به نام پروردگار مهربان

جمع‌بندی

یازدهم • دوازدهم

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

مرور و جمع‌بندی کنکور در ۲۴ ساعت

• سیدمسعود طایفه

• مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی

مهروماه

برخی هم‌ارزی‌های ساده: بعضی از هم ارزی‌ها در عین ساده بودن، بسیار پر کاربرد هستند. این هم ارزی‌ها عبارتند از:

۱) چون از بین p و $\sim p$ حتماً یکی درست و یکی نادرست است، داریم: $p\wedge \sim p\equiv F\,,\,p\vee \sim p\equiv T$

۲) با توجه به جدول ارزش $p\vee q$ و $p\wedge q$ نتیجه می‌شود: $p\wedge F\equiv F\,,\,p\vee T\equiv T$

$p\wedge T\equiv p\,,\,p\vee F\equiv p$

۳) خود توانی: $p\wedge p\equiv p\ \ ,\ \ p\vee p\equiv p$

۴) خاصیت جابه‌جایی: $p\vee q\equiv q\vee p\ \ ,\ \ p\wedge q\equiv q\wedge p$

۵) نقیضِ نقیض: $\sim(\sim p)\equiv p$

هم‌ارزی‌های مهم:

۱) خاصیت شرکت‌پذیری:
$$\begin{cases}p\wedge(q\wedge r)\equiv(p\wedge q)\wedge r\\ p\vee(q\vee r)\equiv(p\vee q)\vee r\end{cases}$$

۲) خاصیت توزیع‌پذیری $\wedge$ روی $\vee$ و برعکس:
$$\begin{cases}p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)\\ p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)\end{cases}$$

۳) نقیض ترکیب‌های فصلی و عطفی یا قوانین دمورگان:
$$\begin{cases}\sim(p\wedge q)\equiv(\sim p)\vee(\sim q)\\ \sim(p\vee q)\equiv(\sim p)\wedge(\sim q)\end{cases}$$

۴) قوانین جذب:
$$\begin{cases}p\wedge(p\vee q)\equiv p\\ p\vee(p\wedge q)\equiv p\end{cases}$$

تست در جدول ارزش گزاره‌ها، ستون $p\wedge\sim(p\wedge q)$ به کدام صورت می‌تواند باشد؟

۱)	۲)	۳)	۴)
د	د	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	د	د
ن	ن	ن	د

پاسخ **گزینهٔ «۱»**

روش اول: با توجه به جدول مقابل، ارزش گزارهٔ $p\wedge\sim(p\wedge q)$ فقط در یک حالت درست و در سه حالت نادرست است.

p	q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$	$p\wedge\sim(p\wedge q)$
د	د	د	ن	ن
د	ن	ن	د	د
ن	د	ن	د	ن
ن	ن	ن	د	ن

روش دوم: گزارهٔ عطفی $p\wedge\sim(p\wedge q)$ زمانی درست است که p و $\sim(p\wedge q)$ درست باشند. $\sim(p\wedge q)$ زمانی درست است که $p\wedge q$ نادرست باشد. پس با توجه به درستی p نتیجه می‌گیریم که q باید نادرست باشد. پس $p\wedge\sim(p\wedge q)$ تنها در حالتی که p درست و q نادرست باشد، دارای ارزش درست است. بنابراین در جدول، ارزش گزارهٔ مورد نظر، فقط در یک حالت درست می‌باشد.

۱۲. تعداد حالت‌هایی که گزارهٔ $(p\wedge q)\Rightarrow(r\Rightarrow p)$ درست است، چند برابر حالت‌هایی است که گزارهٔ $p\wedge[(p\Rightarrow\sim q)\wedge q]$ نادرست است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۳. کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

«اگر عددی مضرب ۲ یا ۵ نباشد، آن‌گاه مضرب ۱۰ نیست. برای آن که عددی مضرب ۱۰ باشد لازم و کافی است که رقم یکان آن صفر باشد. پس اگر رقم یکان عددی صفر باشد آن عدد ....»

۱) مضرب ۲ است. ۲) مضرب ۵ است. ۳) مضرب ۲ یا ۵ نیست. ۴) مضرب ۱۰ است.

۱۴. مجموعه جواب کدام گزاره‌نما، بیشترین تعداد عضو را دارد؟

۱) $(x\in\mathbb{R})\ ۱۵x^۲+۷x-۸=۰$

۲) $(x\in\mathbb{R}-\{۰\})\ |x|+\frac{۱}{|x|}\leq ۲$

۳) در پرتاب یک تاس سالم احتمال رخ دادن پیشامد A، $\frac{۵}{۶}$ است.

۴) $(x\in\mathbb{R})\ x^۲+x+۱=۰$

۱۵. اگر هم ارزی زیر برقرار باشد، آنگاه گزارهٔ q با کدام گزاره می‌تواند هم‌ارز باشد؟

$$[p\wedge(r\Leftrightarrow q)]\Rightarrow(\sim p\vee r)\equiv\exists x\in\mathbb{R};x^۲<۰$$

۱) هر عدد اول، فرد است.

۲) هر عدد فرد به‌صورت $۸k+۱$، مربع کامل است.

۳) $\forall x\in\mathbb{R}:\frac{x}{x}=۱$

۴) $\exists x\in P; x\in E$

پاسخ‌نامه تشریحی

۱. گزینهٔ «۴»

بررسی تک‌تک گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: یک گزاره‌نماست، زیرا اگر $A=\{۱,۲\}$ باشد، ارزش این عبارت درست و اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ باشد، ارزش آن نادرست است.

گزینهٔ «۲»: ریشه‌های معادلهٔ $۲۷x^۲+x-۲۶=۰$ با توجه به این‌که $a+c=b$ است برابر -۱ و $\frac{۲۶}{۲۷}$ است. اما $D=\mathbb{Z}$ به این معنی است که فقط ریشهٔ صحیح این معادله یا گزاره‌نما یعنی -۱ به‌عنوان مجموعه جواب آن قابل قبول است. پس $S=\{-۱\}$ یک مجموعهٔ تک عضوی است.

گزینهٔ «۳»: این گزاره به کمک هم‌ارزی گزارهٔ شرطی با عکس نقیض خودش، درست است و از انتفای مقدم برای درستی یا نادرستی آن استفاده نشده است.

گزینهٔ «۴»: که همان حدس گلدباخ است و ما می‌دانیم که حدس‌ها جزء گزاره‌ها به حساب می‌آیند.

۲. گزینهٔ «۲»

اگر گزارهٔ p را به‌صورت ترکیب شرطی $r\Rightarrow s$ نشان دهیم، q به‌صورت $(\sim r)\vee s$ است.

q را می‌توانیم هم‌ارز p بدانیم زیرا: $r\Rightarrow s\equiv(\sim r)\vee s$

با توجه به هم‌ارزش بودن p و q گزینه‌های «۱» و «۳» و «۴»، گزاره‌هایی صحیح هستند. اما در گزینهٔ «۲» چون p و $\sim q$ هم ارزش نیستند، ترکیب دو شرطی آن‌ها غلط است.

آمار و احتمال

نظریهٔ مجموعه‌ها

۱ دیباچهٔ مجموعه (مقدّمات و مفاهیم اولیه)

۱ اگر شیء b در مجموعهٔ A باشد، b عضوی از A است و می‌نویسیم $b \in A$. در صورتی که بنویسیم $b \notin A$ یعنی b در مجموعهٔ A **نیست**. ممکن است اعضای یک مجموعه خودشان مجموعه باشند، مثلاً $A = \{\{b\}, b\}$.

۲ مجموعهٔ A زیرمجموعهٔ B است، هرگاه هر عضو دلخواه A در B هم باشد و می‌نویسیم $A \subseteq B$ که به کمک سور عمومی به‌صورت مقابل تعریف می‌شود: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B)$

اگر عضوی از A در B نباشد، می‌نویسیم $A \not\subseteq B$ که این گزاره نقیض گزارهٔ بالاست. بیان ریاضی $A \not\subseteq B$، به‌صورت مقابل است: $\sim(A \subseteq B) \Leftrightarrow A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x; (x \in A \wedge x \notin B)$

به خاطر داریم: $\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim q \wedge p$

نکته‌ها:

۱ به عنوان مثال اگر $A = \{۱,۲\}$ و $B = \{۱,A\}$ باشند، در این صورت $A \in B$ امّا $A \not\subseteq B$، درستی $A \in B$ واضح است. در مورد $A \not\subseteq B$، چون $۲ \in A$ و $۲ \notin B$، درستی این گزاره هم مشخص است.

۲ در مثال بالا، A و B دو عضوی هستند. به بیان دیگر کل مجموعهٔ A به عنوان یک عضو B در نظر گرفته می‌شود.

۳ اگر هر عضو یک مجموعه را داخل آکولاد قرار دهیم، یک زیرمجموعهٔ آن می‌شود.

۴ اعضای a و $\{a\}$ و $\{\{a\}\}$ و... با هم تفاوت دارند. آن‌ها را یکسان در نظر نگیریم.

تست مجموعه‌های $A = \{۲\}$، $B = \{۳,۵,\{۲\}\}$ و $C = \{\{\{۲\},۳,۵\},۲\}$ مفروض‌اند. کدام بیان در مورد آن‌ها نادرست است؟ (ریاضی ۹۵)

۱) $A \in B$ ۲) $A \in C$ ۳) $B \in C$ ۴) $A \subseteq C$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** با کمی دقت متوجه می‌شویم که $B = \{۳,۵,A\}$ و $C = \{B,۲\}$. پس گزینه‌های «۱» و «۳» درست هستند. با توجه به این‌که تنها عضو A، در مجموعهٔ C هم است، پس $A \subseteq C$ و گزینهٔ «۴» درست است. $A \notin C$ زیرا C عضوی به شکل $\{۲\}$ ندارد، بنابراین گزینهٔ «۲» نادرست است.

از درستی گزارهٔ $\forall x; (x \in A \Rightarrow x \notin B)$ کدام گزینه نتیجه می‌شود؟

۱) $B' \subseteq A$ ۲) $B' \subseteq A'$ ۳) $A \subseteq B'$ ۴) $A \subseteq B$

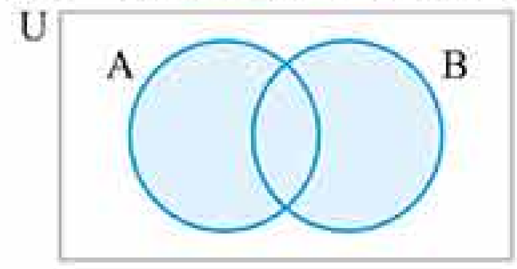
پاسخ **گزینهٔ «۳»** از تعریف متمم A به یاد داریم: $A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$

با توجه به تعریف متمم می‌توان نوشت:

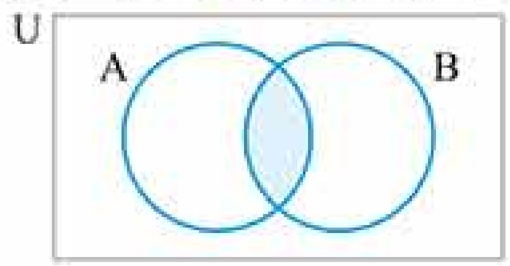
$$\forall x ; (x \in A \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \in B') \Leftrightarrow \forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B') \Leftrightarrow A \subseteq B'$$

۳ روش عضوگیری و جبر مجموعه‌ها

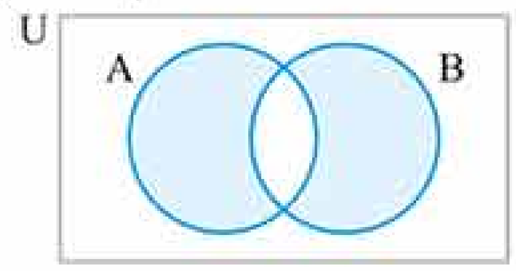
$A\bigcup B=\{x\in U\,|\,x\in A\vee x\in B\}$



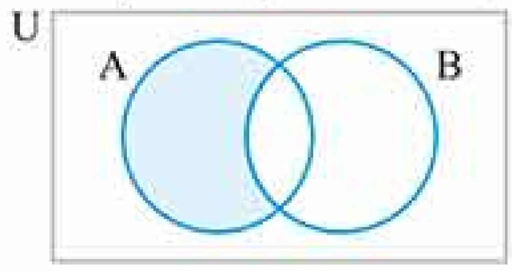
$A\bigcap B=\{x\in U\,|\,x\in A\wedge x\in B\}$



$A\Delta B=\{x\in U\,|\,x\in A\vee x\in B\wedge x\notin A\bigcap B\}$



$A-B=\{x\in U\,|\,x\in A\wedge x\notin B\}$



چند قانون مهم

۱ دمورگان: $(A\bigcup B)'=A'\bigcap B'\,,\,(A\bigcap B)'=A'\bigcup B'$

۲ تفاضل متقارن: $A\Delta B=(A-B)\bigcup(B-A)=(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$

۳ تبدیل تفاضل به اشتراک: $A-B=A\bigcap B'\,,\,B-A=B\bigcap A'$

۴ خاصیت توزیع‌پذیری: $\begin{cases}A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)\\A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)\end{cases}$

۵ روابط $\bigcup\,,\bigcap\,,-$ در حالت $A\subseteq B$: $A\subseteq B\Leftrightarrow\begin{cases}A\bigcup B=B\\A\bigcap B=A\\A-B=\varnothing\end{cases}$

۶ قانون جذب: $A\bigcup(B\bigcap A)=A\bigcap(B\bigcup A)=A$

۷ رابطهٔ تفاضل دو مجموعه: $A-B=A-(A\bigcap B)$

۸ نامساوی مجموعه‌ای: $\begin{cases}A\bigcap B\subseteq A\subseteq A\bigcup B\\B\bigcap A\subseteq B\subseteq B\bigcup A\end{cases}$

نکته‌ها:

۱ اجتماع، اشتراک و تفاضل ویژگی حذف **ندارند** ولی تفاضل متقارن این ویژگی را دارد.

$B\Delta A=C\Delta A\Rightarrow B=C$ $\qquad$ $A\Delta B=A\Delta C\Rightarrow B=C$

۲ دو مجموعهٔ A و B با هم مساوی هستند، اگر هرکدام زیرمجموعهٔ دیگری باشد.

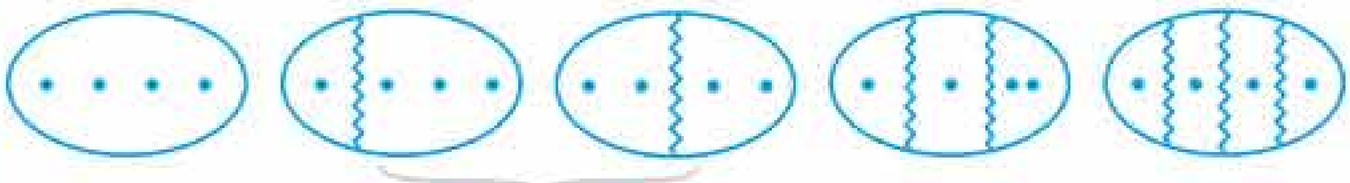
$A=B\Leftrightarrow[(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)]$

۳ اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ آن‌گاه $A\bigcup C\subseteq B\bigcup D$

تست **تعداد افرازهای مجموعهٔ $\{۰,۱,۲,۳\}$ کدام است؟** (ریاضی خارج ۹۰)

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

پاسخ **گزینهٔ «۴»** برای مرور نکات مربوط به تعداد افرازها، تعداد همهٔ افرازهای مجموعهٔ بالا را محاسبه می‌کنیم:



یک‌بخشی دوبخشی سه‌بخشی چهاربخشی

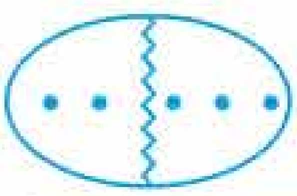
$$\binom{۴}{۴}+\binom{۴}{۳}\binom{۱}{۱}+\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}}{۲!}+\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۲}}{۲!}+\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۱}{۱}}{۴!}$$
$$=۱+۴+۳+۶+۱=۱۵$$

حتماً اگر بچه‌های کنکور خارج ۹۰ جدول تعداد افرازها را حفظ بودند، این تست را سریع‌تر حل می‌کردند.

تعداد افرازهای مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e\}$ که شامل مجموعه‌های دو عضوی و سه عضوی باشند، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ **گزینهٔ «۳»** با توجه به این‌که مجموعه ۵ عضوی است، داریم:

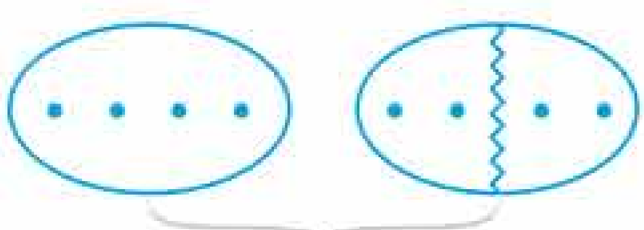


$$\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۳}=\frac{۵!}{۲!۳!}\times ۱=۱۰$$

یکی از افرازهای مجموعهٔ A به‌صورت $\{a\},\{b\},\{\{a,b\}\},\{c\}$ است. تعداد افرازهای مجموعهٔ A که فاقد مجموعهٔ تک‌عضوی باشد، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ **گزینهٔ «۲»** اگر تمام قسمت‌های یک افراز، تک‌عضوی باشند، تعداد قسمت‌ها برابر تعداد اعضای مجموعهٔ افراز شده است.
با توجه به فرض مسئله، مجموعهٔ A، ۴ عضوی است. پس:

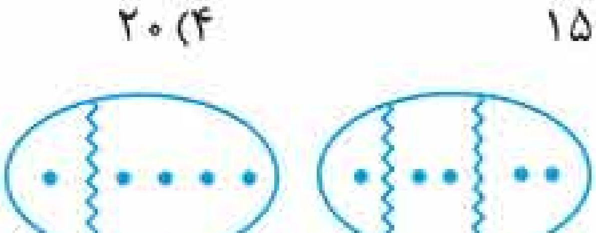


$$\text{افرازهای فاقد بخش تک‌عضوی در } A \Rightarrow \binom{۴}{۴}+\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}}{۲!}=۱+۳=۴$$

تعداد افرازهای مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e\}$ که شامل فقط یک مجموعهٔ تک‌عضوی باشد، کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

پاسخ **گزینهٔ «۴»**



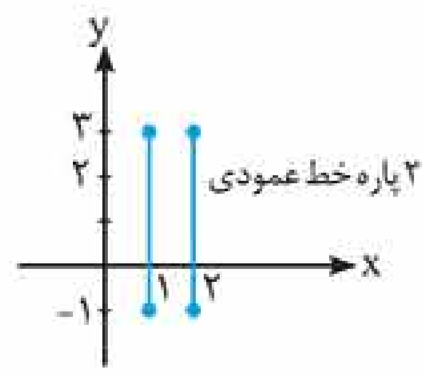
روش اول:
$$\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۴}+\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۲}{۲}\binom{۲}{۲}}{۲!}=۵+۱۵=۲۰$$

روش دوم:
$$\frac{۵!}{۱!۴!}+\frac{۵!}{۱!۲!۲!۲!}=۲۰$$

۶ نمودار ضرب دکارتی را در چهار حالت مختلف می‌توانیم بررسی کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید:

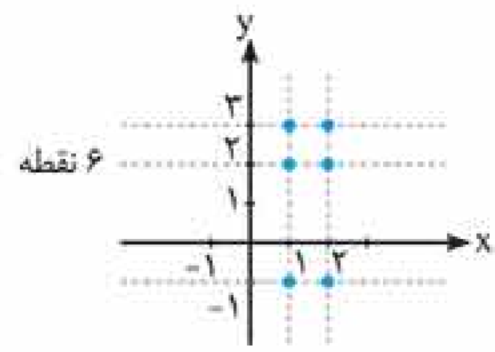
$\underbrace{\{1,2\}}_{x\text{ها}} \times \underbrace{[-1,3]}_{y\text{ها}}$

پاره‌خط‌های عمودی ⇐ پیوسته × گسسته



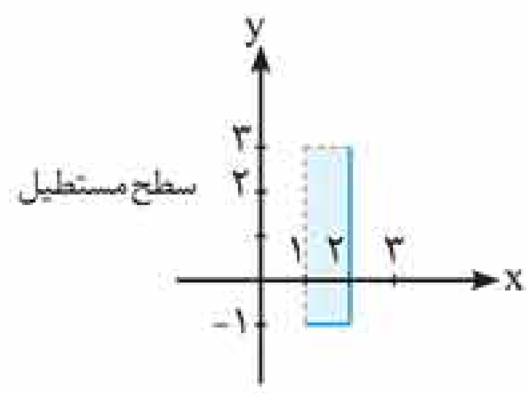
$\underbrace{\{1,2\}}_{x\text{ها}} \times \underbrace{\{-1,2,3\}}_{y\text{ها}}$

تعدادی نقطه ⇐ مجموعهٔ گسسته × مجموعهٔ گسسته



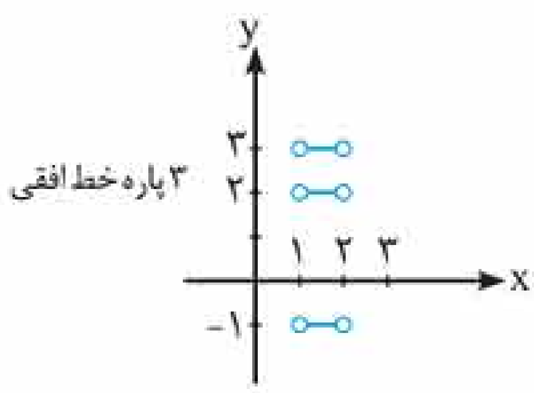
$\underbrace{(1,2]}_{x\text{ها}} \times \underbrace{[-1,3)}_{y\text{ها}}$

سطح مربع یا مستطیل ⇐ پیوسته × پیوسته



$\underbrace{(1,2)}_{x\text{ها}} \times \underbrace{\{-1,2,3\}}_{y\text{ها}}$

پاره‌خط‌های افقی ⇐ گسسته × پیوسته



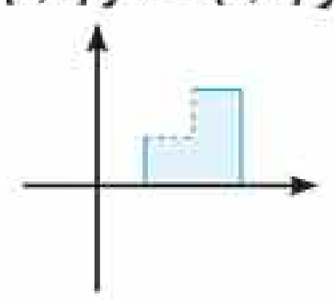
تست اگر A، B، C و D چهار مجموعه باشند و $A\times B=C\times D$، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

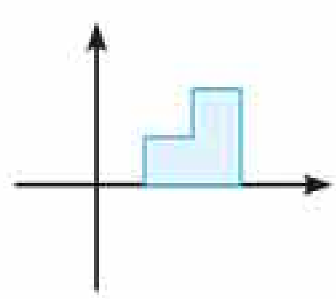
۱) $A\times C=B\times D$
۲) $B\times A=C\times D$
۳) $C\times B=A\times D$
۴) $C\times D=B\times A$

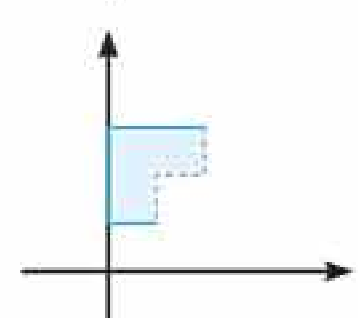
پاسخ **گزینهٔ «۳»** از $A\times B=C\times D$ نتیجه می‌گیریم $A=C \wedge B=D$. حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

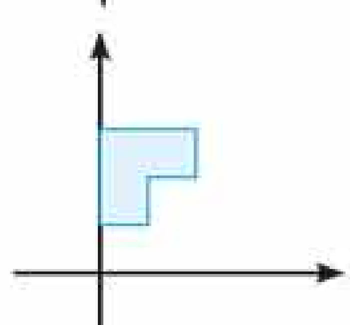
گزینهٔ «۱»: $A=B \wedge C=D$ ✗
گزینهٔ «۲»: $B=C \wedge A=D$ ✗
گزینهٔ «۳»: $C=A \wedge B=D$ ✓
گزینهٔ «۴»: $C=B \wedge D=A$ ✗

اگر $A=[1,3)$ و $B=[0,2]$ باشند، آن‌گاه نمودار $(A\times B)-(B\times A)$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


فضاهای نمونهٔ مهم را ببینید:

فضای نمونه	تعداد اعضا	حالت کلی	نکتهٔ قابل توجه
پرتاب ۲ سکه	$۲^۲$	۲^n	دقت کنید که همیشه (رو، پشت) با (پشت، رو) فرق دارد.
خانوادهٔ ۳ فرزندی	$۲^۳$	۲^n	دقت کنید که همیشه (دختر، پسر) با (پسر، دختر) فرق دارد.
پرتاب ۲ تاس	$۶^۲$	۶^n	در پرتاب تاس‌ها، (۱,۲) و (۲,۱) با هم متفاوت است.
کیسه و مهره	-	(تعداد کل تعداد مورد نظر)	همیشه گوی‌ها را متفاوت از هم در نظر می‌گیریم.
جایگشت ۴ شیء	$۴!$	$n!$	سخنرانی، صفت ایستادن، در طبقات مختلف و ... از این نوع فضای نمونه هستند.
انتخاب ۴ شیء از بین ۵ شیء	$\binom{۵}{۴}$	$\binom{n}{k}$	-

نکته‌ها:

۱ اگر فضای نمونه، n عضوی باشد، ۲^n پیشامد در این آزمایش تصادفی وجود دارد.

۲ هرگاه نتیجهٔ آزمایش، یکی از اعضای پیشامد باشد، می‌گوییم آن پیشامد رخ داده است.

تست **یک رانندهٔ ون با حداکثر ۱۰ مسافر در یک خط رفت و برگشت کار می‌کند. فضای نمونهٔ پدیدهٔ «تعداد مسافران در مسیر رفت و برگشت» چند عضو دارد، هرگاه بدانیم حداقل در یک مسیر، خالی حرکت نمی‌کند؟**

۱) ۱۲۱ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۹۹

پاسخ **گزینهٔ «۲»** فضای نمونهٔ مسیر رفت و برگشت $S_۱ = S_۲ = \{۰,۱,۲,...,۱۰\}$ و فضای نمونهٔ کل آزمایش $S_۱ \times S_۲$ است که ۱۲۱ عضو دارد. با توجه به این‌که حداقل در یک مسیر بدون مسافر حرکت نمی‌کند، پس حالتی که در هر دو مسیر خالی حرکت کند را باید حذف کنیم. بنابراین فضای نمونه ۱۲۰ عضو دارد.

تاسی را پرتاب می‌کنیم و عدد ظاهر شده اول است. چه تعداد پیشامد از این فضای نمونه، حتماً رخ داده است؟

۱) ۳ ۲) ۸ ۳) ۵۶ ۴) ۶۴

پاسخ **گزینهٔ «۳»** هنگامی می‌گوییم یک پیشامد رخ داده است که نتیجهٔ آزمایش، یکی از اعضای آن پیشامد باشد. در این جا می‌دانیم عدد اول ظاهر شده است. بنابراین حداقل یکی از اعداد ۲، ۳ یا ۵ در پیشامد وجود دارد. در واقع ما تعداد پیشامدهایی را می‌خواهیم که شامل حداقل یک عدد اول باشند. با استفاده از اصل متمم می‌توانیم تعداد این پیشامدها را محاسبه کنیم:

تعداد پیشامدهای شامل حداقل یک عدد اول = تعداد کل پیشامدها − تعداد پیشامدهای فاقد عدد اول $= ۲^۶ - ۲^۳ = ۶۴ - ۸ = ۵۶$

قانون ضرب احتمال (احتمال وقوع توأم دو پیشامد)

اگر A و B دو پیشامد باشند که $0 < P(A)$، آن‌گاه با طرفین وسطین کردن فرمول احتمال شرطی داریم:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A)$$

اگر مقادیر $P(A)$ و $P(B \mid A)$ را داشته باشیم، می‌توانیم از این رابطه برای محاسبهٔ $P(A \cap B)$ استفاده کنیم.

قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد:

اگر A_1، A_2 و A_3 سه پیشامد با احتمال مثبت باشند، آن‌گاه:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_2 \mid A_1) \times P(A_3 \mid (A_1 \cap A_2))$$

تذکر قانون ضرب احتمال برای n پیشامد $A_1, A_2, \ldots, A_n$ نیز قابل تعمیم است.

تست **در جعبه‌ای ۸ لامپ موجود است که دوتای آن‌ها معیوب است. بـه تـصادف متوالیـاً ایـن لامپ‌ها را آزمایش کرده و لامپ سالم را کنار می‌گذاریم تا اولین لامپ معیوب پیدا شود. با کدام احتمـال در آزمایش سوم، اولین لامپ معیوب پیدا می‌شود؟** (ریاضی ۹۵)

۱) $\frac{۵}{۲۸}$ ۲) $\frac{۴}{۲۱}$ ۳) $\frac{۳}{۱۴}$ ۴) $\frac{۵}{۲۱}$

پاسخ **گزینهٔ «۱»** در اینجا می‌خواهیم در آزمایش سوم، اولین لامپ معیوب پیدا شود. یعنی دو لامپ اول سالم و سومی معیوب باشد. طبق قانون ضرب احتمالات داریم:

لامپ اول سالم باشد($P(A_1)$)

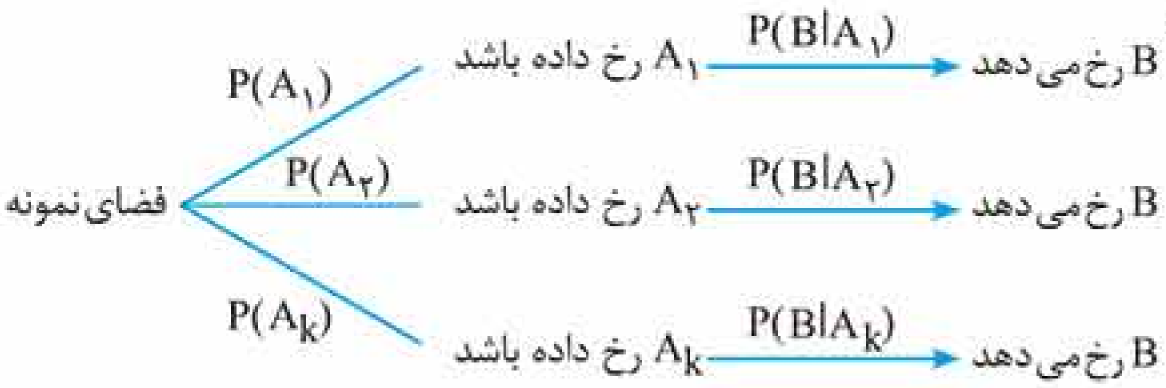
$$P = \frac{۶}{۸} \times \frac{۵}{۷} \times \frac{۲}{۶} = \frac{۵}{۲۸}$$

لامپ دوم سالم باشد اگر لامپ اول سالم بوده باشد.($P(A_2|A_1)$)

لامپ سوم معیوب باشد اگر لامپ‌های اول و دوم سالم باشند.($P(A_3|A_1 \cap A_2)$)

قانون احتمال کل

اگر فضای نمونه شامل چند قسمت باشد، مثلاً زنان و مردان، کیسه‌های مختلف و حالت‌های متفاوت و... احتمال یک پیشامد در این فضا برابر است با:

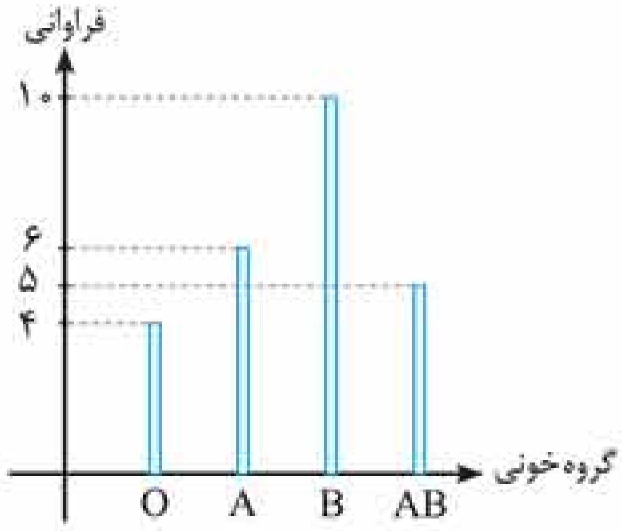


$$\Rightarrow P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_k)P(B \mid A_k)$$

تست **در ظرف A، پنج مهرهٔ قرمز و سه مهرهٔ آبی و در ظرف B، چهار مهرهٔ قرمز و شش مهرهٔ آبـی موجود است. چهار مهره از ظرف A و پنج مهره از ظرف B به تصادف انتخاب نموده و در ظرف خالی ظرف C قرار می‌دهیم. سپس مهره‌ای به تصادف از C خارج می‌کنیم. احتمال قرمزبودن این مهره کدام است؟** (ریاضی ۹۴)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

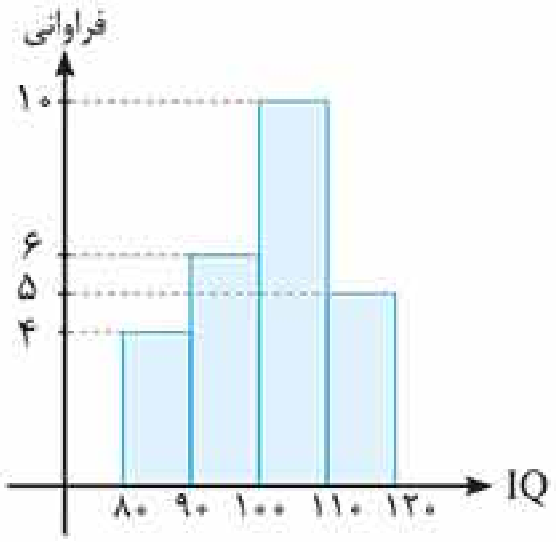
۱- نمودار میله‌ای



این نمودار برای متغیرهای «کیفی» و «کمّی گسسته» مناسب است.
در این نمودار، روی محور xها داده‌ها و روی محور yها فراوانی یا فراوانی نسبی داده‌ها را نشان می‌دهیم. به عنوان مثال، نمودار میله‌ای مربوط به جدول فراوانی زیر را رسم می‌کنیم:

گروه خونی	O	A	B	AB
فراوانی	۴	۶	۱۰	۵

۲- نمودار بافت نگاشت



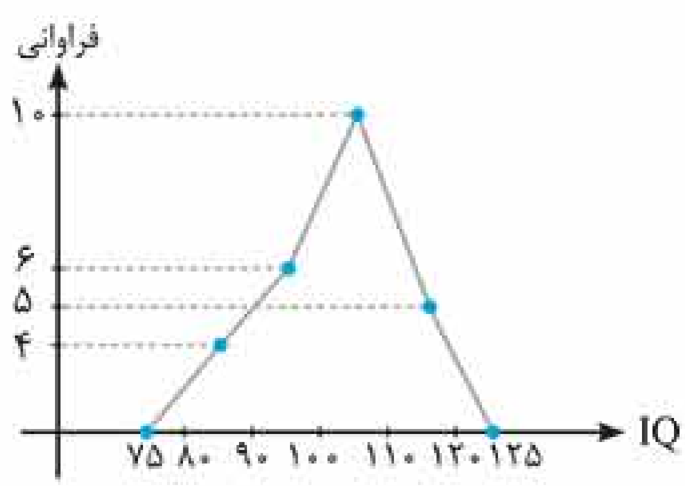
این نمودار برای متغیرهای کمّی پیوسته مناسب است. این نمودار شبیه نمودار میله‌ای است، با این تفاوت که روی محور xها به جای هر داده، بازه در نظر گرفته می‌شود. حال برای جدول فراوانی زیر که مربوط به IQ تعدادی دانش‌آموز است، نمودار بافت نگاشت رسم می‌کنیم:

IQ	$[80,90)$	$[90,100)$	$[100,110)$	$[110,120]$
فراوانی	۴	۶	۱۰	۵

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در این نمودار، هر دسته به صورت یک مستطیل به نمایش درمی‌آید که مساحت مستطیل‌ها متناسب با فراوانی دسته‌ها است. قاعدهٔ مستطیل‌ها در واقع همان طول بازه‌ها هستند که آن را با c نشان می‌دهیم. ارتفاع آن‌ها مربوط به فراوانی (یا فراوانی نسبی) هر دسته است.
اگر فراوانی دسته‌ها را w_1 و w_2 و w_3 و $\cdots$، طول دسته‌ها را c و تعداد کل داده‌ها را n در نظر بگیریم، مساحت زیر نمودار بافت نگاشت برابر است با:

$$\text{مساحت زیر نمودار بافت نگاشت} = w_1c + w_2c + \cdots = (w_1 + w_2 + \cdots)c = n\cdot c$$

۳- نمودار چندبر فراوانی بافت نگاشت



مناسب‌ترین نمودار برای متغیرهای کمّی پیوسته است. برای رسم این نمودار، نقاطی را به هم وصل می‌کنیم که طولشان مرکز دسته‌ها و عرض آن‌ها، فراوانی دسته‌ها می‌باشد. در آخر دو نقطه روی محور xها (معمولاً به اندازهٔ نصف طول بازه از مرکز دستهٔ اول عقب‌تر و از مرکز دستهٔ آخر جلوتر) در نظر می‌گیریم و نمودار را به آن‌ها وصل می‌کنیم.
اگر در نمودار بافت نگاشت، وسط عرض بالایی مستطیل‌ها و دو نقطه روی محور xها را به صورت متوالی به هم وصل کنیم، نمودار چندبر فراوانی بافت نگاشت به دست می‌آید. مساحت زیر نمودار چندبر فراوانی با مساحت زیر نمودار بافت نگاشت مساوی است. (مانند مثال)

IQ	$[80,90)$	$[90,100)$	$[100,110)$	$[110,120]$
فراوانی	۴	۶	۱۰	۵

پاسخ **گزینهٔ «۲»** به خاطر داریم که مجموع درصدهای فراوانی نسبی برابر ۱۰۰ است، پس:

$$۱۷+۲۰/۵+۲۲+w_۴+۱۸=۱۰۰ \Rightarrow w_۴=۲۲/۵$$

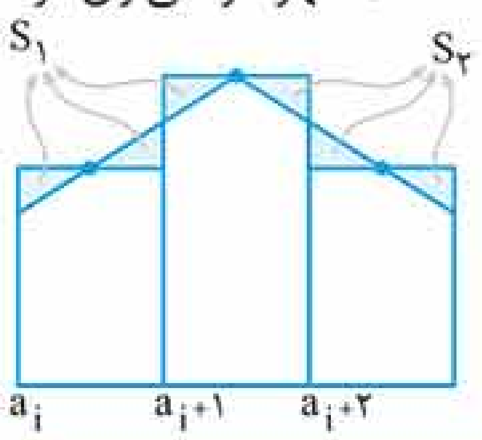
بنابراین:

$$\alpha_۴=\frac{w_۴}{n}\times ۳۶۰^\circ=\frac{۲۲/۵}{۱۰۰}\times ۳۶۰^\circ=۸۱^\circ$$

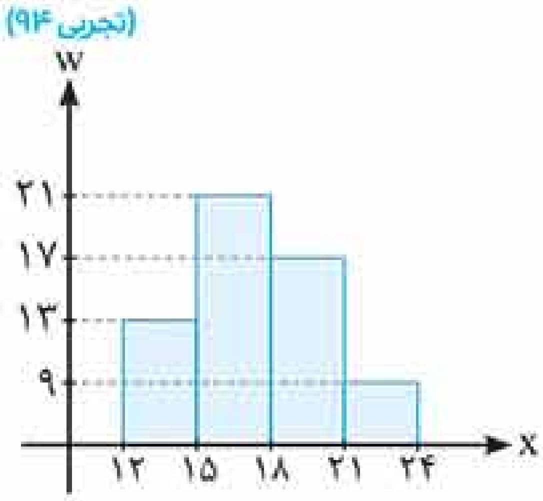
در داده‌های دسته‌بندی شده با متغیر پیوسته، اگر S مساحت نمودار مستطیلی و S' مساحت سطح زیر چندبر فراوانی آن با توجه به دو دستهٔ فرضی باشد، این دو مساحت چگونه‌اند؟ (نمودار مستطیلی همان نمودار بافت نگاشت است) (ریاضی خارج ۹۴)

۱) $S=S'$ ۲) $S>S'$ ۳) $S<S'$ ۴) اظهارنظر نمی‌توان کرد.

پاسخ **گزینهٔ «۱»** شکل مقابل بخشی از نمودار بافت نگاشت در حالت کلی است، می‌بینیم مساحت مثلث‌هایی که در شکل مشخص شده‌اند با هم برابرند (هم‌نهشت)، پس مجموع مساحت‌ها در زیر نمودار بافت نگاشت و نمودار چندبر فراوانی با هم برابر است.



از داده‌های آماری با نمودار مستطیلی زیر، سه دادهٔ ۱۶ و ۱۴ و ۱۶ حذف شده است. در نمودار دایره‌ای داده‌های جدید، بزرگ‌ترین زاویهٔ مرکزی نظیر دسته‌ها، چند درجه است؟ (تجربی ۹۴)



۱) ۹۰
۲) ۱۰۵
۳) ۱۲۰
۴) ۱۳۵

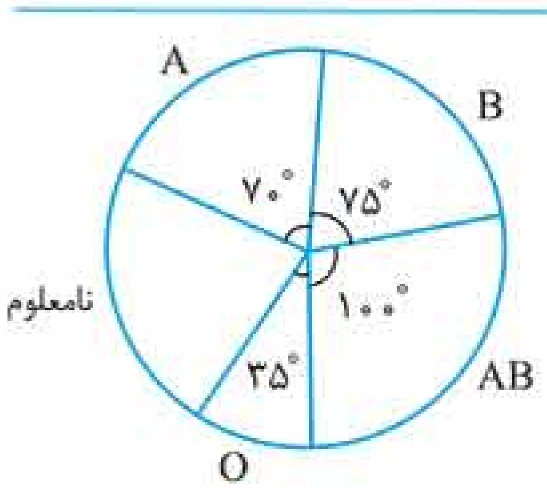
پاسخ **گزینهٔ «۳»** دادهٔ ۱۶ متعلق به دستهٔ $[۱۵,۱۸)$ و دادهٔ ۱۴ متعلق به دستهٔ $[۱۲,۱۵)$ است. با حذف این داده‌ها، فراوانی‌ها در حالت جدید به صورت زیر خواهند شد:

حدود دسته	$[۱۲,۱۵)$	$[۱۵,۱۸)$	$[۱۸,۲۱)$	$[۲۱,۲۴]$
فراوانی	۱۲	۱۹	۱۷	۹

بیشترین زاویهٔ مرکزی، مربوط به دسته‌ای است که بیشترین فراوانی را دارد، پس:

$$\alpha_۲=\frac{۱۹}{۵۷}\times ۳۶۰^\circ=۱۲۰^\circ$$

نمودار دایره‌ای مقابل، متناسب با تعداد کارکنان سازمانی با گروه‌های خونی متمایز است. گروه خونی ۳۲ نفر از آنان تعیین نشده است. چند نفر از آن‌ها، دارای گروه خونی B هستند؟ (تجربی ۹۵)



۱) ۲۵ ۲) ۳۰
۳) ۳۶ ۴) ۴۰

ویژگی خطی میانگین

هرگاه داده‌ها را در عدد ثابت a ضرب کنیم، سپس با عدد ثابت b جمع کنیم، میانگین داده‌های جدید، a برابر میانگین قبلی به اضافهٔ b خواهد شد. یعنی: $\overline{ax+b}=a\bar{x}+b$

- اگر داده‌ها با هم برابر باشند، میانگین آن‌ها نیز همان مقدار مشترک است.

روش سریع (حدسی) برای محاسبهٔ میانگین اعداد نسبتاً بزرگ

در این روش، ابتدا عدد مناسبی را برای میانگین حدس می‌زنیم و آن را y می‌نامیم. سپس از همهٔ داده‌ها عدد y را کم می‌کنیم تا عددها کوچک‌تر و محاسبات ساده‌تر شوند. در گام بعدی، میانگین عددهای جدید را پیدا می‌کنیم. در آخر، به میانگین به دست آمده، عدد y را اضافه می‌کنیم.

تست **تمام داده‌های ۸۰,۸۱,۸۵,۹۲,۹۴,۹۶,۹۷,۱۰۰,۱۰۰,۱۰۳,۱۰۴,۱۰۸ را ۳ برابر کرده، سپس ۴۰ واحد از آن‌ها کم می‌کنیم. میانگین داده‌های جدید کدام است؟** (ریاضی ۹۲ با تغییر)

۱) ۲۴۰ ۲) ۲۴۵ ۳) ۲۵۰ ۴) ۲۵۵

پاسخ **گزینهٔ «۲»** ابتدا میانگین داده‌های اولیه را به دست می‌آوریم: $\bar{x}=\frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد}}=\frac{۱۱۴۰}{۱۲}=۹۵$

در قدم بعدی، با توجه به ویژگی خطی میانگین، میانگین داده‌های جدید برابر است با:

$$\bar{x}_{\text{جدید}}=۳(\bar{x}_{\text{قدیم}})-۴۰=۳(۹۵)-۴۰=۲۴۵$$

در جدول فراوانی زیر، میانگین جامعه برابر ۴۱ است. در نمودار دایره‌ای، زاویهٔ مربوط به دادهٔ ۴۱ چند درجه است؟ (ریاضی ۹۱ با تغییر)

داده‌ها	۳۳	۳۷	۴۱	۴۵	۴۹
فراوانی	۷	۱۰	۱۵	۱۲	a

۱) ۹۶° ۲) ۹۸° ۳) ۱۰۲° ۴) ۱۰۸°

پاسخ **گزینهٔ «۴»** با توجه به ویژگی خطی میانگین و برای ساده‌سازی محاسبات، از همهٔ داده‌ها ۳۳ واحد کم می‌کنیم. با این عمل از میانگین هم ۳۳ واحد کم می‌شود. پس داریم:

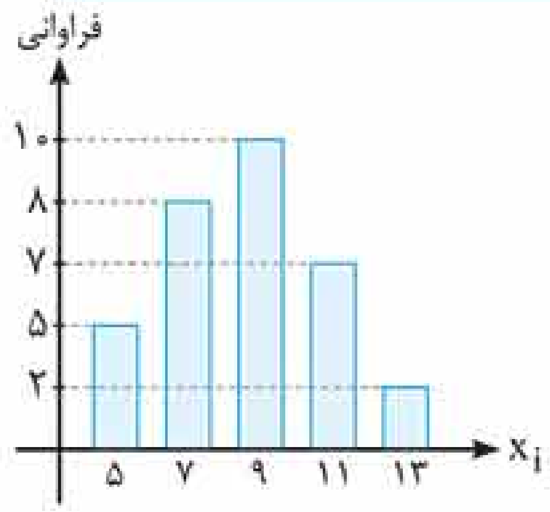
داده‌ها	۰	۴	۸	۱۲	۱۶
فراوانی	۷	۱۰	۱۵	۱۲	a

$$\bar{x}_{\text{جدید}}=\bar{x}_{\text{اصلی}}-۳۳\Rightarrow ۴۱-۳۳=\frac{۰+۴۰+۱۲۰+۱۴۴+۱۶a}{۷+۱۰+۱۵+۱۲+a}$$

$$\Rightarrow\frac{۳۰۴+۱۶a}{۴۴+a}=۸\Rightarrow ۳۰۴+۱۶a=۳۵۲+۸a\Rightarrow a=۶$$

با توجه به نمودار میله‌ای زیر، میانگین موزون داده‌ها کدام است؟

۱) ۸/۴۲
۲) ۸/۵۶
۳) ۸/۶۵
۴) ۸/۷۵



انحراف معیار برآورد میانگین

در برآورد نقطه‌ای میانگین دیدیم که هر نمونه، برآوردی از میانگین جامعه را ارائه می‌کند. فرض کنید میانگین برآورد شده توسط نمونه‌ها را به صورت مجموعه‌ای از اعداد بنویسیم. به انحراف معیار این اعداد که در واقع همان برآوردهای میانگین هستند، **انحراف معیار برآورد میانگین** می‌گوییم و آن را با $\sigma_{\overline{X}}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

در این رابطه، σ انحراف معیار جامعه و n اندازهٔ نمونه است.

نکته‌ها:

۱) می‌دانیم σ یعنی انحراف معیار جامعه، مقدار ثابتی دارد، پس با افزایش حجم نمونه (n) مقدار $\sigma_{\overline{X}}$ کاهش می‌یابد و برآورد دقیق‌تر می‌شود.

۲) مقدار انحراف معیار میانگین، یعنی $\sigma_{\overline{X}}$، با جذر حجم نمونه (n)، نسبت عکس دارد. یعنی داریم:

$$\frac{(\sigma_{\overline{X}})_2}{(\sigma_{\overline{X}})_1} = \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}$$

تست اگر واریانس جامعه‌ای ۱۶ باشد، حجم نمونه چقدر باشد تا انحراف معیار برآورد میانگین برابر ۰/۰۴ شود؟

۱) ۱۰۰۰ ۲) ۱۰۰۰۰ ۳) ۴۰۰۰ ۴) ۴۰۰۰۰

پاسخ **گزینهٔ «۲»** با توجه به فرض سؤال $\sigma^2 = ۱۶$ و $\sigma_{\overline{X}} = ۰/۰۴$ است. با توجه به رابطهٔ انحراف معیار میانگین، داریم:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{\sigma}{\sigma_{\overline{X}}} \Rightarrow n = \frac{\sigma^2}{\sigma_{\overline{X}}^2} = \frac{۱۶}{(۰/۰۴)^2} = \frac{۱۶}{\frac{۱۶}{۱۰۰۰۰}} = ۱۰۰۰۰$$

واریانس جامعه‌ای ۲/۲۵ است. همهٔ داده‌ها را ۴ برابر کرده و نمونه‌های ۶۲۵ عضوی از جامعه انتخاب می‌کنیم. انحراف معیار برآورد میانگین کدام است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۲۲ ۳) ۰/۲۴ ۴) ۰/۲۶

پاسخ **گزینهٔ «۳»** واریانس جامعه یعنی σ_1^2 برابر ۲/۲۵ است. بنابراین $\sigma_1 = ۱/۵$. اگر همهٔ داده‌ها را ۴ برابر کنیم، انحراف معیار نیز ۴ برابر می‌شود. بنابراین $\sigma_2 = ۴ \times ۱/۵ = ۶$. حال با توجه به این‌که حجم نمونه‌ها یعنی n برابر ۶۲۵ است، داریم:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_2}{\sqrt{n}} = \frac{۶}{\sqrt{۶۲۵}} = \frac{۶}{۲۵} = ۰/۲۴$$

برآورد بازه‌ای میانگین

از برآورد نقطه‌ای میانگین که توسط نمونه‌ها انجام می‌گیرد، فهمیدیم که در اکثر اوقات میانگین نمونه با میانگین جامعه برابر نیست و نمونه‌گیری و برآورد با خطا همراه است. برای رفع این مشکل از برآورد بازه‌ای استفاده می‌کنیم و برآورد بازه‌ای، محدوده‌ای را به ما نشان می‌دهد که پارامتر مورد نظر (در این کتاب فقط از میانگین و نسبت صحبت شده است) با یک ضریب اطمینانی در آن بازه قرار دارد. با این توضیحات به بیان رابطهٔ مربوط به تعیین بازهٔ برآورد میانگین می‌پردازیم.

۵- مثال نقض

مثالی که یک گزارهٔ کلی را رد می‌کند، **مثال نقض** نامیده می‌شود و به کمک آن، عدم درستی یک گزاره، ثابت می‌شود.

تست **کدام‌یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟**

۱) عدد $۲^{۲^n}+۱$ به ازای همهٔ اعداد طبیعی n، عددی اول است.

۲) مربع و مکعب هر عدد حقیقی، بزرگ‌تر از خود آن عدد است.

۳) مجموع چهار عدد طبیعی متوالی، بر ۴ بخش‌پذیر است.

۴) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی، همان عدد وسطی است.

پاسخ **گزینهٔ «۴»**

بررسی تک‌تک گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: به ازای $n=۵$ داریم: $۲^{۲^n}+۱=۲^{۲^۵}+۱=۲^{۳۲}+۱=۶۴۱\times ۶۷۰۰۴۱۷$

پس عدد $۲^{۲^n}+۱$، به ازای همهٔ اعداد طبیعی n، اول نیست.

گزینهٔ «۲»: به ازای $x=\frac{۱}{۲}$ داریم $x^۳=\frac{۱}{۸}$ و $x^۲=\frac{۱}{۴}$ که هر دو از x کوچک هستند. پس این گزاره هم غلط است.

گزینهٔ «۳»: اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ را به عنوان ۴ عدد طبیعی متوالی در نظر بگیرید. داریم:

$۱+۲+۳+۴=۱۰\Rightarrow$ ۱۰ مضرب ۴ نیست.

گزینهٔ «۴»: این گزاره درست است و داریم: $(k\in\mathbb{N})$

$$k+۱, k+۲, k+۳, k+۴, k+۵$$

$$\text{میانگین}: \frac{(k+۱)+(k+۲)+(k+۳)+(k+۴)+(k+۵)}{۵}=\frac{۵k+۱۵}{۵}=k+۳$$

بنابراین میانگین ۵ عدد متوالی همان عدد وسطی می‌شود.

کدام عدد، کلیّت حکم «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت.» را نقض می‌کند؟ (ریاضی ۹۲، ریاضی خارج ۸۸)

۱) ۵۶ ۲) ۶۴ ۳) ۷۲ ۴) ۷۴

پاسخ **گزینهٔ«۲»** اگر عددی به شکل ۲^n باشد، نمی‌توان آن را به صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت. تنها عددی که در گزینه‌ها به فرم ۲^n می‌باشد، عدد ۶۴ است.

اگر M حاصل‌ضرب دو عدد زوج متوالی باشد، کدام گزینه در مورد $A=M+۱$ همواره صحیح است؟

۱) A زوج است. ۲) A اول است.

۳) A به صورت $۸k+۱$ است. ۴) A مضرب ۳ است.

پاسخ **گزینهٔ«۳»** دو عدد زوج متوالی را به صورت $۲q$ و $۲q+۲$ در نظر می‌گیریم، حال داریم:

$$A=M+۱=۲q(۲q+۲)+۱=۴q^۲+۴q+۱=(۲q+۱)^۲$$

این یعنی A همواره به صورت مربع یک عدد فرد است و حتماً این نکته را به خاطر داریم که مربع هر عدد فرد به صورت $۸k+۱$ است. گزینه‌های «۱» و «۲» با مثال نقض $q=۱$ رد می‌شوند. همچنین گزینهٔ «۴» به ازای $q=۲$ نقض می‌شود.

کدام گزینه، گزارهٔ «اگر برای هر سه مجموعهٔ A ، B و C داشته باشیم $A\cup B=A\cup C$ ، آن‌گاه $B=C$» را نقض می‌کند؟

۱) $C=\{۱,۷\}, A=\{۱,۵,۶,۴\}, B=\{۵,۶\}$
۲) $C=\{۱,۴\}, A=\{۱,۵,۶,۴\}, B=\{۱,۴\}$
۳) $C=\{۱,۵,۶\}, A=\{۵,۶,۴,۷\}, B=\{۷\}$
۴) $C=\{۵,۷\}, A=\{۵,۱,۶,۴\}, B=\{۷,۱\}$

پاسخ **گزینهٔ«۴»** یک گزارهٔ شرطی زمانی نادرست است که فرض درست و حکم نادرست باشد، یعنی فقط در حالت« ن ⇐ د». پس باید مثالی بزنیم که در فرض درست باشد ولی در حکم غلط.

بررسی تک‌تک گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: $A\cup B=\{۱,۵,۶,۴\}\neq A\cup C=\{۱,۵,۶,۴,۷\}$

گزینهٔ «۲»: $A\cup B=A\cup C=\{۱,۵,۶,۴\}, B=C$

گزینهٔ «۳»: $A\cup B=\{۵,۶,۴,۷\}\neq A\cup C=\{۱,۵,۶,۴,۷\}$

گزینهٔ «۴»: $\underbrace{A\cup B=A\cup C=\{۱,۵,۶,۴,۷\}}_{\text{فرض درست}}\ ,\ \underbrace{B\neq C}_{\text{حکم نادرست}}$

بخش‌پذیری

عدد صحیح a که مخالف صفر است، شمارندهٔ عدد b است، یا a ، b را می‌شمارد یا $a\,|\,b$ و یا b بر a بخش‌پذیر است، هرگاه عدد صحیحی چون q وجود داشته باشد به طوری که: $b=aq$

اگر عدد b بر عدد a بخش‌پذیر نباشد یا a عدد b را عاد نکند، می‌نویسیم: $a\nmid b$

خواص بخش‌پذیری

۱ $a\,|\,a\ ;\ \forall a\in\mathbb{Z}$

۲ $\pm ۱\,|\,a\ ;\ \forall a\in\mathbb{Z}$

۳ $a\,|\,۰\ ;\ \forall a\in\mathbb{Z}$

۴ $a\,|\,b\wedge b\,|\,c\Rightarrow a\,|\,c$

۵ $a\,|\,b\wedge b\,|\,a\Rightarrow |a|=|b|\Rightarrow a=\pm b$

۶ $a\,|\,b \begin{cases}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} ma\,|\,mb\\ \xrightarrow[n\in\mathbb{N}]{} a^n\,|\,b^n\end{cases}$

۷ $a\,|\,b\wedge a\,|\,c\Rightarrow a\,|\,mb\pm nc\ ;\ (m,n\in\mathbb{Z})$

۸ $a\,|\,b\Rightarrow |a|\le|b|\ ;\ (b\neq ۰)$

۹ $a\,|\,b\wedge c\,|\,d\Rightarrow ac\,|\,bd$

تست اگر $a\,|\,۹k+۴$ و $a\,|\,۵k+۳$ ، برای a چند جواب طبیعی وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ«۲»**

$$\begin{cases}a\,|\,۹k+۴\xrightarrow{\times ۵}\\ a\,|\,۵k+۳\xrightarrow{\times ۹}\end{cases}\begin{cases}a\,|\,۴۵k+۲۰\\ a\,|\,۴۵k+۲۷\end{cases}\Rightarrow a\,|\,(۴۵k+۲۷)-(۴۵k+۲۰)\Rightarrow a\,|\,۷\Rightarrow a=۱\ \text{یا}\ ۷$$

اگر $k\in\mathbb{Z}$ و $۵\,|\,۴k+۱$ باشند، در این صورت بزرگ‌ترین عددی که عبارت $۱۶k^۲+۲۸k+۶$ همواره بر آن بخش‌پذیر است، کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۲۵ ۴) ۵۰

خواص هم‌نهشتی

۱ $a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow \begin{cases} a\pm c\overset{m}{\equiv}b\pm c & ;\ (c\in\mathbb{Z}) \\ ac\overset{m}{\equiv}bc & ;\ (c\in\mathbb{Z}) \end{cases}$

۲ $a\overset{m}{\equiv}b \xrightarrow{c>0} ac\overset{m|c|}{\equiv}bc \quad ; \quad (c\in\mathbb{Z})$

۳ $a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow a^n\overset{m}{\equiv}b^n \quad ; \quad (c\in\mathbb{N})$

۴ $a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow a\pm mt\overset{m}{\equiv}b\pm mk \quad ; \quad (k,t\in\mathbb{Z})$

۵ $a\overset{m}{\equiv}b\,,\ n\,|\,m \Rightarrow a\overset{n}{\equiv}b$

(به جای پیمانه، می‌توان هر کدام از مقسوم‌علیه‌های مثبت آن را قرار داد.)

۶ $a\overset{m}{\equiv}b\,,\ c\overset{m}{\equiv}d \Rightarrow \begin{cases} ac\overset{m}{\equiv}bd \\ a\pm c\overset{m}{\equiv}b\pm d \end{cases}$

۷ $ac\overset{m}{\equiv}bc \xrightarrow{(c,m)=d} a\overset{\frac{m}{d}}{\equiv}b$

تست از رابطهٔ هم‌نهشتی $۳۶a\overset{۸۴}{\equiv}۱۹۲b$ کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $a\overset{۷}{\equiv}۳b$ ۲) $a\overset{۷}{\equiv}۴b$ ۳) $۲a\overset{۷}{\equiv}-b$ ۴) $۳a\overset{۷}{\equiv}۲b$

پاسخ گزینهٔ «۲»

$$۳۶a\overset{۸۴}{\equiv}۱۹۲ \xrightarrow[\div ۱۲]{(۱۲,۸۴)=۱۲} (\frac{۳۶}{۱۲})a\overset{\frac{۸۴}{۱۲}}{\equiv}(\frac{۱۹۲}{۱۲})b \Rightarrow ۳a\overset{۷}{\equiv}۱۶b \xrightarrow{۱۶\overset{۷}{\equiv}۲} \underset{\text{گزینهٔ ۴}}{\boxed{۳a\overset{۷}{\equiv}۲b}} \Rightarrow ۳a\overset{۷}{\equiv}۹b$$

هر مضربی از پیمانه را می‌توانیم به طرفین هم‌نهشتی اضافه کنیم

$$\xrightarrow[\div ۳]{(۳,۷)=۱} (\frac{۳}{۳})a\overset{\frac{۷}{۱}}{\equiv}(\frac{۹}{۳})b \Rightarrow \underset{\text{گزینهٔ ۱}}{\boxed{a\overset{۷}{\equiv}۳b}}$$

هم‌چنین به کمک رابطهٔ به دست آمده داریم:

$$a\overset{۷}{\equiv}۳b \xrightarrow{\times ۲} ۲a\overset{۷}{\equiv}۶b \xrightarrow{۶\overset{۷}{\equiv}-۱} \underset{\text{گزینهٔ ۳}}{\boxed{۲a\overset{۷}{\equiv}-b}}$$

پس گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴» نیز درست هستند.

نکته:

اگر $a=\overline{a_n a_{n-۱}\cdots a_۱ a_۰}$، یک عدد $(n+۱)$ رقمی باشد، آن‌گاه:

$$a=a_n\times ۱۰^n+a_{n-۱}\times ۱۰^{n-۱}+\cdots+a_۱\times ۱۰^۱+a_۰\times ۱۰^۰$$

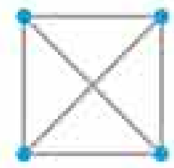
به عنوان مثال:

$$۶۴۳۲=۶\times ۱۰^۳+۴\times ۱۰^۲+۳\times ۱۰+۲$$

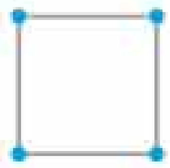
تست یک رابطهٔ هم‌نهشتی، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را به ۱۵ کلاس هم‌نهشتی افراز کرده است و عدد $\overline{۶a۴}$ در کلاس هم‌نهشتی [۹] قرار دارد. تعداد جواب‌های a کدام است؟

۱) ۵   ۲) ۴   ۳) ۳   ۴) ۲

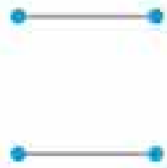
گراف k ـ منتظم: گرافی که درجهٔ همهٔ رئوس آن با هم برابر و مساوی با k است را گراف k ـ منتظم می‌نامند.



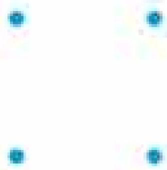
گراف ۳ ـ منتظم
مرتبهٔ ۴



گراف ۲ ـ منتظم
مرتبهٔ ۴



گراف ۱ ـ منتظم
مرتبهٔ ۴



گراف ۰ ـ منتظم
مرتبهٔ ۴

نکته‌ها:

۱) گراف G، k ـ منتظم است اگر و تنها اگر: $\Delta(G) = \delta(G) = k$

۲) در گراف k ـ منتظم از مرتبهٔ p و اندازهٔ q داریم: $p \cdot k = 2q$

از رابطهٔ بالا نتیجه می‌گیریم که p و k همزمان نمی‌توانند فرد باشند.

تست کدام گزینه می‌تواند وجود داشته باشد؟

۱) در یک گروه ۷ نفری، هر شخص دقیقاً ۳ نفر در آن گروه را می‌شناسد.

۲) در یک جمع ۱۳ نفری، همهٔ افراد ۵ دوست در آن جمع داشته باشند. (دوستی را رابطه‌ای دو طرفه در نظر می‌گیریم یعنی یا هر دو نفر با هم دوست هستند و یا هیچ‌کدام با دیگری دوست نیست.)

۳) از ۱۵ نفر شرکت‌کننده در یک مهمانی، ۱۴ نفر دقیقاً با ۲ نفر دست داده‌اند و نفر پانزدهم دقیقاً با ۳ نفر دست داده است.

۴) ۱۰ نفر در ۱۰ شهر مختلف ساکن هستند و قرار است هر کدام با ۳ نفر دیگر نامه‌نگاری کنند. (نامه‌نگاری رابطه‌ای دوطرفه است.)

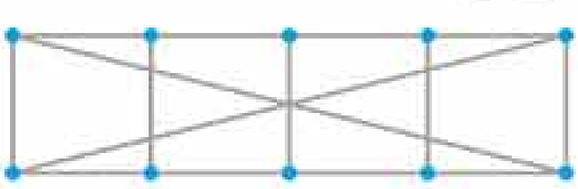
پاسخ **گزینهٔ «۴»** **بررسی تک‌تک گزینه‌ها:**

گزینهٔ ۱: هر نفر را با یک رأس نشان می‌دهیم. هر دو نفر که یکدیگر را می‌شناسند، توسط یالی به هم وصل می‌شوند. چون هر شخص دقیقاً ۳ نفر را می‌شناسد، پس درجهٔ هر رأس برابر ۳ است. پس یک گراف ۳ ـ منتظم مرتبهٔ ۷ داریم و می‌دانیم چنین گرافی وجود ندارد زیرا p (مرتبه) و k (درجه) در گراف‌های منتظم نمی‌توانند هر دو فرد باشند.

گزینهٔ ۲: درست مشابه گزینهٔ ۱، یک گراف ۵ ـ منتظم مرتبهٔ ۱۳ داریم که با توجه به این‌که p و k هر دو فرد هستند، این اتفاق غیر ممکن است.

گزینهٔ ۳: در این‌جا اگر هر فرد را یک رأس در نظر بگیریم، ۱۴ رأس از درجهٔ ۲ و ۱ رأس از درجهٔ ۳ داریم. حتماً به خاطر دارید که تعداد رئوس فرد گراف، همواره زوج است اما در این‌جا فقط یک رأس فرد (رأس درجهٔ ۳) داریم. پس چنین گرافی وجود ندارد.

گزینهٔ ۴: در این‌جا یک گراف ۳ ـ منتظم مرتبهٔ ۱۰ داریم و می‌دانیم چنین گرافی می‌تواند وجود داشته باشد.



گراف تهی: گراف فاقد یال را گراف تهی می‌نامیم. گراف تهی از مرتبهٔ p را با نماد $\overline{K_p}$ نشان می‌دهیم.

طول دور: تعداد یال‌های موجود در دور را طول دور می‌نامند که همواره یکی کم‌تر از تعداد رأس‌های موجود در دور می‌باشد.

نکته:

تعداد دورهای به طول m در گراف K_p، $p \geq ۳$ برابر است با: $\binom{p}{m} \times \frac{(m-۱)!}{۲}$

تست در یک گراف کامل از مرتبهٔ ۵ چند دور با طول ۴ وجود دارد؟ (ریاضی خارج ۹۴)

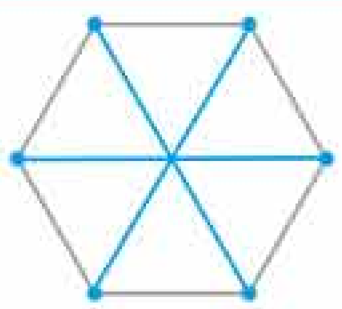
۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

پاسخ **گزینهٔ «۳»** با توجه به نکتهٔ قبل، $m=۴$ و $p=۵$ است، بنابراین داریم:

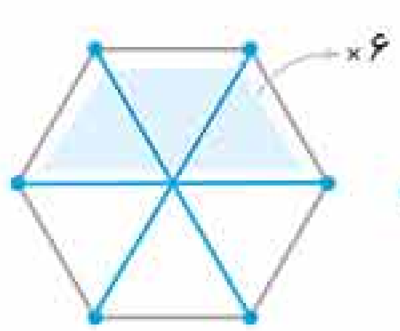
$$\text{تعداد دور به طول ۴} = \binom{۵}{۴} \times \frac{(۴-۱)!}{۲} = ۵ \times ۳ = ۱۵$$

راهبرد در گراف‌هایی با شکل متقارن، یک مدل از هر دور را پیدا می‌کنیم و با توجه به تقارن مسئله، تعداد دورهای شبیه به هم را پیدا کرده و هر مدل را در تعداد تکرارش ضرب می‌کنیم.

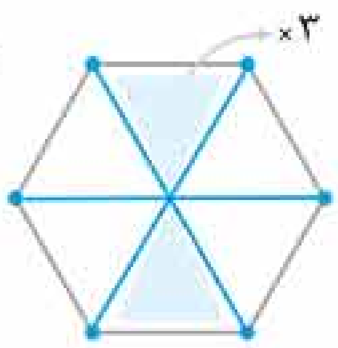
تست در گراف ۳ ـ منتظم شکل مقابل، چند دور به طول ۴ وجود دارد؟ (ریاضی ۹۶)



۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹



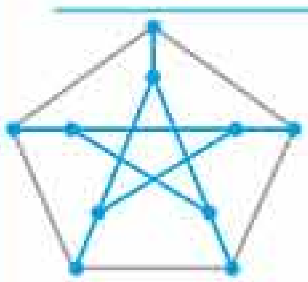
دور به شکل ذوزنقه



دور به شکل پروانه

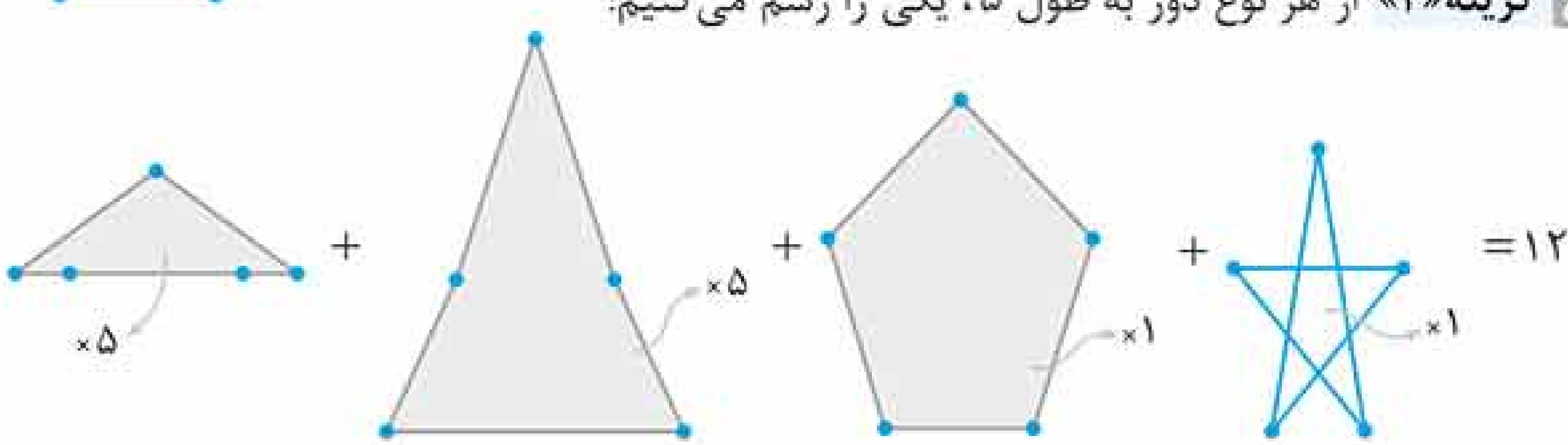
پاسخ **گزینهٔ «۴»** دو نوع دور به طول ۴ دیده می‌شود، یکی به شکل ذوزنقه و دیگری به شکل پروانه است. ۶ دور به شکل ذوزنقه و ۳ دور به شکل پروانه داریم، پس در کل ۹ دور به طول ۴ داریم.

گراف شکل مقابل چند دور به طول ۵ دارد؟ (ریاضی خارج ۹۱)

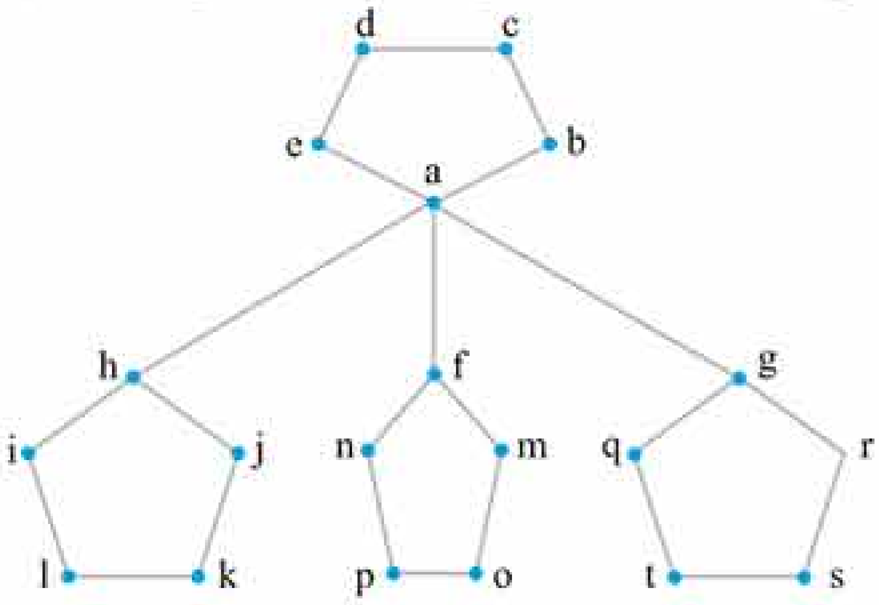


۱) ۷ ۲) ۸
۳) ۹ ۴) ۱۲

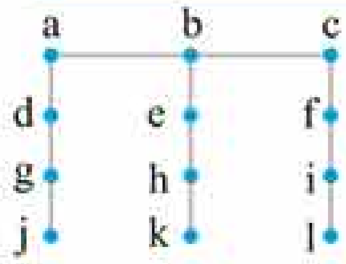
پاسخ **گزینهٔ «۴»** از هر نوع دور به طول ۵، یکی را رسم می‌کنیم:



پاسخ **گزینهٔ«۴»** با توجه به گراف، رأس a چون بیشترین درجه را دارد، انتخاب می‌کنیم. با انتخاب a، خودش و رئوس b و e و g و f و h احاطه می‌شوند. حال باید از بین c و d، یک رأس را برداریم. همین‌طور از بین رئوس j و k و l و i باید دو رأس و از بین رئوس v و s و t و q هم دو رأس و در آخر از بین رئوس m و o و p و n نیز باید دو رأس را برداریم. پس به جز a حداقل باید $۱+۲+۲+۲=۷$ رأس را انتخاب کنیم تا یک γـ مجموعه داشته باشیم. یکی از این γـ مجموعه‌ها به صورت $\{a,c,i,j,n,m,q,r\}$ است.



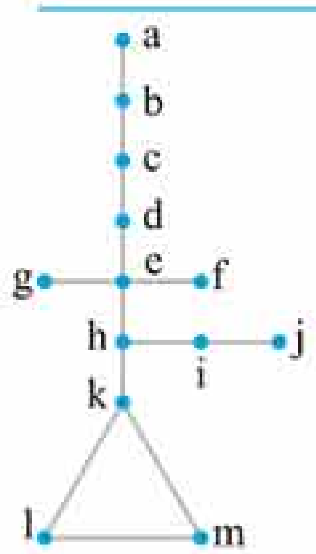
گراف زیر، چند γـ مجموعه دارد؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

پاسخ **گزینهٔ«۱»** با انتخاب رأس b (رأس با بیش‌ترین درجه) رئوس a، b، c و e احاطه می‌شوند. برای احاطه کردن رئوس d، g و j حتماً باید رأس g و برای احاطه کردن رئوس f، i و l، حتماً باید رأس i انتخاب گردد. اما برای احاطه شدن دو رأس k و h هرکدام را می‌توان انتخاب کرد. پس دو مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم به صورت $\{b,g,i,h\}$ و $\{b,g,i,k\}$ وجود دارد.

در گراف زیر، اختلاف $\gamma(G)$ و $\left\lceil \dfrac{n}{\Delta(G)+۱} \right\rceil$ کدام است؟



۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

پاسخ **گزینهٔ«۲»** در این گراف تعداد رأس‌ها برابر $n=۱۳$ و $\Delta(G)=۴$ (رأس e) است. پس داریم:

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta(G)+۱} \right\rceil \le \gamma(G) \le n-\Delta(G) \Rightarrow \left\lceil \frac{۱۳}{۴+۱} \right\rceil \le \gamma(G) \le ۱۳-۴ \Rightarrow ۳ \le \gamma(G) \le ۹$$

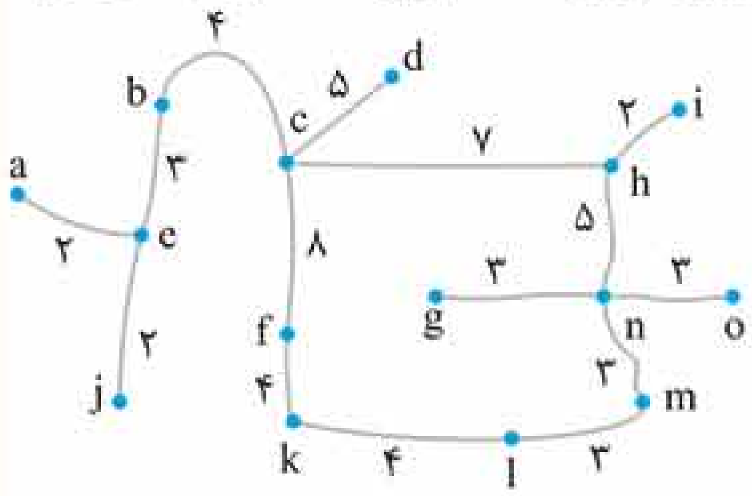
حال سراغ تشکیل یک γـ مجموعه می‌رویم! ابتدا رأس e را برمی‌داریم. رئوس f و d و g و h و البته خود e را حذف می‌کنیم. هم‌چنین رئوس b و k را که بیش‌ترین درجه را در مرحلهٔ بعد دارند، انتخاب می‌کنیم. با انتخاب آن‌ها، فقط رئوس i و j احاطه نمی‌شوند که با انتخاب یکی از آن‌ها به مجموعهٔ $\{e,b,k,i\}$ یا $\{e,b,k,j\}$ می‌رسیم که یک γـ مجموعه است و در نتیجه $\gamma(G)=۴$ است. در انتها داریم:

$$\left|\gamma(G)-\left\lceil \frac{n}{\Delta(G)+۱} \right\rceil\right| = |۴-۳| = ۱$$

پاسخ **گزینهٔ «۱»** برای تعیین یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال با حداکثر عضو، ابتدا از رئوسی با حداقل درجه شروع می‌کنیم. پس اول رئوس a و e و i را انتخاب می‌کنیم. سپس خود این رأس‌ها و رئوسی که احاطه می‌کنند، یعنی b و f و j را حذف می‌کنیم. در گراف باقی‌مانده، مرحلهٔ قبل را تکرار می‌کنیم. بدین ترتیب رأس‌های c و g و k انتخاب می‌شوند که رئوس باقی‌مانده را احاطه می‌کنند. پس مجموعهٔ $\{a,e,i,c,g,k\}$ یک احاطه‌گر مینیمال با حداکثر عضو بوده و $m=۶$ است.
با توجه به نکتهٔ قبل، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم در این گراف دارای $V(G)-m$ عضو است پس $\gamma(G)=۱۲-۶=۶$ به‌دست می‌آید. پس از مجموعهٔ ۶ عضوی بالا نمی‌توان هیچ رأسی را حذف کرد تا γـ مجموعه شود.

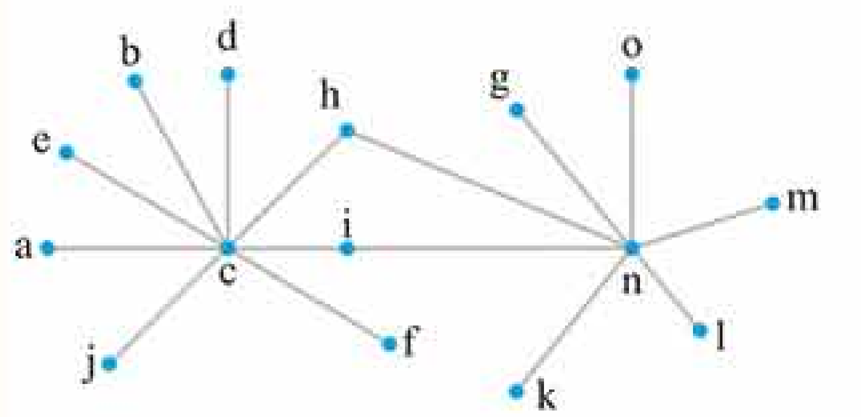
کاربرد احاطه‌گری در مدل‌سازی: از مفهوم احاطه‌گری در گراف‌ها، می‌توان برای حل مسائلی در زمینه‌های مختلف استفاده کرد. به عنوان مثال برای انتخاب بهترین مکان‌ها برای نصب دکل‌های مخابراتی و یا احداث بیمارستان‌ها، آتش‌نشانی و... می‌توانیم از احاطه‌گری استفاده کنیم.

تست **نقشهٔ زیر، یک منطقه شامل چند روستا است که جاده‌های بین آن روستا، به همراه مسافت جاده‌ها، مشخص شده است. قرار است چند بیمارستان در چند روستا احداث کنیم، به گونه‌ای که فاصلهٔ هر روستا تا نزدیک‌ترین بیمارستان به آن روستا، از ۱۰ کیلومتر بیشتر نباشد. کم‌ترین تعداد بیمارستان مورد نیاز کدام است؟**



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

پاسخ **گزینهٔ «۱»** اول باید گراف مربوط به این روستاها را رسم کنیم. فقط روستاهایی به هم وصل می‌شوند که فاصلهٔ آن‌ها از یکدیگر، حداکثر ۱۰ کیلومتر است. تعداد بیمارستان‌ها همان عدد احاطه‌گری گراف مورد نظر است. این گراف به صورت زیر رسم می‌شود:



واضح است که با انتخاب دو رأس n و c، همهٔ گراف احاطه می‌شود. پس $\gamma(G)=۲$ بوده و حداقل ۲ بیمارستان مورد نیاز است.

به چند طریق می‌توان ۴ سیب و ۳ پرتقال را بین ۳ نفر توزیع کرد؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۲۲۵ ۴) ۲۱۰

پاسخ **گزینهٔ «۱»**

$$\begin{cases} \text{سیب} \quad x_1+x_2+x_3=4 \Rightarrow \binom{4+2}{3-1}=15 \\ \text{پرتقال} \quad y_1+y_2+y_3=3 \Rightarrow \binom{3+2}{3-1}=10 \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد کل جواب‌ها} = 15\times 10 = 150$$

مربع لاتین

یک جدول مربعی از اعداد ۱ و ۲ و ... و n به شکل یک مربع $n\times n$ که سطرها و ستون‌های آن با عددهای ۱، ۲ و ... و n پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، را یک «مربع لاتین» می‌نامیم.

تست **با توجه به مربع لاتین ۶×۶ در روبه‌رو، مقدار میانگین عددهای w ، t ، z ، y و x کدام است؟**

۶	x	۳	۲	۵	۴
۴	۶	۱	۳	۲	۵
y	۴	۶	۱	۳	۲
۲	t	۴	۶	۱	z
۳	۲	۵	۴	۶	۱
۱	۳	۲	۵	۴	w

۱) ۴ ۲) ۴/۵
۳) ۴/۲۵ ۴) ۵

پاسخ **گزینهٔ «۱»** با توجه به تعریف مربع لاتین، می‌دانیم عددهای ۶، ...، ۲ و ۱ در هر سطر و ستون، فقط یک بار باید نوشته شوند.

با توجه به جدول داده شده، در سطر اول رقم ۱ وجود ندارد. پس $x=1$. در ردیف سوم عدد ۵ وجود ندارد پس $y=5$. در دومین ستون از سمت چپ فقط عدد ۵ وجود ندارد پس $t=5$. در ردیف چهارم عدد ۳ را نمی‌بینیم پس z برابر ۳ است و در آخر در ستون سمت راست عدد ۶ به چشم نمی‌خورد پس $w=6$. بنابراین داریم:

$$\frac{x+y+z+t+w}{5}=\frac{1+5+3+5+6}{5}=\frac{20}{5}=4$$

نکته‌ها:

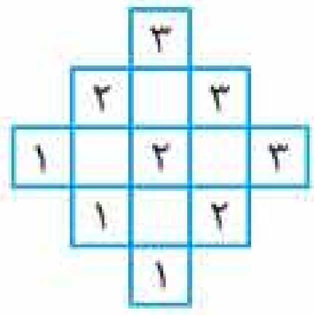
۱ با تعویض جای دو سطر یا دو ستون از یک مربع لاتین، باز هم مربع لاتین حاصل می‌شود.

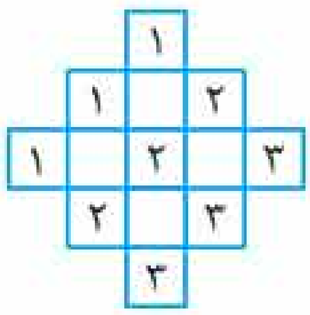
۲ با اعمال جایگشت روی اعداد ۱ , ۲ , ... , n یک مربع لاتین جدید حاصل می‌شود.

۳ در مربع $n\times n$ که سطر اول آن با اعداد n ,... ,۲ ,۱ پر شده است، اگر مطابق جدول زیر با شروع از سطر اول هر سطر را یک واحد به راست انتقال دهیم و عدد خارج شده را در اولین خانه قرار دهیم و این کار را برای تمامی سطرها انجام دهیم، در نهایت یک مربع لاتین **چرخشی** خواهیم داشت.

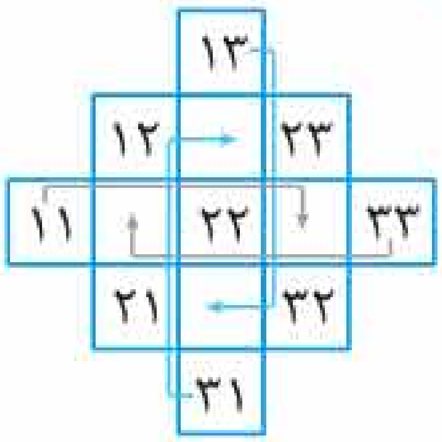
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 \end{bmatrix}$$

۲ مطابق دو جدول زیر، برای شروع، چینش در ردیف‌های موازی با قطر اصلی، یکی از جدول‌ها را با اعداد یکسان پر می‌کنیم و در دیگری هر ردیف را از ۱ تا n در همان درایه‌ها به ترتیب قرار می‌دهیم.





۳ اعداد درایه‌ها را نظیر به نظیر تلفیق کرده و در جدول مطابق شکل زیر قرار می‌دهیم.



۴ اعداد موجود در درایه‌های خارج مربع را، مطابق شکل به دورترین خانهٔ خالی در سطر یا ستون خودش منتقل می‌کنیم.

۱۲	۳۱	۲۳
۳۳	۲۲	۱۱
۲۱	۱۳	۳۲

۵ مربع به دست آمده را به دو مربع لاتین متعامد تبدیل می‌کنیم. ارقام سمت چپ را در مربع لاتین اول و ارقام سمت راست را در مربع لاتین دوم می‌نویسیم.

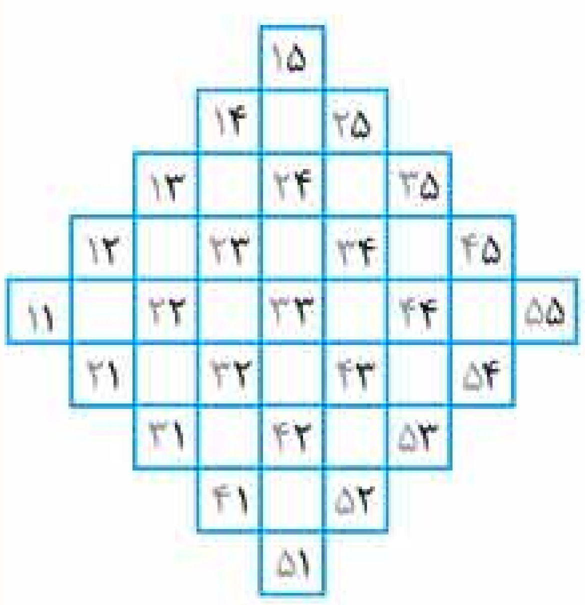
۲	۱	۳
۳	۲	۱
۱	۳	۲

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

تست **با توجه به روش ساخت مربع‌های لاتین متعامد از مرتبهٔ ۵، مجموع درایه‌های a_{21}، a_{22} کدام عدد می‌تواند باشد؟**

۱) ۹۶ ۲) ۱۰۰ ۳) ۲۲ ۴) ۱۱۰

پاسخ **گزینهٔ «۲»** ابتدا جدول تلفیقی مرتبهٔ ۵ را تشکیل می‌دهیم، سپس به کمک روش ساخت مربع‌های لاتین مرتبهٔ فرد، به جدول سمت راست می‌رسیم:



a_{21}
a_{22}

۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵
۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳

بنابراین $a_{21}+a_{22}=100$ است.

آزمون جامع «۱»

۱. از درستی اطلاعات زیر، کدام نتیجه حاصل می‌شود؟

«علی به حسن یا محمود رأی می‌دهد.» «اگر علی به محمود رأی دهد، حتماً در اداره بوده است» «اگر علی به حسن رأی دهد، در اداره نبوده است.» «علی به محمود رأی نمی‌دهد.»

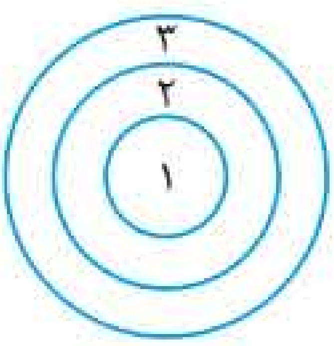
۱) علی به حسن رأی می‌دهد. ۲) علی در اداره بوده است.

۳) علی در اداره نبوده است. ۴) نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت.

۲. برای دو مجموعهٔ A و B داریم $A=\{xy, ۱۳\}$ و $B=\{x^۲+y^۲, ۶\}$ و $A\times B=B\times A$. در این صورت حاصل $x^۲-y^۲$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲۵− ۳) ۲۵+ ۴) ۶

۳. احتمـال برخـورد دارت در ناحیـهٔ kاُم در صـفحهٔ مقابـل، سـه برابـر ناحیهٔ $(k-1)$اُم است. احتمال آن‌که از ۳ پرتاب، دقیقاً دو تا به ناحیهٔ دوم برخورد کند، کدام است؟ (دارت حتماً به صفحه برخورد می‌کند.)



۱) $\frac{۹۰}{۲۱۹۷}$ ۲) $\frac{۲۷۰}{۲۱۹۷}$

۳) $\frac{۹۰}{۱۶۹}$ ۴) $\frac{۲۷}{۱۶۹}$

۴. در یک تیم والیبال با ۱۴ بازیکن، قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر بدانیم قد امیر از بابک بلندتر است، با کدام احتمال بابک نفر چهارم از نظر قد است؟ (در مورد قد بازیکن‌ها هیچ اطلاعی نداریم.)

۱) $\frac{۳}{۹۱}$ ۲) $\frac{۴}{۹۱}$ ۳) $\frac{۲}{۴۹}$ ۴) $\frac{۱}{۴۹}$

۵. اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، به طـوری کـه $P(A\cap B)=۰/۲$ و $P(A'\cap B)=۰/۳$ اسـت. مقدار $P(A'\cup B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱۱}{۱۵}$ ۳) $\frac{۲۹}{۳۰}$ ۴) $\frac{۸}{۱۵}$

۶. یک شرکت بیمه برای تعیین حق بیمه شخص ثالث در سال آینده، نمونه‌ای از خسارت‌های پرداخـت شدهٔ امسال را جمع‌آوری نموده و اطلاعات مربوط به معیارهای گرایش به مرکز را در قالب جـدول زیـر ارائه کرده است. به نظر شما مدیر شرکت کدام معیار گرایش به مرکز را به منظور تعیین حـق بیمـه در سال آینده در نظر بگیرد تا این‌که شرکت ضرر نکند؟

معیار	میانگین	میانه	مُد
مقدار معیار	۱۵	۴۲/۲	۹۰

۱) میانه ۲) مُد ۳) میانگین ۴) تفاوت چندانی ندارد.

۷. شش دادهٔ آماری با میانگین ۱۲ و واریانس ۶ با ۹ دادهٔ دیگر با میانگین ۱۴ و واریانس ۴ ترکیب شده‌اند. انحراف معیار گروه جدید، کدام است؟ (کنکور ریاضی خارج ۹۷)

۱) ۲/۲ ۲) ۲/۳ ۳) ۲/۴ ۴) ۲/۵

فرمول‌نامه

مبانی ریاضیات

۱. نقیض p :	$\sim p$
۲. ترکیب فصلی:	$p \vee q$
۳. ترکیب عطفی:	$p \wedge q$
۴. ترکیب شرطی:	$p \Rightarrow q$
۵. عکس ترکیب شرطی:	$q \Rightarrow p$
۶. عکس نقیض ترکیب شرطی:	$\sim q \Rightarrow \sim p$
۷. ترکیب دوشرطی:	$p \Leftrightarrow q$
۸. هم‌ارزی شرطی دوشرطی:	$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
۹. دمورگان:	$\begin{cases} \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \end{cases}$
۱۰. تبدیل ترکیب شرطی به فصلی:	$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
۱۱. نقیض ترکیب شرطی:	$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
۱۲. نقیض ترکیب دو شرط:	$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$
۱۳. جابه‌جایی:	$p \wedge q \equiv q \wedge p$
	$p \vee q \equiv q \vee p$
۱۴. شرکت‌پذیری:	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
۱۵. توزیع‌پذیری $\vee$ نسبت به $\wedge$ و برعکس:	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
۱۶. قانون جذب:	$\begin{cases} p \wedge (q \vee p) \equiv p \\ p \vee (q \wedge p) \equiv p \end{cases}$
۱۷. قانون حذف عاطف:	$p \wedge q \Rightarrow p \equiv T$ (T: درست)
۱۸. قانون ادخال فاصل:	$p \Rightarrow p \vee q \equiv T$