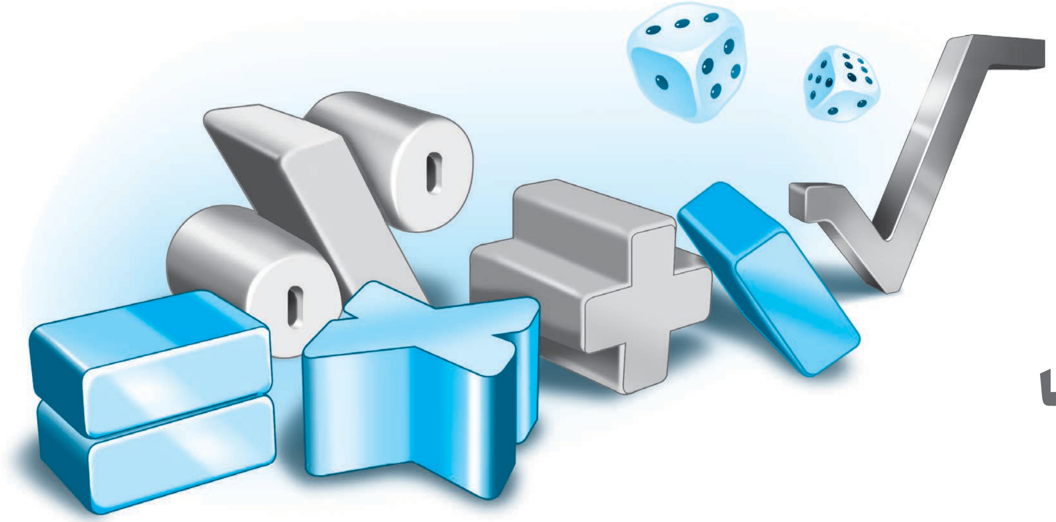
فهرست



فصل اول:
مجموعه‌ها

مجموعه

مجموعه: یکی از مفاهیم تعریف‌نشده در ریاضیات است که معمولاً آن را با حروف بزرگ انگلیسی نام‌گذاری می‌کنیم $(A,B,C,\cdots)$ و اعضای آن را داخل آکولاد می‌گذاریم. به‌عنوان مثال مجموعهٔ $A=\{۲,۶,۸\}$، سه عضو دارد و زیر مجموعه‌های آن به‌صورت زیر است:

$$A_۱=\varnothing \ ,\ A_۲=\{۲\} \ ,\ A_۳=\{۶\} \ ,\ A_۴=\{۸\} \ ,\ A_۵=\{۲,۶\} \ ,\ A_۶=\{۲,۸\} \ ,\ A_۷=\{۶,۸\} \ ,\ A_۸=\{۲,۶,۸\}$$

تذکر مجموعهٔ تهی را با دو نماد $\varnothing$ یا $\{\}$ نمایش می‌دهیم و می‌دانیم $\varnothing$ زیر مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها است.

نکته تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی، ۲^n است.

مجموعه‌های مهم و پرکاربرد در ریاضیات به‌صورت زیر هستند:

۱) مجموعهٔ اعداد طبیعی $= \mathbb{N}=\{۱,۲,۳,\cdots\}$

۲) مجموعهٔ اعداد حسابی $= W=\{۰,۱,۲,\cdots\}$

۳) مجموعهٔ اعداد صحیح $= \mathbb{Z}=\{\cdots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\cdots\}$

۴) مجموعهٔ اعداد گویا $= \mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}\mid m,n\in\mathbb{Z}, n\neq ۰\}$ (هر عدد گویا از تقسیم دو عدد صحیح به‌دست می‌آید.)

۵) مجموعهٔ اعداد گنگ $= \mathbb{Q}'$ = مجموعهٔ همهٔ اعداد غیرگویا را گنگ می‌نامیم (مثلاً $\sqrt{۲}\,,\sqrt{۳}\,,-\pi$ همگی اعدادی گنگ هستند.)

۶) مجموعهٔ اعداد حقیقی $= \mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

نکته همواره داریم: $\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R} \quad , \quad \mathbb{N}\subseteq W\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$

۱ کدام گزینه درست است؟

گزینهٔ «۳»

۱) $\varnothing\in\{\{\varnothing\}\}$
۲) $\{\varnothing\}\in\varnothing$
۳) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$
۴) $\{\{\varnothing\}\}\in\{\{\varnothing\},\varnothing\}$

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): $\{\varnothing\}$ عضو مجموعهٔ $\{\{\varnothing\}\}$ است نه $\varnothing$.

گزینهٔ (۲): مجموعهٔ $\varnothing$ هیچ عضوی ندارد، پس $\{\varnothing\}\notin\varnothing$.

گزینهٔ (۳): می‌دانیم $\varnothing$ زیر مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها است، پس این گزینه درست است.

گزینهٔ (۴): اعضای مجموعهٔ $\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}$، $\{\varnothing\}$ و $\varnothing$ هستند نه $\{\{\varnothing\}\}$.

۲ مجموعه‌های $A=\{۲\}$، $B=\{۳,۵,\{۲\}\}$ و $C=\{\{\{۲\},۳,۵\},۲\}$ مفروض است، کدام بیان در مورد آن‌ها **نادرست** است؟ (ریاضی داخل ۹۵)

گزینهٔ «۲»

۱) $A\in B$
۲) $A\in C$
۳) $B\in C$
۴) $A\subseteq C$

پاسخ: تنها گزینهٔ نادرست، گزینهٔ (۲) است، زیرا مجموعهٔ C تنها دو عضو دارد که $\{\{۲\},۳,۵\}$ و ۲ هستند و $A=\{۲\}$ عضو آن نیست، پس $A\notin C$.

۳ اگر $A\cup\{1,2,4\}=\{1,2,3,\dots,8\}$ باشد، چند حالت مختلف برای مجموعهٔ A وجود دارد؟

۱) ۱۶ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

«گزینهٔ ۳»

پاسخ: اگر $B=\{1,2,4\}$ و $C=\{1,2,3,\dots,8\}$ باشند، پس طبق فرض می‌توان نوشت $A\cup B=C$.

برای تعیین اعضای A باید توجه کنیم که همهٔ اعدادی که در C هستند و در B نیستند باید در A باشند؛ یعنی اعداد ۳,۵,۶,۷,۸ حتماً در مجموعهٔ A هستند، پس هر کدام از این اعضا تنها یک حالت دارند از طرفی هر یک از اعداد ۱,۲,۴ ممکن است در مجموعهٔ A باشند یا نباشند، یعنی برای هر کدام از این اعضا دو حالت داریم. پس در کل، تعداد حالت‌های موجود برای اعضای A برابر $1\times1\times1\times1\times1\times2\times2\times2=8$ حالت است.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ها را از نظر تعداد اعضا به دو دستهٔ مقابل تقسیم می‌کنیم: ۱) متناهی ۲) نامتناهی

مجموعهٔ متناهی: مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن عددی حسابی باشد، مانند مجموعهٔ همهٔ انسان‌های روی کره‌زمین (با اینکه خیلی زیاد هستن ولی بالاخره متناهی هستند.)

مجموعهٔ نامتناهی: مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن از هر عددی بزرگ‌تر باشد، مانند مجموعهٔ اعداد طبیعی.

نکته اگر $A\subseteq B$ باشد $\Leftarrow$

- A نامتناهی باشد $\Leftarrow$ B نامتناهی است.
- B متناهی باشد $\Leftarrow$ A متناهی است.
- A متناهی باشد $\Leftarrow$ B متناهی یا نامتناهی است.
- B نامتناهی باشد $\Leftarrow$ A متناهی یا نامتناهی است.

۴ اگر $A\subseteq B$، B نامتناهی و A ناتهی باشد، کدام مجموعهٔ زیر A **نمی‌تواند** باشد؟

۱) $\{x \mid x\in\mathbb{R}, |x|<1\}$ ۲) $\{x \mid x\in\mathbb{Z}, |x|<1\}$

۳) $\{x \mid x\in\mathbb{R}, |x|>-1\}$ ۴) $\{x \mid x\in\mathbb{R}, |x|<-1\}$

«گزینهٔ ۴»

پاسخ: می‌دانیم $A\subseteq B$ و B نامتناهی است، یعنی A می‌تواند متناهی و یا نامتناهی باشد، پس مجموعهٔ A هر مجموعه‌ای می‌تواند باشد به‌جز تهی (طبق فرض تست)، تنها گزینه‌ای که معادل $\varnothing$ است گزینهٔ (۴) است، زیرا می‌دانیم قدرمطلق همواره بزرگ‌تر و مساوی صفر است، پس مجموعه $\{x \mid x\in\mathbb{R}, |x|<-1\}$ هیچ عضوی ندارد.

تذکر در مورد گزینهٔ (۳)، توجه کنید که این گزینه معادل $\mathbb{R}$ است، زیرا همواره $|x|>-1$ می‌باشد، پس جواب‌های قابل قبول برای x، مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌شود.

۵ اگر مجموعه‌های $A=\{\frac{1}{x} \mid x\in\mathbb{N}\}$ و $B=\{\frac{x}{8} \mid x\in\mathbb{N}\}$ مفروض باشند، کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

۱) $A-B$ ۲) $B-A$ ۳) $A\cap B$ ۴) $A\cup B$

«گزینهٔ ۳»

پاسخ: نمایش دو مجموعهٔ A و B با اعضا به‌صورت زیر است:

$$A=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\dots\}\ ,\ B=\{\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{3}{8},\frac{1}{2},\frac{5}{8},\frac{3}{4},\frac{7}{8},1,\frac{9}{8},\dots\}$$

همان‌طور که می‌بینید، اعضای مجموعهٔ A مدام کوچک می‌شوند ولی اعضای مجموعهٔ B مدام بزرگ می‌شوند، پس این دو مجموعه بی‌شمار عضو غیرمشترک دارند، پس تنها گزینه‌ای که متناهی است $A\cap B$ و نمایش آن به‌صورت $A\cap B=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\}$ می‌باشد.

۶ اگر A مجموعهٔ اعداد اول و B مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد باشند، کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

۱) $A\cup B$ ۲) $A\cap B$ ۳) $B-A$ ۴) $A-B$

«گزینهٔ ۴»

پاسخ: مجموعه‌های A و B به‌صورت مقابل‌اند: $A=\{2,3,5,7,11,13,\dots\}\ ,\ B=\{1,3,5,7,9,11,13,15,\dots\}$

همان‌طور که می‌دانید A و B هر دو نامتناهی‌اند و همچنین همهٔ اعداد اول (به‌جز ۲)، اعدادی فرد هستند، پس در بین گزینه‌ها تنها مجموعهٔ متناهی، $A-B$ است که نمایش مجموعه‌ای آن به‌صورت $A-B=\{2\}$ می‌باشد.

بازه

بازه: زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد (مثلاً a و b) باشد را بازه می‌نامیم.

نکته هر بازه به‌صورت (a,b) را یک بازهٔ باز می‌نامیم و به‌صورت «$\underset{a}{\circ}$——$\underset{b}{\circ}$» نمایش می‌دهیم.

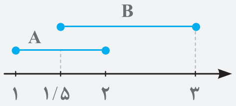
هر بازه به‌صورت $[a,b)$ یا $(a,b]$ را یک بازهٔ نیم‌باز می‌نامیم و به ترتیب به‌صورت «$\underset{a}{\bullet}$——$\underset{b}{\circ}$» یا «$\underset{a}{\circ}$——$\underset{b}{\bullet}$» نمایش می‌دهیم.

هر بازه به‌صورت $[a,b]$ را یک بازهٔ بسته می‌نامیم و به‌صورت «$\underset{a}{\bullet}$——$\underset{b}{\bullet}$» نمایش می‌دهیم.

تذکر ۱ هر بازه به‌صورت $(a,+\infty)$ یا $(-\infty,b)$ را بازهٔ باز می نامیم و به ترتیب به صورت «$\underset{a}{\circ}$——» یا «——$\underset{b}{\circ}$» نمایش می‌دهیم.

۲ زمانی‌که بخواهیم روی چند مجموعه اعمالی از قبیل $(-,\cap,\cup)$ را انجام دهیم. می‌توانیم از روش نمایش مجموعه‌ها روی یک محور استفاده کنیم.

به‌عنوان مثال با نمایش مجموعه‌های $A=[۱,۲]$ و $B=[۱/۵,۳]$ روی یک محور به راحتی $A\cup B$ به‌دست می‌آید:



$\Rightarrow A\cup B=[۱,۳]$

مثال آموزشی

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $[۱,۲)\subseteq(۱,۲]$ ب) $\{۱,۲\}\subseteq[۱,۲]$

پاسخ الف) $[۱,۲)\subseteq(۱,۲]$: این گزاره نادرست است، زیرا عدد ۱ در بازهٔ $[۱,۲)$ قرار دارد که در بازهٔ $(۱,۲]$ نیست. پس $[۱,۲)$ نمی‌تواند زیرمجموعهٔ $(۱,۲]$ باشد.

ب) $\{۱,۲\}\subseteq[۱,۲]$: این گزاره درست است. توجه کنید که مجموعهٔ $\{۱,۲\}$ تنها دو عضو دارد که هر دو در مجموعهٔ $[۱,۲]$ هستند.

۷ اگر $A=(-۱,۱]$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,(-x)\in A\}$ باشد، مجموعهٔ $B-A$ کدام است؟

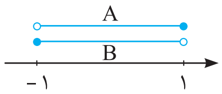
۱) $\{۱\}$ ۲) $\{۱,-۱\}$ ۳) $\{-۱\}$ ۴) $\varnothing$

گزینهٔ «۳»

پاسخ: شرط ورود به مجموعهٔ B به‌صورت $(-x)\in A$ است، پس می‌توان نوشت:

$$B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,(-x)\in A\}:-۱<-x\le ۱\xrightarrow{\times(-۱)}-۱\le x<۱$$

بنابراین $B=[-۱,۱)$ است. در نهایت مجموعهٔ $B-A$ به‌صورت مقابل می‌باشد:



$$\Rightarrow B-A=[-۱,۱)-(-۱,۱]=\{-۱\}$$

۸ اگر $i\in\{۱,۲,۳,\dots,۹\}$ و $A_i=[-i\,,\,\frac{۹-i}{۲}]$، آن‌گاه مجموعهٔ $(A_۲\cap A_۵)-(A_۱\cap A_۷)$ به کدام صورت است؟ (ریاضی داخل ۹۲)

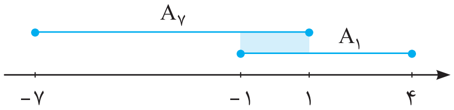
۱) $[-۲,-۱)\cup(۱,۲]$ ۲) $[-۲,-۱]\cup[۱,۲]$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $\varnothing$

گزینهٔ «۱»

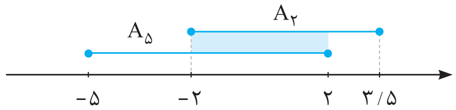
پاسخ: به کمک بازهٔ $A_i=[-i\,,\,\frac{۹-i}{۲}]$، $A_۱$، $A_۲$، $A_۵$ و $A_۷$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A_۱=[-۱,۴]\ ,\ A_۲=[-۲,۳/۵]\ ,\ A_۵=[-۵,۲]\ ,\ A_۷=[-۷,۱]$$

حالا باید $(A_۲\cap A_۵)$ و $(A_۱\cap A_۷)$ را به کمک محور به‌دست آوریم:



$A_۱\cap A_۷=[-۱,۱]$



$A_۲\cap A_۵=[-۲,۲]$

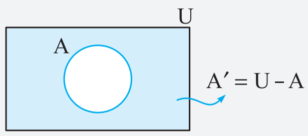
پس می‌توان نوشت:

$$(A_۲\cap A_۵)-(A_۱\cap A_۷)=[-۲,۲]-[-۱,۱]=[-۲,-۱)\cup(۱,۲]$$

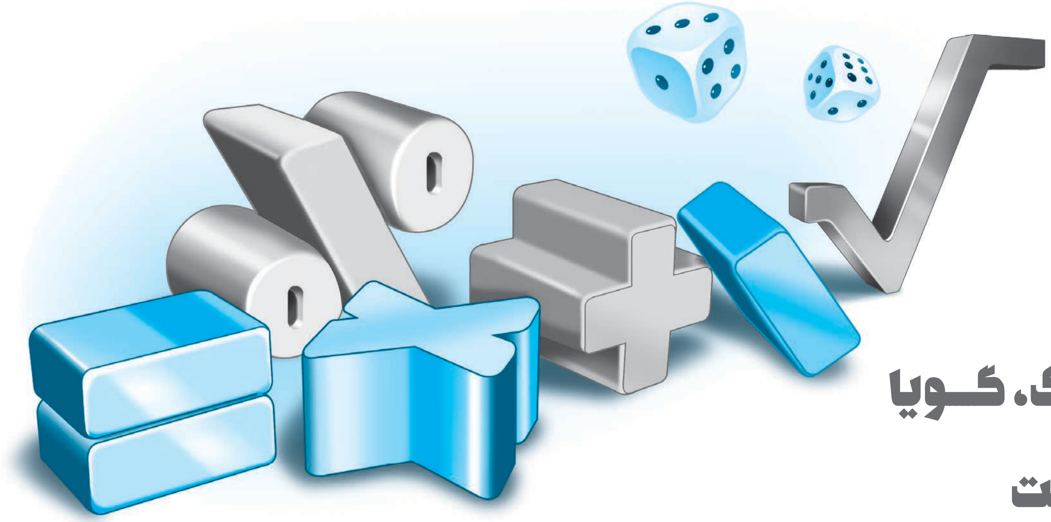
مجموعهٔ مرجع و متمم یک مجموعه

مجموعهٔ مرجع: مجموعهٔ مرجع را با U نمایش می‌دهیم و همهٔ مجموعه‌های مورد بحث زیر مجموعهٔ آن هستند.

متمم مجموعه: مجموعهٔ A مفروض است $(A\subseteq U)$، متمم مجموعهٔ A را با نماد A' نمایش می‌دهیم و به‌صورت مقابل تعریف می‌کنیم: $A'=\{x\,|\,x\notin A\}$. درواقع A' شامل همهٔ عضوهایی از U است که در A نیست.



تذکر برای پیدا کردن متمم یک مجموعه حتماً باید مجموعهٔ مرجع مشخص شود. مثلاً متمم مجموعهٔ $A=[۱,۲)$ نسبت به $U=\mathbb{R}$، مجموعهٔ $A'=(-\infty,۱)\cup[۲,+\infty)$ است و متمم مجموعهٔ $A=[۱,۲)$ نسبت به $U=[۱,۲]$، مجموعهٔ $A'=\{۲\}$ است.



فصل پنجم: معادلات گنگ، گویا و تعیین علامت

معادلات گویا

معادلات گویا: برای حل معادلاتی که شامل جملات گویا هستند، معادله را در ک. م. م مخرج‌ها ضرب می‌کنیم، سپس آن را ساده می‌کنیم و جواب‌های آن را به‌دست می‌آوریم.

تذکر ۱) حواستان باشد که ریشه‌های به‌دست آمده، مخرج‌ها را صفر نکنند و همچنین با شرایط مسئله سازگار باشند.

۲) برای حل معادلات گویا می‌توانیم از مخرج مشترک و طرفین وسطین هم استفاده کنیم.

مثال آموزشی

جواب‌های معادلهٔ $\frac{۸}{x^۲-۴}=\frac{x-۲}{x+۲}+\frac{x}{x-۲}$ را به‌دست آورید.

پاسخ برای حل این معادلهٔ گویا، طرفین معادله را در ک. م. م مخرج‌ها یعنی $(x+۲)(x-۲)$ ضرب می‌کنیم، پس می‌توان نوشت:

$$x(x+۲)+(x-۲)(x-۲)=\frac{۸}{(x-۲)(x+۲)}(x-۲)(x+۲)\Rightarrow x^۲+۲x+x^۲-۴x+۴=۸\Rightarrow ۲x^۲-۲x-۴=۰\xRightarrow{\div ۲}x^۲-x-۲=۰$$

$$\xRightarrow{b=a+c}x_۱=-۱\ ,\ x_۲=\frac{-c}{a}=۲$$

از طرفی $x=۲$ مخرج کسر را صفر می‌کند، پس غیر قابل قبول است و جواب مسئله فقط $x=-۱$ است.

تذکر در بعضی از تست‌ها، با خواندن صورت تست ابتدا باید یک معادلهٔ گویا بنویسیم و سپس آن را حل کنیم، به مثال زیر دقت کنید:

مثال آموزشی

دو کارگر اگر کاری را با هم انجام دهند ۶ روزه تمام می‌شود و اگر به‌تنهایی انجام دهند، کارگر اول کل کار را ۵ روز زودتر از کارگر دوم انجام می‌دهد. هر یک از کارگرها، کار را به تنهایی در چند روز انجام می‌دهند؟

پاسخ فرض می‌کنیم کارگر اول کل کار را در x روز انجام دهد، پس کارگر دوم کل کار را در $x+۵$ روز انجام می‌دهد. یعنی نتیجه می‌گیریم کارگر اول در هر روز $\frac{۱}{x}$ کار را و کارگر دوم در هر روز $\frac{۱}{x+۵}$ کار را انجام می‌دهد. از طرفی اگر هر دو کارگر، کار را با هم در ۶ روز انجام دهند، پس در هر روز $\frac{۱}{۶}$ کار را انجام می‌دهند، پس می‌توان نوشت:

$$\underbrace{\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۵}}_{\text{هر دو کارگر با هم کار کنند}}=\frac{۱}{۶}\xRightarrow{\times(x)(x+۵)}x+۵+x=\frac{۱}{۶}(x)(x+۵)\xRightarrow{\times ۶}۶x+۳۰+۶x=x^۲+۵x\Rightarrow x^۲-۷x-۳۰=۰$$

$$\Rightarrow(x-۱۰)(x+۳)=۰\Rightarrow x=۱۰\ ,\ x=-۳$$

از آنجایی‌که تعداد روزهای انجام کار نمی‌تواند منفی باشد، پس کارگر اول کل کار را در ۱۰ روز و کارگر دوم کل کار را به تنهایی در ۱۵ روز انجام می‌دهند.

نکته مستطیلی به طول x و عرض y که نسبت طول به عرض آن $\frac{x}{y}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ باشد را **مستطیل طلایی** می‌نامیم.

بالاخره توی کنکور تجربی ۹۸، از معادله‌های گویا اومد. انصافاً هم تستش خیلی قشنگ بود. ☺

۱ گزینهٔ «۴»

در معادلهٔ $x+\frac{2x-1}{x-4}=-2$، ریشه‌ها چگونه‌اند؟

۱) فقط یک ریشهٔ قابل قبول　　۲) دو ریشهٔ عکس هم　　۳) دو ریشهٔ مساوی　　۴) دو ریشهٔ قرینه

پاسخ: برای حل معادله، مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x}{1}+\frac{2x-1}{x-4}=-2\Rightarrow\frac{x(x-4)+2x-1}{x-4}=-2\Rightarrow\frac{x^2-4x+2x-1}{x-4}=-2\Rightarrow x^2-2x-1=-2x+8\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\pm3$$

پس دو ریشهٔ معادله قرینه هم هستند.

۲ گزینهٔ «۲»

ریشهٔ بزرگتر معادلهٔ گویای $\frac{x-1}{3x}+\frac{6x}{x-1}=3$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$　　۲) $-\frac{1}{5}$　　۳) $\frac{1}{5}$　　۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: برای حل این معادله، مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{(6x)(3x)+(x-1)(x-1)}{(x-1)(3x)}=3\Rightarrow\frac{18x^2+x^2-2x+1}{3x^2-3x}=3\Rightarrow19x^2-2x+1=9x^2-9x\Rightarrow10x^2+7x+1=0$$

$$\Delta=(7)^2-4(10)=9\Rightarrow x_1=\frac{-7+3}{20}=-\frac{1}{5}\quad,\quad x_2=\frac{-7-3}{20}=-\frac{1}{2}$$

پس ریشهٔ بزرگتر معادله $x=-\frac{1}{5}$ است.

۳ گزینهٔ «۳»

یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم آن، غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) ۰/۴　　۲) ۰/۵　　۳) ۰/۶　　۴) ۰/۸

پاسخ: در مجموع $15=4+11$ کیلوگرم رنگ داریم که رنگ خالص آن برابر است با:

$$\frac{40}{100}\times11+\frac{70}{100}\times4=7.2\text{kg}$$

حالا اگر x کیلوگرم آن را تبخیر کنیم، x کیلوگرم از وزن حلال کم می‌شود، پس برای آن‌که غلظت محلول به ۵۰ درصد برسد باید داشته باشیم:

$$\frac{7.2}{15-x}=\frac{50}{100}\Rightarrow\frac{7.2}{15-x}=\frac{1}{2}\Rightarrow14.4=15-x\Rightarrow x=0.6\text{kg}$$

۴ گزینهٔ «۴»

بهروز یک مجلّه را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟ (ریاضی داخل ۹۸)

۱) ۳۲　　۲) ۳۳　　۳) ۳۵　　۴) ۳۶

پاسخ: فرض می‌کنیم بهروز یک مجله را به‌تنهایی در x ساعت تایپ کند، پس بهروز در هر ساعت $\frac{1}{x}$ مجله را به تنهایی تایپ می‌کند. از طرفی فرهاد همان مجله را به‌تنهایی در $x+9$ ساعت تایپ می‌کند. پس فرهاد در هر ساعت $\frac{1}{x+9}$ مجله را به‌تنهایی تایپ می‌کند.

همچنین اگر هر دو با هم کار کنند کل کار را در ۲۰ ساعت انجام می‌دهند؛ یعنی اگر هر دو با هم کار کنند در هر ساعت $\frac{1}{20}$ کار تایپ مجله به پایان می‌رسد.

پس طبق اطلاعات به‌دست آمده می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+9}=\frac{1}{20}\Rightarrow\frac{x+9+x}{x(x+9)}=\frac{1}{20}\Rightarrow\frac{2x+9}{x^2+9x}=\frac{1}{20}\Rightarrow x^2+9x=40x+180\Rightarrow x^2-31x-180=0$$

$$\Rightarrow(x-36)(x+5)=0\Rightarrow\begin{cases}x=36\\x=-5\ (\text{امکان‌پذیر نیست})\end{cases}$$

پس بهروز به‌تنهایی کل کار تایپ مجله را در ۳۶ ساعت انجام می‌دهد.

برای پیدا کردن جواب معادلهٔ $x^2-31x-180=0$ بهتر است از گزینه‌ها کمک بگیریم.

۵ گزینهٔ «۳»

سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصلهٔ ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟ (تجربی داخل ۹۸)

۱) ۱۲　　۲) ۱۵　　۳) ۲۰　　۴) ۲۵

پاسخ: از کتاب فیزیک می‌دانیم که $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ است که در آن Δx تغییرات مکان، Δt تغییرات زمان و v سرعت است. با توجه به اطلاعات مسئله می‌توان نوشت:

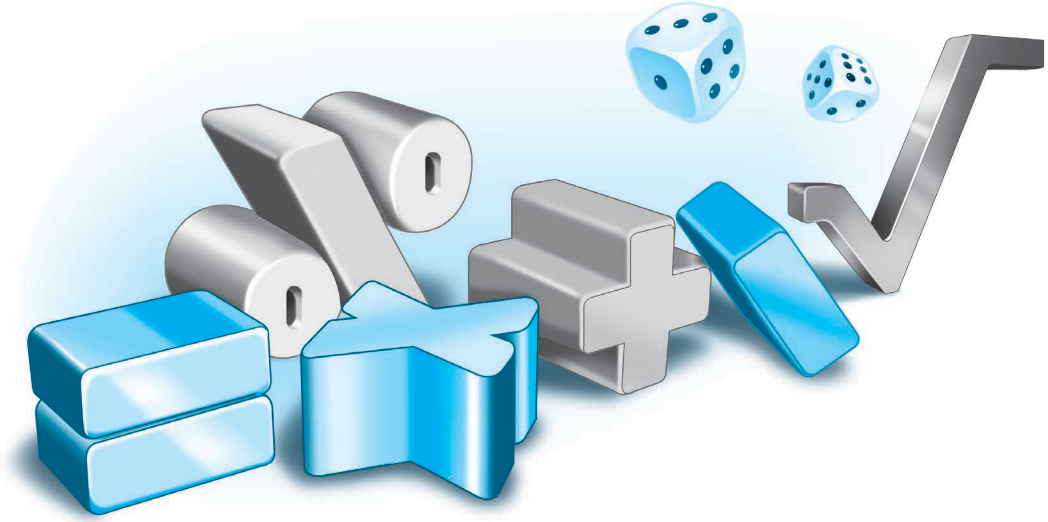
$$\begin{cases}\text{سرعت قایق در جهت حرکت آب}=100+v\ \frac{\text{m}}{\text{min}}\\\text{سرعت قایق در خلاف جهت حرکت آب}=100-v\ \frac{\text{m}}{\text{min}}\end{cases}$$

همچنین می‌دانیم اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است، بنابراین:

$$t_2-t_1=5\Rightarrow\frac{1200}{100-v}-\frac{1200}{100+v}=5$$

حل معادلهٔ بالا کار دشواری است، پس برای سادگی در حل معادله و پیدا کردن v (سرعت آب رودخانه) از گزینه‌ها کمک می‌گیریم. تنها گزینه‌ای که در معادله صدق می‌کند $v=20\frac{\text{m}}{\text{min}}$ است:

$$v=20\frac{\text{m}}{\text{min}}\Rightarrow\frac{1200}{100-20}-\frac{1200}{100+20}=\frac{1200}{80}-\frac{1200}{120}=15-10=5\checkmark$$



فصل هفتم:
تــابــع

تابع

تعریف تابع: تابع (function) یک ماشین است که به هر ورودی (x)، دقیقاً یک خروجی (y) می‌دهد. معمولاً توابع را با حروف f یا g نمایش می‌دهیم:

$$\underset{\text{خروجی}}{y} = \underset{\text{تابع}}{f}(\overset{\text{ورودی}}{x})$$

یا

ورودی(x) ⟵ f ⟵ (y)خروجی

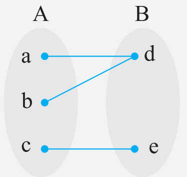
فرم‌های نمایش تابع به یکی از چهار حالت زیر است:

۱ نمودار پیکانی
۲ زوج مرتب
۳ نمودار
۴ ضابطه

باید شرایط تابع بودن را در هر یک از فرم‌های بالا بلد باشیم، حالا به نمایش هر یک از فرم‌های مختلف تابع می‌پردازیم:

۱) نمودار پیکانی: یک رابطه از مجموعهٔ A به B زمانی تابع است که از هر عضو مجموعهٔ A، دقیقاً یک فلش خارج شود.

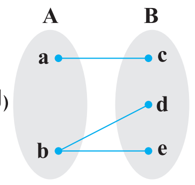
به‌عنوان مثال نمودار پیکانی مقابل تابع است:

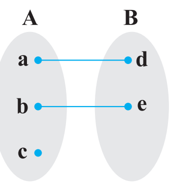


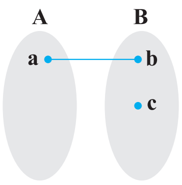
تذکر اعضای مجموعهٔ B، هیچ تأثیری روی تابع بودن یا نبودن نمودار پیکانی ندارد. *(مجموعهٔ B به ما هیچ ربطی نداره.)*

مثال آموزشی

تابع بودن یا نبودن روابط زیر را بررسی کنید.

الف)


ب)


پ)


پاسخ (الف) تابع نیست، زیرا در مجموعهٔ A از عضو b دو فلش خارج شده است. هم‌چنین در مورد (ب) از عضو c هیچ فلشی خارج نشده است، پس آن هم تابع نیست ولی (پ) تابع است، زیرا از هر عضو A دقیقاً یک فلش خارج شده است.

۲) زوج مرتب: یک رابطه به‌صورت زوج مرتب زمانی تابع است که مؤلفهٔ اول تکراری نداشته باشد، حالا اگر مؤلفه‌های اول، تکراری بودند، برای تابع بودن باید مؤلفه‌های دوم نظیرشان هم برابر باشند.

مثال آموزشی

اگر رابطهٔ $R=\{(1,1),(1,m^2-3),(m,2),(2,4)\}$ تابع باشد، m را به‌دست آورید.

پاسخ در بین زوج مرتب‌ها هم $(1,1)$ و هم $(1,m^2-3)$ را داریم، پس باید مؤلفه‌های دوم نظیرشان با هم برابر باشند، یعنی:

$$m^2-3=1\Rightarrow m^2=4\Rightarrow m=\pm 2$$

حواستان باشد حتماً هر دو مقدار به‌دست آمده را در رابطه جای‌گذاری کنید و از قابل قبول بودن مقادیر به‌دست آمده مطمئن شوید:

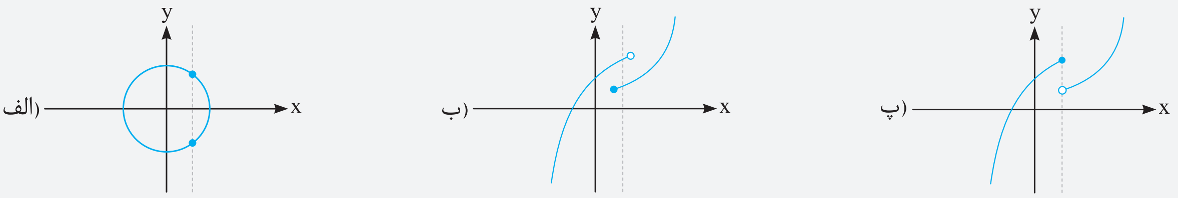
$$m=2\Rightarrow \{(1,1),(1,4-3),(2,2),(2,4)\} \quad ✗$$

$$m=-2\Rightarrow \{(1,1),(1,4-3),(-2,2),(2,4)\} \quad ✓$$

همان‌طور که می‌بینید به‌ازای $m=2$، در زوج‌مرتب‌ها هم عضو $(2,2)$ و هم عضو $(2,4)$ داریم، پس به‌ازای $m=2$ رابطهٔ R تابع نیست و فقط $m=-2$ قابل قبول است.

۳) نمودار: یک رابطه زمانی تابع است که هر خط موازی محور yها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

به‌عنوان مثال می‌توان نوشت:



نمودارهای (الف) و (ب) به وضوح تابع نیستند، ولی نمودار (پ) تابع است. (حواستان باشد که از دو نقطه‌ای که در شکل زیر هم قرار گرفته‌اند یکی توپر و دیگری توخالی است.)

۴) ضابطه: اگر بتوان y را برحسب x به‌صورت صریح $y=f(x)$ بنویسیم آن رابطه حتماً تابع است. به‌عنوان مثال $y=x^2+2x-4$ ، $y=\sin^2 x-\cos x$ و ... همگی تابع‌اند.

مثال آموزشی

آیا رابطه‌های $y^3=x^2+1$ و $y^2=x^2+1$ تابع‌اند؟

پاسخ بررسی تابع بودن $y^3=x^2+1$:

$$y^3=x^2+1 \xRightarrow{\sqrt[3]{\ }} y=\sqrt[3]{x^2+1}\Rightarrow \text{تابع است}$$

بررسی تابع بودن $y^2=x^2+1$:

$$y^2=x^2+1 \xRightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{y^2}=\sqrt{x^2+1} \xRightarrow{\sqrt{\square^2}=|\square|} |y|=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow y=\pm\sqrt{x^2+1}$$

رابطه به‌صورت صریح $y=f(x)$ نیست، پس تابع نیست. (هم + و هم − داره)

نکته معمولاً ضابطه‌هایی که y دارای توان زوج، قدر مطلق، جزء صحیح و یا درون نسبت مثلثاتی (مثلاً $\cos y$ ...) هستند، تابع نیستند، به‌عنوان مثال $x=\sin y$ و $[y]=x$ و ... .

تذکر در حالت کلی اگر در یک رابطه به ازای یک x، دو یا چند y بگیریم آن رابطه تابع نیست، مانند: $y^2=x \xrightarrow{x=1} y^2=1\Rightarrow y=\pm 1$

دامنه و برد

دامنه: دامنهٔ تابع $y=f(x)$ را با D_f نمایش می‌دهیم و دامنه در حالت‌های مختلف نمایش، به‌صورت زیر است:

$D_f \Rightarrow$ ورودی‌ها = مجموعهٔ A = مؤلفه‌های اول = تصویر روی محور x ها = xهای قابل قبول

ماشین ← ورودی‌ها؛ نمودار پیکانی ← مجموعهٔ A؛ زوج مرتب ← مؤلفه‌های اول؛ نمودار ← تصویر روی محور x ها؛ ضابطه ← xهای قابل قبول

برد: برد تابع $y=f(x)$ را با R_f نمایش می‌دهیم و برد در حالت‌های مختلف نمایش، به‌صورت زیر است:

$R_f \Rightarrow$ خروجی‌ها = زیر مجموعه‌ای از B = مؤلفه‌های دوم = تصویر روی محور y ها = yهای قابل قبول

ماشین ← خروجی‌ها؛ نمودار پیکانی ← زیر مجموعه‌ای از B؛ زوج مرتب ← مؤلفه‌های دوم؛ نمودار ← تصویر روی محور y ها؛ ضابطه ← yهای قابل قبول

تذکر ۱) در نمایش نمودار پیکانی، برد زیر مجموعه‌ای از B است نه خود B.

۲) مجموعهٔ B را هم‌دامنه می‌نامیم و همواره $R_f\subseteq B$ است.

چنتا تست خوب از مفهوم تابع رو با هم ببینیم!

۱ چه تعداد از نقاط تابع $f=\{(۳,m^۲),(۲,۱),(-۳,m),(-۲,m),(۳,m+۲),(m,۴)\}$ در ناحیهٔ اول و دوم قرار دارند؟

گزینهٔ «۳»

۱) صفر　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

پاسخ: برای تابع بودن، نباید مؤلفه‌های اول تکراری باشند، در صورت تکراری بودن، مؤلفه‌های دوم نظیرشان باید برابر باشند، پس می‌توان نوشت:

$$(۳,m^۲),(۳,m+۲)\Rightarrow m^۲=m+۲\Rightarrow m^۲-m-۲=۰\xrightarrow{b=a+c}m=-۱,m=۲$$

حواستان باشد باید هر دو m به‌دست آمده را در f جای‌گذاری کنیم تا از درست بودن آن‌ها مطمئن شویم:

$$m=-۱\Rightarrow\{(۳,۱),(۲,۱)(-۳,-۱),(-۲,-۱),(۳,۱),(-۱,۴)\}\checkmark$$

$$m=۲\Rightarrow\{(۳,۴),(۲,۱),(-۳,۲),(-۲,۲),(۳,۴),(۲,۴)\}\times$$

پس فقط $m=-۱$ قابل قبول است و تابع به‌صورت مقابل است: $f=\{(۳,۱),(۲,۱),(-۳,-۱),(-۲,-۱),(-۱,۴)\}$

از طرفی می‌دانیم نقاطی در ناحیهٔ اول و دوم قرار دارند که مؤلفهٔ دومشان (y) مثبت باشد، پس در این تابع نقاط $(۳,۱)$، $(۲,۱)$ و $(-۱,۴)$ در ناحیهٔ اول و دوم قرار دارند که تعدادشان ۳ تا است.

نکته تعداد توابع از یک مجموعهٔ m عضوی به یک مجموعهٔ n عضوی برابر n^m است.

۲ چند تابع از مجموعهٔ ۴ عضوی A به مجموعهٔ ۳ عضوی B وجود دارد؟

گزینهٔ «۳»

۱) ۱۲　　۲) ۶۴　　۳) ۸۱　　۴) ۲۴

پاسخ: روش اول: مجموعه‌های A و B را به‌صورت مقابل در نظر می‌گیریم: $A=\{a,b,c,d\},B=\{e,f,g\}$

برای هر یک از اعضای مجموعهٔ A یعنی a، b، c و d سه انتخاب وجود دارد، مثلاً عضو a به یکی از اعضای e، f یا g می‌تواند برود (عضو a سه حالت دارد)، همچنین مجدداً عضو b هم می‌تواند به هر یک از اعضای e، f یا g برود یعنی برای عضو b هم سه حالت رخ می‌دهد و ...

پس طبق اصل ضرب تعداد کل توابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B برابر است با: $۳\times۳\times۳\times۳=۸۱$

(حواستان باشد برای تابع بودن مؤلفه‌های اول نباید تکراری باشند ولی تکراری بودن مؤلفه‌های دوم هیچ ایرادی ندارد، مثلاً عضوهای a و b هر دو می‌توانند به f بروند و ...)

روش دوم: با توجه به نکتهٔ بالا تعداد توابع از A به B برابر $۳^۴=۸۱$ است.

نکته روابطی که به‌صورت چند ضابطه‌ای هستند (با فرض آن‌که تک‌تک ضابطه‌ها تابع باشند) در صورتی تابع‌اند که دامنه‌ها اشتراک نداشته باشند و اما در صورتی‌که دامنه‌ها اشتراک داشتند، برای تابع بودن باید آن x های مشترک، یک y بدهند نه بیشتر.

۳ کدام‌یک از گزینه‌های زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟

گزینهٔ «۴»

۱) $y=\begin{cases}۲x+۲ & ; \quad x\geq ۰\\ \dfrac{-۲}{-x+۱} & ; \quad x\leq ۰\end{cases}$　　۲) $y=\begin{cases}x-۱ & ; \quad x>۲\\ ۲x^۲-۱ & ; \quad x<۴\end{cases}$　　۳) $y=\begin{cases}[x] & ; \quad x>۱\\ ۳ & ; \quad x<۳\end{cases}$　　۴) $y=\begin{cases}-۲x+۱ & ; \quad x\leq ۴\\ -x-۳ & ; \quad x\geq ۴\end{cases}$

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): اشتراک دامنه‌ها $x=۰$ است، با جای‌گذاری $x=۰$ در هر دو ضابطه داریم: $۲(۰)+۲=۲\quad,\quad \dfrac{-۲}{(۰)+۱}=-۲$

پس این رابطه تابع نیست، زیرا به‌ازای $x=۰$ دو y مختلف به‌دست می‌آید.

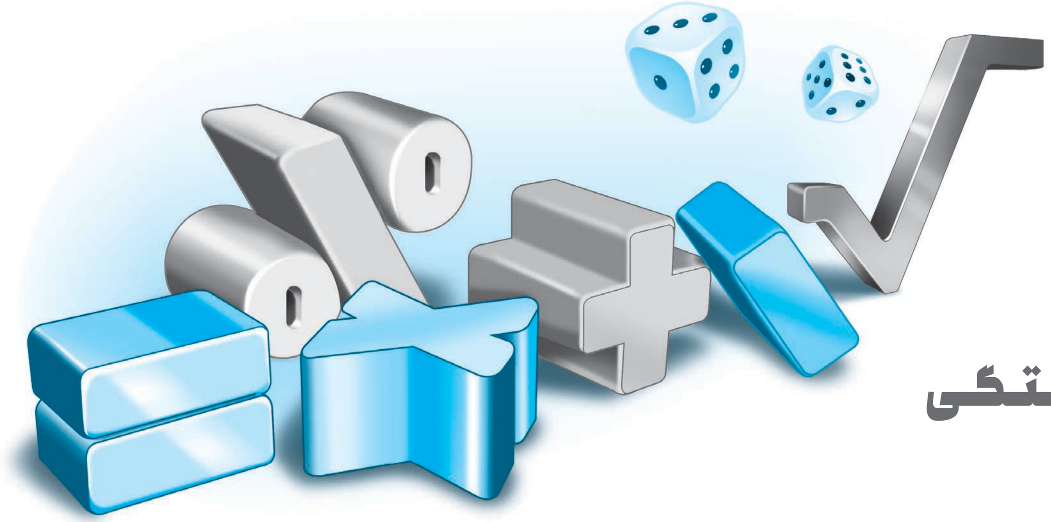
گزینهٔ (۲): اشتراک دامنه‌ها بازهٔ $(۲,۴)$ است، یعنی مثلاً برای تابع بودن به ازای $x=۳$ باید یک y بدهد: $(۳)-۱=۲\quad,\quad ۲(۳)^۲-۱=۱۷$

پس این رابطه هم تابع نیست.

گزینهٔ (۳): اشتراک دامنه‌ها بازهٔ $(۱,۳)$ است، از طرفی به‌ازای $x=۲$، ضابطهٔ اول ۲ و ضابطهٔ دوم ۳ می‌دهد، پس تابع نیست.

گزینهٔ (۴): اشتراک دامنه‌ها $x=۴$ است و با جای‌گذاری در ضابطه‌ها داریم: $-۲(۴)+۱=-۷\quad,\quad -(۴)-۳=-۷$

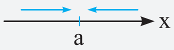
همان‌طور که می‌بینید هر دو ضابطه به‌ازای تنها عضو مشترک دامنه‌ها $(x=۴)$ مقدار y را -۷ می‌دهند، پس این رابطه، تابع است.



فصل دهم:
حد و پیوستگی

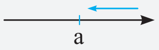
مفهوم حد

میل کردن: اگر x مدام به نقطهٔ a نزدیک شود (چه از چپ و چه از راست)، ولی هیچ‌وقت به a نرسد، می‌گوییم x به a میل می‌کند و می‌نویسیم: «$x \to a$».

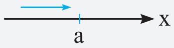


و همچنین در حالت‌های دیگر می‌توان به صورت زیر نوشت:

۱ x از سمت راست به نقطهٔ a نزدیک می‌شود: $\Rightarrow x \to a^+$



۲ x از سمت چپ به نقطهٔ a نزدیک می‌شود: $\Rightarrow x \to a^-$



مقدار حد تابع در یک نقطه: اگر با نزدیک شدن x به نقطهٔ a به اندازهٔ دلخواه (چه از چپ و چه از راست)، $f(x)$ به L نزدیک شود، می‌گوییم حد تابع $f(x)$ در $x = a$ برابر L است و می‌نویسیم:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L}$$

به راحتی قابل نتیجه‌گیری است که:

۱ $\lim_{x\to a^+} f(x) = L_1$: حد راست تابع $f(x)$ در $x = a$ برابر L_1 است. ۲ $\lim_{x\to a^-} f(x) = L_2$: حد چپ تابع $f(x)$ در $x = a$ برابر L_2 است.

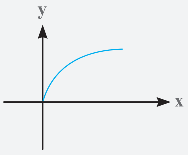
شرط وجود حد: می‌گوییم تابع $f(x)$ در $x = a$ حد دارد هرگاه حد چپ و راست در a موجود و برابر باشند:

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \text{یک عدد مشخص}}$$

تذکر ۱ برای محاسبهٔ حد تابع $f(x)$ در $x = a$، بودن یا نبودن نقطهٔ a در دامنهٔ تابع $f(x)$ اهمیتی ندارد؛ زیرا x به نقطهٔ a نزدیک می‌شود ولی هیچ‌وقت به خود a نمی‌رسد.

۲ اگر حداقل یکی از حدهای (چپ یا راست) تابع $f(x)$ در $x = a$ تعریف نشده باشد (در دامنه نباشد)، تابع در a حد ندارد.

برای مثال تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در $x = 0$ حد ندارد؛ زیرا دامنهٔ این تابع $x \ge 0$ است و اصلاً حد چپ $(x \to 0^-)$ تعریف نشده است.



مثال آموزشی

حد تابع $f(x) = \dfrac{1}{[x]}$ را در $x = 0$ بررسی کنید.

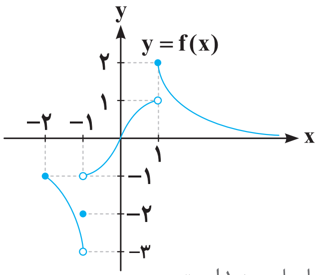
پاسخ دامنهٔ توابع کسری $\mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است، پس می‌توان نوشت: $[x] = 0 \Rightarrow 0 \le x < 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [0,1) = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$

همان‌طور که از D_f مشخص است، حد راست تابع در $x = 0$ $(x \to 0^+)$ تعریف نشده است، پس $f(x) = \dfrac{1}{[x]}$ در این نقطه حد ندارد.

محاسبهٔ حد از روی نمودار: برای محاسبهٔ $\lim_{x\to a^+} f(x)$، از نقطهٔ $x = a$ کمی جلوتر می‌رویم $(x \to a^+)$ و مقدار تابع را در این نقطه به دست می‌آوریم و همچنین برای محاسبهٔ $\lim_{x\to a^-} f(x)$، از نقطهٔ $x = a$ کمی عقب‌تر می‌رویم $(x \to a^-)$ و مقدار تابع را در این نقطه به دست می‌آوریم. در نهایت اگر $f(x)$ بخواهد در $x = a$ حد داشته باشد، باید شاخهٔ سمت چپ و راست نمودار در این نقطه به هم برسند.

مثال آموزشی

با توجه به شکل مقابل، حدهای زیر را به دست آورید.



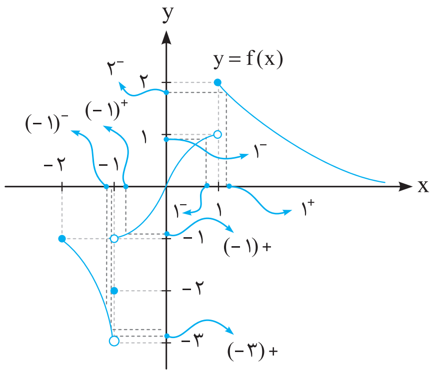
۱) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ ۲) $\lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x)$

۳) $\lim\limits_{x\to 1^+} [f(x)]$ ۴) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

۵) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

پاسخ ۱) وقتی $x \to 1^-$ می‌رود؛ یعنی کمی از نقطهٔ $x=1$ عقب‌تر می‌رویم و مقدار تابع را به‌دست می‌آوریم که حاصل حد ۱ است.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$$



۲) وقتی $x \to (-1)^-$ می‌رود؛ یعنی کمی از نقطهٔ $x=-1$ عقب‌تر می‌رویم و مقدار تابع را به‌دست می‌آوریم که حاصل حد، ۳- است.

$$\lim_{x\to (-1)^-} f(x) = -3$$

۳) وقتی $x \to 1^+$ می‌رود؛ یعنی کمی از نقطهٔ $x=1$ جلوتر می‌رویم و مقدار تابع را به‌دست می‌آوریم که حاصل حد ۲ است، اما به‌صورت دقیق 2^- است، پس $\lim\limits_{x\to 1^+} [f(x)] = [2^-] = 1$.

۴) تابع $f(x)$ در $x=-2$ حد ندارد، زیرا در این نقطه شاخهٔ سمت چپ برای ۲- نداریم؛ یعنی $x \to (-2)^-$ وجود ندارد.

۵) وقتی $x \to -1$ می‌رود باید حد را در دو حالتی که $x \to (-1)^+$ و $x \to (-1)^-$ بررسی کنیم. با توجه به نمودار می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to (-1)^+} f(x) = -1 \quad , \quad \lim_{x\to (-1)^-} f(x) = -3$$

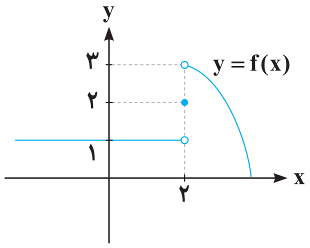
پس f در $x=-1$ حد ندارد.

چنتا تست باحال از تشخیص حد توابع از روی نمودار.

۱ **با توجه به نمودار مقابل، حاصل $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) - f(2) - \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ کدام است؟**

گزینهٔ «۳»

(مشابه متن کتاب درسی)



۱) ۶

۲) ۱

۳) صفر

۴) ۲

پاسخ: با توجه به نمودار بالا، مشاهده می‌شود که:

$$f(2) = 2, \ \lim_{x\to 2^+} f(x) = 3, \ \lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$$

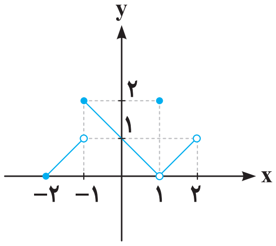
پس می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) - f(2) - \lim_{x\to 2^-} f(x) = 3 - 2 - 1 = 0$$

۲ **با توجه به نمودار مقابل، کدام گزینهٔ زیر نادرست است؟**

گزینهٔ «۴»

(مشابه تمرین کتاب درسی)



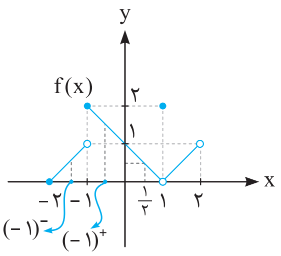
۱) $\lim\limits_{x\to (-1)^+} [f(x)] = 1$

۲) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) =$ وجود ندارد

۳) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} [f(x)] = 0$

۴) $\lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x) + \lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x) = 2$

پاسخ: **بررسی گزینه‌ها:**



گزینهٔ (۱): وقتی $x \to (-1)^+$، از نقطهٔ $x=-1$ کمی جلوتر می‌رویم و مقدار تابع را به‌دست می‌آوریم که حاصل، 2^- است. پس می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to (-1)^+} [f(x)] = [2^-] = 1$$

پس گزینهٔ (۱)، درست است.

گزینهٔ (۲): این گزینه درست است، زیرا با توجه به نمودار تابع $f(x)$، شاخهٔ سمت چپ برای f در $x=-۲$ نداریم، پس $\lim\limits_{x\to -۲} f(x)$ وجود ندارد.

گزینهٔ (۳): وقتی $x \to \frac{۱}{۲}$ (چه از چپ و چه از راست)، حد تابع عددی بین صفر و ۱ است، پس می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} [f(x)] = [\text{عددی بین صفر و یک}] = ۰$$

پس این گزینه هم درست است.

گزینهٔ (۴): این گزینه نادرست است، زیرا:

$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x) + \lim_{x\to(-۱)^-} f(x) = ۲+۱ = ۳$$

۳ **کدام تابع داده شده در نقطهٔ $x=۱$ حد دارد؟** «گزینهٔ ۴»

۱) $y=\sqrt{x^۲-۱}$ ۲) $y=\frac{|x-۱|}{x-۱}$ ۳) $y=\frac{۱}{[x]}$ ۴) $y=\sqrt{|x-۱|}$

پاسخ: برای حد داشتن در $x=۱$، ابتدا باید شاخهٔ چپ و راست تابع در این نقطه وجود داشته باشد.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

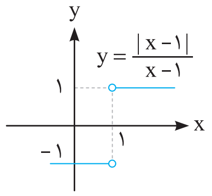
$$y=\sqrt{x^۲-۱} \xRightarrow{\text{دامنه}} x^۲-۱\geq ۰ \Rightarrow x^۲\geq ۱ \xRightarrow{\text{جذر}} |x|\geq ۱ \Rightarrow x\geq ۱ \text{ یا } x\leq -۱$$

همان‌طور که می‌بینید شاخهٔ سمت چپ در $x=۱$ وجود ندارد، پس تابع $y=\sqrt{x^۲-۱}$ در $x=۱$ حد ندارد.

گزینهٔ (۲):

$$y=\frac{|x-۱|}{x-۱} \Rightarrow y=\begin{cases} \frac{x-۱}{x-۱}=۱ & ; \ x>۱ \\ \frac{-(x-۱)}{x-۱}=-۱ & ; \ x<۱ \end{cases}$$

پس نمودار این تابع به صورت مقابل است:



$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{|x-۱|}{x-۱}=۱,\ \lim_{x\to ۱^-}\frac{|x-۱|}{x-۱}=-۱$$

پس تابع $y=\frac{|x-۱|}{x-۱}$ در $x=۱$ حد ندارد.

گزینهٔ (۳):

$$y=\frac{۱}{[x]} \xRightarrow{\text{دامنه}} D_y:[x]=۰ \Rightarrow ۰\leq x<۱ \Rightarrow D_y=\mathbb{R}-[۰,۱)=(-\infty,۰)\cup[۱,+\infty)$$

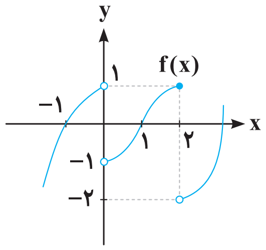
برای این تابع، شاخهٔ چپ در $x=۱$ وجود ندارد، پس تابع $y=\frac{۱}{[x]}$ در $x=۱$ حد ندارد.

گزینهٔ (۴):

$$y=\sqrt{|x-۱|} \xRightarrow{\text{دامنه}} D_y: |x-۱|\geq ۰$$

می‌دانیم قدر مطلق همواره بزرگ‌تر و مساوی صفر است، پس دامنهٔ تابع $y=\sqrt{|x-۱|}$ برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد و همچنین حاصل حد تابع در $x=۱$ صفر است.

۴ **نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است. حاصل $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(-x+۱)+\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x-۱)$ کدام است؟** «گزینهٔ ۲»



۱) صفر

۲) ۲

۳) -۱

۴) -۳

پاسخ: **روش اول:** برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(-x+۱)+\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x-۱)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x-۱) \Rightarrow x<۱ \xRightarrow{-۱} x-۱<۰ \Rightarrow x-۱\to ۰^-: \lim_{x\to ۱^-} f(x-۱)=\lim_{x\to ۰^-} f(x)$$

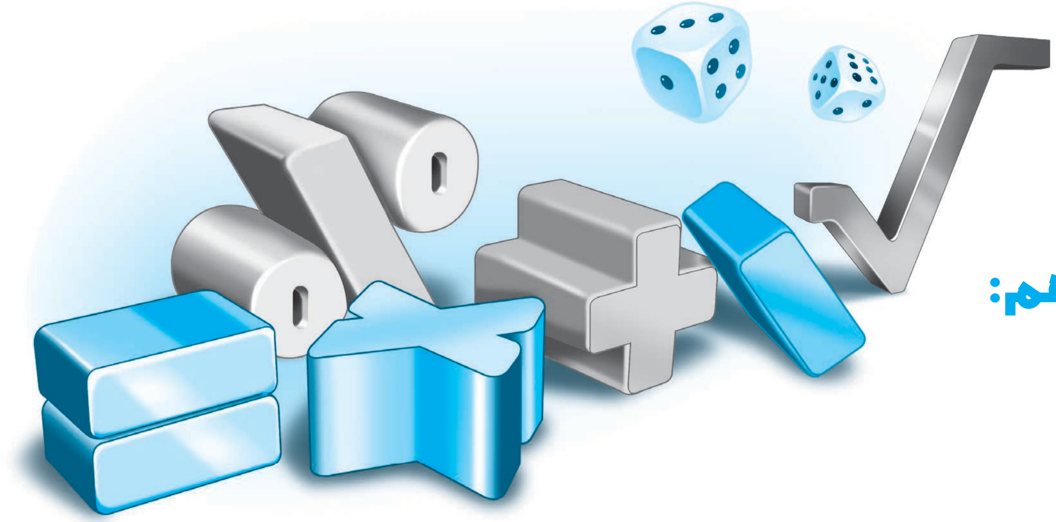
که با توجه به نمودار داده شده حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x-۱)=۱$ است.

$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(-x+۱): x\to(-۱)^+ \Rightarrow x>-۱ \xRightarrow{\times(-۱)} -x<۱ \xRightarrow{+۱} -x+۱<۲ \Rightarrow -x+۱\to ۲^-: \lim_{x\to(-۱)^+} f(-x+۱)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)$$

با توجه به نمودار حاصل $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(-x+۱)=۱$ است، پس داریم:

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x-۱)+\lim_{x\to(-۱)^+} f(-x+۱)=۱+۱=۲$$

روش دوم: در محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x-۱)$، می‌توان x را تقریباً $۰/۹۹$ در نظر گرفت. پس باید $f(۰/۹۹-۱)=f(-۰/۰۱)$ را به دست آوریم که از روی نمودار این مقدار تقریباً ۱ است. همچنین برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(-x+۱)$، می‌توان x را $-۰/۹۹$ در نظر گرفت، پس باید $f(-(-۰/۹۹)+۱)=f(۱/۹۹)$ را به دست آوریم که تقریباً این مقدار هم ۱ است.



فصل چهاردهم:
احتمال

فضای نمونه‌ای و پیشامد

پدیدهٔ تصادفی: پدیده‌ای که از همهٔ حالت‌های آن خبر داریم اما از نتیجهٔ دقیق آن اطلاعی نداریم.

فضای نمونه‌ای: مجموعهٔ همهٔ نتایج ممکن از یک پدیدهٔ تصادفی را فضای نمونه‌ای می‌گوییم و آن را با S نمایش می‌دهیم.

مثلاً فضای نمونه‌ای در پرتاب یک تاس به‌صورت $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ است.

برآمد: به هر عضو از فضای نمونه‌ای (هر یک از نتایج ممکن یک آزمایش) یک برآمد می‌گوییم. مثلاً ۶ آمدن تاس یک برآمد است.

تذکر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را با $n(S)$ نمایش می‌دهیم.

نکات تعداد اعضای برخی از فضاهای نمونه‌ای مهم عبارتند از:

۱ پرتاب k سکه یا k بار پرتاب یک سکه، برابر $n(S)=۲^k$ است.

۲ پرتاب k تاس یا k بار پرتاب یک تاس، برابر $n(S)=۶^k$ است.

۳ جنسیت فرزندان یک خانواده با k فرزند، برابر $n(S)=۲^k$ است.

تذکر برای شمردن تعداد اعضای فضای نمونه‌ای خود را به روابط محدود نمی‌کنیم و فقط کافی است به کمک آنالیز ترکیبی (اصل جمع و ضرب، جایگشت و ترکیب و ...) تعداد حالت‌های ممکن را بشماریم مثلاً برای انتخاب k شیٔ از n شیٔ متمایز، $\binom{n}{k}$ انتخاب داریم.

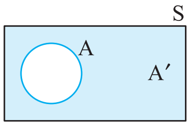
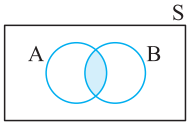
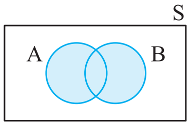
پیشامد: به هر زیر مجموعه از فضای نمونه‌ای یک پیشامد می‌گوییم.

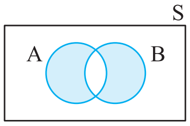
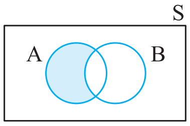
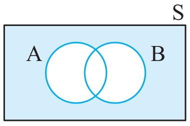
مثلاً در پرتاب یک تاس پیشامد ظاهر شدن عدد زوج برابر $A=\{۲,۴,۶\}$ است.

نکات ۱ تعداد پیشامدهای ممکن بر روی یک فضای نمونه‌ای n عضوی ۲^n است.

۲ پیشامد تهی را پیشامد غیر ممکن و پیشامد S را پیشامد حتمی می‌نامیم.

اعمال روی پیشامدها

نمودار وِن	رابطه	نام مجموعه	پیشامد
	$n(A')=n(S)-n(A)$	A'	A رخ ندهد.
	$n(A\cap B)$	$A\cap B$	هر دو رخ بدهند.
	$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$	$A\cup B$	حداقل یکی رخ بدهد.

نمودار وِن	رابطه	نام مجموعه	پیشامد
	$n((A-B)\cup(B-A))=n(A)+n(B)-2n(A\cap B)$	$(A-B)\cup(B-A)$	فقط یکی رخ بدهد.
	$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$	$A-B$	فقط A رخ بدهد.
	$n(A\cup B)'=n(S)-n(A\cup B)$	$(A\cup B)'=A'\cap B'$	هیچ‌کدام رخ ندهد.

پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم هرگاه $A\cap B=\varnothing$ باشد. که در این صورت ($n(A\cap B)=0$) است.

۱ دو سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر هر دو رو آمدند، یک تاس پرتاب می‌کنیم در غیر این صورت سه سکهٔ دیگر پرتاب می‌کنیم. تعداد اعضای فضای نمونهٔ این آزمایش کدام است؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

گزینهٔ «۲»

۱) ۴۰ ۲) ۳۰ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

پاسخ: در این آزمایش تصادفی دو حالت داریم:

۱) دو سکهٔ مرحلهٔ اول رو بیایند: $1\times6=6$ (تاس) ، $\{(ر,ر)\}$

۲) دو سکهٔ مرحلهٔ اول رو نیایند: $3\times8=24$ (پرتاب ۳ سکه) ، $\{(ر,پ),(پ,ر),(پ,پ)\}$

پس طبق اصل جمع $6+24=30$ حالت برای اعضای فضای نمونه‌ای رخ می‌دهد.

۲ در یک خانوادهٔ ۵ فرزندی، اگر A پیشامد آن باشد که خانواده ۳ پسر داشته باشد و B پیشامد آن باشد که خانواده حداقل ۳ دختر داشته باشد، تعداد اعضای پیشامد $A\cap B'$ کدام است؟

گزینهٔ «۱»

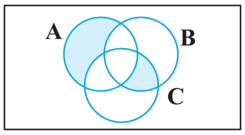
۱) ۱۰ ۲) ۱۶ ۳) ۱۴ ۴) صفر

پاسخ: برای مشخص کردن تعداد اعضای پیشامد A کافی است مشخص کنیم کدام‌یک از این ۵ فرزند، پسر هستند. (مثلاً فرزند اول، دوم و چهارم) که برای این کار $n(A)=\binom{5}{3}=10$ حالت داریم. حالا از آن‌جایی‌که A و B دو پیشامد ناسازگارند (در خانوادهٔ ۵ فرزندی نمی‌توانیم ۳ پسر و حداقل ۳ دختر داشته باشیم)، پس $n(A\cap B)=0$ است. بنابراین داریم:

$$n(A\cap B')=n(A)-n(A\cap B)\xRightarrow{n(A\cap B)=0}n(A\cap B')=n(A)=10$$

۳ ★ در نمودار شکل زیر، پیشامدهای A، B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S هستند. قسمت رنگی بیانگر کدام پیشامد است؟

گزینهٔ «۲»



۱) پیشامد A رخ بدهد یا پیشامدهای B و C با هم رخ بدهند.

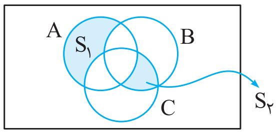
۲) فقط پیشامد A رخ بدهد یا فقط B و C رخ بدهند.

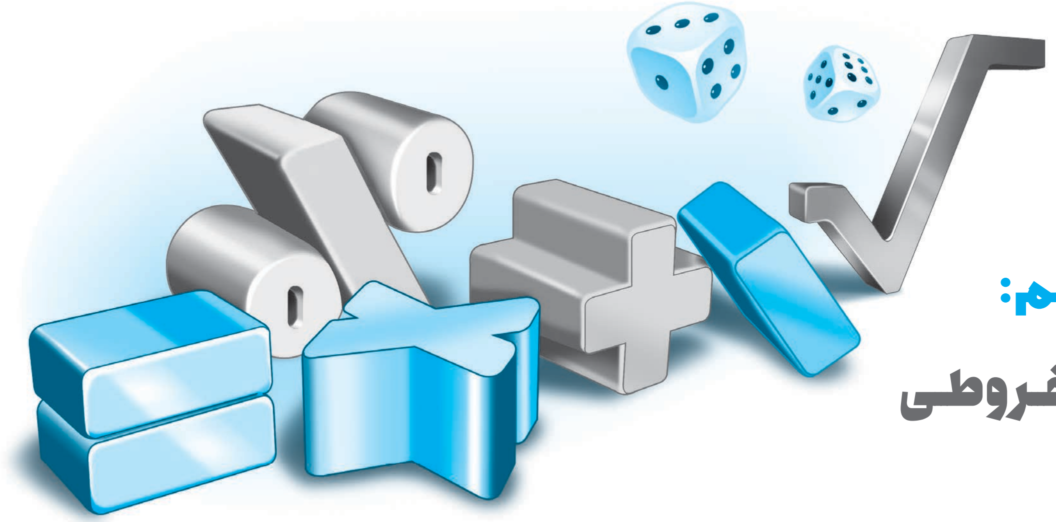
۳) فقط پیشامد A رخ بدهد یا B و C رخ بدهند.

۴) فقط A یا B یا C رخ بدهد.

پاسخ: همان‌طور که از شکل زیر می‌بینید در ناحیهٔ رنگی S_1 فقط قسمتی از A را نشان می‌دهد که با B و C اشتراکی ندارد. (فقط پیشامد A رخ بدهد.) و ناحیهٔ رنگی S_2 مربوط به اشتراک B و C است که با A اشتراک ندارد (فقط B و C رخ بدهند.)

پس پاسخ تست، گزینهٔ (۲) است.





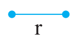
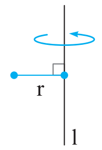
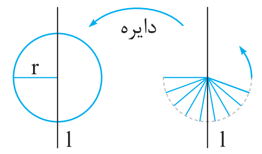
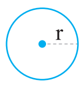
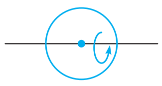
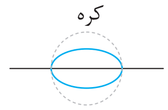
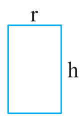
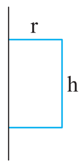
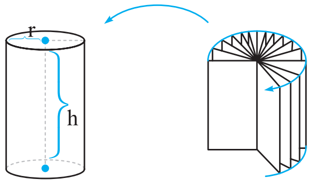
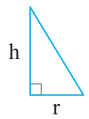
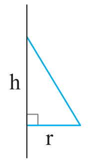
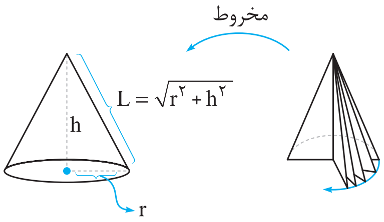
فصل هجدهم:
مقاطع مخروطی

دوران

در این فصل ابتدا با مسائل مربوط به دوران و برش آشنا می‌شویم:

۱ **مسائل دوران:** از دوران (چرخاندن) شکل‌های هندسی مختلف، حول یک محور، اجسام هندسی دارای سطح (دو بعدی) و حجم (سه بعدی) به‌وجود می‌آیند.

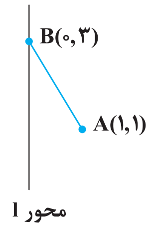
چند دوران مهم:

شکل هندسی اولیه	محور	شکل حاصل از دوران	فرمول حجم	فرمول مساحت جانبی
پاره خط به طول r: 	خط l عمود بر پاره‌خط 		دایره دو بعدی است و مساحت آن $S=\pi r^{2}$ است.	
دایره به شعاع r: 	قطر دایره 		$V=\frac{4}{3}\pi r^{3}$	$S=4\pi r^{2}$
مستطیل (مربع) 	یکی از اضلاع 		$V=\pi r^{2}h$	$S=2\pi rh+2\pi r^{2}$
مثلث قائم الزاویه 	یکی از اضلاع زاویهٔ قائمه 		$V=\frac{1}{3}\pi r^{2}h$	$S=\pi rL+\pi r^{2}$

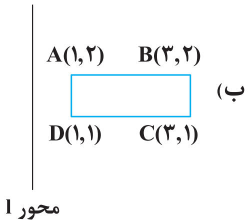
مثال آموزشی

< در هر یک از دوران‌های زیر، شکل حاصل را مشخص کنید و سپس حجم آن را به‌دست آورید.

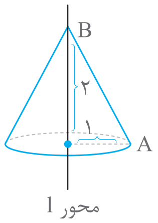
الف)



ب)

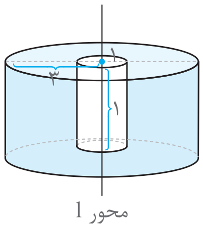


پاسخ الف) از دوران پاره‌خط AB حول محور l یک مخروط به شعاع قاعدهٔ ۱ و ارتفاع ۲ به‌دست می‌آید که حجم این مخروط برابر است با:



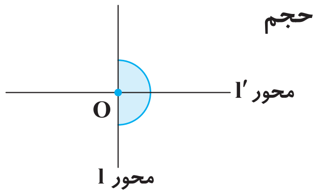
$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h \xRightarrow{r=۱,h=۲} V = \frac{۱}{۳}\pi(۱)^۲ \times ۲ = \frac{۲\pi}{۳}$$

ب) از دوران مستطیل ABCD حول محور l قسمتی از فضای بین دو استوانه به‌دست می‌آید (پیراشکی) که برای محاسبهٔ حجم آن کافی است حجم دو استوانه را از هم کم کنیم. (حجم استوانه $\pi r^۲ h$ است)



$$V_{\text{پیراشکی}} = V_{\text{استوانه بزرگ}} - V_{\text{استوانه کوچک}} \xrightarrow[\text{شعاع استوانه بزرگ ۳ و شعاع استوانه کوچک ۱}]{\text{ارتفاع هر ۲ استوانه یک است}} \pi(۳)^۲(۱) - \pi(۱)^۲(۱) = ۹\pi - \pi = ۸\pi$$

۱ **مطابق شکل مقابل، نیم‌دایره به قطر ۱۲ را یک بار حول محور l و بار دیگر حول محور l′ دوران می‌دهیم. نسبت حجم شکل‌های به‌وجود آمده کدام می‌تواند باشد؟**

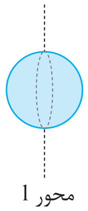


گزینهٔ «۳»

۱) $\frac{۱}{۴}$ ☐ ۲) ۳ ☐

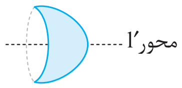
۳) $\frac{۱}{۲}$ ☐ ۴) $\frac{۲}{۳}$ ☐

پاسخ: از دوران نیم‌دایره حول محور l، کرهٔ مقابل به‌دست می‌آید که حجم آن برابر است با:



$$\text{قطر} = ۱۲ \Rightarrow r = ۶\ ,\ V = \frac{۴}{۳}\pi(r)^۳ = \frac{۴}{۳}\pi(۶)^۳ = ۲۸۸\pi$$

و همچنین از دوران نیم‌دایره حول محور l′ یک نیم کره به‌دست می‌آید که حجم آن برابر است با:



$$r = ۶, V = \frac{۱}{۲}(\frac{۴}{۳}\pi r^۳) = \frac{۴}{۶} \times \pi(۶)^۳ = ۱۴۴\pi$$

پس نسبت حجم‌های به‌دست آمده ۲ و یا $\frac{۱}{۲}$ است که طبق گزینه‌ها $\frac{۱}{۲}$ قابل قبول است.

تذکر البته با دوران نیم‌دایره، حول دو محور l و l′ به‌ترتیب کره و نیم‌کره به‌دست می‌آید، پس نسبت حجم‌ها ۲ و یا $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد.

۲ **یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه به قاعده‌های ۲ و ۵ و ساق قائم ۳ واحد را حول ساق قائم دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل کدام است؟** *(ریاضی داخل ۹۵)*

گزینهٔ «۲»

۱) ۳۶π ☐ ۲) ۳۸π ☐ ۳) ۳۹π ☐ ۴) ۴۰π ☐

پاسخ: با توجه به شکل زیر، از دوران ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه حول ساق قائمه، یک مخروط ناقص به‌دست می‌آید که برای به‌دست آوردن حجم آن، حجم مخروط بزرگ را منهای حجم مخروط بالایی می‌کنیم: