان مثال:

$$[\log 0.00097] = -4 \quad \text{یا} \quad [\log 0.4009] = -1$$

بنابراین اگر $[\log a] = -n$ باشد، آن‌گاه تعداد صفرهای بعد از ممیز و پشت سر هم در عدد a برابر است با $n-1$. به عنوان مثال اگر $[\log a] = -7$ آن‌گاه عدد a بعد از ممیز و پشت سر هم $6 = 7 - 1$ تا صفر دارد.

تست آموزشی

مقدار عددی $[\log 57/359] + [\log 0.00032]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) -۶ (۲) -۵ (۳) -۴ (۴) -۳

پاسخ: گزینه «۳»: عدد $57/359$ دو رقم صحیح دارد، پس $[\log 57/359] = 1$. همچنین عدد 0.00032 قبل و بعد از ممیز و پشت سر هم ۵ صفر دارد، پس:

$$[\log 0.00032] = -4 - 1 = -5$$

$$[\log 57/359] + [\log 0.00032] = 1 + (-5) = -4$$

بنابراین:

تست آموزشی

جزء صحیح $\log_{0.2} 815$ کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) -۶ (۳) -۴ (۴) -۳

پاسخ: گزینه «۱»: $0.2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ ، $5^4 < 815 < 5^5 \Rightarrow (\frac{1}{5})^{-4} < 815 < (\frac{1}{5})^{-5} \Rightarrow (0.2)^{-4} < 815 < (0.2)^{-5}$

از طرفین لگاریتم در پایه 0.2 می‌گیریم، چون پایه لگاریتم عددی بین صفر و یک است، بنابراین جهت نامساوی عوض می‌شود:

$$\Rightarrow \log_{0.2} (0.2)^{-5} < \log_{0.2} 815 < \log_{0.2} (0.2)^{-4} \Rightarrow -5 < \log_{0.2} 815 < -4 \Rightarrow [\log_{0.2} 815] = -5$$

مقدار $[\log_3 117]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۲

پاسخ: برای تعیین مقدار $[\log_3 117]$ ، ابتدا توان‌هایی متوالی طبیعی از عدد ۳ را می‌یابیم که ۱۱۷ بین آن‌ها باشد، سپس از طرفین، لگاریتم در پایه ۳ می‌گیریم.

واضح است که:

$$81 < 117 < 243 \Rightarrow 3^4 < 117 < 3^5 \Rightarrow \log_3 3^4 < \log_3 117 < \log_3 3^5 \Rightarrow 4 < \log_3 117 < 5 \Rightarrow [\log_3 117] = 4$$

مقدار عددی $[\log_{0.001} 1] + [\log_{0.25} 49]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) -۴ (۲) -۱۴ (۳) -۱۰ (۴) -۱۳

پاسخ: $0.001 = \frac{1}{1000}$ ، $2^{-10} < \frac{1}{1000} < 2^{-9} \Rightarrow \log_2 2^{-10} < \log_2 0.001 < \log_2 2^{-9} \Rightarrow -10 < \log_2 0.001 < -9 \Rightarrow [\log_2 0.001] = -10$

$$0.25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2 < 49 < (\frac{1}{2})^{-3} \Rightarrow (0.25)^{-2} < 49 < (0.25)^{-3} \Rightarrow \log_{0.25} (0.25)^{-2} < \log_{0.25} 49 < \log_{0.25} (0.25)^{-3}$$

$$\Rightarrow -3 < \log_{0.25} 49 < -2 \Rightarrow [\log_{0.25} 49] = -3$$

$$[\log_{0.001} 1] + [\log_{0.25} 49] = -10 - 3 = -13$$

بنابراین:

عدد 8^{200} چند رقمی است؟ ($\log 2 = 0.301$)

- (۱) ۳۰۰ (۲) ۳۰۱ (۳) ۱۸۰ (۴) ۱۸۱

$$8 = 2^3 \Rightarrow 8^{200} = 2^{600} \Rightarrow [\log 8^{200}] = [\log 2^{600}] = [600 \cdot \log 2] = [600 \times 0.301] = [180.6] = 180$$

پاسخ:

پس عدد 8^{200} دارای $180 + 1 = 181$ رقم است.

با استفاده از فرمول‌های بسط مجموع می‌توان روابط پرکاربرد زیر را پیدا کرد:

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{cases}$$

پس به خاطر بسپاریم:

۱) $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$

۲) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha \Rightarrow$

$$\begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \\ \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \end{cases}$$

۳) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

۴) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

مثال آموزشی

به کمک نسبت‌های مثلثاتی 3α حاصل $\cos 67/5^\circ$ را بیابید.

پاسخ

$$\cos 67/5^\circ = \cos 3(22/5^\circ)$$

ابتدا به کمک رابطه $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ مقدار $\cos 22/5^\circ$ را به دست می‌آوریم:

$$\cos^2 22/5^\circ = \frac{1 + \cos 44/5^\circ}{2} = \frac{1 + \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 67/5^\circ = 4 \cos^3(22/5^\circ) - 3 \cos(22/5^\circ) = 4 \left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \right)^3 - 3 \left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \right) = 4 \times \left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \right) - 3 \left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \right)$$

$$= 4 \times \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \right) - 3 \left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} (2 + \sqrt{2} - 3) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} (\sqrt{2} - 1)$$

۵۳ اگر $\tan 3\alpha = \sqrt{5}$ باشد، حاصل $\frac{1 + \cos 6\alpha}{1 - \cos 6\alpha}$ برابر با کدام است؟

۴) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

۳) $\frac{1}{5}$

۲) ۵

۱) ۱

پاسخ: می‌دانیم $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$ و $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$ ، پس:

$$\frac{1 + \cos 6\alpha}{1 - \cos 6\alpha} = \frac{2 \cos^2 3\alpha}{2 \sin^2 3\alpha} = \cot^2 3\alpha = \frac{1}{\tan^2 3\alpha} = \frac{1}{5}$$

روابط تکمیلی 2α و 3α

۱) $\cot \alpha + \tan \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

۲) $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$

۳) $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

۴) $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

۵) $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

۶) $\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$

۷) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$

۸) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha$

۵۴ فرض کنید $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ و α در ناحیه دوم باشد، آنگاه $\tan \alpha$ کدام است؟

۴) $\frac{2\sqrt{21}}{21}$

۳) $-\frac{2\sqrt{21}}{21}$

۲) $\frac{\sqrt{21}}{21}$

۱) $-\frac{\sqrt{21}}{21}$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{21}}{5}$$

پاسخ:

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2}{5}}{-\frac{\sqrt{21}}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{21}} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$$

انتهای کمان α در ناحیه دوم قرار دارد، پس داریم:

در حل معادلات مثلثاتی، حالت‌های خاصی وجود دارد که با دانستن آن‌ها، می‌توان سریع‌تر به جواب رسید. این معادلات خاص و پاسخ‌های آن‌ها عبارتند از: ($k \in \mathbb{Z}$):

۱) $\sin u = 0 \Rightarrow u = k\pi$

۲) $\cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$

۳) $\sin u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

۴) $\sin u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

۵) $\cos u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi$

۶) $\cos u = -1 \Rightarrow u = (2k+1)\pi$

۷)
$$\begin{cases} \sin^2 u = \sin^2 v \\ \cos^2 u = \cos^2 v \\ \tan^2 u = \tan^2 v \\ \cot^2 u = \cot^2 v \end{cases} \Rightarrow u = k\pi \pm v$$

مثال آموزشی

جواب‌های کلی هر یک از معادلات زیر را به دست آورید.

الف) $\sin x \cdot \cos x = 0$

ب) $\cos^2 x + \cos x = 0$

پاسخ: می‌دانیم $k \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{k}{2} \sin 2\alpha$ پس:

الف) $\sin x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = k\pi \xrightarrow{+2} x = \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

ب) $\cos^2 x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \\ \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = (2k+1)\pi; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

۱۲۷ جواب کلی معادله $\tan(2x+1) = 0$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{2} = \frac{1}{2}$ (۴)

۲) $\frac{k\pi}{2} + 1$ (۳)

۳) $\frac{k\pi}{2} - \frac{1}{2}$ (۲)

۴) $\frac{k\pi}{2} - 1$ (۱)

پاسخ: گزینه «۳»

$\tan(2x+1) = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x+1 = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi - 1 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{1}{2}; k \in \mathbb{Z}$

۱۲۸ جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \sin^2 x - 2 \sin x + \cos^2 x = 0$ کدام است؟

۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ (۴)

۲) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۳)

۳) $2k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۲)

۴) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه «۳»

$2 \sin^2 x - 2 \sin x + 1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow \sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

(ریاضی دافل ۹۳)

۱۲۹ جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2 \cos^2 x$ کدام است؟

۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴)

۲) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳)

۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۲)

۴) $\frac{k\pi}{2}$ (۱)

پاسخ: می‌دانیم $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ داریم:

$\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2 \cos^2 x \Rightarrow \sin 3x = 2 \sin x \cos x \cos x \Rightarrow \sin 3x = \sin 2x \cos x \Rightarrow \sin(2x+x) = \sin 2x \cos x$

$\Rightarrow \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = \sin 2x \cos x \Rightarrow \cos 2x \sin x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \Rightarrow \text{چون مخرج کسر است} \\ \cos 2x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

(ریاضی دافل ۹۵)

۱۳۰ مجموع تمام جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin^4 x = \sin^2 x - \cos^4 x$ در بازه $[0, \pi]$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{11\pi}{3}$ (۴)

۲) $\frac{5\pi}{2}$ (۳)

۳) $\frac{9\pi}{4}$ (۲)

۴) $\frac{7\pi}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه «۳»

$\sin^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) \Rightarrow \sin^4 x = (1)(-\cos 2x) \Rightarrow 2 \sin^2 x \cos^2 x = -\cos 2x \Rightarrow 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos 2x = 0$

درس دوم: روش‌های محاسبه حد

در این بخش به محاسبه حد توابع کسری مانند $\frac{f}{g}$ می‌پردازیم که حد صورت و مخرج آن‌ها در نقطه a ، هر دو برابر صفر است. $\frac{0}{0}$ را حالت مبهم و عمل پیدا کردن حد واقعی تابع را رفع ابهام می‌گویند.

برای رفع ابهام حالت مبهم $\frac{0}{0}$ روش‌های مختلفی وجود دارد که عبارتند از:

- ۱) قاعده هوییتال هم‌ارزی ۲) حذف عامل صفرکننده

روش اول: قاعده هوییتال: در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ چنانچه حاصل حد به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ شود و توابع f و g در یک همسایگی محذوف a مشتق پذیر باشند و به ازای هر x از این همسایگی محذوف، $g'(x) \neq 0$ باشد، آن‌گاه برای رفع ابهام، از صورت و مخرج مشتق می‌گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{قاعده هوییتال}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

توجه کنید که قاعده هوییتال، محدودیت تکرار ندارد. به عبارت دیگر تا وقتی که شرایط قاعده هوییتال برقرار باشد، می‌توان از آن استفاده کرد. همچنین لازم به ذکر است که معمولاً اگر زیررادیکال، صفر شود از قاعده هوییتال نمی‌توان استفاده کرد. در این حالت برای رفع ابهام از روش حذف عامل صفرکننده استفاده می‌کنیم.

مثال آموزشی

۱) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1}$ ۲) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

حدهای روبه‌رو را در صورت وجود محاسبه کنید.

پاسخ

۱) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{قاعده هوییتال}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3}{3x^2} = \frac{-1}{3}$

۲) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{هوییتال}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{هوییتال}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{هوییتال}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$

همان‌طور که در مثال آموزشی صفحه قبل دیده شد، قاعده هوییتال روشی بسیار سریع برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ می‌باشد اما در استفاده از آن باید از فرمول‌های مشتق استفاده کرد. بعضی از فرمول‌های مشتق که در هوییتال کاربرد زیادی دارند در زیر لیست شده‌اند. در فصل‌های بعد هم با فرمول‌های بیشتری آشنا می‌شوید. دقت کنید که مشتق f را با f' نمایش می‌دهیم.

ردیف	تابع	مشتق تابع	مثال
۱	$y = c$ (ثابت)	$y' = 0$	$y = -2 \Rightarrow y' = 0$
۲	$y = ax^n$	$y' = nax^{n-1}$	$y = 3x^5 \Rightarrow y' = 5 \times 3x^4 = 15x^4$
۳	$y = f(x) \pm g(x)$	$y' = f'(x) \pm g'(x)$	$y = x^4 + x^3 - x^2 \Rightarrow y' = 4x^3 + 3x^2 - 2x$
۴	$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$	$y = (x^2 - 1)(x^2 + 5x) \Rightarrow y' = (2x)(x^2 + 5x) + (2x + 5)(x^2 - 1)$
۵	$y = au^n$	$y' = nau^{n-1}$	$y = 3(x^2 + x - 4)^7 \Rightarrow y' = 7 \times 3 \times (2x + 1) + (x^2 + x - 4)^6$
۶	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ یا $y = \sqrt{3x-1} \Rightarrow y' = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$
۷	$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ یا $y = \sqrt[3]{3x+2} \Rightarrow y' = \frac{3}{3\sqrt[3]{(3x+2)^2}}$
۸	$y = \sin u$	$y' = u' \cdot \cos u$	$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$ یا $y = \sin 3x \Rightarrow y' = 3 \cos 3x$
۹	$y = \cos u$	$y' = -u' \cdot \sin u$	$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$ یا $y = \cos 5x \Rightarrow y' = -5 \sin 5x$
۱۰	$y = \tan u$	$y' = u'(1 + \tan^2 u)$	$y = \tan x \Rightarrow y' = 1 + \tan^2 x$ یا $y = \tan 7x \Rightarrow y' = 7(1 + \tan^2 7x)$
۱۱	$y = \cot u$	$y' = -u'(1 + \cot^2 u)$	$y = \cot x \Rightarrow y' = -(1 + \cot^2 x)$ یا $y = \cot 3x \Rightarrow y' = -3(1 + \cot^2 3x)$

تذکر قاعده هوییتال در کتاب درسی بیان نشده است، در نتیجه از این قاعده در امتحانات تشریحی نمی‌توانید استفاده کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \left[\cot \frac{\pi}{x+3} \right] + a & x > 1 \\ 2b + 1 & x = 1 \text{ اگر } 167 \\ \left[\log_{\frac{1}{2}} x \right] & x < 1 \end{cases}$$

گزینه «۱»

۱ (۴)

۳ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱) صفر

پاسخ:

$f(1) = 2b + 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\cot \frac{\pi}{x+3} \right] + a = \left[\cot \frac{\pi}{4^+} \right] + a = \left[\cot \left(\frac{\pi}{4} \right)^- \right] + a = [1^+] + a = 1 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \left[\log_{\frac{1}{2}} 1^- \right] = [0^+] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + a = 0 \Rightarrow a = -1 \\ 2b + 1 = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a - 4b = -1 + 2 = 1$$

حرف آخر همیشه تو کنکور از بحث پیوستگی تست میار و بیشتر وقتا این تست مربوط به پیوستگی در نقطه هست. بنابراین مثال‌های قبلی رو به بار دیگه هل کن 😞. به سادگی می‌تونی سؤال مربوط به این بحث رو تو کنکور جواب ببری 😊

پیوستگی در بازه

۱. پیوستگی بر بازه (a, b) : تابع f بر بازه باز (a, b) پیوسته است، هرگاه در هر نقطه (a, b) پیوسته باشد.

۲. پیوستگی بر بازه $[a, b]$: تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته است اگر:

الف. بر بازه باز (a, b) پیوسته باشد. **ب.** در $x = a$ پیوستگی راست داشته باشد: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

۳. پیوستگی بر بازه $(a, b]$: تابع f بر بازه $(a, b]$ پیوسته است اگر:

الف. بر بازه باز (a, b) پیوسته باشد. **ب.** در $x = b$ پیوستگی چپ داشته باشد: $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

۴. پیوستگی بر بازه $[a, b]$: تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته است اگر:

الف. بر بازه باز (a, b) پیوسته باشد. **ب.** در $x = a$ پیوستگی راست داشته باشد: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

ج. در $x = b$ پیوستگی چپ داشته باشد: $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

نکته تابع $y = [x]$ در نقاطی به طول صحیح ناپیوسته است (فقط پیوستگی راست دارد) و در سایر نقاط (نقاط غیر صحیح) پیوسته است.

مثال آموزشی

پیوستگی $f(x) = [x]$ را در $x = 2$ و $x = \sqrt{2}$ بررسی کنید.

پاسخ روش اول:

$$x = 2: \begin{cases} f(2) = [2] = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = [2^+] = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = [2^-] = 1 \end{cases} \quad x = \sqrt{2}: \begin{cases} f(\sqrt{2}) = [\sqrt{2}] = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} f(x) = [\sqrt{2}^+] = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} f(x) = [\sqrt{2}^-] = 1 \end{cases}$$

پس تابع در $x = \sqrt{2}$ پیوسته و در $x = 2$ ناپیوسته است (فقط پیوستگی راست دارد).

روش دوم: طبق نکته ذکر شده، چون $x = 2$ عددی صحیح است، پس تابع در این نقطه ناپیوسته و چون $x = \sqrt{2}$ عددی غیر صحیح است، پس تابع در این نقطه پیوسته است.

نکات ۱. تابع $y = [mx]$ در نقاطی که mx عددی صحیح شود ناپیوسته است. به عنوان مثال $y = [2x]$ در نقاطی به طول $\{0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots\}$ ناپیوسته است. $2x = k \Rightarrow x = \frac{k}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

۲. تابع با ضابطه $y = [\sqrt{x}]$ در نقاطی به طول $x = k^2$ $(k \in \mathbb{Z})$ یعنی نقاط $x = \{0, 1, 4, 9, \dots\}$ ناپیوسته است. (فقط پیوستگی راست دارد).

۳. توابعی به شکل $y = [ax^2 + bx + c]$ در نقاطی که داخل جزء صحیح عدد صحیح شود ناپیوسته‌اند، مگر این‌که نقطه داده شده طول \min تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد $(x = -\frac{b}{2a})$.

۷۵ خط به معادله $y = 3x - 2$ در نقطه $x_0 = 2$ بر منحنی پیوسته $y = f(x)$ مماس است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 4f(x)}{x - 2}$ کدام است؟ (ریاضی داتل ۹۵)

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: چون خط $y = 3x - 2$ در نقطه $x_0 = 2$ بر منحنی $y = f(x)$ مماس است، پس:

$$f(x_0) = 3x_0 - 2 \Rightarrow f(2) = 3(2) - 2 \Rightarrow f(2) = 4 \quad (I)$$

$$f'(x_0) = m_{\text{مماس}} \Rightarrow f'(2) = 3 \quad (II)$$

حال حاصل حد داده شده را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 4f(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)(f(x) - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (f(x) \times \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}) = f(2) \times f'(2) \stackrel{(I),(II)}{=} 4 \times 3 = 12$$

۷۶ خط به معادله $y = 3x - 5$ در نقطه $x = 2$ بر نمودار تابع $y = g(x)$ مماس است. اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2x - 2} = \frac{2}{3}$ باشد، $(fog)'(2)$ کدام است؟ (ریاضی قارچ ۹۸)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$y = 3x - 5 \stackrel{x=2}{=} 3(2) - 5 = 1 \Rightarrow g(2) = 1$$

پاسخ: خط $y = 3x - 5$ در نقطه $x = 2$ بر نمودار $y = g(x)$ مماس است؛ یعنی داریم:

از طرفی چون این دو نمودار در $x = 2$ بر هم مماس هستند پس در این نقطه شیب‌هایشان هم برابر است یعنی: $g'(2) = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2x - 2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2(x - 1)} = \frac{1}{3} f'(1) = \frac{2}{3} \Rightarrow f'(1) = \frac{4}{3}$$

همچنین طبق فرض مسئله داریم:

$$(fog)'(2) = g'(2) \times f'(g(2)) \stackrel{g(2)=1}{=} \stackrel{g'(2)=3}{=} g'(2) \times f'(1) = 3 \times \frac{4}{3} = 4 \quad \text{پس می‌توان نوشت:}$$

درس سوم: آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

آهنگ تغییر

آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه‌های $[x_1, x_2]$ و $[a, a+h]$ به صورت‌های زیر تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازه } [x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازه } [a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر: اگر f در نقطه a یا x_1 مشتق پذیر باشد، آن‌گاه آهنگ آنی یا آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در این نقطه برابر است با:

$$x = a \text{ در آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

$$x = x_1 \text{ در آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1)$$

در واقع آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع (وتر) و آهنگ لحظه‌ای تغییر با شیب خط مماس در آن نقطه، برابر است.

تست آموزشی

در تابع $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع f وقتی x از ۱ به ۴ تغییر می‌کند، برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x = a + 1$ می‌باشد. a کدام است؟

۲/۵ (۴)

۲/۲۵ (۳)

۱/۵ (۲)

۱/۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه «۱»؛ کافی است مقادیر به دست آمده از روابط مربوط به آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f را برابر هم قرار دهیم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه } [1, 4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{\sqrt{4} - \sqrt{1}}{3} = \frac{1}{3}$$

$$x = a + 1 \text{ در آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \stackrel{x=a+1}{=} \frac{1}{2\sqrt{a+1}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a+1}} = \frac{1}{3} \Rightarrow 2\sqrt{a+1} = 3 \Rightarrow \sqrt{a+1} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a + 1 = \frac{9}{4} \Rightarrow a = \frac{5}{4} = 1/25$$

نکته: برای محاسبه نرخ متوسط باروری و همچنین آهنگ متوسط رشد در مسائل کافیست همان آهنگ متوسط تغییر تابع را حساب کنیم.

در تابع درجه دوم آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه $[a, b]$ برابر است با آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه $x = \frac{a+b}{2}$.

تست آموزشی

مجموع دو عدد برابر ۸ می باشد. بزرگترین مقدار ممکن برای حاصل ضرب این دو عدد کدام است؟

۲۴ (۴)

۷ (۳)

۱۶ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ

گزینه «۲»: روش اول: طبق حالات خاص فوق، اگر دو عدد مثبت را x و y فرض کنیم، داریم $x + y = 8$ ، بنابراین حاصل ضرب آن‌ها وقتی ماکزیمم است که هر دو متغیر برابر $4 (x = y = 4)$ باشند، داریم:

بیشترین مقدار
 $x = y = 4 \implies x \cdot y = 4 \times 4 = 16$

روش دوم: x و y را دو عدد مثبتی در نظر می‌گیریم که مجموعشان ۸ است و $f(x)$ را تابع حاصل ضرب این دو عدد می‌نامیم. داریم:

$$\begin{cases} x + y = 8 \implies y = 8 - x \\ f(x) = x \cdot y = x(8 - x) = -x^2 + 8x \end{cases}$$

حال باید ماکزیمم مطلق تابع $f(x)$ را با استفاده از نقاط بحرانی بیابیم، داریم:

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \implies f'(x) = -2x + 8 = 0 \implies x = 4 \implies y = 4 \implies \max(f) = 4 \times 4 = 16 \\ f'(x) \neq 0 \implies \text{ناموجود} \end{cases}$$

تست آموزشی

مربع بیشترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیل که یک طرف آن رودخانه است، محصور نمود.

(ریاضی خارج ۹)

چند متر است؟

۹۸۸ (۴)

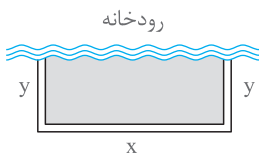
۹۷۸ (۳)

۹۶۸ (۲)

۹۵۸ (۱)

پاسخ

گزینه «۲»: طول مستطیل را x و عرض آن را y می‌گیریم، بنابراین مساحت مستطیل برابر است با:



$$S = xy$$

$$\text{رابطه کمکی} \quad x + 2y = 88$$

$$\implies x + 2y = 88 \xrightarrow{\text{طبق حالات خاص}} x = 2y = 44 \implies x = 44, y = 22 \implies S_{\max} = 44 \times 22 = 968$$

۲۹

می‌خواهیم از یک قطعه مقوای مربع شکل که طول هر ضلع آن a سانتی متر است، یک جعبه در باز (جعبه شیرینی) بسازیم. مطابق شکل از گوشه‌های آن مربعی به ضلع چند سانتی متر ببریم تا حجم جعبه بیشترین مقدار ممکن شود؟ ($a > 0$)

$\frac{a}{5}$ (۲)

$\frac{a}{4}$ (۱)

$\frac{a}{8}$ (۴)

$\frac{a}{6}$ (۳)

پاسخ

مطابق شکل پس از برش زدن مقوای مربع شکل، یک مکعب مستطیل (جعبه در باز) با اضلاع $(a - 2x)$ ، $(a - 2x)$ و x خواهیم داشت، بنابراین حجم مکعب مستطیل (جعبه) برابر با $V(x) = x(a - 2x)^2$ است، حال باید ماکزیمم تابع V را با استفاده از نقاط بحرانی، بیابیم:

$$V' = 0 \implies V' = (a - 2x)^2 - 4x(a - 2x) = 0 \implies (a - 2x)(a - 6x) = 0 \implies \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ x = \frac{a}{6} \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها، $x = \frac{a}{6}$ قابل قبول می‌باشد. توجه کنید که به ازای $x = \frac{a}{3}$ حجم جعبه \min می‌شود. (چرا؟)

مساحت بزرگترین مستطیل محاطی که درون دایره‌ای به شعاع ۲ متر قرار می‌گیرد، کدام است؟

۱۲ (۴)

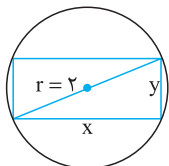
۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

پاسخ

با توجه به شکل مقابل و رابطه فیثاغورس داریم:



$$x^2 + y^2 = 16$$

حال می‌خواهیم مساحت مستطیل \max شود، داریم:

$$S = xy = x\sqrt{16 - x^2} \implies S' = \sqrt{16 - x^2} + \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}}(x) \implies S' = \frac{16 - x^2 - x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{16 - 2x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \implies 16 - 2x^2 = 0$$

$$\implies 2x^2 = 16 \implies x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \implies S = x\sqrt{16 - x^2} = 8$$

$$S'(x): \text{ناموجود} \implies \sqrt{16 - x^2} = 0 \implies x^2 = 16 \implies x = \pm 4$$

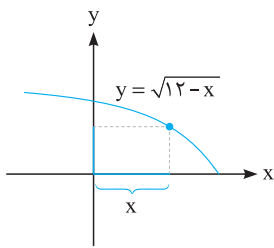
توضیح بیشتر: به ازای $x = 4$ مساحت مستطیل صفر می‌شود (مستطیل تشکیل نمی‌شود) و می‌دانیم که $x = -4$ نمی‌تواند طول یک مستطیل باشد.

بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادله $y = \sqrt{12-x}$ ، در ناحیه اول واقع شود، کدام است؟

(تهرنی دافل ۹۸)

گزینه «۳»

- ۱۸ (۴) ۱۶ (۳) $8\sqrt{3}$ (۲) $8\sqrt{2}$ (۱)



پاسخ: مطابق شکل، مساحت مستطیلی که دو ضلع آن روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن روی منحنی به معادله $y = \sqrt{12-x}$ است، از رابطه $S = x\sqrt{12-x}$ به دست می‌آید. حالا برای پیدا کردن بیشترین مساحت ممکن، باید مقادیر S را در نقاط بحرانی آن بیابیم. داریم:

$$S' = \sqrt{12-x} + \frac{-1}{2\sqrt{12-x}} \times x = \frac{2(12-x) - x}{2\sqrt{12-x}} = \frac{24-3x}{2\sqrt{12-x}} \Rightarrow \begin{cases} 24-3x=0 \Rightarrow x=8 \\ 2\sqrt{12-x}=0 \Rightarrow x=12 \end{cases}$$

و در نهایت بیشترین مقدار مساحت به ازای یکی از مقادیر x به دست می‌آید. داریم:

$$S = x\sqrt{12-x} \Rightarrow \begin{cases} x=12: S=0 \\ x=8: S=8\sqrt{12-8} = 8 \times 2 = 16 \end{cases}$$

حرف آخر یکی از کاربردهای مهم مشتق تو ریاضیات، فیزیک و علوم مهندسی بهشت وزین و شیرینه بهینه‌سازی است! بنابراین تنوع سؤالات این بهشت فیزیکی زیاده 😞. الگوریتم حل سؤالات بهینه‌سازی تکراریه اما باید فیزیکی سؤال حل کنی تا بتونی سؤالات بهینه‌سازی آزمون‌های آزمایشی و کنگورهای سراسری رو پاسخ ببری 😊. تو می‌تونی؛ تلاش کن، تلاش، تلاش.

تشخیص صعودی یا نزولی بودن یک تابع

قضیه: فرض کنیم تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته و روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد. در این صورت:

الف: اگر به ازای هر x متعلق به بازه (a, b) ، $f'(x) > 0$ ، آن‌گاه تابع f روی بازه $[a, b]$ صعودی اکید است.

ب: اگر به ازای هر x عضو بازه (a, b) ، $f'(x) < 0$ ، آن‌گاه تابع f روی بازه $[a, b]$ نزولی اکید است.

ج: اگر به ازای هر x متعلق به بازه (a, b) ، $f'(x) = 0$ ، آن‌گاه تابع f روی بازه $[a, b]$ یک تابع ثابت است.

نکته با توجه به قضیه فوق، اگر f تابعی مشتق پذیر (مثل توابع چند جمله‌ای: $y = \sin(ax)$ ، $y = \cos(ax)$ و ...) باشد، آن‌گاه برای تعیین بازه‌هایی که تابع f در آن‌ها صعودی یا نزولی است، (به بیان دیگر برای تعیین جهت تغییرات f) باید f' را تعیین علامت کنیم.

مثال آموزشی

۱) تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ در چه بازه‌ای صعودی اکید و در چه بازه‌ای نزولی اکید است؟

پاسخ چون f تابعی چند جمله‌ای است، پس روی \mathbb{R} پیوسته و مشتق پذیر است، بنابراین برای تعیین صعودی یا نزولی بودن آن، کافی است f' را تعیین علامت کنیم:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = 3 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & & 1 & 3 \\ \hline f' & + & - & + \end{array}$$

پس f در بازه‌های $(-\infty, 1]$ و $[3, +\infty)$ صعودی اکید و در بازه $[1, 3]$ نزولی اکید است.

۲) جهت تغییرات تابع f با ضابطه $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ را تعیین کنید.

پاسخ با توجه به اینکه تابع f روی \mathbb{R} پیوسته و مشتق پذیر است، کافی است f' را تعیین علامت کنیم:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & & -1 & 1 \\ \hline f' & - & + & - \end{array}$$

چون f' در بازه‌های $(-\infty, -1)$ و $(0, 1)$ منفی است، پس f بر بازه‌های $(-\infty, -1]$ و $[0, 1]$ نزولی اکید است و چون f' در بازه‌های $(-1, 0)$ و $(1, +\infty)$ مثبت است، پس f بر بازه‌های $[-1, 0]$ و $[1, +\infty)$ صعودی اکید است.

۳۶ تابع f با ضابطه $f(x) = \sin^2 x + \sin x$ در کدام یک از فواصل زیر صعودی است؟

- $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ (۴) $[0, \pi]$ (۳) $[-\frac{\pi}{3}, 0]$ (۲) $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ (۱)

گزینه «۱»

پاسخ: چون f در \mathbb{R} پیوسته و مشتق پذیر است، بنابراین کافی است f' را تعیین علامت کنیم: $f'(x) = 2\sin x \cos x + \cos x = \cos x(2\sin x + 1)$

با توجه به گزینه‌ها در بازه $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ عبارت‌های $\cos x$ و $2\sin x + 1$ مثبت هستند، در نتیجه $f' > 0$ می‌باشد و بنابراین f صعودی است.

۱۲. تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x-[x]}{x^3-x-6} & ; x \neq 2 \\ a & ; x = 2 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در بازه $[2, 3]$ پیوسته است؟

- (۱) $\frac{1}{11}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۱۳. حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3-x} - 1}$ با $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + |x-2|}{2x + \sqrt{x^2+5}}$ برابر است، مقدار a کدام است؟

- (۱) -112 (۲) -111 (۳) -113 (۴) 113

(ریاضی دافل ۹۷)

۱۴. اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - [x] + |x|}$ باشد، $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۱۵. مشتق تابع $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ به ازای $x = \frac{\pi}{8}$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) 1

۱۶. اگر $f(x) = \sqrt{x}g(x)$ ، $f(9) = 12$ و $g'(9) = 2$ باشد، $f'(9)$ کدام است؟

- (۱) 8 (۲) 6 (۳) $\frac{13}{2}$ (۴) $\frac{9}{2}$

۱۷. اگر $A(1, -2)$ نقطه عطف منحنی $y = ax^3 + bx^2 - 3x - 1$ باشد، طول نقطه مینیمم نسبی آن کدام است؟

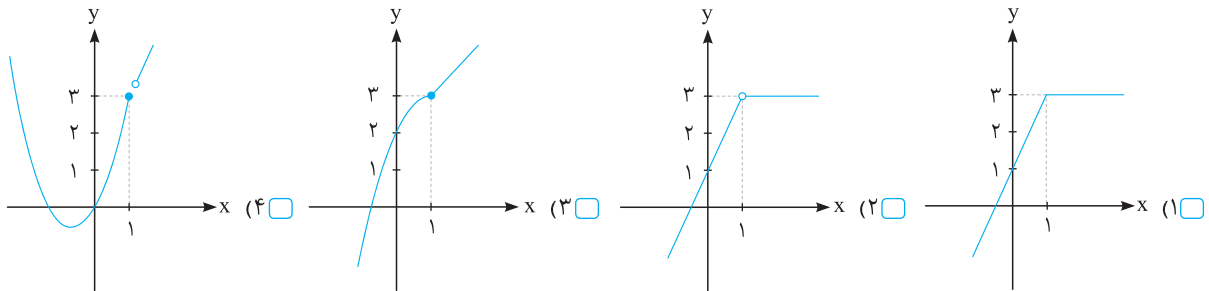
- (۱) صفر (۲) 1 (۳) -1 (۴) فاقد مینیمم نسبی

(ریاضی دافل ۹۷)

۱۸. به ازای کدام مقدار a ، خط به معادله $y = 5x + a$ بر منحنی تابع $y = 2x^2 - 3x + 6$ مماس است؟

- (۱) -3 (۲) -2 (۳) 2 (۴) 3

۱۹. با فرض $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \leq 1 \\ 3x & x > 1 \end{cases}$ نمودار f' در همسایگی $x = 1$ چگونه است؟



آزمون جامع (۲)

۱. حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $\sqrt{x^2 + 4x + 5} = x^2 + 4x + 3$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) 1 (۳) 2 (۴) 4

۲. حاصل عبارت $\frac{(\sqrt{4-\sqrt{15}} - \sqrt{4+\sqrt{15}})\sqrt{3}\sqrt{3}}{(4-\sqrt{15})\sqrt{3+\sqrt{2}}(4+\sqrt{15})\sqrt{3-\sqrt{2}}}$ کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $-3\sqrt{2}$ (۳) $3\sqrt{6}$ (۴) $-3\sqrt{6}$

۳. اگر $9^{2k} = 3\sqrt{3}$ باشد، حاصل $\log_{8k}(64k^2 + 16k + 12)$ کدام است؟

- (۱) 3 (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) 6 (۴) $\frac{3}{8}$

۴. در یک دنباله هندسی با جملات مثبت $a_4 a_8 = 9$ و $a_4 a_{12} = 36$ می‌باشد. حاصل $\frac{(a_8)^3}{(a_5)^2 + 27}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{216}{29}$ (۲) $\frac{216}{32}$ (۳) $\frac{216}{30}$ (۴) 6

پاسخنامهٔ آزمون جامع (۲)

$$x^2 + 4x + 5 = t \Rightarrow \sqrt{t} = t - 2 \xrightarrow[t \geq 2]{t \geq 0} (\sqrt{t})^2 = (t - 2)^2 \Rightarrow t = t^2 - 4t + 4 \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow (t - 1)(t - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ غ قق} \\ t = 4 \Rightarrow x^2 + 4x + 5 = 4 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 1 \end{cases}$$

$$(4 - \sqrt{15})\sqrt{3} + \sqrt{2} \times (4 + \sqrt{15})\sqrt{3} - \sqrt{2} = (4 - \sqrt{15})\sqrt{3} + \sqrt{2} (4 + \sqrt{15})\sqrt{3} + \sqrt{2} = (4 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15})\sqrt{3} + \sqrt{2} = (16 - 15)\sqrt{3} + \sqrt{2} = 1$$

$$A = \sqrt{4 - \sqrt{15}} - \sqrt{4 + \sqrt{15}} \xrightarrow[A < 0]{\text{به توان } 2} A^2 = 4 - \sqrt{15} + 4 + \sqrt{15} - 2 = 6 \Rightarrow A = -\sqrt{6}$$

$$\sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{9} \times 3} = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$\frac{(\sqrt{4 - \sqrt{15}} - \sqrt{4 + \sqrt{15}})(\sqrt[3]{3\sqrt{3}})}{(4 - \sqrt{15})\sqrt{3} + \sqrt{2} (4 + \sqrt{15})\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{6} \times 3}{1} = -\sqrt{18} = -\sqrt{9 \times 2} = -3\sqrt{2}$$

$$3\sqrt{3} = 9^{2k} \Rightarrow 3^1 \times 3^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{2k} \Rightarrow 3^{\frac{3}{2}} = 3^{4k} \Rightarrow 4k = \frac{3}{2} \Rightarrow k = \frac{3}{8}$$

$$k = \frac{3}{8} \Rightarrow \log_{\lambda k} (64k^2 + 16k + 12) = \log_{\lambda \times \frac{3}{8}} (64 \times \frac{9}{64} + 16 \times \frac{3}{8} + 12) = \log_3 27 = 3$$

روش اول:

در دنباله هندسی اگر $m + n = p + q$ ، آن‌گاه $a_m a_n = a_p a_q$ می‌باشد.

بنابراین داریم:

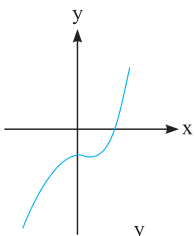
$$\begin{cases} a_2 a_8 = a_5 a_5 \Rightarrow 9 = (a_5)^2 \\ a_4 a_{12} = a_8 a_8 \Rightarrow 36 = (a_8)^2 \Rightarrow a_8 = 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{(a_8)^3}{(a_5)^2 + 27} = \frac{6^3}{9 + 27} = \frac{6^3}{36} = \frac{6^3}{6^2} = 6$$

روش دوم:

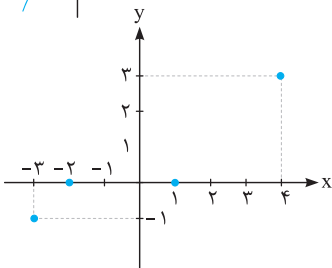
$$\begin{cases} a_4 a_{12} = 36 \Rightarrow a_1 q^3 a_1 q^{11} = 36 \xrightarrow[\text{جملات مثبت}]{\text{جذر}} a_1 q^7 = 6 \Rightarrow a_8 = 6 \\ a_2 a_8 = 9 \Rightarrow a_1 q a_1 q^7 = 9 \xrightarrow[\text{جملات مثبت}]{\text{جذر}} a_1 q^4 = 3 \Rightarrow a_5 = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{(a_8)^3}{(a_5)^2 + 27} = \frac{6^3}{9 + 27} = 6$$

تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱): تابع $f(x) = x^3 - 1$ که برای رسم کفایست نمودار $y = x^3$ را یک واحد به سمت پایین (y های منفی) انتقال دهیم. بنابراین تابع همواره صعودی است.



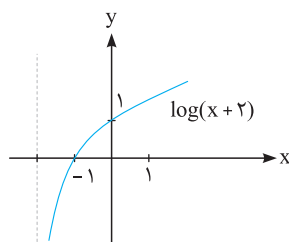
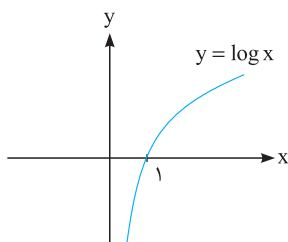
گزینه (۲): با توجه به نمودار f ملاحظه می‌کنیم وقتی از سمت چپ به سمت راست حرکت می‌کنیم، مقادیر y کم نمی‌شود. پس تابع نزولی نیست. (صعودی است).



گزینه (۳): ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = -\log \frac{1}{x+2} = -\log(x+2)^{-1} = \log(x+2)$$

برای رسم کافی است $y = \log x$ را دو واحد به سمت چپ (x های منفی) انتقال دهیم:



ملاحظه می‌کنیم تابع صعودی است.