

کار و کنکور

+

کتاب کار ریاضی (۱)

رشته‌های ریاضی و فیزیک و علوم تجربی

پایه دهم

مؤلفان: بهنام بناپور - حامد فرضعلییک - نیما نام‌آوری

تقدیر به

اساتید گران سنگ و ارجمند:

استاد عمیدرضا شیراوند

یادگار نسل طلایی معلمان ایران زمین، مرد معرفت‌های فراموش‌شده

استاد امین کامیاب

معنای مہم‌م فرهنگ و نماد عطف و منش و فشوع

استاد حسین کریمی

دبیر دوست داشتنی و عزیز مثلثات دبیرستان کمال

مقدمه

سه تفنگدار رمانی است حاوی قهرمانی‌ها و دل‌آوری‌های سه تن از تفنگداران لویی سیزدهم به نام‌های آتوس، پورتوس و آرامیس

و این کتاب دست‌نوشته‌ای است حاوی همراهی‌ها و همدلی‌های سه‌تن از تفنگداران ریاضی دهم به نام‌های بهنام، حامد و نیما. سه تفنگدار با هم پیمان دوستی بستند و در مهلکه‌ها و مخاطرات یار یکدیگر بودند و این کتاب نمایش دوستی و رفاقت سه رفیق است و گذرشان از بازی‌های روزگار.

سه تفنگدار بخشی از تاریخ فرانسه است و این کتاب بخشی از زندگی ما؛ تفنگداران بی تفنگ! و اما مشخصات این کتاب:

در ابتدای هر فصل به ایجاز آموزشی مختصر و مفید ارائه داده‌ایم.

آنگاه آرام و شمرده و منطبق با بخش‌های کتاب درسی سؤالاتی منطقی (و نه خاص) مطرح کرده‌ایم. در انتهای کتاب سر صبر و حوصله برایتان پاسخ‌های تشریحی و کامل سؤالات را نوشته‌ایم.

سه نمونه آزمون ترم اول و سه نمونه آزمون ترم دوم با پاسخ در کتاب گنجانده‌ایم و در آخر متناسب با نام این کتاب یعنی کار و کنکور در بخشی به نام فاز کنکور فصل به فصل و بخش به بخش سؤالات کنکور مرتبط را با چیدمانی مناسب چیده‌ایم تا شما عزیزان به آرامی با سؤالات کنکور مرتبط با پایه دهم آشنا شوید.

عمده زحمات این کتاب به دوش یکی از تفنگدارها یعنی حامد عزیز بوده است دوست خوشرو و متواضع ما و من و نیما هم او را یاری داده‌ایم.

امیدوارم که کتاب مورد توجه دبیران ارجمند و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد.

در پایان از جناب آقای دهقانی مدیر ارجمند انتشارات مبتکران، جناب آقای خدایار مبین، مدیر محترم و متواضع واحد تایپ، از سرکار خانم سیما صمدی که حروفچینی و صفحه‌آرایی این اثر را به شایستگی به سامان رساندند و نیز سرکار خانم مینا غلام احمدی گرافیسست محترم صمیمانه سپاسگزاریم.

راستی! درست مانند سه تار که ۴ سیم داره سه تفنگدار هم ۴ نفر بودند باور کنید... (کتاب بفونین)

قربون صفاتون - بهناه بناپور

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۷	فصل اول مجموعه، الگو و دنباله
۱۹	فصل دوم مثلثات
۳۱	فصل سوم توان‌های گویا و عبارت‌های جبری
۴۱	فصل چهارم معادله‌ها و نامعادله‌ها
۵۳	نمونه سوالات نیم‌سال اول
۶۷	فصل پنجم تابع
۷۷	فصل ششم شمارش بدون شمردن
۸۹	فصل هفتم آمار و احتمال
۹۷	نمونه سوالات نیم‌سال دوم
۱۱۱	پاسخنامه تشریحی
۲۰۱	پرسش‌های چهارگزینه‌ای فاز کنکور
۲۱۴	پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فاز کنکور

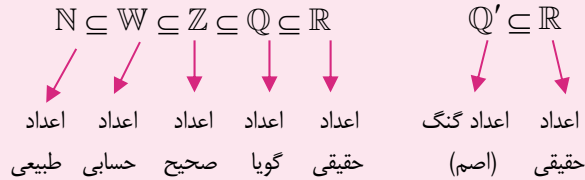
فصل ١

مجموعه، الگو و دنباله

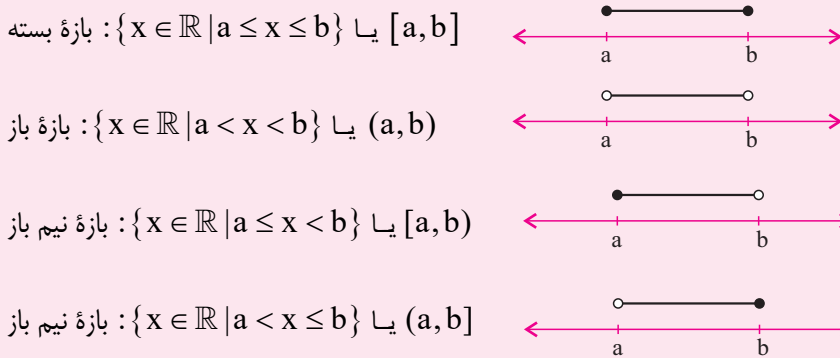
مجموعه، الگو و دنباله

درسنامه فصل ۱

♦ مجموعه‌های معروف به شکل زیر با هم در ارتباط هستند:



♦ بازه‌ها به شکل زیر طبقه‌بندی می‌شوند:



بازه‌ای مانند $x < 3$ را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:



♦ عدد اصلی مجموعه A یا $n(A)$ تعداد اعضای مجموعه A می‌باشد.

♦ مجموعه‌ای که تعداد اعضایش با عددی حسابی قابل بیان باشد، مجموعه‌ای متناهی می‌نامیم، مانند:

$$A = \{4, 2, 3\} \Rightarrow n(A) = 3$$

♦ مجموعه‌ای که متناهی نباشد، نامتناهی نامیده می‌شود. زیرا تعداد اعضایش با یک عدد حسابی قابل بیان نیست، مانند:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

♦ مجموعه‌ای را که تمام مجموعه‌های مورد بحث زیرمجموعه آن باشند، مجموعه مرجع می‌نامیم و با U نمایش می‌دهیم و همواره

$$A \cup U = U, \quad A \cap U = A$$

داریم:

♦ اگر U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آن‌گاه $U - A$ را متمم A می‌نامند و با A' نمایش می‌دهند و روابط زیر بین A و A'

$$A \cap A' = \emptyset, \quad A \cup A' = U$$

برقرار است:

♦ به هر دو مجموعه مانند A و B که عضو مشترکی نداشته باشند، دو مجموعه جدا از هم می‌گوییم.

♦ رابطه زیر بین اجتماع و اشتراک دو مجموعه برقرار است:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

♦ برخی قوانین جبر مجموعه‌ها:

$$\left. \begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \\ A \cup B &= B \cup A \end{aligned} \right\}$$

(۱) جابجایی:

$$A - B = A \cap B'$$

(۲) تعریف تفاضل (تبدیل تفاضل به اشتراک):

$$\left. \begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \\ A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \end{aligned} \right\}$$

(۳) شرکت‌پذیری:

$$\left. \begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned} \right\}$$

(۴) توزیع‌پذیری (بفشی):

$$\left. \begin{aligned} (A \cap B)' &= A' \cup B' \\ (A \cup B)' &= A' \cap B' \end{aligned} \right\}$$

(۵) دمورگان:

♦ الگوهایی که جمله عمومی آن به صورت $t_n = an + b$ است را الگوهای خطی می‌نامیم ($a, b \in \mathbb{R}$). شکل این الگوها به صورت یک خط است. الگوهایی که خطی نباشد غیرخطی نامیده می‌شوند.

♦ هر تعداد عدد که پشت سر هم قرار می‌گیرند را یک دنباله می‌نامیم، این اعداد جملات دنباله نامیده می‌شوند.

♦ هر دنباله به شکل $t_n = an^2 + bn + c$ را یک دنباله درجه ۲ می‌نامند، مانند $t_n = n^2 + 4n + 5$.

♦ دنباله $1, 3, 6, 10, \dots$ را دنباله مثلثی می‌نامند و جمله عمومی آن $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ است.

♦ دنباله‌ای که در آن هر جمله (غیر از جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست آید، یک دنباله حسابی می‌گویند. به آن عدد ثابت قدرنسبت می‌گویند و آن را با d نمایش می‌دهند.

♦ جمله عمومی دنباله حسابی $t_n = t_1 + (n-1)d$ می‌باشد.

♦ اگر t_m و t_n جملات m ام و n ام یک دنباله حسابی باشد، برای یافتن قدرنسبت می‌توان از فرمول $d = \frac{t_m - t_n}{m - n}$ استفاده کرد.

♦ اگر سه جمله a, b, c تشکیل دنباله حسابی بدهند، b را واسطه حسابی a و c می‌نامند و آن را از رابطه $2b = a + c$ به دست می‌آورند.

♦ دنباله هندسی دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت به دست می‌آید، این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله هندسی می‌نامند و با q نمایش می‌دهند.

♦ جمله عمومی دنباله هندسی به شکل $t_n = t_1 r^{n-1}$ می‌باشد.

♦ اگر t_m و t_n جملات m ام و n ام یک دنباله هندسی باشند، برای یافتن قدرنسبت می‌توان از فرمول $q = \sqrt[m-n]{\frac{t_m}{t_n}}$ استفاده

کرد. (اگر $m-n$ زوج باشد، $q = \pm \sqrt[m-n]{\frac{t_m}{t_n}}$ می‌باشد)

♦ اگر سه جمله a, b, c تشکیل دنباله هندسی بدهند، b را واسطه هندسی a و c می‌نامند و آن را از رابطه $b^2 = ac$ به دست می‌آورند.

بخش اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۱. درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف $1 \in (0, 2]$

د $(-2, 3] \subseteq [-2, 4)$

ب $\frac{3}{4} \in [-1, \frac{1}{4}]$

ه $\emptyset \subseteq (1, 7]$

ج $\{0, 1\} \subseteq (0, 1)$

و $(-1, 1) \in [-2, 2]$

۲. مجموعه‌های زیر را به صورت اجتماعی از دو یا چند بازه بنویسید و آن‌ها را روی محور اعداد نمایش دهید.

الف $\mathbb{R} - \{-7\}$

ب $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$

ج $\mathbb{R} - [-4, 2)$

۳. حاصل عبارات زیر را به صورت بازه مشخص کرده و نوع بازه آن‌ها را تعیین کنید.

الف $[-7, 2) \cup (0, 5)$

ب $[3, +\infty) - (-1, 6]$

ج $(-11, 4] \cap [-4, 9)$

۴. تعداد عضوهای مجموعه‌های زیر را تعیین کرده و در صورت امکان روی محور اعداد نمایش دهید.

الف $(1, 2] \cap [2, 3)$

ب $(-\infty, 8) \cap (-2, 2]$

ج $(-10, 1] \cap (1, 5]$

۵. اگر $A = \{x \mid x < 3\}$ ، $B = \{x \mid x \geq -1\}$ و $C = \{x \mid -3 \leq x < 4\}$ باشند، حاصل عبارات زیر را به صورت بازه مشخص کرده و روی محور اعداد نمایش دهید.

الف $(B - A) \cap C$

ب $(A \cap C) \cup B$

ج $A \cap (C - B)$

۶. محدوده مقادیر m را بیابید به گونه‌ای که بازه $(m - 3, 2m + 5)$ شامل عدد ۱ باشد.

۷. عدد طبیعی n را بیابید به گونه‌ای که بازه $(-7, n^3]$ شامل دقیقاً ۵ عدد طبیعی مربع کامل باشد.

۸. متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعهٔ شماره‌های طبیعی عدد 27^{17}

ب) مجموعهٔ مضارب طبیعی عدد ۱۷

ج) مجموعهٔ اعداد اول دو رقمی

د) مجموعهٔ اعداد گویای بین -1 و صفر

هـ) اعضای مجموعهٔ $(1, -\frac{7}{3}]$

و) اعضای مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$

ز) اعضای مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -1\}$

ح) مجموعه خودروهای شهر تهران

ط) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}'$

ی) $\mathbb{W} - \mathbb{N}$

ک) مجموعهٔ اعداد صحیح بازهٔ $(3, 4)$

ل) اعضای مجموعهٔ $\{x \mid |x| \geq -3\}$

۹. دو مجموعهٔ نامتناهی مثال بزنید که:

الف) تفاضل آن‌ها متناهی باشد.

ب) تفاضل آن‌ها نامتناهی باشد.

۱۰. اگر $A \subset B$ ، در مورد متناهی و نامتناهی بودن A و B چه می‌توان گفت؟

۱۱. اگر A و B دو مجموعهٔ نامتناهی باشند، آیا اجتماع و اشتراک آن‌ها همواره نامتناهی است؟

۱۲. دو مجموعهٔ نامتناهی مثال بزنید که جدا از هم باشند و اجتماعشان \mathbb{R} شود. آیا می‌توان دو مجموعهٔ نامتناهی جدا از هم مثال زد که اجتماعشان \mathbb{N} شود؟

۱۳. درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر $A \cap B$ متناهی باشد، A و B متناهی‌اند.

ب) اگر $A \cup B$ متناهی باشد، A و B متناهی‌اند.

ج) اگر $A \cap B$ نامتناهی باشد، حداقل یکی از A و B نامتناهی‌اند.

د) اگر $A \cup B$ نامتناهی باشد، $A \cap B$ هم نامتناهی است.

۱۴. مجموعه مضارب طبیعی عدد ۷ را در نظر بگیرید.

الف) یک زیرمجموعه متناهی از آن بنویسید.

ب) دو زیرمجموعه نامتناهی از آن بنویسید که جدا از هم باشند.

ج) دو زیرمجموعه نامتناهی از آن بنویسید به طوری که یکی زیرمجموعه دیگری باشد.

بخش دوم: متمم مجموعه و تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

۱۵. متمم مجموعه‌های زیر را مشخص کنید (مجموعه مرجع هر قسمت، داخل پرانتز نوشته شده است).

الف) مجموعه اعداد طبیعی زوج (\mathbb{N})

ب) مجموعه اعداد حسابی (\mathbb{Z})

ج) $(2, +\infty)$ (\mathbb{R})

د) $[-9, 9]$ (\mathbb{R})

ه) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 5\}$ (\mathbb{W})

۱۶. سمت راست تساوی‌های زیر را کامل کنید.

الف) $(U - A) \cap A$

ب) $(A - A') \cap U$

ج) $(A \cup B') \cap U'$

د) $(A \cap A')' - A'$

۱۷. اگر $A \subset B$ ، در مورد A' و B' چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

۱۸. مجموعه اعداد طبیعی را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و برای هر قسمت مجموعه‌ای مانند A مثال بزنید که:

الف) A و A' هر دو نامتناهی باشند.

ب) A نامتناهی و A' متناهی باشد.

ج) A متناهی و A' نامتناهی باشد.

۱۹. برای هر دو مجموعه دلخواه A و B ثابت کنید: $A - B = B' - A'$.

۲۰. مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و فرض کنید A مجموعه اعداد زوج، B

مجموعه اعداد اول و C مجموعه مضارب ۳ هستند. مجموعه‌های زیر را با اعضا مشخص کنید.

الف) $B' \cap A$

ب) $C' - B$

ج) $A' \cup C'$

۲۱. اگر $A \cap B' = A$ ، $B \cap A'$ با چه مجموعه‌ای برابر است؟ چرا؟

$$(A \cup \emptyset)' \cap (U' \cap A)' = (B \cap B') - A$$

۲۲. ثابت کنید:

۲۳. درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

الف $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

ب $n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B)$

۲۴. در یک کلاس ۳۷ نفری، ۹ نفر هیچ‌گونه فعالیت غیردرسی ندارند. در این کلاس ۱۷ نفر عضو تیم‌های ورزشی و ۱۴ نفر نیز عضو گروه‌های هنری هستند.

الف چند نفر حداقل یکی از فعالیت‌های غیردرسی را انجام می‌دهند؟

ب چند نفر فقط در تیم‌های ورزشی حضور دارند؟

۲۵. در یک اتوبوس مسافرتی با ۵۰ مسافر، یک نوع روزنامه ورزشی و یک مجله خانوادگی به تعداد کافی وجود دارد. اگر در طول سفر ۲۱ نفر روزنامه ورزشی، ۱۵ نفر مجله و ۷ نفر هر دو را مطالعه کنند.

الف چند نفر نه مجله و نه روزنامه ورزشی خوانده‌اند؟

ب چند نفر روزنامه ورزشی نخوانده‌اند؟

ج چند نفر فقط یکی از این دو را مطالعه کرده‌اند؟

۲۶. به اطلاعات زیر در مورد ۱۲۰ دانشجو توجه کنید:

(۱) ۶۵ نفر به زبان فرانسوی صحبت می‌کنند. (۲) ۴۵ نفر به زبان آلمانی صحبت می‌کنند.

(۳) ۴۲ نفر به زبان روسی صحبت می‌کنند. (۴) ۲۰ نفر به هر دو زبان فرانسه و آلمانی صحبت می‌کنند.

(۵) ۲۵ نفر به هر دو زبان فرانسه و روسی صحبت می‌کنند. (۶) ۱۵ نفر به هر دو زبان آلمانی و روسی صحبت می‌کنند.

(۷) ۸ نفر به هر ۳ زبان فرانسه، روسی و آلمانی صحبت می‌کنند.

الف چند نفر از دانشجویان به هیچ‌کدام از زبان‌های فرانسه، آلمانی یا روسی صحبت نمی‌کنند؟

ب چند نفر از دانشجویان دقیقاً به یک زبان صحبت می‌کنند؟

ج چند نفر از دانشجویان دقیقاً به دو زبان صحبت می‌کنند؟

د چند نفر از دانشجویان به زبان فرانسه یا آلمانی صحبت می‌کنند ولی به زبان روسی صحبت نمی‌کنند؟

۲۷. اگر $B - A = B$ ، ثابت کنید: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.


۲۸. اگر $n(B) = ۱۲$ ، $n(A \cap B) = ۳$ و $n(A \cup B) = ۲۴$ باشند، مقدار $n(A \cap B')$ را به دست آورید.


۲۹. اگر U مجموعه مرجع و A و B زیرمجموعه‌هایی از آن باشند، به طوری که $n(U) = 70$ ، $n(A) = 35$ ، $n(B) = 29$ و $n(A \cap B) = 7$ ، مطلوب است:


- الف $n(A')$ ب $n(A \cup B)$ ج $n(A' \cap B)$ د $n(A' \cap B')$

بخش سوم: دنباله‌ها

۳۰. الگوهای زیر را در نظر بگیرید. شکل بعدی هر یک را رسم کنید و جمله عمومی آن را بیابید.

الف 

ب 

ج 

۳۱. سه جمله بعدی هر یک از دنباله‌های زیر را نوشته، سپس جمله عمومی هر یک را حدس بزنید.

- الف $\sqrt{2}, 2, \sqrt{6}, \sqrt{8}, \dots$ ب $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$
- ج $-1, 4, -9, 16, \dots$ د $0/2, 0/02, 0/002, 0/0002, \dots$
- ه $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots$ و $1, -1, 1, -1, \dots$
- ز $2, 9, 16, 23, 30, \dots$ ح $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots$

۳۲. با توجه به جمله عمومی دنباله هر قسمت، جمله خواسته شده را به دست آورید.

- الف $a_n = n^2 - 2n$ $a_5 =$
- ب $b_n = \sqrt{n} - 7$ $b_{81} =$
- ج $c_n = \frac{2n+1}{n+2}$ $c_3 =$
- د $d_n = (-1)^{n+1} \times n^2$ $d_{10} =$

۳۳. دنباله $a_{n+1} = 4 + a_n$ با $a_1 = -1$ را در نظر بگیرید. آیا این دنباله الگویی خطی دارد؟ چرا؟

۳۴. در یک الگوی خطی، جملات پنجم و نهم به ترتیب ۲۶ و ۵۰ هستند. جمله پانزدهم این الگو را بیابید.

۳۵. در یک الگوی خطی با جمله سیزدهم (۲۹-)، رابطه $t_n + 4 = t_{n-1}$ برقرار است. جمله عمومی این الگو را به دست آورده و مشخص کنید دنباله نظیر آن، چند جمله مثبت دارد؟

۳۶. دنباله با جمله عمومی $a_n = \frac{2-3n}{n+1}$ را در نظر بگیرید.

الف) جمله پنجم این دنباله را بیابید.

ب) جمله چندم آن برابر $-\frac{5}{3}$ است؟

ج) آیا این دنباله جمله‌ای برابر $\frac{11}{3}$ دارد؟

۳۷. در هر یک از دنباله‌های زیر مشخص کنید کدام جمله برابر ۳ است؟

الف) $a_n = n(n-1) - 3$

ب) $t_n = n^2 - 8n + 10$

ج) $b_n = n(8 - 5n)$

۳۸. در دنباله‌ای که رابطه $a_{n+1} = 2a_n - 3$ بین جملاتش برقرار است، اگر جمله هشتم برابر ۱۳ باشد، جمله ششم آن را به دست آورید.

۳۹. در دنباله‌ای معروف به دنباله فیبوناتچی، جمله اول و دوم برابر ۱ هستند و سایر جملات از رابطه $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$ به دست می‌آیند. این دنباله را تا جمله دهم مشخص کنید.

۴۰. دنباله‌های $a_n = 4n - 3$ و $b_n = n^2 - 3n^2 + 1$ را در نظر بگیرید.

الف) جمله پنجم دنباله a_n با جمله چندم دنباله b_n برابر است؟

ب) جمله چندم دنباله a_n با جمله سوم دنباله b_n برابر است؟

۴۱. در دنباله‌ای رابطه $a_{2n-1} = 4n^2 - 2n + 5$ برقرار است.

الف) جمله پنجم این دنباله را به دست آورید.

ب) جمله عمومی این دنباله را به صورت عادی بنویسید.

۴۲. در دنباله‌ای رابطه $\frac{a_n}{a_{n-1}} = -3$ برقرار است. اگر جمله اول این دنباله برابر ۲ باشد، پنج جمله ابتدایی این دنباله را مشخص کنید.

۴۳. فرض کنید $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ ، مجموع بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جمله دنباله a_n را بیابید.

۴۴. در دنباله $a_n = \frac{1}{n+1}$ بزرگ‌ترین جمله، چندمین جمله دنباله است؟ آیا در این دنباله کوچک‌ترین جمله وجود دارد؟

۴۵. در دنباله $a_n = -\frac{1}{n}$ بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جمله را در صورت وجود، تعیین کنید.

۴۶. فرض کنید $a_n = \frac{4 + \sqrt{n}}{3 - \sqrt{n+1}}$. در دنباله a_n چند جمله مثبت وجود دارد؟

۴۷. فرض کنید $a_n = n^2 - n + \frac{1}{3}$. ثابت کنید در دنباله a_n عدد منفی وجود ندارد.

بخش چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

۴۸. در دنباله حسابی $-3, 4, 11, 18, \dots$ ؛

الف) جمله دهم را به دست آورید.

ب) جمله چندم برابر ۱۴۴ است؟

ج) حاصل $a_{n+2} - a_{n-1}$ را به دست آورید.

۴۹. دنباله حسابی $72, 69, 66, \dots, -75$ ؛

الف) چند جمله دارد؟

ب) چه تعداد از این جملات نامنفی هستند؟

۵۰. بین ۴۱ و -7 پنج عدد چنان درج کنید که با هم تشکیل دنباله حسابی دهند.

۵۱. در دنباله حسابی $\dots, -1, a, 7, b, \dots$ ، اختلاف b و جمله چهاردهم را بیابید.

۵۲. در یک دنباله حسابی، جمله هفدهم از جمله سوم ۴۲ واحد بیش تر است. اگر جمله پنجم برابر ۵ باشد، جمله بیستم این دنباله را به دست آورید.

۵۳. اگر $2x+1$ ، $x-1$ و $9-4x$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی نزولی باشند:

الف) قدرنسبت این دنباله را بیابید.

ب) اگر $x-1$ جمله هفتم این دنباله در نظر گرفته شود، جمله بیست و دوم آن را به دست آورید.

۵۴. در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هشتم قرینه یکدیگرند و مجموع جملات هفتم و یازدهم برابر ۱۴ است. این دنباله را مشخص کنید.

۵۵. در دنباله‌ای حسابی داریم $a_m = 3n$ و $a_n = 3m$ ؛ حاصل $a_{k+1} - a_{k-1}$ را بیابید.

۵۶. مجموع چهار جمله متوالی از یک دنباله حسابی برابر ۱۰ و مجموع مربعات آن‌ها برابر ۱۵۰ است. قدرنسبت این دنباله را تعیین کنید.

۵۷. زوایای داخلی یک پنج‌ضلعی محدب تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند. زاویه وسطی این پنج‌ضلعی را بیابید.

۵۸. مجموع سه عدد که با هم تشکیل دنباله عددی می‌دهند، برابر ۳ و حاصلضرب آن‌ها ۳۵- است. مجموع مربعات این ۳ عدد را به دست آورید.

۵۹. دنباله هندسی $2, -6, 18, -54, \dots$ را در نظر بگیرید.

الف) جمله هفتم آن را به دست آورید.

ب) نسبت جمله صد و سی و هفتم به جمله صد و سی و سوم برابر چه عددی است؟

ج) جمله چندم آن ۴۸۶- است؟

۶۰. اگر در یک دنباله هندسی داشته باشیم $a_7 = \frac{2}{9}$ و $a_3 = 18$ ، مقدار a_5 و a_4 را بیابید.

۶۱. در یک دنباله هندسی، جمله پنجم برابر $\sqrt{3}$ است. حاصلضرب ۹ جمله اول این دنباله را به دست آورید.

۶۲. اگر $\sqrt{2}^{2a}$ ، $8\sqrt{2}$ و 2^b سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، واسطه حسابی a و b را به دست آورید.

۶۳. بین دو عدد ۳ و ۴۸، سه واسطه هندسی درج کنید. مسأله چند جواب دارد؟

۶۴. مقادیر m و n را به گونه‌ای بیابید که اعداد زیر، ۴ جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند.

$$m + 6, m - 2, m - 6, 2n - m$$

۶۵. مقدار x را به گونه‌ای بیابید که 3^{2x+1} ، 9^{3x-1} و 81^{x+2} سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند.

۶۶. حاصلضرب سه جمله اول یک دنباله هندسی ۳۴۳ است. جمله دوم این دنباله را به دست آورید.

۶۷. مجموع ۳ عدد که تشکیل دنباله هندسی می‌دهند ۲۱ و حاصلضرب آن‌ها ۲۱۶ است. این سه عدد را بیابید. مسأله چند جواب دارد؟

۶۸. جملات دوم، سوم و دهم یک دنباله حسابی (غیر ثابت) با هم تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند. قدر نسبت این دنباله هندسی را بیابید.

فصل ۲

مثلثات

مثلثات

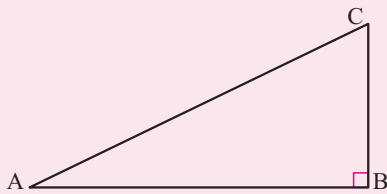
درسنامه فصل ۲

◆ مثلثات شاخه‌ای از ریاضیات است که ارتباط جالبی بین اضلاع و زوایا را برقرار می‌کند. این علم در اندازه‌گیری فاصله‌ها به صورت غیرمستقیم و در مهندسی، نجوم و دریانوری بسیار کاربرد است.

◆ دو مثلث با حالت برابری دو زاویه مشابه می‌شوند و دو مثلث مشابه، زوایای نظیر برابر و نسبت اضلاع متناظر یکسان دارند.

◆ در مثلث قائم‌الزاویه ABC نسبت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را که به شکل زیر تعریف می‌کنیم، نسبت‌های

مثلثاتی می‌نامیم:



$$\sin A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به } A}{\text{وتر مثلث}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به } A}{\text{وتر مثلث}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به } A}{\text{طول ضلع مجاور به } A} = \frac{BC}{AB}$$

$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به } A}{\text{طول ضلع مقابل به } A} = \frac{AB}{BC}$$

◆ بین $\tan A$ و $\cot A$ و دو نسبت $\sin A$ و $\cos A$ رابطه زیر برقرار است:

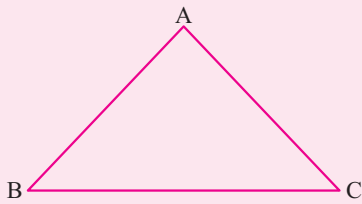
$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}, \quad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

◆ مقدار نسبت‌های مثلثاتی برای چند زاویه مهم را در جدوهای زیر می‌بینید:

	۳۰°	۴۵°	۶۰°
sin A	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos A	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan A	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
cot A	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

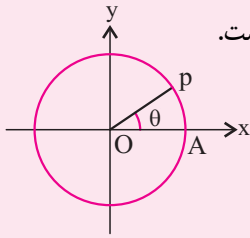
◆ در مثلث ABC ، مساحت را می‌توان از فرمول زیر پیدا کرد:

$$\text{مساحت } \triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B$$



◆ دایره مثلثاتی دایره‌ای است مانند شکل مقابل به مرکز مبدأ مختصات و شعاع واحد که جهت حرکت مثبت در آن خلاف جهت

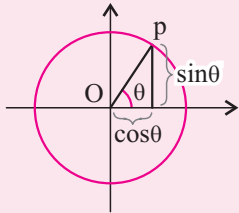
حرکت عقربه‌های ساعت و جهت حرکت منفی (زاویه منفی) موافق جهت حرکت عقربه‌های ساعت است.



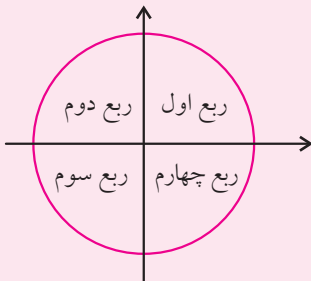
در این دایره نقطه A مبدأ حرکت است.

◆ با توجه به انتخاب وتر با طول ۱ واحد در دایره مثلثاتی مطابق شکل روبرو داریم:

$$y = \sin \theta, \quad x = \cos \theta$$



◆ ربع‌های مثلثاتی در دایره به شکل زیر می‌باشند:



◆ مقدار نسبت‌های مثلثاتی در زوایای مهم دایره مثلثاتی به شرح زیر است:

	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin \theta$	۰	۱	۰	-۱	۰
$\cos \theta$	۱	۰	-۱	۰	۱
$\tan \theta$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot \theta$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

◆ علامت نسبت‌های مثلثاتی در ۴ ناحیه مثلثاتی به صورت زیر است:

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$	+	-	+	-
$\cot \theta$	+	-	+	-

◆ شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویه بین آن خط و جهت مثبت محور افقی. به عبارت دیگر اگر a زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، داریم:

$$\text{شیب خط} = \tan a = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}$$

◆ نمایش توان در نسبت‌های مثلثاتی به شکل روبرو است:

$$\sin \theta \times \sin \theta = (\sin \theta)^2 = \sin^2 \theta$$

◆ هر تساوی مثلثاتی که به ازای هر زاویه θ همواره برقرار باشد را اتحاد مثلثاتی می‌نامیم؛ از مهم‌ترین اتحادهای مثلثاتی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad \tan \theta \times \cot \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}, \quad 1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$