

قصص

# عبرت های جبری



# حداکثر کاربردها

## ۱ اتحاد

یک تساوی است که به ازای تمامی مقادیر حقیقی متغیرها برقرار است؛ به طور مثال تساوی  $x(x+1) = x^2 + x$  یک اتحاد است، زیرا هر عدد دلخواهی به جای  $x$  قرار دهیم، تساوی برقرار است. تساوی  $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$  نیز یک اتحاد است زیرا هر عدد دلخواهی را به جای  $y$  و  $x$  جای گذاری کنیم، تساوی برقرار است. در حالی که تساوی  $x-1=0$  یک اتحاد نیست؛ زیرا فقط به ازای  $x=1$  برقرار می‌شود. برخی از اتحادهای معروف که سال گذشته فرا گرفتیم، عبارت‌اند از:

### ۱ اتحاد مربع مجموع دو جمله:

$$(a + b)^2 = \underbrace{a^2}_{\text{مربع جمله اول}} + \underbrace{2ab}_{\text{دو برابر حاصل ضرب جمله اول در جمله دوم}} + \underbrace{b^2}_{\text{مربع جمله دوم}}$$

$$(2x + 1)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(1) + (1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

در این جا داریم:  $a = 2x$  و  $b = 1$ . در اتحاد جای گذاری می‌کنیم:

$$(a \ominus b)^2 = a^2 \ominus 2ab + b^2$$

### ۲ اتحاد مربع تفاضل دو جمله:

مشابه اتحاد قبلی است با این تفاوت که علامت جمله دوم آن منفی است.

$$(3t - 2z)^2 = (3t)^2 - 2(3t)(2z) + (2z)^2 = 9t^2 - 12tz + 4z^2$$

در این جا داریم:  $a = 3t$  و  $b = 2z$

$$(a + b)(a - b) = \underbrace{a^2}_{\text{مربع جمله اول}} - \underbrace{b^2}_{\text{مربع جمله دوم}}$$

### ۳ اتحاد مزدوج:

$$(2x + 3)(2x - 3) = (2x)^2 - (3)^2 = 4x^2 - 9$$

در این جا داریم:  $a = 2x$  و  $b = 3$

$$(x + a)(x + b) = \underbrace{x^2}_{\text{مربع جمله مشترک}} + \underbrace{(a+b)x}_{\text{حاصل ضرب جمله مشترک در مجموع جملات غیرمشترک}} + \underbrace{ab}_{\text{حاصل ضرب جملات غیرمشترک}}$$

### ۴ اتحاد جمله مشترک:

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + (2+3)x + 2 \times 3 = x^2 + 5x + 6$$

در این جا  $a = 2$  و  $b = 3$  است.

دو اتحاد مهم و پرکاربرد دیگر نیز به اتحادهای قبلی اضافه می‌شود.

### ۵ اتحاد مکعب مجموع دو جمله:

$$(a + b)^3 = \underbrace{a^3}_{\text{مکعب جمله اول}} + \underbrace{3a^2b}_{\text{سه برابر حاصل ضرب مربع جمله اول در جمله دوم}} + \underbrace{3ab^2}_{\text{سه برابر حاصل ضرب جمله اول در مربع جمله دوم}} + \underbrace{b^3}_{\text{مکعب جمله دوم}}$$

$$(x + 2)^3 = x^3 + 3x^2(2) + 3x(2)^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

در این جا  $a = x$  و  $b = 2$  است.

$$(2y + 1)^3 = (2y)^3 + 3(2y)^2(1) + 3(2y)(1)^2 + 1^3 = 8y^3 + 12y^2 + 6y + 1$$

در این جا  $a = 2y$  و  $b = 1$  است.

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

۶ اتحاد مکعب تفاضل دو جمله:

مشابه اتحاد قبلی است با این تفاوت که منفی بودن جمله‌ی دوم باعث می‌شود علامت جملات در طرف راست اتحاد یکی در میان مثبت و منفی شود.

$$(x-\sqrt{3})^3 = x^3 - 3x^2(\sqrt{3}) + 3x(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^3 = x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 9x - 3\sqrt{3}$$

در این جا  $a = x$  و  $b = \sqrt{3}$  است.

$$(x-\frac{1}{4})^3 = x^3 - 3x^2(\frac{1}{4}) + 3x(\frac{1}{4})^2 - (\frac{1}{4})^3 = x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{64}$$

در این جا  $a = x$  و  $b = \frac{1}{4}$  است.

## سوالات

۱ تساوی‌هایی که اتحاد هستند را با علامت و تساوی‌هایی که اتحاد نیستند را با علامت مشخص کنید.

الف  $x(x-2)+2 = x^2 - 2x + 2$

ب  $x^2(x^2+4) = x^4 + 4x^2$

پ  $x^2 - 1 = 0$

ت  $x^2 + 2x = -1$

ث  $(x-q)^2 = x^2 - 2qx + q^2$

ج  $x^2 - x = 0$

۲ هر یک از عبارتهای زیر را به اتحاد مرتبط با خودش وصل کنید سپس جاهای خالی را کامل کنید.

$$(x+2)(x-2) = (\dots)^2 - (\dots)^2 = \dots$$

اتحاد مربع مجموع دو جمله

$$(\Delta x - 1)^2 = (\dots)^2 - 2(\dots)(\dots) + (1)^2 = \dots$$

اتحاد مربع تفاضل دو جمله

$$(x-1)^2 = (\dots)^2 - 2(\dots)(\dots) + 3x(1)^2 - (1)^2 = \dots x^2 + \dots x - 1$$

اتحاد مزدوج

$$(y+\Delta)^2 = y^2 + (\dots)y(\dots) + (\dots)^2 = y^2 + \dots y + \dots$$

اتحاد جمله‌مشتک

$$(3y+2)^2 = (\dots)^2 + 3(\dots)(\dots) + 3(3y)(\dots) + (2)^2 = \dots y^2 + \dots y + 4$$

اتحاد مکعب مجموع دو جمله

$$(x+7)(x-4) = x^2 + (\dots)x + (\dots)(\dots) = x^2 + \dots x - \dots$$

اتحاد مکعب تفاضل دو جمله

۳ به کمک اتحادهای «مکعب مجموع دو جمله» و «مکعب تفاضل دو جمله» تساوی‌های زیر را کامل کنید.

الف  $(2a+3)^3 = (\dots)^3 + 3(2a)(\dots) + 3(\dots)(\dots) + (3)^3 = \dots a^3 + \dots a^2 + \dots a + \dots$

ب  $(\frac{x}{4}-1)^3 = (\frac{x}{4})^3 - 3(\dots)(\dots) + 3(\dots)(\dots) - (\dots)^3 = \dots x^3 - \dots x^2 + \dots x - \dots$

پ  $(\dots + \dots)^3 = \frac{a^3}{\lambda} + \dots a^2 + \dots a + \lambda$

ت  $(x-\sqrt{5})^3 = (\dots)^3 - 3\sqrt{5}x^2 + \dots x - 5\sqrt{5}$

۴ هر یک از عبارتهای زیر را به کمک اتحادهای گفته شده ساده کنید.

الف 
$$\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}{\underbrace{\underbrace{x^{(\dots)}-1}_{\text{مزدوج}}}_{\text{مزدوج}}}_{\text{مزدوج } x^{(\dots)}-1}$$

ب 
$$\frac{(x-2)(x+2)(x^2+7)}{\underbrace{x^{(\dots)}-4}_{\text{مزدوج}}}$$
  
جمله مشترک  $x^{(\dots)}+2x^{(\dots)}-(\dots)$

پ 
$$\frac{(x-3)(x+3)(x^2-9)}{\underbrace{x^{(\dots)}-9}_{\text{مزدوج}}}$$
  
مربع مجموع دو جمله  $x^{(\dots)}-18x^{(\dots)}+(\dots)$

ت 
$$\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2-2)^2}{\underbrace{x^{(\dots)}-(\dots)}_{\text{مزدوج}}}$$
  
مکعب تفاضل دو جمله  $x^6-(\dots)x^4+(\dots)x^2-(\dots)$

۵ محاسبات عددی زیر را به کمک اتحادها انجام دهید.

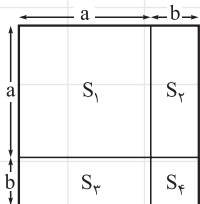
الف  $98^2 = (100-2)^2 = (\dots)^2 - 2(\dots)(\dots) + 2^2 = \dots$

ب  $1001^2 = (\dots + \dots)^2 = (\dots)^2 + 2(\dots)(\dots) + (\dots)^2 = \dots$

پ  $105 \times 97 = (100 + \dots)(100 - \dots) = (100)^2 + (\dots) \times 100 - (\dots) = \dots + \dots - \dots = \dots$

ت  $11^3 = (10+1)^3 = 10^3 + 3(\dots)^2(\dots) + 3(\dots)(1)^2 + 1^3 = \dots + \dots + \dots = \dots$

۶ مربع زیر را در نظر گرفته، ضلع آن را به دو قسمت به طولهای  $a$  و  $b$  تقسیم کنید. مساحت مربع را برابر  $S$  در نظر بگیرید.



الف با توجه به این که مساحت مربع برابر مجذور اندازه‌ی ضلعش می‌باشد، حاصل  $S$  را بیابید.

ب این بار مساحت مربع ( $S$ ) را به کمک جمع‌زدن مساحت بخش‌های داخلی آن بیابید.

پ حاصل  $S$  را از بخش‌های الف و ب با یکدیگر برابر قرار داده و به کمک آن اتحاد مربع مجموع دو جمله را نتیجه بگیرید.



### ساده کردن $(a+b)^n$

تا این جا با جملات حاصل از ساده کردن عبارتهای  $(a+b)^2$  و  $(a+b)^3$  آشنا شدیم. حال می‌خواهیم با نحوه‌ی محاسبه‌ی جملات حاصل از ساده کردن توان‌های بزرگ‌تر  $a+b$  مانند  $(a+b)^4$ ،  $(a+b)^5$  و ... آشنا شویم. برای محاسبه‌ی جملات حاصل از ساده کردن عبارت  $(a+b)^n$  در حالت کلی (با فرض این که  $n$  یک عدد حسابی باشد) باید به نکات زیر توجه کنیم:

۱. تعداد جملات حاصل از ساده کردن عبارت  $(a+b)^n$  برابر  $n+1$  خواهد بود.

تعداد جملات حاصل از ساده کردن  $(a+b)^3$  برابر ۴ می‌باشد.

۲. در صورتی که جملات حاصل را نسبت به توان‌های  $a$  به صورت صعودی مرتب کنیم، اولین جمله  $a^n$  و آخرین جمله  $b^n$  خواهد بود.

اولین جمله‌ی حاصل از ساده کردن عبارت  $(a+b)^3$  برابر  $a^3$  و آخرین جمله برابر  $b^3$  می‌باشد.

۳. در هر جمله نسبت به جمله‌ی قبل یک واحد از توان  $a$  کم شده و به توان  $b$  یک واحد اضافه می‌شود.

تعداد جملات حاصل از ساده کردن عبارت  $(a+b)^3$  برابر  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  می‌باشد.

۴. برای محاسبه‌ی ضرایب جملات حاصل از ساده کردن عبارت  $(a+b)^n$  از مثلث زیر که به «مثلث خیام» معروف است، کمک می‌گیریم.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & & \\
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
 & & & & & & \vdots
 \end{array}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید مثلث خیام، مثلثی به رأس ۱ است که مجموع هر دو عدد مجاور عدد پایین را تولید می‌کند. برای محاسبه‌ی ضرایب جملات حاصل از ساده کردن  $(a+b)^n$  کافی است به سطر  $(n+1)$  ام مثلث رجوع کنیم.

ضرایب جملات حاصل از ساده کردن  $(a+b)^3$  در سطر چهارم مثلث خیام موجود است:

$$(a+b)^3 = \textcircled{1}a^3 + \textcircled{3}a^2b + \textcircled{3}ab^2 + \textcircled{1}b^3$$

برای محاسبه‌ی ضرایب جملات حاصل از ساده کردن  $(a+b)^n$  به جای مثلث خیام می‌توان از رابطه‌ی زیر نیز استفاده کرد:

توان  $a$  در جمله‌ی قبل  $\times$  ضریب جمله‌ی قبل = ضریب هر جمله  
تعداد جملات قبل

به طور مثال به نحوه‌ی ساده کردن  $(a+b)^4$  توجه کنید:

با توجه به نکات گفته‌شده تعداد جملات حاصل برابر ۵ خواهد بود که اولین آن‌ها  $a^4$  و آخرین آن‌ها  $b^4$  است و در هر جمله نسبت به جمله‌ی قبل یک واحد از توان  $a$  کم شده، یک واحد به توان  $b$  افزوده می‌شود، پس شکل کلی جملات حاصل به صورت زیر خواهد بود:

$$(a+b)^4 = a^4 + (\dots\dots)a^3b + (\dots\dots)a^2b^2 + (\dots\dots)ab^3 + b^4$$

اگر ضرایب را با توجه به رابطه‌ی بالا حساب کنیم، داریم:

$$(a+b)^4 = a^4 + \frac{1 \times 4}{1} a^3b + \frac{4 \times 3}{2} a^2b^2 + \frac{6 \times 2}{3} ab^3 + \frac{4 \times 1}{4} b^4 = \textcircled{1}a^4 + \textcircled{4}a^3b + \textcircled{6}a^2b^2 + \textcircled{4}ab^3 + \textcircled{1}b^4$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، ضرایب جملات حاصل از ساده کردن  $(a+b)^4$  همان اعداد سطر پنجم مثلث خیام هستند.

برای محاسبه‌ی  $(a-b)^n$  کافی است علامت جملات حاصل از  $(a+b)^n$  را یکی درمیان مثبت و منفی کنیم.

داریم:  $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

با توجه به اتحاد  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  درمی‌یابیم که مجموع ضرایب جملات حاصل برابر  $1+2+1=4$  است. اما جالب این جاست که

مجموع ضرایب جملات حاصل از  $(a+b)^n$  در حالت کلی برابر  $2^n$  بوده و برای این منظور نیازی به ساده‌کردن  $(a+b)^n$  نیست.

مجموع ضرایب جملات حاصل از ساده‌کردن  $(a+b)^0$  برابر  $2^0$  می‌باشد.

حاصل هر یک از اعداد  $11^1, 11^2, 11^3$  و  $11^4$  به ترتیب برابر اعداد سطرهای دوم، سوم، چهارم و پنجم مثلث خیام هستند:

$$11^1 = 11 \quad (\text{سطر دوم مثلث خیام})$$

$$11^2 = 121 \quad (\text{سطر سوم مثلث خیام})$$

$$11^3 = 1331 \quad (\text{سطر چهارم مثلث خیام})$$

$$11^4 = 14641 \quad (\text{سطر پنجم مثلث خیام})$$

### اتحادهای مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله

اتحادهای «مجموع مکعبات دو جمله» و «تفاضل مکعبات دو جمله» از دیگر اتحادهای مهم و پرکاربردی هستند که در این جا مطرح می‌شوند:

#### اتحاد مجموع مکعبات دو جمله:

$$(a + b) (a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$\downarrow$  جمله اول    $\downarrow$  جمله دوم    $\downarrow$  مربع جمله اول    $\downarrow$  حاصل ضرب جمله اول در جمله دوم    $\downarrow$  مربع جمله دوم    $\downarrow$  مکعب جمله اول    $\downarrow$  مکعب جمله دوم

اتحاد تفاضل مکعبات دو جمله: مشابه اتحاد قبلی است با این تفاوت که یک تغییر جزئی در علامت‌هایش ایجاد شده است:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

اتحادهای مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله به دلیل داشتن یک پیرانتز بزرگ در یک پیرانتز کوچک به اتحادهای «چاق و لاغر» نیز معروف‌اند.

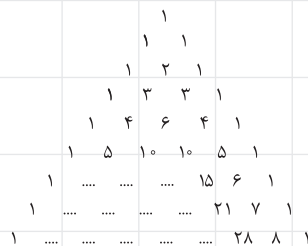
این اتحادها کاربرد زیادی در تجزیه‌ی عبارت‌های جبری دارند. به نمونه‌ای از تجزیه‌ی عبارت‌های جبری به کمک این اتحادها توجه کنید:

$$x^3 + 27 = x^3 + 3^3 = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$$

$$8x^3 - y^3 = (2x)^3 - y^3 = (2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2)$$

## سوالات

۷ مثلث خیام را کامل کرده سپس هر یک از عبارت‌های داده‌شده را ساده کنید.



$$(a+b)^5 = a^5 + (\dots) a^4 b + (\dots) a^3 b^2 + (\dots) a^2 b^3 + (\dots) a b^4 + b^5$$

$$(a-b)^6 = a^6 - (\dots) + (\dots) - 2a^4 b^2 + (\dots) - (\dots) + b^6$$

$$(a+b)^7 = a^7 + (\dots) + (\dots) + (\dots) + (\dots) + (\dots) + (\dots) + b^7$$

$$(a-b)^8 = a^8 - (\dots) + (\dots) - (\dots) + (\dots) - (\dots) + (\dots) - 8ab^7 + b^8$$

۸ مجموع ضرایب جملات حاصل از ساده کردن عبارتهای  $(a+b)^5$  و  $(a+b)^6$  به ترتیب برابر \_\_\_\_\_ و \_\_\_\_\_ است.

۹ درست یا غلط بودن هر یک از جملات زیر را با علامتهای یا مشخص کنید:

الف برای محاسبه‌ی حاصل  $11^5$  کافی است اعداد سطر ششم مثلث خیام را از چپ به راست کنار هم بنویسیم.

ب مجموع ضرایب جملات حاصل از ساده کردن  $(a-b)^4$  برابر ۱۶ است.

۱۰ هر یک از عبارتهای زیر را به کمک اتحادهای «مجموع مکعبات دو جمله» و «تفاضل مکعبات دو جمله» تجزیه کنید:

الف  $a^3 - 1 = (a - \dots)(a^2 + \dots + 1)$

ب  $a^3 + 8 = (a + \dots)(a^2 - \dots + \dots)$

ب  $8a^3 + 27 = (2a + \dots)(\dots - 6a + \dots)$

ت  $a^3 - \frac{1}{27} = (a - \dots)(a^2 + \dots + \frac{1}{9})$

ث  $a^6 + \frac{1}{27} = (a^2)^3 + (\frac{1}{3})^3 = (\dots + \dots)(a^4 - \dots + \dots)$

ج  $125 - y^6 = (\dots)^3 - (\dots)^3 = (\dots - \dots)(\dots + \dots + \dots)$

۱۱ عبارت  $x^6 - 1$  را به کمک روش‌های الف و ب تجزیه کنید.

الف  $x^6 - 1 \xrightarrow{\text{مزدوج}} = \underbrace{(\dots - 1)}_{\substack{\text{تفاضل} \\ \text{مکعبات} \\ \text{دو جمله}}} \underbrace{(\dots + 1)}_{\substack{\text{مجموع} \\ \text{مکعبات} \\ \text{دو جمله}}} = (x-1)(\dots + \dots + \dots)(x+1)(\dots - \dots + \dots)$

ب  $x^6 - 1 = (\dots)^3 - (\dots)^3 \xrightarrow{\text{تفاضل مکعبات دو جمله}} = \underbrace{(x^2 - 1)}_{\text{مزدوج}} (\dots + \dots + \dots) = (x-1)(\dots + \dots)(\dots + \dots)$

هر دو روش برای تجزیه قابل قبول است ولی توجه کنید که به کمک روش الف موفق شدیم عبارت داده شده را به عبارتهای ساده‌تری تجزیه کنیم.

۱۲ عبارت  $y^6 - 64$  را به کمک روش‌های الف و ب تجزیه کنید. کدام روش  $y^6 - 64$  را به عبارتهای ساده‌تری تجزیه می‌کند؟

الف  $y^6 - 64 \xrightarrow{\text{مزدوج}} = \underbrace{(\dots - 8)}_{\substack{\text{تفاضل} \\ \text{مکعبات} \\ \text{دو جمله}}} \underbrace{(\dots + 8)}_{\substack{\text{مجموع} \\ \text{مکعبات} \\ \text{دو جمله}}} = (y-2)(\dots + \dots + \dots)(y+2)(\dots - \dots + \dots)$

ب  $y^6 - 64 = (\dots)^3 - (\dots)^3 \xrightarrow{\text{تفاضل مکعبات دو جمله}} = (y^2 - 4)(\dots + \dots + \dots) = (y-2)(\dots + \dots)(\dots + \dots)$

می‌توان تجزیه به روش ب را بیشتر از این نیز ادامه داد تا به سادگی نتیجه‌ی روش الف برسد اما به دلیل پیچیده شدن، تجزیه توصیه نمی‌شود و تأکید می‌شود که تجزیه تا همین مرحله نیز کافی است.

# عبارت‌های گویا

قبل از تعریف عبارت‌های گویا یکی دو اصطلاح از سال گذشته را یادآوری می‌کنیم.

**یک جمله‌ای:** حاصل ضرب یک عدد حقیقی در یک یا چند متغیر با توان حسابی ( $0, 1, 2, \dots$ ) را یک جمله‌ای می‌نامیم. با توجه به تعریف، عبارت‌های

روبه‌رو یک جمله‌ای محسوب می‌شوند:  $\sqrt{2}, -\frac{3}{4}x^2y^3, 5x^{10}, \sqrt{xyz}, \sqrt[3]{xyz}$

در حالی که عبارت‌های روبه‌رو یک جمله‌ای نیستند:  $\frac{2}{x}, 5^x, 3\sqrt{xy}, |x|, \sqrt[3]{xy}, 2x^2 + 3x$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید در تعریف یک جمله‌ای محدودیتی در مورد ضریب عددی وجود ندارد. یعنی ضریب عددی هر عددی از جمله گویا یا غیرگویا، مثبت یا منفی و ... می‌تواند باشد. نکته‌ای که باید به آن توجه شود، این است که توان **حروف** باید حسابی باشد.

**چندجمله‌ای:** به جمع جبری چند یک جمله‌ای غیرمتشابه (یعنی چند یک جمله‌ای که بخش حرفی‌شان یکسان نباشد) چندجمله‌ای می‌گوییم.

🍏  $2x^2 + 3x$  دو جمله‌ای و  $x^5 - x^2 + 1$  سه جمله‌ای است.

## عبارت‌گویا

عبارتی جبری است که بتوان آن را به صورت کسری نمایش داد که صورت و مخرج آن یک یا چندجمله‌ای باشد.

🍏 عبارت‌های روبه‌رو عبارت گویا محسوب می‌شوند:

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 1}{2x - 1}, \frac{1}{y}, x^{10} - 4x + 6, \frac{1}{2x^2 + 3}$$

در حالی که عبارت‌های زیر عبارت گویا محسوب نمی‌شوند:

$$\frac{\sqrt{x}}{1+x}, \frac{2^x}{x^2+1}, \frac{\sqrt{x+y}}{y^2}, \frac{|x|}{2x-2}$$

🎯 یک عبارت کسری تنها در صورتی از نظر ریاضی تعریف شده است که مخرج آن مخالف صفر باشد؛ به طور مثال عبارت  $\frac{x+1}{x-2}$  به ازای  $x=2$

تعریف نشده است. زیرا  $x=2$  موجب صفرشدن مخرج کسر می‌شود. عبارت  $\frac{2x}{x^2+2x}$  نیز به ازای  $x=0$  و  $x=-2$  تعریف نشده است.

🎯 هرگاه بخواهیم دو طرف یک تساوی و یا صورت و مخرج یک کسر را بر عبارتی تقسیم کنیم، حتماً باید شرط کنیم که آن عبارت مخالف

صفر باشد؛ به طور مثال عبارت  $\frac{2ax}{3a}$  را به شرط  $a \neq 0$  می‌توان به صورت  $\frac{2x}{3}$  ساده کرد. همچنین در عبارت  $\frac{(x+2)(x+3)}{2(x+2)}$  در صورتی که  $x \neq -2$

باشد، می‌توان عبارت  $x+2$  را از صورت و مخرج حذف نموده و آن را به شکل  $\frac{x+3}{2}$  نوشت. توجه‌کردن به این موضوع می‌تواند باعث اشتباه در

محاسبات شود. در زیر نمونه‌ای از یک نتیجه‌گیری غلط در اثر عدم توجه به این موضوع را مشاهده می‌کنید:

$$x = 5 \xrightarrow{\text{از دو طرف ۲۵ واحد کم می‌کنیم}} x^2 - 25 = 5x - 25 \xrightarrow{\text{از دو طرف رادار ضرب می‌کنیم}} x^2 = 5x \xrightarrow{\text{دو طرف را بر } x-5 \text{ تقسیم می‌کنیم}} x = 5$$

$$\frac{(x+5)(x-5)}{x-5} = \frac{5(x-5)}{x-5} \xrightarrow{\text{از } x-5 \text{ از صورت و مخرج کسرها خط می‌زنیم}} x+5 = 5$$

(فقط می‌توان یک عبارت مخالف صفر را از صورت و مخرج ساده کرد)

$$( \xrightarrow{x=5} 10 = 5 )$$

نتیجه‌ی غلط:

👉 تنها وقتی می‌توان عبارتی مشترک را از صورت و مخرج یک کسر حذف نمود که آن عبارت مشترک در صورت و مخرج ضرب شده باشد؛

به طور مثال می‌توان در عبارت  $\frac{y(x+4)}{x+4}$  با شرط  $x \neq -4$  از صورت و مخرج  $x+4$  را حذف نمود و آن را برابر  $y$  نوشت. این در حالی است که

نمی‌توان عبارت  $\frac{y+x+4}{x+4}$  را به صورت بالا ساده کرد. به بیان دیگر، ساده‌سازی عبارت  $\frac{y+x+4}{x+4}$  به  $y$  کاملاً غلط است.

**جمع و تفریق عبارات‌های گویا** برای جمع و تفریق دو عدد کسری مانند  $\frac{1}{18}$  و  $\frac{1}{12}$  باید ابتدا مخرج مشترک گرفت. از آنجایی که تجزیه‌ی اعداد ۱۲ و ۱۸ به صورت  $12 = 2 \times 3$  و  $18 = 2 \times 3^2$  است، لذا (ک.م.م) آن‌ها برابر  $2^2 \times 3^2 = 36$  خواهد بود. حال اگر به جای دو عدد کسری، دو عبارت جبری گویا داشته باشیم، برای محاسبه‌ی مخرج مشترک باید ابتدا مخرج هر یک از کسرها را تا جایی که ممکن است تجزیه کنیم، سپس «حاصل ضرب عبارات‌های مشترک با بزرگ‌ترین توان در عبارات‌های غیرمشترک» را به عنوان مخرج مشترک بنویسیم؛ به طور مثال چنانچه مخرج یک کسر  $(x-1)(x+1)$  و مخرج دیگری  $(x+1)^2$  باشد، مخرج مشترک  $(x+1)^2(x-1)$  خواهد بود. عبارت حاصل را اصطلاحاً «مضرب مشترک با کوچک‌ترین توان» می‌نامیم.

$$\frac{1}{x^2-x} + \frac{1}{x^2-1}$$

حاصل عبارت روبه‌رو را به دست آورید.

$$x^2 - x = x(x-1), \quad x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

ابتدا مخرج هر یک از کسرها را تجزیه می‌کنیم:

$x-1$  مشترک بین دو عبارت و  $x$  و  $x+1$  غیرمشترک هستند. لذا داریم:

$$\frac{(x-1)(x+1)x}{\text{مخرج مشترک}}$$

$$\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1 \times (x+1)}{x(x-1)(x+1)} + \frac{1(x)}{(x+1)(x-1)(x)} = \frac{x+1+x}{x(x-1)(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x-1)(x+1)}$$

چون مخرج در  $(x+1)$  ضرب می‌شود صورت نیز در آن ضرب می‌شود

چون مخرج در  $x$  ضرب می‌شود صورت نیز در آن ضرب می‌شود

## سوالات

۱) تمام گزاره‌های زیر غلط هستند. آن‌ها را با استدلال مناسب اصلاح کنید.

الف) عبارت  $x^2 + 5$  گویا نیست، زیرا عبارت گویا حتماً باید کسری باشد. ❌

استدلال: عبارت  $x^2 + 5$  گویاست و می‌توان آن را به شکل کسر — نوشت.

ب) عبارت  $\frac{2x-\sqrt{5}}{\sqrt{3x^2+6}}$  یک عبارت غیرگویاست؛ زیرا اعداد گنگ  $\sqrt{3}$  و  $\sqrt{5}$  در آن به کار رفته است. ❌

استدلال: عبارت بالا یک عبارت گویا محسوب می‌شود؛ زیرا شرط لازم برای گویابودن عبارت و به بیان دیگر یک جمله‌ای یا چندجمله‌ای بودن صورت و مخرج عبارت این است که — زیر رادیکال نباشند.

پ) عبارت  $\sqrt{x^2}$  گویاست، زیرا حاصل  $\sqrt{x^2}$  برابر  $x$  می‌باشد. ❌

استدلال: عبارت  $\sqrt{x^2}$  گویا نیست زیرا حاصل  $\sqrt{x^2}$  برابر  $x$  نیست بلکه برابر — است.

ت) هیچ‌یک از اعداد ۲ و  $\sqrt{5}$  یک عبارت گویا محسوب نمی‌شوند. ❌

استدلال: هر عدد — چه گویا چه گنگ یک عبارت گویا محسوب می‌شود.

۲) هر یک از عبارات‌های گویای زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده‌اند؟

الف)  $\frac{2t+1}{2t-1}$

ب)  $\frac{x^2+3}{x}$

ب  $\frac{x^2 + 7x}{(x-1)(x-2)}$

ت  $\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x^2+x}$

ث  $\frac{2x-4}{x^2-16}$

ج  $\frac{2x-4}{x^2+16}$

چ  $\frac{x+\sqrt{5}y}{9y^2-x^2}$

ح  $\frac{x^2-4}{x^2+2x+1}$

۳ برای تشخیص این که هر یک از عبارت‌های زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده‌اند، جاهای خالی را پر کنید.

الف  $\frac{2x-4}{x^2+8x+15}$

باید ابتدا مخرج را به کمک اتحاد جمله‌مشتک تجزیه کنیم، سپس باید به دنبال دو عدد بگردیم که جمعشان برابر ۸ و ضربشان برابر — شود؛ یعنی ۳ و —، پس شکل تجزیه‌شده‌ی مخرج به صورت  $(x+3)(x+\dots\dots)$  خواهد بود و از این‌جا نتیجه می‌گیریم که به ازای  $x = -3$  و  $x = \dots\dots$  تعریف نشده خواهد بود.

ب  $\frac{x^2+5}{x^2+3x-10}$

برای تجزیه‌ی  $x^2+3x-10$  به کمک اتحاد جمله‌مشتک به دنبال دو عدد می‌گردیم که جمعشان برابر — و ضربشان  $-10$  باشد؛ یعنی  $-2$  و  $5$ ، پس تجزیه‌ی آن به صورت  $(x-2)(x+\dots\dots)$  بوده و در نتیجه کسر داده‌شده به ازای  $x=2$  و  $x = \dots\dots$  تعریف نشده خواهد بود.

پ  $\frac{x^2-x+1}{4x^2+16x+15}$

اگر مخرج را به صورت  $(2x)^2 + 8(2x) + 15$  بنویسیم، درمی‌یابیم که برای تجزیه‌ی آن باید از اتحاد جمله‌مشتک استفاده کنیم. پس باید به دنبال دو عدد بگردیم که جمعشان برابر ۸ و ضربشان — است؛ یعنی ۳ و — پس شکل تجزیه‌شده‌ی مخرج به صورت  $(2x+3)(2x+\dots\dots)$  خواهد بود. مخرج را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$(2x+3)(2x+\dots\dots) = 0 \Rightarrow \underbrace{2x = -3}_{x = \frac{-3}{2}} \text{ یا } \underbrace{2x = \dots\dots}_{x = \dots\dots}$$

ت  $\frac{2x+5x^2}{9x^2-18x+8}$

$$9x^2 - 18x + 8 = (3x)^2 - (\dots\dots) \times 3x + 8 = (3x - \dots\dots)(3x - \dots\dots) = 0 \Rightarrow \underbrace{3x = \dots\dots}_{x = \dots\dots} \text{ یا } \underbrace{3x = \dots\dots}_{x = \dots\dots} \Rightarrow x = \dots\dots \text{ یا } x = \dots\dots$$

ث  $\frac{x^2+5x+12}{x^2-81x^2}$

$$x^y - 81x^z = x^z(\dots) = x^z(\dots)(x^y + 9) = x^z(\dots - 3)(\dots + \dots)(x^y + 9) = 0$$

$$\Rightarrow x = \dots \text{ یا } x = \dots \text{ یا } x = \dots$$

ج  $\frac{b^r c^r + ab^r c^r}{a^r b^r c^r - a^r b^r c^r}$

$$a^r b^r c^r - a^r b^r c^r = a^r b^r c^r (c - \dots) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ یا } b = 0 \text{ یا } \dots = 0 \text{ یا } \dots = \dots$$

۴ صحیح یا غلط بودن هر یک از گزاره‌های زیر را با علامت‌های  و  مشخص کنید.

الف عبارت  $\frac{x}{x(x-2)}$  به ازای  $x=2$  و  $x=0$  تعریف نشده است.

ب از آنجایی که در عبارت  $\frac{x}{x(x-2)}$  جمله‌ی  $x$  از صورت و مخرج ساده می‌شود، پس این عبارت فقط به ازای  $x=2$  تعریف نشده است.

۵ کسرهای زیر را ساده کنید.

الف  $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$

ب  $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 8}$

ب  $\frac{25x^2 - 25x - 6}{25x^2 - 1}$

ب  $\frac{x^2 - 27}{x^2 - x - 6}$

ث  $\frac{x^2 + 10x + 25}{x^2 + 15x^2 + 75x + 125}$

ج  $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x^2 + 3x - 1}$

ج  $\frac{4x^2 - 49}{4x^2 + 8x - 21}$

ح  $\frac{9x^2 - 4}{27x^2 - 8}$

خ  $\frac{x^2 + 9x - 22}{x^2 - 6x^2 + 12x - 8}$

د  $\frac{2x^r(x^r-1)^r - x(x^r-1)^r}{x^5 + x^r}$

۶ در هر یک از قسمت‌های زیر «مضرب‌مشترک با کوچک‌ترین توان» را بیابید.

الف  $x^r + 10x^r + 21x^r, x^r + 6x^r - 7x$

ب  $x^r - y^r, x^r - y^r$

ب  $x^f - y^f, x^r + y^r$

ت  $x^r + 3\sqrt{3}x^r + 9x + 3\sqrt{3}, x^r - 3$

۷ عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف  $\frac{2}{\underbrace{x^r + x^r}_{(\dots)(\dots+\dots)}} + \frac{x}{\underbrace{x^r - x^r}_{(\dots)(\dots-\dots)}} = \frac{2(\dots-\dots) + x(\dots+\dots)}{x^r(\dots+\dots)(\dots-\dots)} = \frac{x^r + \dots x - \dots}{x^r(\dots+\dots)(\dots-\dots)}$

ب  $\frac{x+2}{\underbrace{x^r+x}_{x(x+1)}} - \frac{x-1}{\underbrace{x^r-2x}_{x(\dots-\dots)}} = \frac{(x+2)(\dots-\dots) - (x-1)(\dots+\dots)}{x(\dots+\dots)(\dots-\dots)} = \frac{\dots}{x(\dots+\dots)(\dots-\dots)}$

ب  $\frac{1}{x^r+x} - \frac{2}{x} + \frac{3x+4}{x+1}$

ت  $\frac{x^r-3}{x+5} + 2x+10$



۸ در محاسبات زیر صحیح یا غلط بودن هر مرحله را با علامت‌های  یا  مشخص کنید.

$$x = 3 \xrightarrow{\square} x^2 = 3x \xrightarrow{\square} x^2 - 9 = 3x - 9 \xrightarrow{\square} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \frac{3(x-3)}{x-3} \xrightarrow{\square} x+3=3 \xrightarrow{x=3} 6=3$$

(کنکور ۹۴)

۹ حاصل عبارت  $(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) \left( \frac{x}{x^2 - 4x + 4} - \frac{1}{x-2} \right)$  کدام است؟

$2x \quad \text{پ}$

$2x - 1 \quad \text{س}$

$2x - 2 \quad \text{ز}$

$2x - 4 \quad \text{ب}$

(کنکور ۹۲)

۱۰ خلاصه‌شده‌ی  $(x + \frac{2}{x-3}) \times (1 - \frac{1}{x-2})$  کدام است؟

$2x+1 \quad \text{پ}$

$x+2 \quad \text{س}$

$x+1 \quad \text{ز}$

$x-1 \quad \text{ب}$

(کنکور ۹۰)

۱۱ خلاصه‌شده‌ی عبارت  $(1 - \frac{6}{x+2}) (\frac{5x-2}{x-4} + x)$  کدام است؟

$x+2 \quad \text{پ}$

$x+1 \quad \text{س}$

$x-1 \quad \text{ز}$

$x-2 \quad \text{ب}$

(کنکور ۸۹)

۱۲ خلاصه‌شده‌ی عبارت  $(x - 5 + \frac{6}{x+2}) \div (1 - \frac{1}{x+2})$  کدام است؟

$x-6 \quad \text{پ}$

$x-4 \quad \text{س}$

$x-2 \quad \text{ز}$

$x+3 \quad \text{ب}$