

هندسه تحلیلی

۱

درس

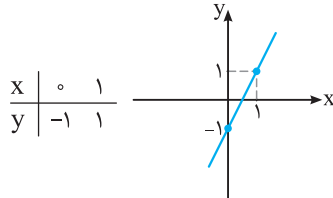
از صفحه ۲ تا صفحه ۱۰ کتاب درسی

شیب خط: اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه از خطی باشند، شیب خط از رابطه $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ به دست می‌آید. شیب هر خط افقی صفر و شیب هر خط موازی محور عرض‌ها، تعریف نشده است. اگر معادله خط به شکل $y = ax + b$ باشد، ضریب x همان شیب خط است.

معادله خط: با داشتن دو نقطه دلخواه از خط می‌توانیم معادله خط را بنویسیم. اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه از خط باشند، معادله این خط برابر است با $y - y_1 = m(x - x_1)$. خطوط افقی دارای معادله به شکل $y = k$ هستند و خطوط موازی محور عرض‌ها دارای معادله به شکل $x = k$ هستند. (k عدد حقیقی است).

خطوط موازی و عمود: اگر شیب خطوط L_1 و L_2 به ترتیب برابر m_1 و m_2 باشند، آن‌گاه:

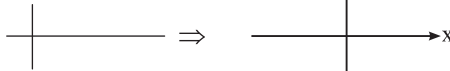
(آ) اگر $m_1 = m_2$ باشد، دو خط L_1 و L_2 با هم موازی‌اند. (ب) اگر $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ باشد، دو خط L_1 و L_2 بر هم عمودند.



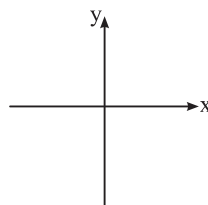
رسم نمودار خط: برای این منظور کافی است به x دو مقدار دلخواه نسبت داده و y آن‌ها را به دست آوریم. سپس دو نقطه حاصل را به هم وصل کرده و امتداد می‌دهیم. مثلاً برای رسم خط $y = 2x - 1$ خواهیم داشت:

نمودار خطوط زیر را رسم کنید.

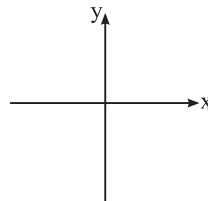
۱) $L_1 : y = -3x + 1$



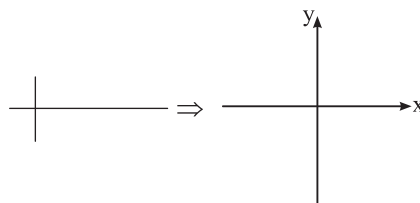
۲) $L_2 : y - 4 = 0$



۳) $L_3 : x + 3 = 0$



۴) $L_4 : \frac{y+1}{3} = x - 2$



۲ خط L به معادله $7 - 5x = 2y$ و خط T به معادله $y = 2mx - 6$ را در نظر بگیرید:

۱ m را طوری بیابید که خط L با خط T موازی باشد.

۲ به ازای چه مقداری از m دو خط L و T بر هم عمودند؟

۳ معادله خط گذرنده از نقطه $A(3, 6)$ و محل تلاقی دو خط $2x + 3y = -1$ و $-x + 4y = -5$ را بنویسید.

۴ معادله خطی را بنویسید که:

۱ از نقاط $A(1, 4)$ و $B(-3, 0)$ عبور کند.

۲ از نقطه $A(-6, 2)$ گذشته و شیب آن -5 باشد.

۳ از نقطه $A(-1, 4)$ گذشته و با خط $y - 2x = 0$ موازی باشد.

۴ از نقطه $A(0, 6)$ گذشته و بر خط $3x - 2y = 6$ عمود باشد.

۵ در هر قسمت، شیب دو خط را به دست آورده و مشخص کنید که دو خط نسبت به هم چه وضعی دارند؟ (موازی، عمود یا متقاطع غیرعمود)

۱
$$\begin{cases} y - 3x = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

۲
$$\begin{cases} x = -4 \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$$

۳
$$\begin{cases} y = 5x - 1 \\ x = 5y - 1 \end{cases}$$

۴
$$\begin{cases} \frac{y-x}{3} = 2 \\ \frac{x+y}{2} = -6 \end{cases}$$

۶ به ازای چه مقداری از k نقاط $A(2k, k-1)$ ، $B(2, -1)$ و $C(3, 5)$ روی یک خط راست واقع اند؟

۷ خط گذرنده از نقطه $(-3, 0)$ با محورهای مختصات، مثلثی با مساحت ۹ واحد می‌سازد، مقدار یا مقادیر m کدام است؟ (m شیب این خط می‌باشد).

۸ مربع $ABCD$ در ناحیه اول صفحه مختصات قرار دارد (هر چهار رأس آن)، به طوری که $A(5, 1)$ و $B(10, 4)$ دو رأس مجاور آن هستند.

۱ شیب ضلع AB را به دست آورید و معادله آن را بنویسید.

۲ شیب ضلع AD را حساب کرده و معادله آن را بنویسید.

۳ اگر بدانیم نقطه $C(7, 9)$ رأس سوم مربع است، مختصات رأس D را به دست آورید.

فاصله دو نقطه: اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه دلخواه باشند، طول پاره خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$OA = \sqrt{x^2 + y^2}$$

تذکر: فاصله نقطه $A(x, y)$ تا مبدأ برابر است با:

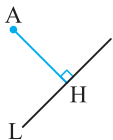
فاصله نقطه $A(x_1, y_1)$ تا خط افقی $y = k$ برابر است با $|y_1 - k|$ و فاصله A تا خط عمودی $x = k$ برابر است با $|x_1 - k|$

مختصات وسط پاره خط: اگر $M(x_M, y_M)$ نقطه وسط پاره خطی باشد که دو سر آن $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ هستند، مختصات M برابر است با:



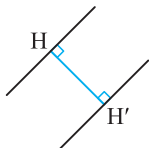
$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

تذکر: قرینه نقطه A نسبت به M برابر است با B و بر عکس.



فاصله نقطه از خط: اگر نقطه $A(x_1, y_1)$ خارج خط L به معادله $ax + by + c = 0$ باشد، اندازه پاره خط AH که همان فاصله نقطه A از خط L می‌باشد برابر است با:

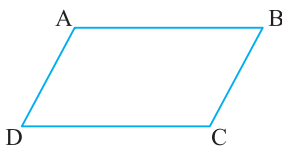
$$\Rightarrow AH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



فاصله بین دو خط موازی: برای به دست آوردن فاصله بین دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه روبه‌رو استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow HH' = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نکته: در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ روابط زیر همواره برقرار هستند:



$$\Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

۹ مثلث ABC را با رئوس $A(2,1)$ ، $B(-1,0)$ و $C(1,-3)$ در نظر بگیرید.

۱) مختصات M نقطه وسط ضلع BC را به دست آورید.

۲) طول میانه AM را تعیین کنید.

۳) معادله میانه AM را تعیین کنید.

۱۰ یکی از رئوس مربعی برابر $A(2,3)$ و یک ضلع مربع واقع بر خط $2x + 2y = 1$ است. مساحت مربع را به دست آورید.

۱۱ اگر نقاط $A(1,3)$ و $B(0,2)$ دو رأس مجاور مربعی باشند، محیط و مساحت مربع را به دست آورید.

۱۲ نقاط $(2,3)$ و $(4,-2)$ دو رأس مقابل یک لوزی هستند. معادله قطرهای این لوزی را به دست آورید.

۱۳ فاصله نقطه $A(2,-3)$ از خط $3x + 4y = k$ برابر ۲ است، مقدار k را به دست آورید.

۱۴ فاصله نقطه $A(-1,5)$ از خطهای $x = 4$ و $y = -3$ را به دست آورید.

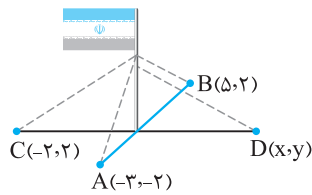
۱۵ مساحت مستطیلی را که یک رأس آن به مختصات $(1,1)$ و دو ضلع آن واقع بر خطوط $x + y = 4$ و $x - y = 1$ باشد، حساب کنید.

۱۶ نقاط $A(2,3)$ ، $B(-1,0)$ و $C(1,-2)$ سه رأس یک مستطیل اند به طوری که A و B مجاور هم می باشند.

۱) شیب ضلع AB و معادله آن را به دست آورید.

۲) شیب ضلع BC و معادله آن را به دست آورید.

۳) به کمک معادلات اضلاع AB و BC ، مختصات رأس چهارم مستطیل را بیابید.



۱۷ میله یک پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است. به طوری که فاصله هر نقطه تا میله برابر است با فاصله نقطه مقابل آن تا میله. مختصات نقطه D را به دست آورید.

۱۸ در یکی از جاده‌های کشور حادثه‌ای رخ داده است و مختصات این نقطه روی نقشه به صورت $P(5, 4)$ است. نزدیک‌ترین پایگاه‌های امداد هوایی به محل حادثه در نقاط $A(3, -2)$ و $B(2, 8)$ واقع‌اند. بهتر است از کدام پایگاه به محل حادثه، هلی‌کوپتر اعزام شود؟

۱۹ مثلثی با رأس‌های $A(2, 3)$ ، $B(-4, 2)$ و $C(8, 0)$ را در نظر بگیرید.

۱ شیب ضلع BC را به دست آورید و معادله آن را بنویسید.

۲ فاصله رأس A تا ضلع BC (اندازه ارتفاع وارد بر BC) را به دست آورید.

۳ به کمک ارتفاع AH ، مساحت مثلث را به دست آورید.

۲۰ دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای، نقاط $A(3, 6)$ و $B(-1, 2)$ هستند.

۱ اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

۲ آیا نقطه $C(5, 4)$ روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

۲۱ دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات از نقطه $M(-4, 2)$ گذشته است. شعاع دایره را به دست آورید.

۲ فاصله هر نقطه دلخواه به مختصات $N(x, y)$ از مبدأ چقدر است؟

۲۲ **ا** نقطه $M(۴۰-۶)$ وسط پاره‌خط واصل دو نقطه A و $B(-۲۰۸)$ است. مختصات A را به‌دست آورید.

ب قرینه نقطه $A(۳۰۲)$ را نسبت به نقطه $M(-۱۰۰۱)$ به‌دست آورید.

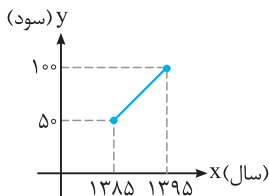
۲۳ نقاط $A(۰۰-۱)$ ، $B(۳۰۱)$ و $C(۲۰-۴)$ سه رأس یک مثلث هستند:

ا محیط مثلث ABC را به‌دست آورید.

ب مثلث ABC چه نوع مثلثی است؟

پ مساحت مثلث ABC را به‌دست آورید.

۲۴ سود سالانه یک تولیدی از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ طبق نمودار مقابل می‌باشد. به کمک فرمول نقطه وسط پاره‌خط مشخص کنید که:



ا میانگین سود سالانه این تولیدی در دهه مورد نظر چقدر بوده است؟

ب در کدام سال، مقدار سود سالانه با میانگین سود این ۱۰ سال برابر بوده است؟

پ اگر سود سالانه در طول یک دهه آینده با همین روند افزایش یابد، در سال ۱۴۰۱ سود سالانه تقریباً چقدر خواهد بود؟

۲۵ نشان دهید دو خط با معادلات $x - 5y = 6$ و $2x = 10y + 1$ با هم موازی هستند.

ب فاصله بین این دو خط را به‌دست آورید.

۲۶ خط $2x - 5y = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $W(۱۰-۴)$ مماس است. شعاع دایره، محیط و مساحت آن را به‌دست آورید.

۲۷ دو نقطه $A(۲۰, -۶)$ و $B(۸, ۴)$ را در نظر بگیرید.

۱) فاصله مبدأ مختصات را از وسط پاره خط AB به دست آورید.

۲) معادله عمودمنصف پاره خط AB را به دست آورید.

آزمونک

۲۸ اگر $A(m+n, ۲)$ ، $B(-۱, ۳)$ ، $C(۴, ۴)$ و $D(۲, ۲m-n)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، زوج مرتب (m, n) کدام است؟

(۱) $(۰, -۳)$ (۲) $(-۲, ۱)$ (۳) $(۳, ۲)$ (۴) $(-۳, -۲)$

۲۹ اگر $A(۲, ۰)$ و $B(۰, ۴)$ دو رأس مقابل یک مربع باشند، معادله قطر دیگر مربع کدام است؟

(۱) $۳y + x = ۵$ (۲) $۲y - x = ۳$ (۳) $۲x - y = ۰$ (۴) $۲x + y = ۴$

۳۰ اگر فاصله نقطه $A(۱, ۱)$ از خط $y = x + m$ برابر $۲\sqrt{۲}$ باشد، مقدار m کدام است؟

(۱) فقط $+۴$ (۲) فقط -۴ (۳) ± ۴ (۴) ± ۲

۳۱ خطی به معادله $۵x - ۲y = ۱۰$ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. فاصله A و B کدام است؟

(۱) $\sqrt{۲}$ (۲) $\sqrt{۳۱}$ (۳) $\sqrt{۲۹}$ (۴) $\sqrt{۵}$

۳۲ اگر دو ضلع مربعی بر خطوط $y = (m^2 - 1)x + ۳$ و $y = (m^2 - 1)x + ۱$ واقع باشند و محیط مربع ۸ باشد، آن‌گاه:

(۱) $m = ۰$ (۲) $m = ۱$ (۳) $m = ۲$ (۴) $m = -۲$

۳۳ خطی که از نقطه $M(-۱, ۳)$ گذشته و بر خط $۲x + ۴y = ۷$ عمود باشد، محور طول‌ها را با چه طولی قطع می‌کند؟

(۱) $\frac{۵}{۲}$ (۲) ۵ (۳) -۵ (۴) $-\frac{۵}{۲}$

۳۴ معادله خطی که از نقطه تلاقی خطوط $y - ۲x = -۱$ و $۲y + x - ۳ = ۰$ گذشته و شیب آن ۲ باشد، کدام است؟

(۱) $y - ۲x - ۳ = ۰$ (۲) $y - ۲x + ۱ = ۰$ (۳) $y + ۲x + ۱ = ۰$ (۴) $y + ۲x - ۳ = ۰$



معادله درجه دوم و تابع درجه دو

۲

درس

از صفحه ۱۱ تا صفحه ۱۸ کتاب درسی

روش تغییر متغیر برای حل معادلات: گاهی اوقات یک عبارت، دو بار در معادله تکرار می‌شود که بهتر است آن عبارت را مثلاً t فرض کرده تا آن معادله، به یک معادله درجه دوم تبدیل شود، سپس آن معادله را حل کرده تا t به دست آید. در نهایت به جای t عبارت اولیه را قرار می‌دهیم تا مجهول به دست آید. مثلاً در معادله $0 = x^4 - 3(x-1)^4 + 2(x-1)^2 - 6$ عبارت $(x-1)^4$ را می‌توان به صورت $((x-1)^2)^2$ نوشت، پس عبارت $(x-1)^2$ در معادله دو بار تکرار می‌شود و نام آن را t می‌گذاریم و معادله $0 = 3t^2 + 2t - 6$ را حل می‌کنیم.

۲۵ معادلات زیر را به روش تغییر متغیر حل کنید.

۱ $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

.....

.....

۲ $(4 - x^2)^2 - 2(4 - x^2) - 15 = 0$

.....

.....

۳ $(3x^2 - 1)^2 - 13(3x^2 - 1) + 22 = 0$

.....

.....

۴ $4x^6 - 5x^3 + 1 = 0$

.....

.....

۵ $x^2 - 4x - \frac{20}{x^2 - 4x} = 1$

.....

.....

۶ $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^6} - 2 = 0$

.....

.....

۷ $(x-1)^2 - 2\sqrt{3}(x-1) = 6$

.....

.....

۳۶ ریشه‌های معادله $4(x-2)^4 - 5(x-2)^2 + 1 = 0$ را به دست آورید.

۳۷ یک معادله درجه چهار بنویسید که:

ا ریشه نداشته باشد.

ب فقط یک ریشه داشته باشد.

پ فقط دو ریشه متمایز داشته باشد.

ت دقیقاً سه ریشه متمایز داشته باشد.

ث چهار ریشه متمایز داشته باشد.

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با فرض آن که $\Delta > 0$ باشد خواهیم داشت:

$$x' + x'' = S = -\frac{b}{a}, \quad x' \cdot x'' = P = \frac{c}{a}$$

نوشتن معادله درجه دوم با داشتن S و P : اگر x' و x'' ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند خود معادله از رابطه $x^2 - Sx + P = 0$ به دست می‌آید.

چند فرمول مهم: اگر x' و x'' ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آن‌گاه می‌توان ثابت کرد که:

$$x'^2 + x''^2 = S^2 - 2P, \quad x'^3 + x''^3 = S^3 - 3PS$$

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{S}{P}, \quad \frac{x'}{x''} + \frac{x''}{x'} = \frac{S^2 - 2P}{P}$$

$$x'x''^2 + x'^2x'' = P.S, \quad \sqrt{x'} \pm \sqrt{x''} = \sqrt{S \pm 2\sqrt{P}} \quad (x' \text{ و } x'' \text{ مثبت فرض می‌شوند})$$

۳۸ معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $\frac{4 \pm \sqrt{3}}{5}$ باشند.

۳۹ دو عدد مشخص کنید که مجموع آن‌ها $-\frac{5}{4}$ و حاصل ضرب آن‌ها $-\frac{3}{4}$ باشد.

۴۰ در معادله درجه دوم $(m-2)x^2 + (2m-1)x - m + 5 = 0$ مقدار m را طوری بیابید که:

ا مجموع ریشه‌ها برابر $\frac{3}{4}$ شود.

ب) حاصل ضرب ریشه‌ها برابر -2 شود.

۴۱) در معادله $2x^2 - 9x + k = 0$ مقدار k را طوری بیابید که یکی از ریشه‌ها دو برابر ریشه دیگر باشد.

۴۲) طول و عرض مستطیلی را به دست آورید که مساحت آن 15 و محیط آن 17 باشد.

۴۳) اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3mx + 6 = 0$ باشند، m را چنان بیابید که $\alpha\beta^2 + 4 = 0$

۴۴) در معادله درجه دوم $4x^2 + kx = 21$ اگر مجموع ریشه‌ها -2 باشد، ریشه بزرگ‌تر را به دست آورید.

۴۵) اگر x' و x'' ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، حاصل $\frac{\sqrt{x'}}{\sqrt{x''}} + \frac{\sqrt{x''}}{\sqrt{x'}}$ را به دست آورید.

۴۶) در معادله $2x^2 - 6x - 4 = 0$ اگر α و β ریشه‌ها باشند، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

۱) $3\alpha^2\beta^2 + 5\alpha + 5\beta$

ب) $\frac{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta}}$

پ) $(\alpha + 1)(\beta + 1)$

۴۷) در معادله $2x^2 + (m-1)x - 3 = 0$ مجموع معکوس ریشه‌ها برابر 4 است. مقدار m را به دست آورید.

۴۸) اگر ریشه‌های معادله $2x^2 - 5x + m = 0$ عکس یکدیگر باشند، m را به دست آورید.

۴۹ به ازای چه مقدار از m یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم $mx^2 - (m+3)x + 3 = 0$ سه برابر عکس ریشه دیگر است؟

.....

۵۰ یکی از ریشه‌های معادله $4x^2 - (5n+2)x + 1 = 0$ سه واحد از قرینه ریشه دیگر بزرگ‌تر است. n را به دست آورید.

.....

۵۱ در معادله $3x^2 + (-m+1)x + 3m+1 = 0$ حاصل ضرب ریشه‌ها ۲ برابر مجموع ریشه‌ها است. m را به دست آورید.

.....

۵۲ اگر یکی از ریشه‌های معادله $4x^2 + x + \frac{1}{m} = 0$ از دو برابر ریشه دیگر آن، یک واحد کم‌تر باشد، مقدار m را به دست آورید.

.....

۵۳ در معادله $x^2 - (b-2)x + 2b = 0$ مجموع ریشه‌ها ۱۰ است. حاصل ضرب ریشه‌ها چقدر است؟

.....

۵۴ مجموعه جواب معادله $x^2 + kx + m = 0$ به صورت $\{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$ است. حاصل m و k را به دست آورید.

.....

۵۵ بین ریشه‌های معادله $x^2 + 3x - m + 1 = 0$ رابطه $x^2 + x^2 = 13$ برقرار است. مقدار m را به دست آورید.

.....

۵۶ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 3 = 0$ باشند، بدون حل معادله، حاصل عبارات زیر را به دست آورید:

۱ $\alpha^2 + \beta^2 =$

۲ $\alpha^3 + \beta^3 =$

۳ $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} =$

۴ $\frac{\alpha^2}{\beta+1} + \frac{\beta^2}{\alpha+1} =$

۵ $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 =$

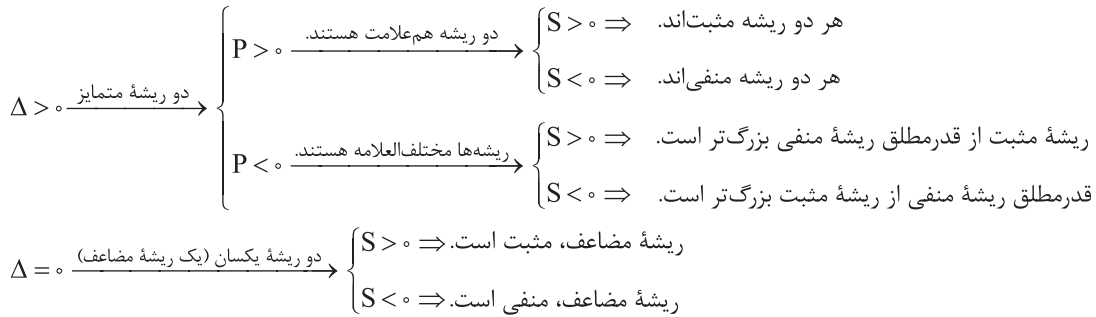
۶ $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} =$

۷ $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} =$

۸ $\alpha^4 + \beta^4 =$

مشخص کردن تعداد و علامت ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم بدون حل کردن آن

در معادلهٔ درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ بدون حل معادله می‌توان گفت:



$\Delta < 0 \Rightarrow$ معادله جواب حقیقی ندارد.

در معادلهٔ درجه دوم اگر $P < 0$ باشد (علامت‌های a و c مختلف باشند)، دلتا مثبت است و معادله دو ریشهٔ مختلف‌العلامه دارد. به عبارت دیگر سهمی مربوطه از هر چهار ناحیهٔ صفحهٔ مختصات می‌گذرد.

بدون حل معادلات زیر، تعداد و علامت ریشه‌های آن‌ها را تعیین کنید. ۵۷

ا) $-3x^2 + 5x + 4 = 0$

ب) $x(x - 3) = 1 + x$

پ) $x^2 - x + 1 = 0$

ت) $x^2 + 17x + 2 = 0$

۵۸ به ازای چه مقادیری از m معادلهٔ $(m - 1)x^2 + 4x + 3 = 0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی، یکی مثبت و دیگری منفی است؟

۵۹ حدود m را طوری تعیین کنید که معادلهٔ $mx^2 + mx - 2 = 0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی باشد؟

۶۰ در معادلهٔ $(m - 1)x^2 + 4x - 2m + 6 = 0$ حدود m را طوری تعیین کنید که معادله دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامه باشد.

۶۱ حدود m را برای آن‌که نمودار تابع $f(x) = mx^2 + 2mx + m + 1$ همواره بالای محور x ‌ها باشد، به دست آورید. ($m \neq 0$)

۶۲ به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $f(x) = x^2 + mx + 4$ محور x ‌ها را فقط در یک نقطه و سمت چپ مبدأ قطع می‌کند؟

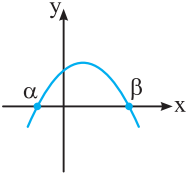
ماکزیمم و مینیمم سهمی: می‌دانیم طول رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ ، یعنی طول نقطه S از رابطه $x_S = \frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید. حال اگر این عدد را به جای x های معادله سهمی قرار دهیم مقدار y_S به دست می‌آید که همان مقدار ماکزیمم یا مینیمم سهمی است. یعنی اگر $a > 0$ باشد، این مقدار مینیمم است و اگر $a < 0$ باشد، این مقدار ماکزیمم است. (معادله محور تقارن سهمی هم $x = \frac{-b}{2a}$ است).
تذکر: در سهمی به معادله $y = a(x - h)^2 + k$ مختصات رأس عبارت است از $S(h, k)$ ، یعنی طول رأس همان ریشه عبارت داخل پرانتز است. علامت a هم نشان می‌دهد سهمی ماکزیمم دارد یا مینیمم.

نکته: اگر در یک مسئله عرض رأس (مقدار ماکزیمم یا مینیمم) داده شود، بهتر است از فرمول $y_S = \frac{-\Delta}{4a}$ استفاده کنیم.

صفرهای تابع درجه دوم: منظور از صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ همان ریشه‌های

معادله $ax^2 + bx + c = 0$ است. این ریشه‌ها محل برخورد سهمی با محور x ها را نشان می‌دهند. در شکل

روبرو α و β صفرهای تابع f هستند.

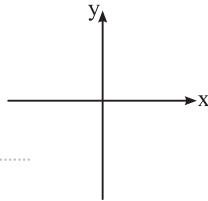


$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha < 0 \\ \beta > 0 \end{cases}$$

نمودار سهمی‌های زیر را رسم کنید.

۶۳

۱ $y = 2(x - 1)^2 - 1$

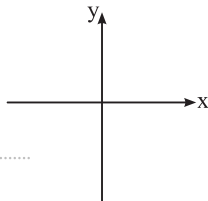


.....

.....

.....

۲ $y = -x^2 + 4x + 3$

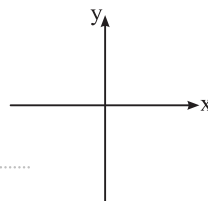


.....

.....

.....

۳ $y = 5x^2 - 3$

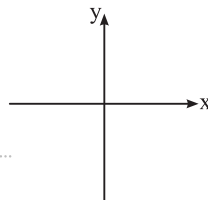


.....

.....

.....

۴ $y = -x^2 + 4$



.....

.....

.....

۶۴ راکتی به طور عمودی شلیک شده و پس از t ثانیه از پرتاب به ارتفاع h متری از سطح زمین می‌رسد و داریم:

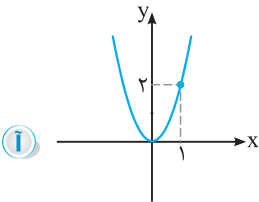
$$h(t) = 200t - 4t^2$$

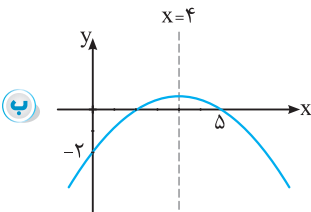
۱ چقدر طول می‌کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع خود برسد؟

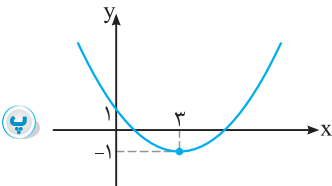
۲ ارتفاع نقطه اوج راکت چقدر است؟

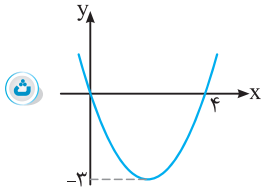
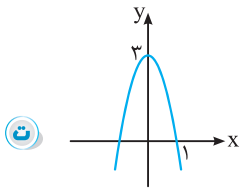
۳ چند ثانیه بعد از پرتاب، راکت به سطح زمین برمی‌گردد؟

۶۵ در شکل‌های زیر که مربوط به سهمی $y = ax^2 + bx + c$ هستند a ، b و c را به دست آورید. (معادله سهمی را به دست آورید.)









۶۶ صفهای توابع زیر را به دست آورید.

۱ $f(x) = x^2 - 1$

ب $g(x) = x^2 - 3x + 2$

پ $h(x) = \frac{x^2}{4} - 6x$

ت $k(x) = x^2 + 16$

ث $i(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) + 2$

۶۷ سهمی $y = ax^2 + bx + c$ محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ و محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع می‌کند. اگر این سهمی از نقطه $(-1, 2)$ هم بگذرد، معادله سهمی را بنویسید.

بیشترین مقدار (ماکزیمم) تابع $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$ را به دست آورده و نمودار آن را رسم کنید. ۶۸

تعیین کنید کدام یک از سهمی‌های زیر ماکزیمم و کدام یک مینیمم دارند؟ سپس ماکزیمم یا مینیمم آن‌ها را تعیین کنید. ۶۹

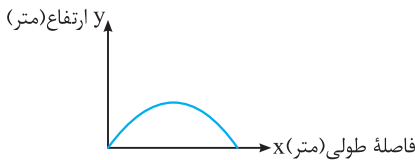
ا) $f(x) = x^2 - 3x + 1$

ب) $g(x) = -4x^2 + 2x + 3$

پ) $h(x) = \frac{-1}{2}x^2 + 1$

فوتبالیستی توپی را با زاویهٔ 45° نسبت به سطح افق، با سرعت اولیهٔ $30 \frac{m}{s}$ شوت می‌کند. مسیر حرکت توپ مانند شکل زیر است که تابع ۷۰

مسیر آن به صورت $y = -\frac{1}{100}x^2 + 4x$ است. طول محل برخورد توپ با زمین و همچنین بیشترین ارتفاع توپ را به دست آورید.

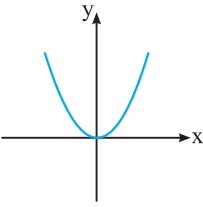


مشخص کردن علامت ضرایب a ، b و c ، تعداد و علامت صفرهای تابع $y = ax^2 + bx + c$ با داشتن نمودار سهمی: در این گونه سؤالات، ابتدا علامت a را با توجه به این‌که سهمی به شکل یا است، مشخص می‌کنیم. بعد از آن نگاه می‌کنیم که رأس سهمی (نقطهٔ S) در کدام ناحیه است و به کمک رابطهٔ $x_S = -\frac{b}{2a}$ و علامت طول رأس، علامت b را هم تعیین می‌کنیم. در نهایت عرض از مبدأ سهمی (محل برخورد با محور عرض‌ها) را بررسی می‌کنیم، اگر محل برخورد با محور y ‌ها بالای مبدأ باشد $c > 0$ و اگر پایین مبدأ باشد $c < 0$ است. صفرهای سهمی نیز، همان نقاط برخورد با محور x ‌ها هستند (تعداد نقاط برخورد با محور x ‌ها همان تعداد صفرهای تابع هستند). اگر محل برخورد با محور x ‌ها سمت چپ مبدأ باشد، طولش منفی و اگر سمت راست آن باشد، طولش مثبت است.

شکل‌های زیر مربوط به سهمی با معادله $y = ax^2 + bx + c$ هستند. علامت‌های a ، b و c را تعیین کنید.

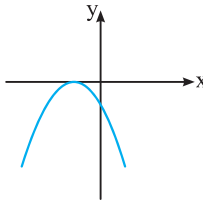
۷۱

ا



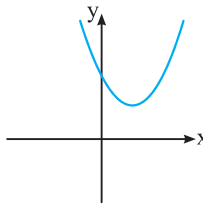
.....

ب



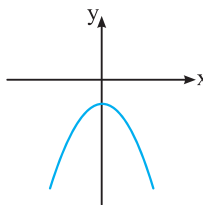
.....

پ



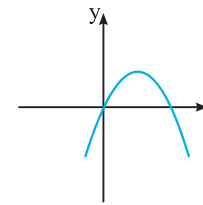
.....

ت



.....

ث



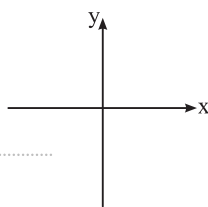
.....

سهمی $y = ax^2 + bx + c$ را با شرایط زیر رسم کنید.

۷۲

ا

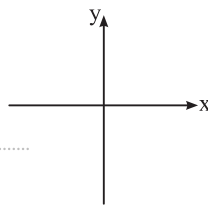
$a > 0$ ، $b < 0$ ، $c > 0$



.....
.....

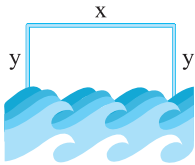
ب

$a < 0$ ، $b > 0$ ، $c < 0$



.....
.....

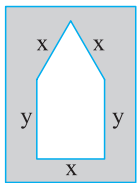
بهینه‌سازی: یعنی ماکزیمم کردن مقدار یک عبارت درجه دوم، برای این منظور عبارتی را که می‌خواهیم ماکزیمم شود فقط بر حسب یک متغیر می‌نویسیم (مثلاً x). سپس از فرمول $x = \frac{-b}{2a}$ استفاده می‌کنیم. بعد از یافتن این متغیر، مقدار آن را در فرض سؤال قرار می‌دهیم تا متغیر دیگر (مثلاً y) هم پیدا شود



۷۳ فردی می‌خواهد در سه طرف یک زمین مستطیل‌شکل که در مجاورت رودخانه است با ۲۰۰ متر طناب، حصار بکشد. ابعاد مستطیل را طوری بیابید که مساحت آن بیش‌ترین مقدار ممکن شود.

۷۴ با تشکیل معادله سهمی بگویید که بیش‌ترین مقدار تفاضل نصف مربع عددی از چهار برابر آن عدد، کدام است؟

۷۵ اگر x و y طول و عرض یک مستطیل باشند به طوری که $3x + 4y = 24$ ، آن‌گاه x و y را طوری بیابید که مساحت مستطیل بیش‌ترین مقدار ممکن شود.



۷۶ می‌خواهیم پنجره‌ای به شکل مستطیل با یک مثلث متساوی‌الاضلاع در بالای آن بسازیم. اگر محیط پنجره ۶ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ یا } 0.433\right)$$

۷۷ محیط تعدادی مستطیل، مساوی بوده و برابر با ۲۰ متر است. بیش‌ترین مساحت در بین این مستطیل‌ها را به‌دست آورید.



۷۸ بزرگ‌ترین ریشه معادله $1 + 3x^2 - 2x^4 = 0$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) ۳ (۴)

۷۹ معادله $1 + 5x^2 - 4x^4 = 0$ چند جواب دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۸۰ معادله $4 - 7 \cdot 3x^2 - x^4 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۸۱ اگر α و β ریشه‌های معادله $1 - 20x + 4x^2 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ کدام است؟

- ۳ $\sqrt{5}$ (۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۲ $\sqrt{6}$ (۴)

۸۲ اگر α و β ریشه‌های معادله $1 - 2m - 5x + 2x^2 = 0$ باشند و تساوی $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 3$ بین ریشه‌ها برقرار باشد، مقدار m کدام است؟

- ۱۶ (۱) -۱۴ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴)

۸۳ اگر $x = 1$ یکی از ریشه‌های معادله $5x^2 - 3x + k = 0$ باشد، ریشه دیگر کدام است؟

- ۰/۴ (۱) -۰/۳ (۲) ۰/۳ (۳) ۰/۴ (۴)

۸۴ به ازای چه مقادیری از k در معادله درجه دوم $1 - kx^2 - 3x + k = 0$ قدرمطلق ریشه منفی از ریشه مثبت، بزرگ‌تر است؟

- $k > 0$ (۱) هیچ مقدار k (۲) $k > -3$ (۳) \mathbb{R} (۴)

۸۵ به ازای چه مقادیری از m نمودار تابع $f(x) = x^2 - x + m$ فقط از ناحیه سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

- $m \geq 0$ (۱) $0 \leq m < \frac{1}{4}$ (۲) $m < \frac{1}{4}$ (۳) $m > \frac{1}{4}$ (۴)

۸۶ به ازای کدام مقادیر m نمودار تابع $f(x) = x^2 - (m+1)x + m + \frac{25}{4}$ از هر چهار ناحیه محورهای مختصات می‌گذرد؟

- $m < -\frac{25}{4}$ (۱) $-4 < m < 6$ (۲) $m > 6$ (۳) $0 < m < 2$ (۴)

۸۷ اگر $x = 2$ معادله محور تقارن سهمی $y = 2(x+m-1)^2 + 2m$ باشد، مختصات رأس سهمی کدام است؟

- (۳, ۶) (۱) (۲, -۲) (۲) (۳, -۶) (۳) (۲, ۲) (۴)

۸۸ اگر کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = 2x^2 - 4x + k$ برابر با ۲ باشد، k کدام است؟

- ۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)

۸۹ اگر $A(-3, 4)$ و $B(5, 4)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادله محور تقارن سهمی کدام است؟

- $x = 2$ (۱) $x = 1$ (۲) $x = -1$ (۳) $x = -2$ (۴)

۹۰ در یک مثلث، a و h به ترتیب طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن هستند و رابطه $20 = a + 2h$ برقرار است. ماکزیمم مساحت مثلث چقدر است؟

- ۲۰ (۱) ۲۵ (۲) ۳۰ (۳) ۳۵ (۴)