

نسبت و تناسب در هندسه

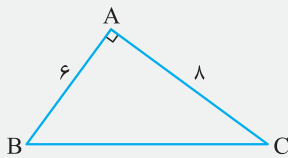
درس اول

تعریف نسبت

نسبت بین دو عدد a و b عبارت است از کسر $\frac{a}{b}$ ، که b نباید صفر باشد، چون تقسیم کردن یک عدد بر صفر معنی ندارد.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (b, d \neq 0)$$

تساوی بین دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ (که b و d صفر نیستند) یک تناسب نامیده می‌شود. یعنی:



مثال در شکل مقابل نسبت ضلع بزرگ به محیط و مساحت مثلث را بنویسید. سپس آن‌ها را با هم

مقایسه کنید.

پاسخ

ویژگی‌های تناسب

به وسیلهٔ اعمال و روش‌های جبری می‌توان از هر تناسب، تناسب‌ها یا تساوی‌های دیگری را نتیجه گرفت. در جدول زیر مهم‌ترین این ویژگی‌ها را مشاهده می‌کنید.

۱	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$	$b, d \neq 0$	طرفین وسطین کردن
۲	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$	$a, b, c, d \neq 0$	معکوس کردن طرفین تناسب
۳	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ یا $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$	$a, b, c, d \neq 0$	تعویض جای طرفین یا وسطین
۴	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ یا $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$	$b, d \neq 0$	ترکیب نسبت در صورت یا مخرج
۵	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ یا $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$	$b, d \neq 0$	تفضیل نسبت در صورت یا مخرج
۶	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	$b, d \neq 0$	
۷	$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$	$b_1, b_2, \dots, b_n \neq 0$	تعمیم ویژگی ۶

$$\frac{m}{m+2} = \frac{2}{4}$$

مثال در تناسب مقابل مقدار m را پیدا کنید.

پاسخ

مثال روی پاره خط $AB = 4$ ، دو نقطه C و D را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $\frac{AC}{CB} = \frac{DB}{AD} = \frac{1}{3}$. طول پاره خط CD را به دست آورید.

پاسخ

اکنون به کمک ویژگی‌های تناسب چند نتیجه را به دست می‌آوریم.

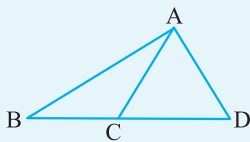
نتیجه ۱ در هر مثلث نسبت اندازه‌های هر دو ضلع با عکس نسبت ارتفاع‌های وارد بر آن‌ها برابر است.

اثبات

نتیجه ۲ هرگاه اندازه ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت اندازه قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آن‌ها وارد شده است.

اثبات

نتیجه ۳ اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعده مقابل به این رأس آن‌ها، روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت اندازه قاعده‌های آن‌ها است. یعنی در شکل مقابل داریم:



$$\frac{\text{مساحت مثلث } ABC}{\text{مساحت مثلث } ACD} = \frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{BC}{CD}$$

اثبات

نتیجه ۴ اگر دو مثلث، قاعده مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعده آن‌ها، روی یک خط موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها هم مساحت‌اند.

اثبات

مثال طول سه ارتفاع از یک مثلث $2\sqrt{2}$ و ۴ سانتی‌متر و کوچک‌ترین ضلع آن ۵ سانتی‌متر است. محیط مثلث را به دست آورید.

پاسخ

تعریف واسطه (میانگین) هندسی

در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ، واسطه هندسی دو جمله کناری a و c نامیده می‌شود و مقدار آن از رابطه $b^2 = ac$ به دست می‌آید.

مثال میانگین هندسی دو عدد a و ۴ برابر ۸ می‌باشد. مقدار a را به دست آورید.

پاسخ

تمرین در منزل

۱ به کمک ویژگی‌های تناسب، مقدار a را از تناسب $\frac{y-a}{a} = \frac{8}{4}$ بیابید.

۲ در هر یک از موارد زیر جای خالی را پر کنید.

اگر $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$ ، آن‌گاه $\frac{x+1}{y+2} = \square$

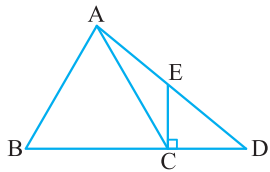
اگر $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{5}$ ، آن‌گاه $\frac{a+b+c+d}{\square} = \frac{a}{\square}$

۳ اگر $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{9} = \frac{5}{6}$ ، حاصل $a+b+c$ را بیابید.

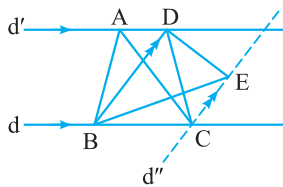
۴ اگر $\frac{a}{b} = \frac{7}{4}$ ، مقدار عبارت $\frac{4a-3b}{3a-3b}$ را به کمک ویژگی‌های تناسب به دست آورید.

۵ طول اضلاع مثلثی ۶،۴ و ۸ سانتی‌متر و بلندترین ارتفاع آن $\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۲}$ سانتی‌متر است. طول دو ارتفاع دیگر مثلث را به دست آورید.

۶ در مثلثی طول ارتفاع‌ها ۳، $\frac{۲۱}{۱۰}$ و $\frac{۲۱}{\sqrt{۳۷}}$ است، و طول بزرگ‌ترین ضلع ۵ می‌باشد. طول اضلاع دیگر مثلث را بیابید.



۷ در شکل مقابل مساحت مثلث ACD $\frac{۵}{۶}$ مساحت مثلث ABC است، و مساحت مثلث ECD برابر ۲۰ و طول ضلع EC برابر ۸ می‌باشد، طول EB را بیابید.



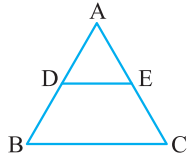
۸ در شکل مقابل $d \parallel d'$ و پاره خط BD با خط d'' موازی است. مساحت مثلث ABC برابر ۸ و طول BD برابر ۴ است. فاصله BD از خط d'' را بیابید.

۹ واسطه هندسی دو پاره خط به طول‌های x و ۶، پاره خطی به طول ۸ است، x را به دست آورید.

قضیه تالس

درس دوم

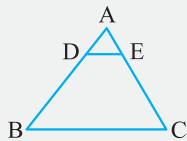
قضیه تالس



هرگاه در یک مثلث، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع چهار پاره‌خط جدا می‌کند که اندازه‌های آن‌ها تشکیل یک تناسب می‌دهند، یعنی اگر در شکل مقابل، $DE \parallel BC$ باشد داریم:

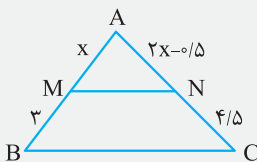
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

اثبات



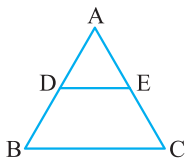
مثال در شکل مقابل $DE \parallel BC$ ، $AD = 1$ ، $DB = 3$ و $AE = 0.8$ طول AC را به دست آورید.

پاسخ



مثال در شکل مقابل $MN \parallel BC$ ؛ به کمک قضیه تالس و با تشکیل معادله، مقدار x را به دست آورید.

پاسخ

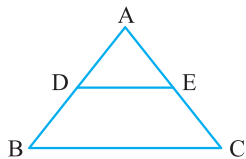


صورت دیگر قضیه تالس

اگر در شکل مقابل $DE \parallel BC$ ، آن‌گاه $\frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$

اثبات

تعمیم قضیه تالس

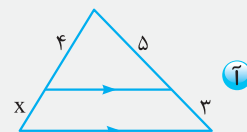
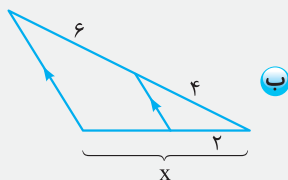


اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازه ضلع‌های آن با اندازه ضلع‌های مثلث اصلی متناسب‌اند. یعنی با توجه به شکل داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

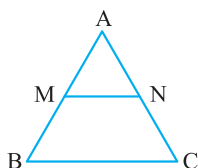
اثبات

مثال در هر یک از شکل‌های زیر مقدار x را محاسبه کنید.



پاسخ

عکس قضیه تالس

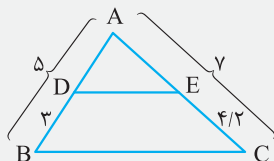


اگر در مثلث ABC روبه‌رو، نقاط M و N طوری روی ضلع‌های AB و AC انتخاب شوند که $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ ، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت که پاره‌خط MN موازی ضلع BC است.

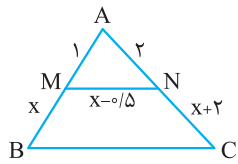
اثبات

مثال نشان دهید در مثلث مقابل $DE \parallel BC$ است.

پاسخ



تمرین در منزل

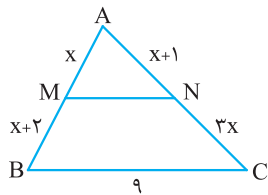


۱۰ در شکل مقابل، اگر $MN \parallel BC$ ، مقدار x را به دست آورید و سپس طول BC را نیز بیابید.

.....

.....

.....

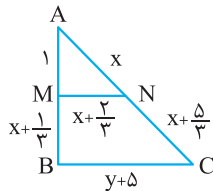


۱۱ در مثلث ABC ، $MN \parallel BC$ است. مقدار x و طول ضلع MN را بیابید.

.....

.....

.....

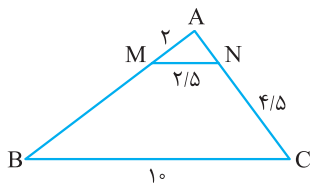


۱۲ در مثلث ABC ، $MN \parallel BC$ است. مقدار $x+y$ را به دست آورید.

.....

.....

.....

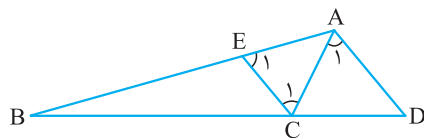


۱۳ در مثلث ABC ، $MN \parallel BC$ است. طول پاره‌های AB و AN را به دست آورید.

.....

.....

.....



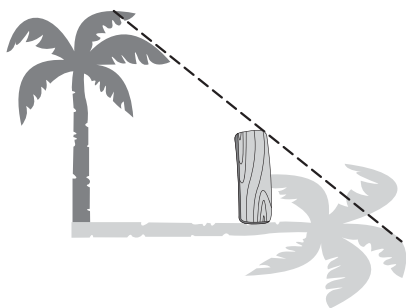
۱۴ در شکل مقابل، \hat{A}_1 ، \hat{C}_1 و \hat{E}_1 با هم برابرند. اگر $AB = 12$ و $AC = 4$ باشند،

مقدار $\frac{CD}{BD}$ را به دست آورید.

.....

.....

.....



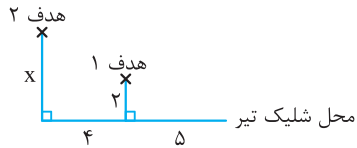
۱۵ اگر طول سایه درخت ۳۰ متر، طول سایه شاخص ۳ متر و طول شاخص ۲ متر باشد،

بلندی درخت چند متر است؟

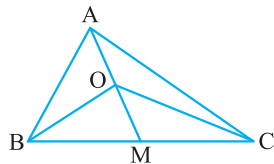
.....

.....

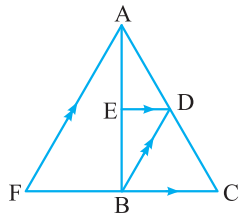
.....



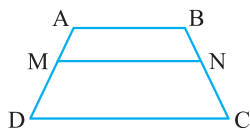
۱۶ در یک مسابقه تیراندازی، شرکت کنندگان باید دو هدف را با یک تیر بزنند. محل قرارگیری هدف‌ها مانند شکل مقابل است. مقدار x را طوری تعیین کنید که این کار امکان‌پذیر باشد.



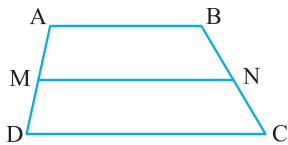
۱۷ در شکل مقابل، مساحت مثلث‌های ABC و OBC را به ترتیب S و S' می‌نامیم. ثابت کنید:

$$\frac{AO}{AM} = \frac{S - S'}{S}$$


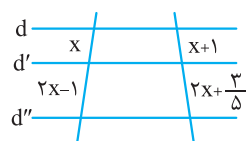
۱۸ با توجه به شکل مقابل و با استفاده از قضیه تالس نشان دهید:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{BF}{CB}$$


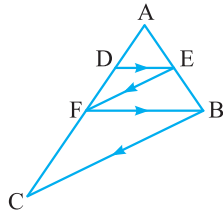
۱۹ (قضیه تالس در دوزنقه) در دوزنقه مقابل $MN \parallel AB \parallel CD$ ، ثابت کنید $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$



۲۰ در چهارضلعی مقابل، $MN \parallel DC$ و $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$ ثابت کنید $ABCD$ دوزنقه است.



۲۱ در شکل مقابل سه خط d ، d' و d'' با هم موازی‌اند. مقدار x را به دست آورید.



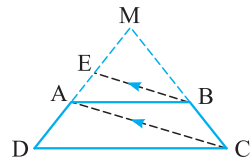
۲۲ در مثلث ABC ، در شکل روبه‌رو DE با FB و EF با BC موازی است. با دو بار استفاده از قضیه

$$\frac{AD}{DF} = \frac{AF}{FC}$$

.....

.....

.....

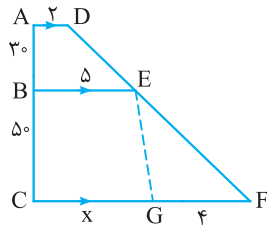


۲۳ در دوزنقه $ABCD$ ، امتداد دو ساق، یکدیگر را در نقطه M قطع می‌کنند و پاره خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD = 7$ و $AE = 3$ باشد، اندازه MD را به دست آورید.

.....

.....

.....



۲۴ مقدار x را در شکل مقابل بیابید.

.....

.....

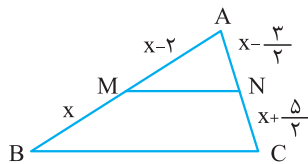
.....

۲۵ در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد، مربعی محاط کرده‌ایم. مساحت مربع را به دست آورید (مربع محاط در مثلث، مربعی است که رئوس آن روی اضلاع مثلث قرار داشته باشند).

.....

.....

.....

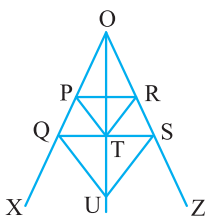


۲۶ مقدار x در شکل مقابل را طوری بیابید که پاره خط MN با ضلع BC موازی باشد.

.....

.....

.....

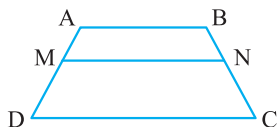


۲۷ در شکل مقابل $\frac{OT}{OU} = \frac{OP}{OQ}$ و $TR \parallel SU$ ، ثابت کنید $PR \parallel QS$

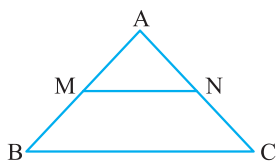
.....

.....

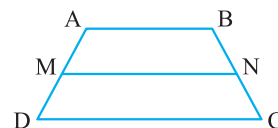
.....



۲۸ اگر نقطه‌های M و N روی ساق‌های دوزنقه ABCD به گونه‌ای قرار داشته باشند که $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC}$ ، ثابت کنید $AB \parallel MN \parallel DC$ (عکس قضیه تالس در دوزنقه)



۲۹ ثابت کنید اگر در مثلث ABC اواسط دو ضلع مقابل را به هم وصل کنیم، پاره خط ساخته شده موازی و نصف ضلع مقابل است. (قضیه میان خط در مثلث)



۳۰ ثابت کنید اگر وسط دو ساق دوزنقه را به هم وصل کنیم، این پاره خط موازی با قاعده‌های دوزنقه می‌باشد و برابر نصف مجموع دو قاعده است. یعنی $AB \parallel MN \parallel CD$ و $MN = \frac{AB + CD}{2}$ (قضیه میان خط در دوزنقه)

۳۱ وسط‌های اضلاع یک چهارضلعی محدب را به هم وصل کرده‌ایم. شکل حاصل الزاماً چه شکلی خواهد شد؟

پاسخنامه

۴۸. گزینه (۱)

۴۹. گزینه (۳)

۵۰. گزینه (۱)

۵۱. گزینه (۴)

۵۲. گزینه (۲)

فصل اول

۴۳. گزینه (۱)

۴۴. گزینه (۲)

۴۵. گزینه (۲)

۴۶. گزینه (۳)

۴۷. گزینه (۱)

پاسخنامه

$$MD = \frac{49}{4} = 12.25 \quad 23.$$

$$x = 6 \quad 24.$$

۲۵. مساحت مربع برابر $\frac{3}{7+4\sqrt{3}}$ می‌باشد.

$$x = \frac{5}{2} \quad 26.$$

۳۱. متوازی‌الاضلاع

$$y = \frac{16}{5} \text{ و } x = \frac{15}{2} = 7.5 \quad 32.$$

$$x = 2/2 \text{ (ب)}$$

$$x = 80^\circ \text{ و } y = 70^\circ \quad 33.$$

$$BD = 9 \quad 34.$$

$$BE = 14/5 \quad 35.$$

$$x = 1372683/6 \quad 36.$$

$$CD = 9 \quad 37.$$

$$AB = \frac{25}{8} \quad 38.$$

$$n = 12 \quad 40.$$

$$3 \text{ متر} \quad 41.$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{10} \quad 42.$$

فصل دوم

$$a = 5 \quad 1.$$

$$\frac{a+b+c+d}{14} = \frac{a}{2} \text{ (ب) و } \frac{x+1}{y+2} = \frac{1}{2} \text{ (آ)} \quad 2.$$

$$a+b+c = \frac{40}{3} \quad 3.$$

$$\frac{4a-3b}{2a-3b} = \frac{16}{9} \quad 4.$$

$$\sqrt{15} \text{ و } \frac{3\sqrt{15}}{4} \quad 5.$$

$$\frac{7}{2} \text{ و } \frac{\sqrt{37}}{2} \quad 6.$$

$$EB = 10 \quad 7.$$

۸. فاصله DB از خط d برابر ۴ واحد می‌باشد.

$$x = \frac{32}{3} \quad 9.$$

$$x = 2 \text{ و } BC = 4/5 \quad 10.$$

$$MN = 3 \text{ و } x = 2 \quad 11.$$

$$x+y = \frac{11}{3} \quad 12.$$

$$AN = 1/5 \text{ و } AB = 8 \quad 13.$$

$$\frac{CD}{BD} = \frac{1}{3} \quad 14.$$

$$20 \text{ متر} \quad 15.$$

$$x = 3/6 \quad 16.$$

$$x = \frac{5}{2} \quad 21.$$