درس ۲
استدلال ریاضی

استدلال ریاضی: استفاده از دانسته‌های ریاضی و هم‌چنین استفاده از قواعد منطق گزاره‌ها برای اثبات یا رد یک موضوع یا یک مسئله، استدلال ریاضی گفته می‌شود. برای استفاده از ابزارهای ریاضی در یک استدلال، اولین گام ترجمه به زبان ریاضی است که اغلب به صورت شفاهی یا جملات فارسی می‌باشد.

توجه همان‌طور که در ترجمه از زبانی به زبان دیگر ابتدا کلمات کلیدی و مهم را ترجمه می‌کنیم و سپس ترجمهٔ کامل را می‌نویسیم؛ در این‌جا هم سعی خواهیم داشت همین روال را برای نوشتن یک ترجمهٔ مناسب در نظر بگیریم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال عددی به علاوه هفت، مساوی ۵ واحد کم‌تر از دو برابر همان عدد است.

+   =   −   ×۲

چون این عدد مشخص نیست از متغیری مانند x استفاده می‌کنیم.

چون گفته‌شده همان عدد، همان متغیری که اول انتخاب کردیم را در نظر می‌گیریم.

نماد ریاضی: $x+۷=۲x-۵$

توجه ممکن است در برخی نمادگذاری‌ها نیاز به جملات کمکی داشته باشیم.

مثال مساحت مربعی به ضلع a   بزرگ‌تر مساوی ($\leq$)   مساحت مستطیلی به طول a و عرض b است.

مساحت مربع = مجذور یک ضلع   مساحت مستطیل = عرض × طول

نماد ریاضی: $ab \leq a^۲$

قیاس استثنایی: سال گذشته در درس منطق با انواع قیاس‌ها آشنا شدیم. اگر بخواهیم قیاس استثنایی را با توجه به گزاره‌ها بنویسیم به صورت زیر درمی‌آید. اگر p و q دو گزارهٔ دلخواه باشند.

$$\frac{\begin{array}{c}p \Rightarrow q\\ p\end{array}}{\therefore q} \equiv ((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$$

توجه به جدول ارزش درستی $p \Rightarrow q$ توجه کنید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د

در واقع قیاس استثنایی زمانی قابل استفاده است که هم p و هم q هر دو با هم درست باشند.

مثال $\underbrace{\text{اگر در کلاس‌های درس ریاضی حضور پیدا کنم}}_{p}$ $\underbrace{\text{آن‌گاه در امتحان ریاضی نتیجهٔ بهتری کسب می‌کنم.}}_{q}$

$\underbrace{\text{در کلاس‌های ریاضی حضور پیدا کرده‌ام.}}_{p}$

نتیجه در امتحان ریاضی نتیجهٔ بهتری کسب می‌کنم.

توجه گاهی اوقات از قیاس استثنایی استفادهٔ نادرست می‌شود. به این‌گونه استدلال، مغالطه می‌گویند.

شکل نادرست قیاس استثنایی:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{q} \\ \therefore p \end{array} \equiv (p \Rightarrow q) \wedge q \Rightarrow p$$

مثال| $\underbrace{\text{اگر در کلاس‌های درس ریاضی حضور پیدا کنم}}_{p}$ $\underbrace{\text{آن‌گاه در امتحان ریاضی نتیجهٔ بهتری کسب می‌کنم.}}_{q}$

$\underbrace{\text{در درس ریاضی نتیجهٔ بهتری کسب کرده‌ام.}}_{q}$

نتیجه در کلاس‌های درس ریاضی حضور پیدا کرده‌ام.

مثال بالا یک نتیجه‌گیری نادرست (مغالطه) است.

عکس نقیض: در درس گذشته هم‌ارزی دو رابطهٔ $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ را با استفاده از جدول ارزش درستی ثابت کردیم. در این نوع استدلال برای p (فرض) و q (حکم) که دو گزارهٔ دلخواه هستند $\sim q$ را در نظر می‌گیریم و از آن به $\sim p$ می‌رسیم.

مثال| اگر $\underbrace{n^2 \text{ فرد باشد}}_{p}$ آن‌گاه $\underbrace{n \text{ فرد است.}}_{q}$

در این مثال استفاده از استدلال $p \Rightarrow q$ کمی دشوار است. پس عکس نقیض آن را اثبات می‌کنیم. $\sim q \Rightarrow \sim p$

$$\sim q \Rightarrow \sim(\text{فرد باشد } n) \Rightarrow \text{زوج است } n = 2m \Rightarrow n^2 = (2m)^2 \Rightarrow n^2 = 4m^2$$

$$\Rightarrow n^2 = 2(\underbrace{2m^2}_{k}) \Rightarrow n^2 = 2k \Rightarrow \text{زوج است } n^2 \Rightarrow \sim(\text{فرد است } n^2)$$

پس در واقع در این مثال از $\sim q$ به $\sim p$ رسیدیم و از استدلال عکس نقیض در اثبات آن استفاده کردیم.

توجه گاهی در یک استدلال یا اثبات ریاضی دچار اشتباه می‌شویم و نتایج نادرستی می‌گیریم؛ بنابراین یافتن خطا در یک استدلال و رفع ایراد آن بسیار مهم است.

مثال| به اثبات زیر توجه کنید و اگر در مراحل آن ایرادی دارد آن را تصحیح کنید.

اثبات $2 \times 2 = 5$

$0 = 0$

$12 - 12 = 15 - 15$

$4(3-3) = 5(3-3)$

$4\cancel{(3-3)} = 5\cancel{(3-3)}$

$4 = 5$

$2 \times 2 = 5$

مطمئناً $2 \times 2 = 5$ نیست؛ پس این اثبات نیاز به رفع ایراد دارد با توجه به این‌که ما طرفین یک تساوی را می‌توانیم به یک عدد غیرصفر ضرب یا تقسیم کنیم در حالی که در این اثبات طرفین این تساوی به مقدار $(3-3) = 0$ تقسیم شده است.

توجه ممکن است یک استدلال غلط برای سال‌ها درست پنداشته شود تا این‌که دانشمندی به غلط‌بودن آن پی ببرد.

مثال| در سال ۱۸۹۵ میلادی جورج کانتور برای اولین بار نظریه و تئوری مجموعه‌ها را مطرح کرد و مجموعهٔ تهی $(\varnothing)$ مجموعه‌ای که شامل هیچ عضوی نیست و مجموعهٔ مرجع (M) یعنی مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها را در نظر گرفت. چندین سال دانشمندان و ریاضیدانان بر این باور بودند که مجموعهٔ مرجع (M) وجود دارد؛ نظریهٔ مجموعه‌ها توسعه پیدا کرد و کاربردهای فراوانی در سایر علوم داشت. در سال ۱۹۰۲ راسل، فیلسوف انگلیسی با قضیه‌ای معروف به پارادوکس راسل ثابت کرد که مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها وجود ندارد ولی به دلیل احترام به گذشتگان و کاربردهایی که این نظریه داشت، نظریهٔ مجموعه‌ها و مجموعهٔ مرجع هنوز هم پابرجاست. شما هم سعی کنید اثبات‌ها و استدلال‌هایی را که هر چند درست به نظر می‌رسند با دقت زیاد مورد بررسی قرار دهید. شاید شما هم یک روز توانستید قضیه‌ای را اثبات یا درستی آن را نقض کنید.

سؤال‌های تشریحی

۲۷ عبارات زیر را به صورت نماد ریاضی بنویسید.

الف) عددی به علاوه ۳، مساوی سه برابر آن عدد است.

ب) ۳ واحد کم‌تر از عددی، مساوی دو برابر آن به علاوهٔ هفت است.

پ) حاصل‌ضرب هر عدد حقیقی در عدد یک برابر خود عدد است.

ت) حاصل‌جمع هر عدد حقیقی با خودش برابر دو برابر آن عدد است.

ث) مربع هر عدد حقیقی برابر مربع قدرمطلق آن عدد است.

ج) قدرمطلق حاصل‌جمع دو عدد حقیقی، کوچک‌تر مساوی مجموع قدرمطلق‌های آنها است.

چ) مجموع هر عدد مثبت با معکوسش بزرگ‌تر مساوی ۲ است.

ح) جذر هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک، کوچک‌تر مساوی خود عدد است.

خ) حاصل‌ضرب مکعب دو عدد، برابر مکعب حاصل‌ضرب آن‌ها است.

۲۸ با استفاده از جدول ارزش درستی، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را نشان دهید.

الف) $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ (قیاس استثنایی)

ب) $((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p$ (مغالطه)

پ) $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ (عکس نقیض)

۲۹ درستی یا نادرستی استدلال‌های زیر را مشخص کنید و دلیل خود را به طور کامل توضیح دهید. در صورت درستی استدلال، نوع آن را مشخص کنید. (عکس نقیض یا قیاس استثنایی)

الف) اگر امشب شب چهاردهم ماه باشد، آن‌گاه ماه کامل است. امشب ماه کامل است.

نتیجه امشب شب چهاردهم ماه است.

ب) اگر $n^{۲}$ مضرب ۳ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۳ است. $n^{۲}$ مضرب ۳ است.

نتیجه n مضرب ۳ است.

پ) اگر جذر عددی از خودش بزرگ‌تر باشد، آن‌گاه آن عدد بین صفر و یک است. عدد، بین صفر و یک نیست.

نتیجه جذر عدد از خودش بزرگ‌تر نیست.

ت) اگر مریم دانش‌آموز پایهٔ یازدهم باشد، آن‌گاه رشتهٔ تحصیلی او علوم انسانی است. رشتهٔ تحصیلی مریم علوم انسانی است.

نتیجه مریم دانش آموز پایهٔ یازدهم است.

ث) اگر قدرمطلق یک عدد با خودش برابر باشد، آن‌گاه آن عدد بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. عدد، بزرگ‌تر یا مساوی صفر نیست.

نتیجه قدرمطلق عدد با خودش برابر نیست.

ج) اگر عدد، طبیعی باشد، آن‌گاه مجموع عدد با معکوسش بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است. عدد، طبیعی است.

نتیجه مجموع آن عدد با معکوسش بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است.

۳۰ جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. (قیاس استثنایی)

الف) $p: x \geq ۰ \Rightarrow q: |x| = x$

$p: ۵ \geq ۰$

$\therefore$ ....

ب) $p: x < ۰ \Rightarrow q: |x| = -x$

$p: -۴ < ۰$

$\therefore$ ....

پ) p: اگر x عضو مجموعهٔ $\{-۱,۱\}$ باشد $\Rightarrow$ q: x با معکوسش برابر است

....

$\therefore$ x با معکوسش برابر است

ت) $p: x > ۰, y < ۰ \Rightarrow q: xy < ۰$

....

$\therefore xy < ۰$

۳۱ با توجه به رابطهٔ عکس نقیض جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

الف) p: اگر دو خط با هم موازی باشند $\Rightarrow$ q: دو خط نقطهٔ مشترک ندارند

دو خط با هم موازی نیستند $\Rightarrow$ ....

ب) $p: a^{۲} \geq a \;\Rightarrow\; \sqrt{a^{۲}} \geq \sqrt{a}$

$\Rightarrow a^{۲} \leq a$ ....

۳۲ با توجه به رابطهٔ عکس نقیض ثابت کنید «اگر وترها در دایره‌ای با هم برابر نباشند، آن‌گاه کمان‌های نظیر آن‌ها هم برابر نیستند».

(راهنمایی: در دایره‌ای کمان‌های مساوی در نظر بگیرید و ثابت کنید وترهای برابری دارند. (هم‌نهشتی مثلث‌ها))

۳۳ با توجه به این‌که $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ ثابت کنید «اگر دو عدد زوج باشند، آن‌گاه حاصل‌ضرب آن‌ها نیز زوج است».

۳۴ دلیل نادرستی هر یک از استدلال‌های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر به قطر دایره‌ای سه واحد اضافه کنیم، محیط آن چهار برابر می‌شود.

۱) محیط دایره $= ۲\pi r$

۲) $۲\pi(r+۳) =$

۳) $۲\pi r + ۶\pi r =$

۴) $۸\pi r =$

۵) $\frac{۸\pi r}{۲\pi r} =$

۶) ۴

ب) وتر مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۶ و ۸ برابر ۱۴ است.

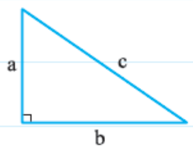
۱) $a^{۲} + b^{۲} = c^{۲}$

۲) $۶^{۲} + ۸^{۲} = c^{۲}$

۳) $\sqrt{۶^{۲} + ۸^{۲}} = c$

۴) $۶ + ۸ = c$

۵) $c = ۱۴$



پ) تساوی $\frac{۵}{۶} = ۱$ برقرار است.

۱) $\frac{۵}{۶} = \frac{۵}{۲\times۳}$

۲) $\frac{۵}{۲\times۳} = \frac{۲+۳}{۲\times۳}$

۳) $\frac{۲+\cancel{۳}}{۲\times\cancel{۳}} = \frac{۲}{۲}$

۴) $\frac{۲}{۲} = ۱$

ت) $\sqrt{۲} = ۱$

۱) $x = y$

۲) $x^۲ = xy$ — طرفین تساوی ضربدر x

۳) $x^۲ + x^۲ = xy + x^۲$ — اضافه‌کردن $x^۲$ به طرفین تساوی

۴) $۲x^۲ = x^۲ + xy$

۵) $۲x^۲ - ۲xy = x^۲ + xy - ۲xy$ — کم‌کردن ۲xy از طرفین تساوی

۶) $۲x^۲ - ۲xy = x^۲ - xy$

۷) $۲(x^۲ - xy) = x^۲ - xy$ — تقسیم طرفین تساوی بر $x^۲ - xy$

۸) $۲ = ۱$

۹) $\sqrt{۲} = \sqrt{۱}$

۱۰) $\sqrt{۲} = ۱$

ث) $۳ = ۵$

۱) $x = ۳$

۲) $x - ۱ = ۲$

۳) $(x - ۱)(x - ۵) = ۲(x - ۵)$ — ضرب طرفین تساوی در $(x - ۵)$

۴) $x^۲ - ۶x + ۵ = ۲x - ۱۰$

۵) $x^۲ - ۶x + ۵ - (x - ۷) = (۲x - ۱۰) - (x - ۷)$ — از طرفین تساوی $(x - ۷)$ را کم می‌کنیم.

۶) $x^۲ - ۶x + ۵ - x + ۷ = ۲x - ۱۰ - x + ۷$

۷) $x^۲ - ۷x + ۱۲ = x - ۳$

۸) $(x - ۳)(x - ۴) = x - ۳$ — تجزیه با اتحاد جمله مشترک

۹) $x - ۴ = ۱$ — تقسیم طرفین بر $(x - ۳)$

۱۰) $x = ۵$

۱۱) $۳ = ۵$

ج) $۱ = ۲$

۱) $a - b = ۰$

۲) $a = b$

۳) $a^۲ = b^۲$

۴) $a^۲ - b^۲ = b^۲ - b^۲$ — از طرفین تساوی مقدار $b^۲$ را کم می‌کنیم.

۵) $a^۲ - b^۲ = b(b - b)$

۶) $(a-b)(a+b)=b(b-b)$ — استفاده از اتحاد مزدوج و تجزیه

۷) $(a-b)(a+b)=b(a-b)$ — $a=b$ و جای‌گذاری a به جای b

۸) $a+b=b$ — تقسیم طرفین بر $a-b$

۹) $a=۲b$

۱۰) $۱=۲$

چ) $۷=۳\sqrt{۵}$

۱) $-۲۰=-۲۰$

۲) $۱۶-۳۶=۲۵-۴۵$

۳) $۱۶-۳۶+\frac{۸۱}{۴}=۲۵-۴۵+\frac{۸۱}{۴}$ — اضافه‌کردن $\frac{۸۱}{۴}$ به طرفین تساوی

۴) $\sqrt{۱۶-۳۶+\frac{۸۱}{۴}}=\sqrt{۲۵-۴۵+\frac{۸۱}{۴}}$

۵) $۴-۶+\frac{۹}{۲}=۵-\sqrt{۴۵}+\frac{۹}{۲}$

۶) $-۲+\cancel{\frac{۹}{۲}}=۵-۳\sqrt{۵}+\cancel{\frac{۹}{۲}}$

۷) $-۷=-۳\sqrt{۵}$

۸) $۷=۳\sqrt{۵}$

۳۵ برای روابط نادرست زیر یک استدلال یا اثبات نادرست بنویسید.

الف) $۲=۳$

ب) اگر ارتفاع و قاعدهٔ یک متوازی‌الاضلاع را دو برابر کنیم مساحت آن نیز دو برابر می‌شود.