فهرست

درس ۱

هندسهٔ تحلیلی

یادآوری و تکمیل معادلهٔ خط

الف معادلهٔ یک خط راست، به صورت کلی $y = ax + b$ یا $Ax + By + C = 0$ است. معادلهٔ اول را فرم **تابعی** خط و معادلهٔ دوم را فرم **کانونیک** خط می‌نامند.

ب **شیب خط**: هر خط با جهت مثبت محور xها زاویه‌ای می‌سازد، تانژانت این زاویه را شیب خط می‌نامند. اگر خطی از دو نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ بگذرد، شیب آن خط از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$:شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ A و B

پ شرط موازی‌بودن دو خط آن است که شیب‌های آن دو خط برابر باشند.

ت اگر معادلهٔ خطی به صورت $y = ax + b$ باشد، عدد a برابر با شیب خط و عدد b، عرض نقطهٔ برخورد، این خط با محور yهاست (b را عرض از مبدأ می‌نامند).

تست

کدام نقطه، روی خطی قرار دارد که شیب آن ۲ و عرض از مبدأ آن ۳− است؟

۱) (۱,۵)　　۲) (۲,۲)　　۳) (۳,۳)　　۴) (۳,۶−)

پاسخ | گزینهٔ ۳ اگر معادلهٔ خط به صورت $y = ax + b$ باشد، آن‌گاه $a = 2$ و $b = -3$ است؛ پس معادلهٔ خط به صورت $y = 2x - 3$ است. تنها نقطهٔ گزینهٔ (۳) در این معادله صدق می‌کند.

تست

اگر خطی از دو نقطهٔ $A(۱,۲)$ و $B(۳,-۴)$ بگذرد، عرض از مبدأ آن کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) -۵ ۴) -۳

پاسخ | گزینهٔ ۱ $\text{شیب خط} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-۴-۲}{۳-۱} = -۳$

پس معادلهٔ خط به صورت $y = -۳x + b$ است. نقطهٔ $A(۱,۲)$ باید روی این خط صدق کند: $۲ = -۳ \times ۱ + b \Rightarrow b = ۵$

یعنی عرض از مبدأ خط، برابر با ۵ است.

شرط عمودبودن دو خط: اگر شیب‌های دو خط، برابر با m و m' باشند، آن‌گاه وقتی $mm' = -۱$ باشد، دو خط بر هم عمود هستند (یا $m' = -\dfrac{۱}{m}$)، پس می‌توان گفت:

«شرط آن‌که دو خط بر هم عمود باشند، آن است که حاصل‌ضرب شیب‌های آن دو خط، برابر با -۱ باشد یا شیب یکی از آن‌ها قرینه و معکوس دیگری باشد.»

تست

اگر دو خط $y = ۳x + ۱$ و $y = ax + ۱$ بر هم عمود باشند، مقدار a کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۳}$ ۲) -۳ ۳) ۳ ۴) $-\dfrac{۱}{۳}$

پاسخ | گزینهٔ ۴ شیب خط اول، برابر با $+۳$ است؛ پس برای این‌که دو خط بر هم عمود باشند، باید شیب خط دوم قرینه و معکوس ۳؛ یعنی $-\dfrac{۱}{۳}$ باشد، در نتیجه $a = -\dfrac{۱}{۳}$ است.

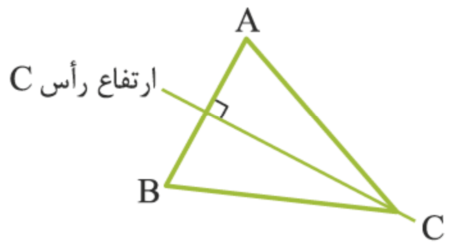
تست

اگر نقطه‌های $A(۱,۲)$ ، $B(۳,۴)$ و $C(۴,۱)$ سه رأس مثلث ABC باشند، معادلهٔ ارتفاع نظیر رأس C کدام است؟

۱) $y=-x+۲$ ۲) $y=x-۳$

۳) $y=-x+۵$ ۴) $y=-\frac{۱}{۲}x+۳$

پاسخ | گزینهٔ ۳ ارتفاع نظیر رأس C بر ضلع AB عمود است و چون $m_{AB}=\frac{۴-۲}{۳-۱}=۱$ ؛ پس شیب ارتفاع نظیر رأس C برابر با -۱ و معادلهٔ آن به صورت $y=-x+b$ است، چون ارتفاع نظیر رأس C از نقطهٔ C می‌گذرد، پس نقطهٔ C باید در این معادله صدق کند:



$$۱=-۴+b \Rightarrow b=۵$$

پس معادلهٔ خط به صورت $y=-x+۵$ است.

فاصلهٔ دو نقطه (طول پاره‌خط)

اگر نقاط $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ دو سر پاره‌خط AB باشند، فاصلهٔ نقطهٔ A از B (که همان طول پاره‌خط AB است) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}$$

تذکر اگر دو نقطه دارای عرض‌های مساوی باشند، آن‌گاه $AB=|x_A-x_B|$ و اگر دو نقطه طول‌های مساوی داشته باشند، آن‌گاه $AB=|y_A-y_B|$.

تست

اگر نقاط $A(۴,۱)$، $B(-۶,۱)$ و $C(۰/۴,۵/۸)$ سه رأس مثلث ABC باشند، محیط مثلث کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۰ ۴) ۳۶

پاسخ | گزینهٔ **۲** می‌دانیم محیط یک مثلث، مجموع طول سه ضلع آن است، پس باید اندازهٔ هر ضلع مثلث را پیدا کنیم.

عرض‌های A و B برابرند $\Rightarrow AB = |۴-(-۶)| = ۱۰$

$$AC = \sqrt{(۴-۰/۴)^۲ + (۱-۵/۸)^۲}$$
$$= \sqrt{۳/۶^۲ + ۴/۸^۲} = \sqrt{۱۲/۹۶ + ۲۳/۰۴} = \sqrt{۳۶} = ۶$$
$$BC = \sqrt{(۰/۴-(-۶))^۲ + (۵/۸-۱)^۲}$$
$$= \sqrt{۶/۴^۲ + ۴/۸^۲} = \sqrt{۴۰/۹۶ + ۲۳/۰۴} = \sqrt{۶۴} = ۸$$

در نتیجه خواهیم داشت:

محیط مثلث $= AB + AC + BC = ۱۰ + ۶ + ۸ = ۲۴$

مختصات وسط یک پاره‌خط

اگر نقاط $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ مختصات دو سر پاره‌خط AB باشند، آن‌گاه مختصات نقطهٔ M، وسط پاره‌خط AB، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$M(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲})$$

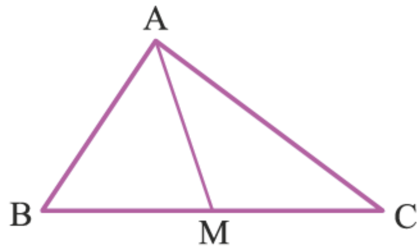
تست

اگر $A(۲,۲)$، $B(۳,-۱)$ و $C(-۱,۱)$ سه رأس مثلث ABC باشند، معادلهٔ میانهٔ AM کدام است؟

۱) $y = \frac{۱}{۲}x + ۱$ ۲) $y = ۳x - ۴$

۳) $y = x$ ۴) $y = ۲x - ۲$

پاسخ | گزینهٔ ۴ میانه، پاره‌خطی است که یک رأس را به وسط ضلع مقابل به آن رأس وصل می‌کند، پس اگر AM میانه باشد، نقطهٔ M وسط ضلع BC خواهد بود و داریم:



$$M\left(\frac{x_B + x_C}{۲}, \frac{y_B + y_C}{۲}\right) \quad \text{وسط } BC$$

$$= \left(\frac{۳ + (-۱)}{۲}, \frac{-۱ + ۱}{۲}\right) = (۱, ۰)$$

اکنون معادلهٔ AM را پیدا می‌کنیم:

$$m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{۰ - ۲}{۱ - ۲} = ۲$$

پس معادلهٔ AM به صورت $y = ۲x + b$ است. چون نقطهٔ A روی این خط است؛ پس باید مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ این خط صدق کند:

$$۲ = ۲ \times ۲ + b \Rightarrow b = -۲$$

در نتیجه معادلهٔ میانهٔ AM به صورت $y = ۲x - ۲$ است.

دو نقطهٔ منطبق بر هم

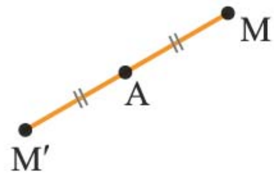
اگر دو نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ بر هم منطبق باشند، باید طول‌های این دو نقطه با هم برابر باشند و عرض‌هایشان نیز برابر باشند؛ یعنی باید $x_A = x_B$ و $y_A = y_B$ باشد.

تست

مختصات قرینهٔ نقطهٔ $M(۳, -۲)$ نسبت به نقطهٔ $A(۱, ۳)$ کدام است؟

۱) $(-۱, ۸)$ ۲) $(۳, ۷)$ ۳) $(۱, -۸)$ ۴) $(۷, ۳)$

پاسخ | گزینهٔ ۱ اگر قرینهٔ نقطهٔ M نسبت به نقطهٔ A، نقطهٔ $M'(a,b)$ باشد، آن‌گاه نقطهٔ A وسط پاره‌خط MM' است.



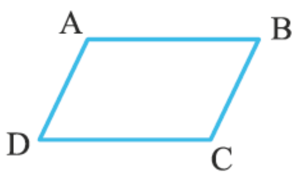
$$MM' \text{ وسط } A(\frac{x_M + x_{M'}}{۲}, \frac{y_M + y_{M'}}{۲}) = (\frac{۳+a}{۲}, \frac{-۲+b}{۲})$$

چون $A(۱,۳)$ است و این دو نقطه بر هم منطبق هستند، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \frac{۳+a}{۲} = ۱ \\ \frac{-۲+b}{۲} = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳+a = ۲ \\ -۲+b = ۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ b = ۸ \end{cases} \Rightarrow M'(-۱,۸)$$

شرط متوازی‌الاضلاع‌بودن یک چهارضلعی

اگر نقاط $A(x_A, y_A)$، $B(x_B, y_B)$، $C(x_C, y_C)$ و $D(x_D, y_D)$ چهار رأس متوازی‌الاضلاع $\underline{ABCD}$ باشند، آن‌گاه باید داشته باشیم:



$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

تست

اگر نقاط $A(۱,۲)$ ، $B(۳,-۱)$ ، $C(۶,۰)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع ABCD باشند، طول پاره‌خط OD کدام است؟ (O مبدأ مختصات است.)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ | گزینهٔ ۲ چون ABCD متوازی‌الاضلاع است، پس داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱+۶ = ۳ + x_D \\ ۲+۰ = -۱ + y_D \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_D = ۴ \\ y_D = ۳ \end{cases} \Rightarrow D(۴,۳)\ ,\ OD = \sqrt{۴^۲ + ۳^۲} = ۵$$

فاصلهٔ نقطه از خط

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_\circ, y_\circ)$ از خطی به معادلهٔ $ax + by + c = \circ$ از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$d = \frac{|ax_\circ + by_\circ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

تذکر برای پیداکردن فاصلهٔ یک نقطه از یک خط، باید معادلهٔ خط به صورت کانونیک (یعنی به صورت $ax + by + c = \circ$) باشد.

تست

فاصلهٔ نقطهٔ $M(۲, -۳)$ از خط $y = \frac{۵}{۱۲}x + \frac{۱}{۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ | گزینهٔ ۴ ابتدا معادلهٔ خط را به صورت کانونیک تبدیل می‌کنیم.

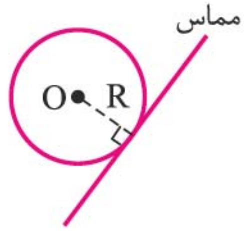
$$y = \frac{۵}{۱۲}x + \frac{۱}{۲} \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{در ۱۲ ضرب}} ۱۲y = ۵x + ۶ \Rightarrow ۵x - ۱۲y + ۶ = \circ$$

فاصلهٔ M از خط: $d = \frac{|۵\times۲ - ۱۲\times(-۳) + ۶|}{\sqrt{۵^۲ + (-۱۲)^۲}} = \frac{|۱\circ + ۳۶ + ۶|}{\sqrt{۱۶۹}} = \frac{۵۲}{۱۳} = ۴$

تست

اگر خط $۴x - ۳y = ۴$ بر دایره‌ای به مرکز $O(-۲, ۱)$ مماس باشد، شعاع دایره کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴



پاسـخ| گزینهٔ ۳ می‌دانیم فاصلهٔ مرکز دایره از خطی که بر آن مماس باشد، برابر با شعاع دایره است؛ پس باید فاصلهٔ نقطهٔ O را از خط $۴x-۳y-۴=۰$ پیدا کنیم.

$$R=d=\frac{|۴\times(-۲)-۳\times۱-۴|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}}=\frac{|-۸-۳-۴|}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

فاصلهٔ دو خط موازی

اگر دو خط با یکدیگر موازی باشند، برای پیداکردن فاصلهٔ دو خط از یکدیگر، کافی است نقطه‌ای دلخواه روی یکی از دو خط اختیار کنیم و فاصلهٔ این نقطه را از خط دیگر به دست آوریم.

مثال

فاصلهٔ دو خط $۳x+۴y-۱=۰$ و $۶x+۸y-۱۲=۰$ چه‌قدر است؟

پاسـخ| شیب خط اول $-\frac{۳}{۴}$ و شیب خط دوم $-\frac{۳}{۴}=-\frac{۶}{۸}$ است و چون شیب‌های این دو خط با هم برابرند، پس با هم موازی هستند. یک نقطه روی یکی از این دو خط، مثلاً روی خط $۶x+۸y-۱۲=۰$ پیدا می‌کنیم. برای این منظور به x عددی دلخواه؛ مثلاً $x=-۲$ را نسبت می‌دهیم و y را پیدا می‌کنیم.

$$۶\times(-۲)+۸y-۱۲=۰ \Rightarrow ۸y=۲۴ \Rightarrow y=۳$$

پس آن نقطه را $A(-۲,۳)$ در نظر گرفته‌ایم. اکنون فاصلهٔ A را از خط $۳x+۴y-۱=۰$ به دست می‌آوریم:

فاصلهٔ A از خط اول: $d=\frac{|۳\times(-۲)+۴\times۳-۱|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{|-۶+۱۲-۱|}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۵}{۵}=۱$

نکته| اگر معادلات دو خط به صورت‌های $ax + by + c_۱ = ۰$ و $ax + by + c_۲ = ۰$ باشند، آن‌گاه فاصلهٔ این دو خط موازی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\text{فاصلهٔ دو خط موازی} = \frac{|c_۱ - c_۲|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

در مثال قبل، اگر طرفین خط دوم را بر ۲ تقسیم کنیم، خواهیم داشت $۳x + ۴y - ۶ = ۰$ و چون معادلهٔ خط اول نیز به صورت $۳x + ۴y - ۱ = ۰$ است، پس خواهیم داشت:

$$\text{فاصلهٔ دو خط} = \frac{|-۱ - (-۶)|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{۵}{۵} = ۱$$

تست

معادلات دو ضلع مربعی $۵x - ۱۲y = ۹$ و $۲۴y - ۱۰x = ۸$ هستند. مساحت مربع کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ| گزینهٔ ۱ طرفین معادلهٔ دوم را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا به صورت $۱۲y - ۵x = ۴$ یا $۵x - ۱۲y + ۴ = ۰$ درآید. معادلهٔ خط اول نیز به صورت $۵x - ۱۲y - ۹ = ۰$ است. این دو خط موازی هستند (چرا؟)، پس فاصلهٔ آن‌ها از یکدیگر برابر است با:

$$d = \frac{|-۹ - ۴|}{\sqrt{۵^۲ + (-۱۲)^۲}} = \frac{۱۳}{۱۳} = ۱$$

فاصلهٔ دو ضلع مقابل هر مربع، برابر با طول ضلع مربع است؛ یعنی طول ضلع مربع برابر ۱ است و در نتیجه مساحت آن $۱^۲ = ۱$ می‌باشد.

درس ۲

معادله و تابع درجه‌دوم

یادآوری یک معادلهٔ درجه‌دوم به صورت کلی $ax^۲+bx+c=۰$ است که در آن باید $a\neq ۰$ باشد. در چنین معادله‌ای $\Delta=b^۲-۴ac$ است.

الف اگر $\Delta<۰$، معادله، ریشهٔ حقیقی ندارد.

ب اگر $\Delta=۰$، معادله دارای یک ریشهٔ مضاعف $x=\frac{-b}{۲a}$ است.

پ اگر $\Delta>۰$، معادله دارای دو ریشهٔ متمایز است که عبارت‌اند از:

$$x_۱,x_۲=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

حل معادلات با روش تغییر متغیر

گاهی با تغییر نام یک عبارت و جایگزین‌کردن آن در معادله، آن معادله به معادلهٔ ساده‌تری تبدیل می‌شود. پس از حل معادلهٔ جدید و به دست‌آوردن ریشه‌های آن، به جای متغیر جدید، مقدار اولیه را قرار می‌دهیم تا ریشه‌های معادلهٔ اصلی به دست آیند.

مثال

معادلهٔ $۴x^۴-۵x^۲+۱=۰$ را حل کنید.

پاسخ این معادله از درجهٔ چهارم است ولی اگر فرض کنیم $x^۲=A$ باشد، آن‌گاه $x^۴=(x^۲)^۲=A^۲$ است و در نتیجه معادله به صورت مقابل تبدیل می‌شود:

$$۴A^۲-۵A+۱=۰$$

هرچند معادلهٔ درجه‌دوم فوق را با روش Δ نیز می‌توان حل نمود، اما چون در این معادله مجموع ضرایب صفر است (یعنی $a+b+c=۰$)،

پس یک ریشهٔ آن $A=1$ و ریشهٔ دیگر $A=\frac{c}{a}=\frac{1}{4}$ است. اما A برابر با x^2 بود، پس: $x^2=1$ و $x^2=\frac{1}{4}$

$$x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \quad , x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$$

یعنی معادله دارای چهار ریشه است که عبارت‌اند از ۱، ۱−، $\frac{1}{2}$، $-\frac{1}{2}$.

تست

معادلهٔ $x^4-8x^2-9=0$ دارای چند ریشهٔ حقیقی است؟

۱) هیچ ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

پاسخ | گزینهٔ ۲ اگر $x^2=A$ باشد، آن‌گاه $x^4=(x^2)^2=A^2$ و معادله به صورت $A^2-8A-9=0$ تبدیل می‌شود. چون در این معادله $a+c=b$ است، پس یک ریشهٔ آن $A=-1$ و دیگری $A=-\frac{c}{a}=9$ است.

$A=-1 \Rightarrow x^2=-1$ غیرممکن

$A=9 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$

بنابراین معادله فقط دو ریشهٔ حقیقی دارد.

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم

اگر معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ دارای دو ریشه مانند x_1 و x_2 باشد، آن‌گاه:

$S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ مجموع دو ریشه

$P=x_1x_2=\frac{c}{a}$ حاصل‌ضرب دو ریشه

مثال

بدون حل معادلهٔ $3x^2+5x+1=0$ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله را پیدا کنید.

پاسخ چون $\Delta = 5^2 - 4\times 3\times 1 = 13 > 0$؛ پس معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی است و در نتیجه: $S=\frac{-b}{a}=\frac{-5}{3}$ مجموع دو ریشه

$P=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$ حاصل‌ضرب دو ریشه

مثال

بدون حل معادلهٔ $2x^2+5x+1=0$، علامت ریشه‌های آن را مشخص کنید.

پاسخ چون $\Delta > 0$ است، پس حتماً دو ریشه دارد. از طرفی حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله $P=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}>0$ است و چون حاصل‌ضرب ریشه‌ها، عددی مثبت است، پس دو ریشه، هم‌علامت هستند (هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند). اما مجموع ریشه‌ها $S=\frac{-b}{a}=\frac{-5}{2}<0$ است و زمانی مجموع دو عدد هم‌علامت، عددی منفی است که هر دو عدد منفی باشند، پس معادله دارای دو ریشهٔ منفی است.

یادآوری یک اتحاد فرعی: می‌دانیم $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ است و چون $a+b$، مجموع a و b و همچنین ab، حاصل‌ضرب a و b است، پس $S=a+b$ و $P=ab$ است و در نتیجه: $a^2+b^2=S^2-2P$

تست

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲+۷x-۱=۰$ باشند، آن‌گاه حاصل $A=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵۳}{۲}$ ۲) ۲۶ ۳) $-\frac{۵۳}{۲}$ ۴) -۲۶

پاسخ| گزینهٔ ۳ واضح است که $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{۷}{۲}$ و $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{۱}{۲}$. اکنون داریم:

$$A=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{S^۲-۲P}{P}=\frac{(-\frac{۷}{۲})^۲-۲\times(-\frac{۱}{۲})}{-\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۴۹}{۴}+۱}{-\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۵۳}{۴}}{-\frac{۱}{۲}}=\frac{-۵۳}{۲}$$

تشکیل معادلهٔ درجه‌دومی که مجموع و ضرب ریشه‌های آن معلوم است:

اگر مجموع ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دومی برابر با S و حاصل‌ضرب آن‌ها P باشد، آن معادله به صورت مقابل است: $x^۲-Sx+P=۰$

تست

ریشه‌های کدام‌یک از معادلات زیر، $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ و $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$ هستند؟

۱) $x^۲+۳x-۱=۰$ ۲) $x^۲-۳x+۱=۰$

۳) $x^۲+۳x+۱=۰$ ۴) $x^۲-۳x-۱=۰$

پاسخ | گزینهٔ ۲ باید مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را پیدا کنیم.

$$S = \frac{۳+\sqrt{۵}}{۲} + \frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$$ مجموع ریشه‌ها

$$= \frac{۳+\cancel{\sqrt{۵}}+۳-\cancel{\sqrt{۵}}}{۲} = ۳$$

$$P = \frac{۳+\sqrt{۵}}{۲} \times \frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها

$$= \frac{(۳+\sqrt{۵})(۳-\sqrt{۵})}{۲\times۲} = \frac{۳^۲-(\sqrt{۵})^۲}{۴} = \frac{۹-۵}{۴} = ۱$$

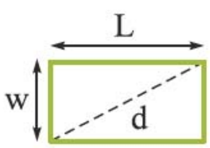
پس معادلهٔ موردنظر به صورت $x^۲-۳x+۱=۰$ است.

تست

مساحت مستطیلی ۷۲ و محیط آن ۳۶ است. طول قطر مستطیل کدام است؟

۱) ۸ ۲) $۳\sqrt{۵}$ ۳) ۱۶ ۴) $۶\sqrt{۵}$

پاسخ | گزینهٔ ۴ اگر طول مستطیل L و عرض آن W باشد، آن‌گاه داریم:



$$L.W = ۷۲$$ = مساحت مستطیل

$$= ۲(L+W) = ۳۶ \Rightarrow L+W = ۱۸$$ محیط مستطیل

پس مجموع طول و عرض $S = L + W = ۱۸$ و حاصل‌ضرب آن‌ها $P = L.W = ۷۲$ است، در نتیجه L و W ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۱۸x+۷۲=۰$ هستند.

$$\Delta = (-۱۸)^۲ - ۴\times۱\times۷۲ = ۳۲۴ - ۲۸۸ = ۳۶$$

$$L \text{ و } W = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۱۸\pm۶}{۲\times۱} \Rightarrow \begin{cases} L = \frac{۱۸+۶}{۲} = ۱۲ \\ W = \frac{۱۸-۶}{۲} = ۶ \end{cases}$$

با توجه به شکل، اگر قطر مستطیل d باشد، بنا بر رابطهٔ فیثاغورس خواهیم داشت: $d^۲ = L^۲ + W^۲ = ۱۲^۲ + ۶^۲ = ۱۴۴ + ۳۶ = ۱۸۰ = ۳۶ \times ۵$

$\Rightarrow d = ۶\sqrt{۵}$

سهمی و ویژگی‌های آن

تابع $y = f(x) = ax^۲ + bx + c$ که در آن $a \neq ۰$ است، تابعی درجه‌دوم است. نمودار این تابع یک منحنی به نام سهمی است.

الف اگر $a > ۰$ باشد، نمودار آن به شکل $\cup$ است. این نمودار دارای نقطهٔ مینیمم است که طول آن $x = -\frac{b}{۲a}$ و عرض آن $y = -\frac{\Delta}{۴a}$ است.

ب اگر $a < ۰$ باشد، نمودار آن به شکل $\cap$ است. این نمودار دارای نقطهٔ ماکسیمم است. طول این نقطه $x = -\frac{b}{۲a}$ و عرض آن $y = -\frac{\Delta}{۴a}$ است.

پس در هر حال (چه a منفی و چه مثبت باشد) مختصات نقطهٔ ماکسیمم یا مینیمم به صورت $S(-\frac{b}{۲a}, \frac{-\Delta}{۴a})$ است. نقطهٔ ماکسیمم یا مینیمم سهمی را **رأس سهمی** می‌نامند.

تذکر **۱** در تابع درجه‌دوم، منظور از ماکسیمم یا مینیمم، عرض آن نقطه است و همواره برابر $-\frac{\Delta}{۴a}$ است.

۲ هر تابع درجه‌دوم به صورت $y = ax^۲ + bx + c$ دارای یک محور تقارن است. معادلهٔ خط محور تقارن که از رأس سهمی می‌گذرد به صورت $x = -\frac{b}{۲a}$ می‌باشد.

تست

تابع $y=f(x)=۶-(x-۱)^۲$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟

۱) دارای ماکسیممی برابر ۱ است.

۲) دارای مینیممی برابر ۱ است.

۳) دارای ماکسیممی برابر ۶ است.

۴) دارای مینیممی برابر ۶ است.

پاسخ | گزینهٔ ۳ **روش اول:**

$$f(x)=۶-(x^۲-۲x+۱)=-x^۲+۲x+۵$$

چون $a=-۱<۰$، پس تابع دارای ماکسیمم است. از طرفی:

$$\Delta=۲^۲-۴\times(-۱)\times۵=۲۴$$

$$\text{ماکسیمم تابع } f(x)=-\frac{\Delta}{۴a}=\frac{-۲۴}{۴\times(-۱)}=\frac{-۲۴}{-۴}=۶$$

پس تابع دارای ماکسیممی برابر ۶ است.

روش دوم: $(x-۱)^۲\geq ۰ \xrightarrow[\text{پس جهت عوض می‌شود.}]{\text{در منفی ضرب می‌کنیم،}} -(x-۱)^۲\leq ۰$

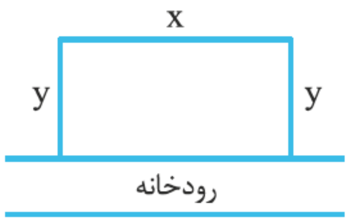
$$\xrightarrow[\text{اضافه می‌کنیم}]{\text{۶ واحد به طرفین}} ۶-(x-۱)^۲\leq ۶ \Rightarrow f(x)\leq ۶$$

پس بیشترین مقدار تابع $f(x)$ برابر با ۶ است.

مثال

می‌خواهیم با نرده‌ای به طول ۲۰۰ متر، زمینی را به شکل مستطیل در یک طرف رودخانه محصور کنیم (در طرف رودخانه، نرده کشیده نمی‌شود). بیشترین مساحت این مستطیل را پیدا کنید.

پاسخ | اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y بگیریم، آن‌گاه طول



نرده‌ای که زمین را محدود کرده است، برابر با $x+2y$ است. چون طول نرده ۲۰۰ متر است، پس: $x+2y=200 \quad (1)$

مساحت زمین محصورشده برابر $S=xy$ است و می‌خواهیم S بیشترین مقدار ممکن باشد. از رابطهٔ (۱) مقدار y را برحسب x پیدا می‌کنیم.

$$2y=200-x \Rightarrow y=\frac{200-x}{2} \Rightarrow y=100-\frac{1}{2}x$$

در نتیجه:

$$S=xy=x(100-\frac{1}{2}x) \Rightarrow S=-\frac{1}{2}x^2+100x$$

این یک تابع درجه‌دوم است که در آن $a=-\frac{1}{2}$، $b=100$ و $c=0$ است. چون a منفی است، پس دارای ماکسیمم است و داریم:

$$\Delta=b^2-4ac=100^2-4\times(-\frac{1}{2})\times 0=100^2$$

$$S \text{ بیشترین مقدار } =-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{100^2}{4\times(-\frac{1}{2})}=-\frac{10000}{-2}=5000$$

صفرهای تابع درجه‌دوم

اگر نمودار تابع درجه‌دومی، محور xها را در دو نقطه قطع کند، طول‌های این دو نقطه را صفرهای تابع درجه‌دوم می‌نامند (یعنی عرض‌های این نقاط، صفر هستند).

اگر نمودار تابع درجه‌دوم، محور xها را قطع نکند، آن تابع دارای صفر نیست و اگر نمودار تابع درجه‌دوم بر محور xها مماس باشد، آن تابع فقط دارای یک صفر است (ریشهٔ مضاعف دارد).

در واقع صفرهای تابع درجه‌دوم $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ در صورت وجود، همان ریشه‌های معادلهٔ $ax^{۲} + bx + c = ۰$ هستند.

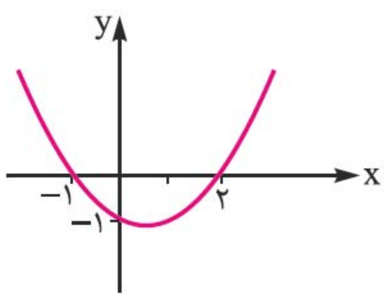
عرض از مبدأ تابع درجه‌دوم

هر تابع درجه‌دوم مانند $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ محور yها را در یک نقطه قطع می‌کند؛ عرض این نقطه را اصطلاحاً عرض از مبدأ تابع درجه‌دوم می‌نامند.

چون طول هر نقطه که روی محور عرض‌ها باشد برابر صفر است، پس اگر $x = ۰$ باشد، عرض آن خط $y = c$ است؛ یعنی عرض از مبدأ تابع درجه‌دوم، همان c است.

مثال

اگر نمودار تابع درجه‌دومی به صورت مقابل باشد، معادلهٔ آن را پیدا کنید.



پاسخ| فرض کنیم معادلهٔ تابع درجه‌دوم به صورت $y = ax^{۲} + bx + c$ باشد. با توجه به نمودار، عرض از مبدأ تابع $y = -۱$ است، پس $c = -۱$.

تابع محور xها را در دو نقطه با طول‌های ۱− و ۲ قطع می‌کند که همان صفرهای تابع یا ریشه‌های معادله هستند؛ پس:

$$S = ۲ + (-۱) = ۱ \quad \text{و} \quad P = ۲ \times (-۱) = -۲$$

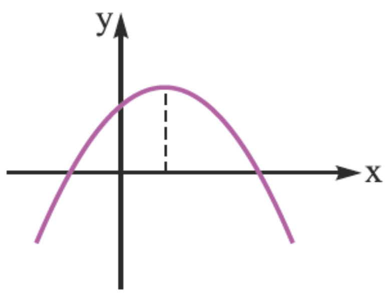
$$S = -\frac{b}{a} \Rightarrow ۱ = -\frac{b}{a} \Rightarrow b = -a \quad (۱)$$

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow -۲ = \frac{c}{a} \xrightarrow{c=-۱} -۲ = \frac{-۱}{a} \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

از (۱) نتیجه می‌شود $b = -\frac{۱}{۲}$؛ پس معادلهٔ تابع درجه‌دوم به صورت $y = \frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۱}{۲}x - ۱$ است.

تست

اگر نمودار تابع درجه‌دومی به شکل زیر باشد، علامت‌های a، b و c در کدام گزینه صدق می‌کند؟



۱) $a < ۰$، $b < ۰$ و $c > ۰$

۲) $a > ۰$، $b > ۰$ و $c > ۰$

۳) $a < ۰$، $b < ۰$ و $c < ۰$

۴) $a < ۰$، $b > ۰$ و $c > ۰$

پاسخ | گزینهٔ ۴ چون تابع دارای ماکسیمم است، پس $a < ۰$.
با توجه به نمودار تابع، مشخص می‌شود که تابع محور yها را در نقطه‌ای با عرض مثبت قطع کرده است، پس عرض از مبدأ آن مثبت است؛ یعنی $c > ۰$ است.
از نمودار واضح است که طول نقطهٔ ماکسیمم، مثبت است؛ پس $-\frac{b}{۲a} > ۰$ یا $\frac{b}{۲a} < ۰$ است و چون a منفی است، پس b باید مثبت باشد؛ یعنی $b > ۰$.

پرسش‌های تستی

۱- خطی که از نقطهٔ $A(۳,۲)$ می‌گذرد و بر خط $۳x+۲y=۵$ عمود باشد، از کدام نقطهٔ زیر می‌گذرد؟

۱) $(۰,۱)$ ۲) $(۲,۰)$ ۳) $(۶,۴)$ ۴) $(۱,۱)$

۲- اگر $A(۳,۲)$ ، $B(۳,۵)$ و $C(۳,۱)$ سه رأس مثلث ABC باشند، طول میانهٔ AM کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) ۱ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۳- فاصلهٔ نقطهٔ $A(۳,-۲)$ از خط $y=۲x+۲$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$

۴- اگر مرکز دایره‌ای $O(۳,۲)$ و شعاع آن ۳ و دایره بر خط $۳x+۴y+a=۰$ مماس باشد، مقدار a کدام است؟

۱) فقط -۲ ۲) فقط -۳۲

۳) فقط -۱۷ ۴) -۲ یا -۳۲

۵- اگر چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع و $A(۱,۲)$ ، $B(۲,-۶)$ و $C(۳,-۱)$ باشد، آن‌گاه مجموع طول و عرض نقطهٔ D کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۵ ۳) -۴ ۴) -۸

۶- اگر حاصل‌جمع دو عدد حقیقی برابر با ۹ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۳ باشد، عدد کوچک‌تر کدام است؟

۱) $\frac{۸-\sqrt{۷۱}}{۲}$ ۲) $\frac{۹-\sqrt{۶۹}}{۲}$

۳) $\frac{۸+\sqrt{۷۱}}{۲}$ ۴) $\frac{۹+\sqrt{۶۹}}{۲}$

۷- اگر معادلهٔ محور تقارن یک سهمی $x=1$ و عرض از مبدأ آن ۳ و یکی از صفرهای آن ۳ باشد، معادلهٔ سهمی کدام است؟

۱) $y=x^2-2x+3$
۲) $y=-x^2+2x+1$
۳) $y=-x^2+2x+3$
۴) $y=x^2-2x+1$

۸- کدام گزینه دربارهٔ تابع $y=2x^2+3x+1$ درست است؟

۱) دارای مینیممی برابر $-\frac{17}{8}$ است.

۲) معادلهٔ محور تقارن آن $x=-\frac{3}{2}$ است.

۳) صفرهای آن ۱ و ۳ هستند.

۴) دارای مینیممی برابر $-\frac{1}{8}$ است.

۹- معادلهٔ $\frac{2}{x-3}=\frac{12}{x^2-9}+\frac{3}{x}$ دارای چند ریشهٔ حقیقی است؟

۱) هیچ
۲) یک
۳) دو
۴) سه

۱۰- جذر دو برابر عددی از خود آن عدد ۱/۵ واحد کم‌تر است. آن عدد کدام است؟

۱) ۲/۵
۲) ۳/۵
۳) ۴/۵
۴) ۰/۵

پاسخ پرسش‌های تستی

۱- گزینهٔ «۳» خط $۳x+۲y=۵$ به صورت $۲y=-۳x+۵$ یا $y=-\frac{۳}{۲}x+\frac{۵}{۲}$ است. شیب این خط $-\frac{۳}{۲}$ است، پس شیب خطی که بر آن عمود است برابر با $\frac{۲}{۳}$ است، پس معادلهٔ خط عمود به صورت $y=\frac{۲}{۳}x+b$ می‌باشد. نقطهٔ $A(۳,۲)$ باید روی این خط باشد، پس باید مختصات آن در معادلهٔ خط صدق کند.

$$۲=\frac{۲}{۳}\times ۳+b \Rightarrow ۲=۲+b \Rightarrow b=۰$$

در نتیجه معادلهٔ خط به صورت $y=\frac{۲}{۳}x$ است و تنها نقطهٔ گزینهٔ (۳) در معادلهٔ این خط صدق می‌کند و روی آن قرار دارد.

۲- گزینهٔ «۳» نقطهٔ M وسط پاره‌خط BC است، پس:

$$M(\frac{۳+۳}{۲},\frac{۵+۱}{۲})=(۳,۳) \quad \text{وسط } BC$$

چون طول‌های دو نقطهٔ A و M برابرند، پس داریم:

$$AM=|y_A-y_M|=|۲-۳|=۱$$

۳- گزینهٔ «۱» معادلهٔ خط را به صورت $۲x-y+۲=۰$ تبدیل می‌کنیم (به فرم کانونیک):

$$d=\frac{|۲\times ۳-(-۲)+۲|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}=\frac{|۶+۲+۲|}{\sqrt{۵}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}$$

$$=\frac{۱۰\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}\times\sqrt{۵}}=\frac{۱۰\sqrt{۵}}{۵}=۲\sqrt{۵}$$

۴- گزینهٔ «۴» فاصلهٔ مرکز دایره از خطی که بر آن مماس باشد، برابر با شعاع دایره است.

$$\text{فاصلهٔ O از خط} = R \Rightarrow \frac{|۳\times ۳+۴\times ۲+a|}{\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}}}=۳ \Rightarrow \frac{|۱۷+a|}{۵}=۳$$

$$\Rightarrow |۱۷+a|=۱۵ \Rightarrow ۱۷+a=\pm ۱۵ \Rightarrow a=-۲ \text{ یا } -۳۲$$

۵- گزینهٔ «۱»

$$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱+۳=۲+x_D \Rightarrow x_D=۲ \\ ۲+(-۱)=-۶+y_D \Rightarrow y_D=۷ \end{cases}$$

پس $x_D+y_D=۹$ است.

۶- گزینهٔ «۲» $S=۹$ و $P=۳ \Rightarrow x^{۲}-۹x+۳=۰$

$$\Delta=(-۹)^{۲}-۴\times ۱\times ۳=۸۱-۱۲=۶۹$$

$$x_۱,x_۲=\frac{۹\pm\sqrt{۶۹}}{۲}$$

ریشهٔ کوچک‌تر $\frac{۹-\sqrt{۶۹}}{۲}$ است.

۷- گزینهٔ «۳» اگر معادلهٔ سهمی به صورت $y=ax^{۲}+bx+c$ باشد، آن‌گاه: (۱) $b=-۲a \Leftarrow ۱=\frac{-b}{۲a} \Leftarrow x=\frac{-b}{۲a}$: معادلهٔ محور تقارن

عرض از مبدأ: $c=۳$ (۲)

صفر تابع است $x=۳ \Rightarrow ۰=a\times ۳^{۲}+b\times ۳+c$

$$\xrightarrow{(۲),(۱)} ۰ \Rightarrow ۹a+۳(-۲a)+۳=۰$$

$$۳a=-۳ \Rightarrow a=-۱ \xrightarrow{(۱)} b=+۲$$

پس $y=-x^{۲}+۲x+۳$.

۸- گزینهٔ «۴» چون ضریب $x^{۲}$ مثبت است، پس مینیمم دارد:

$$\Delta = ۳^{۲} - ۴\times ۲\times ۱ = ۱ \Rightarrow \text{مقدار مینیمم} = -\frac{\Delta}{۴a} = \frac{-۱}{۴\times ۲} = -\frac{۱}{۸}$$

۹- گزینهٔ «۲» چون $x^{۲} - ۹ = (x-۳)(x+۳)$، پس مخرج‌مشترک کسرها $x(x-۳)(x+۳)$ است. اگر طرفین معادله را در این عبارت ضرب کنیم، خواهیم داشت: $۳(x-۳)(x+۳) + ۱۲x = ۲x(x+۳)$

$$\Rightarrow ۳x^{۲} - ۲۷ + ۱۲x = ۲x^{۲} + ۶x \Rightarrow x^{۲} + ۶x - ۲۷ = ۰ \Rightarrow x = -۹ \text{ یا } ۳$$

اما $x = ۳$ لااقل یکی از مخرج‌ها را صفر می‌کند؛ پس قابل قبول نیست ولی $x = -۹$ قابل قبول است، پس فقط یک ریشه دارد.

۱۰- گزینهٔ «۳» اگر آن عدد x باشد، آن‌گاه جذر دو برابر آن $\sqrt{۲x}$ است، پس باید داشته باشیم: $۲\sqrt{۲x} = ۲x - ۳ \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{در ۲ ضرب}} \sqrt{۲x} = x - ۱/۵$

اکنون دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$۲^{۲}(۲x) = ۴x^{۲} - ۱۲x + ۹ \Rightarrow ۸x = ۴x^{۲} - ۱۲x + ۹ \Rightarrow ۴x^{۲} - ۲۰x + ۹ = ۰$$

$$\Delta = (-۲۰)^{۲} - ۴\times ۴\times ۹ = ۴۰۰ - ۱۴۴ = ۲۵۶ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = ۱۶$$

$$x = \frac{۲۰ \pm ۱۶}{۲\times ۴} \Rightarrow \begin{cases} x_{۱} = \frac{۲۰+۱۶}{۸} = \frac{۹}{۲} = ۴/۵ \\ x_{۲} = \frac{۲۰-۱۶}{۸} = \frac{۱}{۲} = ۰/۵ \end{cases}$$

ریشهٔ $x_{۲} = ۰/۵$ در معادله صدق نمی‌کند، پس $x = ۴/۵$.

«تذکر» در این نوع مسائل که ریشهٔ معادله یکی از گزینه‌ها باشد، آزمایش مستقیم گزینه‌ها ما را سریع‌تر به جواب می‌رساند.