به نام پروردگار مهربان

جمع‌بندی

دهم • یازدهم • دوازدهم

حسابان

مرور و جمع‌بندی کنکور در ۲۴ ساعت

• سیروس نصیری

• مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی

مهروماه

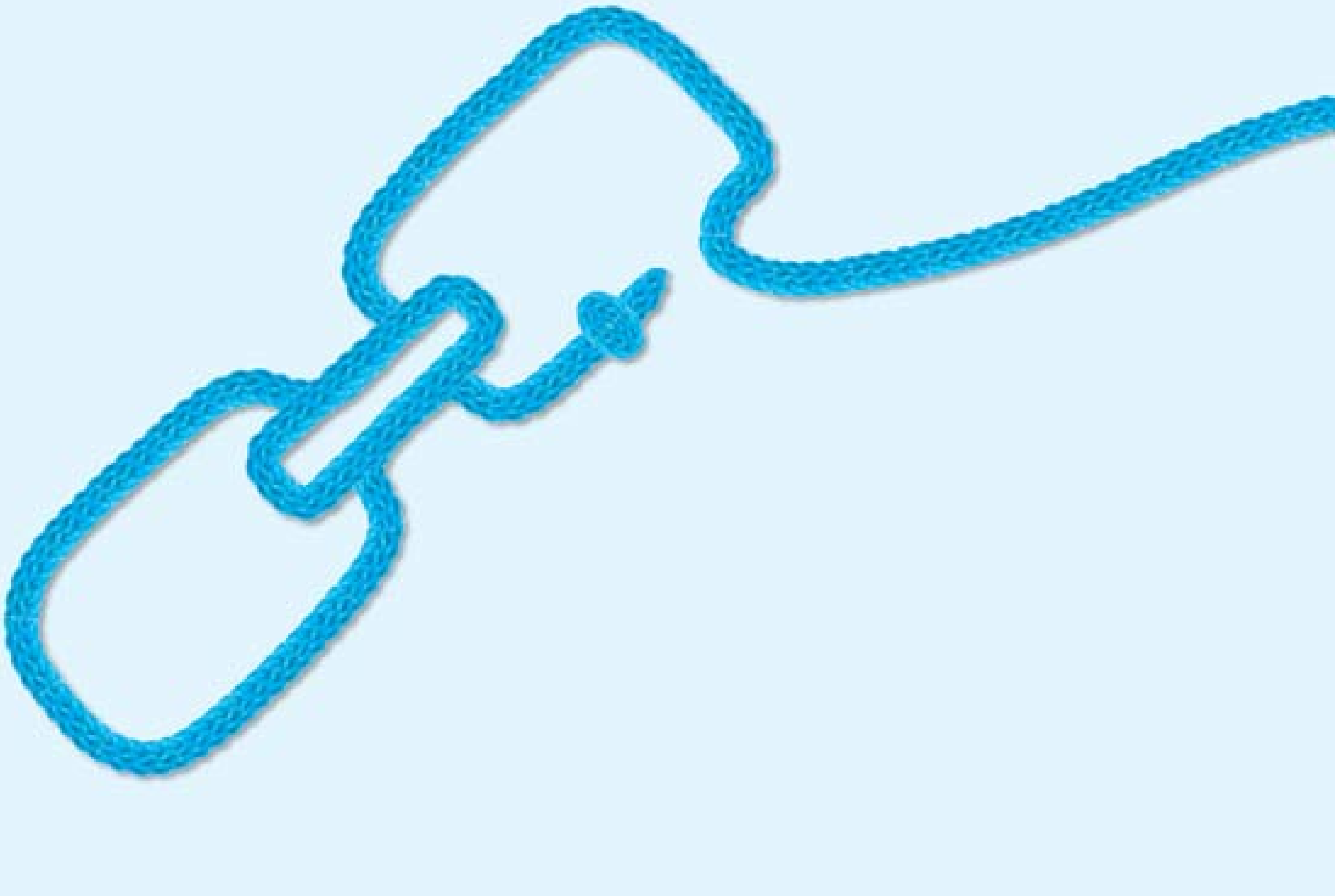
فهرست

فصل ۱

اتحاد، معادله و هندسه تحلیلی

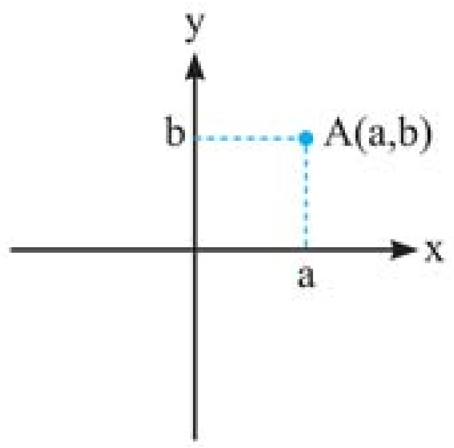
بدون شک این فصل پایه و اصول یادگیری حسابان است. مباحثی مثل اتحادها و معادلات علاوه بر این‌که جزء مباحث مســتقل هستند، پیش‌نیاز سایر مباحث نیز می‌باشند، البته تعداد تســت‌های مستقل از این فصل در کنکور چشم‌گیر نیست اما از این مباحث تقریباً در کل حسابان و ریاضی پایه دیده می‌شود.

تعداد سؤالات احتمالی در کنکور: ۲



۳ هندسهٔ تحلیلی

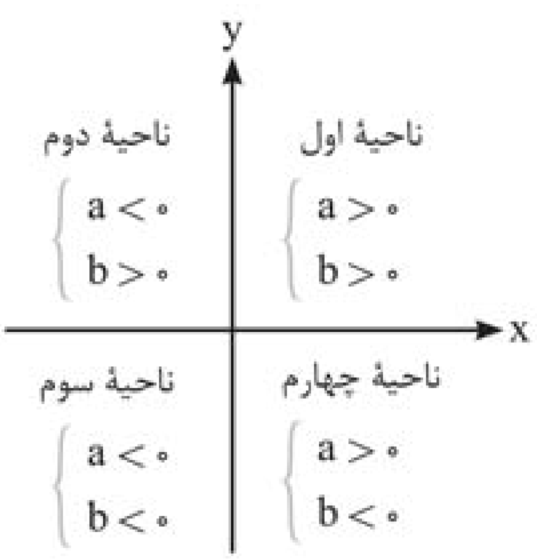
محورهای مختصات



دو محور افقی و عمودی به‌صورت شکل مقابل محورهای مختصات (محورهای دکارتی) نام دارند که اصطلاحاً به آن فضای دوبعدی می‌گوییم. هر نقطه مانند A را به‌صورت $A(a,b)$ در شکل نمایش می‌دهیم.

علامت‌ها

اگر نقطهٔ $A(a,b)$ نقطه‌ای در صفحهٔ xoy باشد، آن‌گاه علامت‌ها در نواحی چهارگانه به‌صورت زیر است.



معادلهٔ خط (مدل ۱)

معادلهٔ هر خط با یک نقطه مانند $A(x_۰,y_۰)$ روی آن و شیب m تعیین می‌شود و معادلهٔ آن به‌صورت روبه‌رو است: $y-y_۰=m(x-x_۰)$

معادلهٔ خط (مدل ۲)

اگر دو نقطهٔ متمایز $A(x_۰,y_۰)$ و $B(x_۱y_۱)$ از یک خط معلوم باشد به راحتی می‌توان معادلهٔ آن را به کمک شیب $(m=\dfrac{y_۱-y_۰}{x_۱-x_۰})$ آن نوشت: $y-y_۱=\dfrac{y_۱-y_۰}{x_۱-x_۰}(x-x_۱)$ یا $y-y_۰=\dfrac{y_۱-y_۰}{x_۱-x_۰}(x-x_۰)$

« **رسم خط:** به کمک دو نقطه از خط می‌توان آن را رسم کرد.

نکته: برای یافتن محل برخورد هر خط با محور xها کافی است به‌جای y عدد صفر قرار دهیم و هم‌چنین برای یافتن محل برخوردش با محور yها کافی است به‌جای x عدد صفر قرار دهیم.

تست **خط گذرا از دو نقطهٔ (۰,۷) و (۳,۱) محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟**

۱) $x=۷$ ۲) $x=-۷$ ۳) $x=\dfrac{۷}{۲}$ ۴) $x=-\dfrac{۷}{۲}$

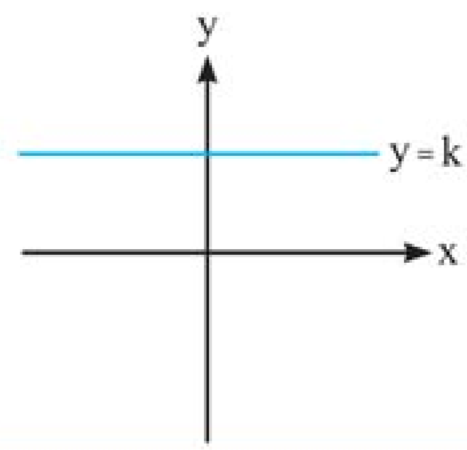
پاسخ **گزینهٔ «۳»** شیب خط گذرا از دو نقطهٔ (۰,۷) و (۳,۱) برابر است با: $m=\dfrac{۷-۱}{۰-۳}=\dfrac{۶}{-۳}=-۲$

حال معادلهٔ خط را می‌نویسیم: $y-۷=-۲(x-۰) \Rightarrow y=-۲x+۷$

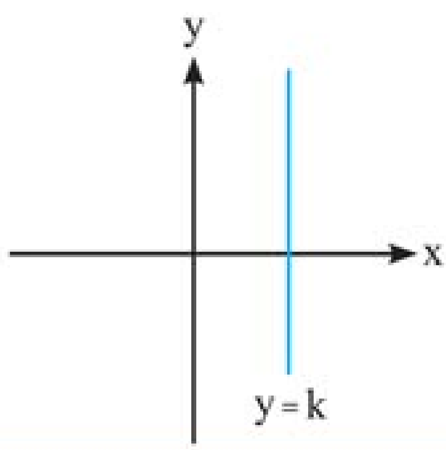
و برای به‌دست آوردن محل تلاقی خط با محور x ها، در معادلهٔ خط y را صفر قرار می‌دهیم و x را محاسبه می‌کنیم: $y=-۲x+۷ \xrightarrow{y=۰} -۲x+۷=۰ \Rightarrow x=\frac{۷}{۲}$

خطوط خاص

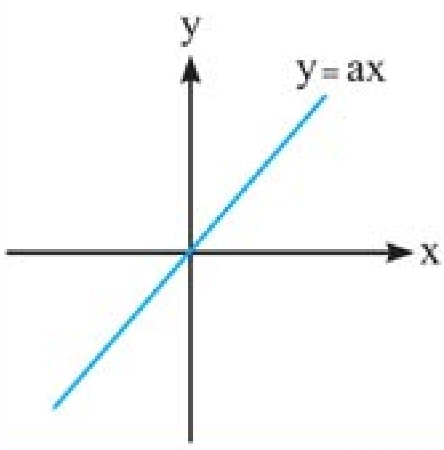
۱ خطوط موازی محور x ها:



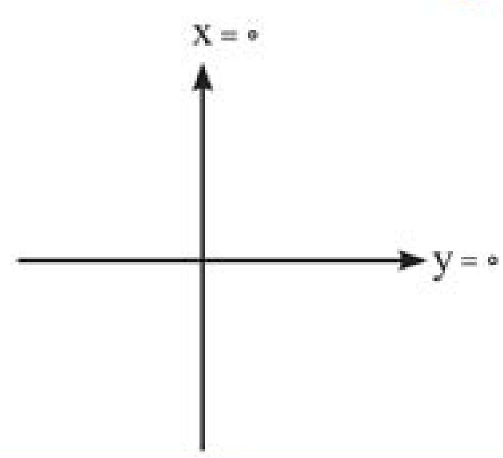
۲ خطوط موازی محور y ها:



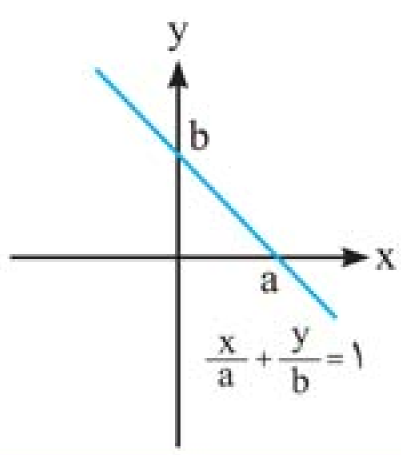
۳ خط گذرا از مبدأ:



۴ محور x ها و y ها:



۵ خطوط برخوردکننده با محورهای مختصات به غیر از مبدأ:



تذکر برای یافتن محل برخورد دو خط متقاطع آن‌ها را در یک دستگاه دو معادله دو مجهول حل می‌کنیم.

مساحت مثلث با داشتن سه رأس

اگر $A(a,b)$ و $B(c,d)$ و $C(e,f)$ سه رأس یک مثلث باشند، با محاسبهٔ دترمینان متوالی می‌توان مساحت را حساب کرد.

$$\begin{vmatrix} a & c & e & a \\ b & d & f & b \end{vmatrix} = (ad-bc)+(cf-de)+(eb-af)=M$$

آن‌گاه مساحت مثلث $S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{|M|}{۲}$ می‌باشد.

تست مساحت مثلث با رئوس $A(۴,۰)$ ، $B(-۱,۴)$ و $C(-۴,-۱)$ کدام است؟

۱) ۱۶/۵ ۲) ۱۷/۵ ۳) ۱۸/۵ ۴) ۱۹/۵

پاسخ گزینهٔ «۳»

$$M=\begin{vmatrix} ۴ & -۱ & -۴ & ۴ \\ ۰ & ۴ & -۱ & ۰ \end{vmatrix}=(۱۶-۰)+(۱+۱۶)+(۰+۴)=۳۷$$

$$S=\frac{|M|}{۲}=\frac{۳۷}{۲}=۱۸/۵$$

حالت‌های خاص معادلهٔ درجهٔ دوم

❶ $a+b+c=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

❷ $a+c=b \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-\dfrac{c}{a} \end{cases}$

❸ $ax^2-(1+a^2)x+a=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=a \\ x_2=\dfrac{1}{a} \end{cases}$

❹ $ax^2+(1+a^2)x+a=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-a \\ a_2=-\dfrac{1}{a} \end{cases}$

تست **یکی از ریشه‌های معادلهٔ $(2m+3)x^2+(3-2m)x=6$ کدام است؟**

۱) -1 ۲) $\dfrac{-6}{2m+3}$ ۳) $\dfrac{6}{3-2m}$ ۴) $\dfrac{6}{2m+3}$

پاسخ **گزینهٔ«۲»**

$$(2m+3)x^2+(3-2m)x-6=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{-6}{2m+3} \end{cases}$$

حالت‌های ناقص

الف) $b=0 \Rightarrow ax^2+c=0 \Rightarrow x^2=\dfrac{-c}{a} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}} & ; \quad ac<0 \\ \text{ریشه حقیقی ندارد} & ; \quad ac>0 \end{cases}$

- شرط این‌که معادلهٔ درجهٔ دومی، دو ریشهٔ قرینه حقیقی داشته باشد این است که $b=0$ و $ac<0$ باشد.

ب) $c=0 \Rightarrow ax^2+bx=0 \Rightarrow x(ax+b)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\dfrac{b}{a} \end{cases}$

- اگر در معادلهٔ درجهٔ دوم $c=0$ باشد یکی از ریشه‌ها صفر است و بالعکس.

تست **یکی از ریشه‌های معادلهٔ $(k-1)x^2+(k^3+k)x+k=2$ برابر صفر است، ریشهٔ دیگر برابر است با:**

۱) 8 ۲) -8 ۳) 10 ۴) -10

پاسخ **گزینهٔ«۴»** اگر یک ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ برابر صفر باشد می‌توان نتیجه گرفت که $c=0$ است و ریشهٔ دیگر $-\dfrac{b}{a}$ است پس:

$$(k-1)x^2+(k^3+k)x+k-2=0 \xrightarrow{x_1=0} c=0$$

$$\Rightarrow k=2 \Rightarrow x_2=-\frac{b}{a}=\frac{-(k^3+k)}{k-1} \xrightarrow{k=2} x_2=-10$$

تجزیه به کمک اتحادها

اگر معادلهٔ درجهٔ دوم را بتوانیم تجزیه کنیم، یعنی اعداد مناسب و راحتی داشته باشیم از تجزیه استفاده می‌کنیم، اما این روش همیشه میسر نیست.

تجزیه به کمک Δ و محاسبهٔ ریشه

اگر ریشه‌های معادله را داشته باشیم آن‌گاه:

الف) $\Delta > 0 \Rightarrow ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

ب) $\Delta = 0 \Rightarrow ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2$

پ) $\Delta < 0 \Rightarrow ax^2+bx+c \Rightarrow$ تجزیه نمی‌شود

روش مربع کامل کردن برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow (x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

روابط بین ریشه‌ها

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشند، در این صورت بدون حل معادله داریم:

۱) $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

۲) $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

۳) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{S}{P}$

۴) $\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$

۵) $\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$

۶) $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{S^2-4P}$

۷) $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}$ ، $\alpha,\beta>0$

۸) $|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}|=\sqrt{S-2\sqrt{P}}$ ، $\alpha,\beta>0$

تست **یکی از ریشه‌های معادلهٔ $3x^2-mx+m=0$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشهٔ معادله کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) -4 ۴) -5

پاسخ گزینهٔ «۱»

$$3x^2-mx+m=0 \xrightarrow{x=2} 12-2m+m=0 \Rightarrow m=12$$

$$\Rightarrow 3x^2-12x+12=0 \Rightarrow x_1+x_2=-\frac{b}{a}=4$$

در معادلهٔ $x^2-6x+4=0$ مقدار $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$ کدام است؟(x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند.)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

پاسخ گزینهٔ «۲»

$$x^2-6x+4=0 \Rightarrow S=6, P=4$$

$$A=\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}=\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}+\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}=\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1x_2}}=\frac{S}{\sqrt{P}}=\frac{6}{2}=3$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

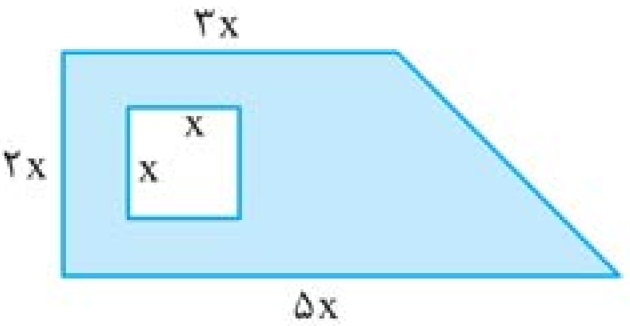
۴۰. به ازای کدام k معادلهٔ $5x^2+(k^2-9)x+2k=6$ دارای ریشهٔ مضاعف صفر است؟

۱) ۳ ۲) ۳− ۳) ۳± ۴) $\varnothing$

۴۱. دو برابر مجموع مربعات دو عدد مثبت زوج متوالی برابر ۲۰۰ است، عدد کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۲

۴۲. در شکل مقابل مربع درون ذوزنقه قائم‌الزاویه قرار دارد، اگر مساحت قسمت هاشورخورده برابر ۶۳ باشد، مقدار x کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۲
۳) ۴ ۴) ۵

۴۳. بین دانش‌آموزان یک کلاس لیگ (تیمگان) شطرنج برگزار می‌شود. هر نفر یک بازی با نفرات دیگر انجام می‌دهد. اگر کل بازی‌ها ۴۵ تا باشد، تعداد افراد این کلاس چند نفر است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۴۴. در حل معادلهٔ $x^2+x=3$ به روش مربع کامل معادله را به صورت $(x+a)^2=b+1$ تبدیل کرده‌ایم، مقدار $a+b$ چقدر است؟

۱) ۳/۷۵ ۲) ۴/۷۵ ۳) ۱/۷۵ ۴) ۲/۷۵

۴۵. اگر α ریشهٔ معادلهٔ $3x^2+x-2=0$ باشد، حاصل عبارت $A=\frac{3\alpha^2}{\alpha-2}-(3\alpha^2+\alpha)^2$ کدام است؟

۱) ۲۶− ۲) ۱۷− ۳) ۱۰− ۴) ۵−

۴۶. قدرمطلق تفاضل مکعبات ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-3x=-1$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{8}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{5}{8}$

۴۷. بین ریشه‌های معادلهٔ $x^2-mx-8=0$ رابطهٔ $\alpha=\beta^2$ برقرار است، مقدار m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲− ۳) ۴ ۴) ۴−

۴۸. به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^2+3x+m^2=2$، معکوس یکدیگرند؟

۱) ۲ ۲) ۱− ۳) ۱ ۴) ۲ (تجربی خارج ۹۰)

۴۹. به ازای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2-(m+3)x+5=0$، برابر ۶ می‌باشد؟ (تجربی ۹۳)

۱) $-\frac{9}{5}$ ۲) ۱ ۳) ۱ و $-\frac{9}{5}$ ۴) $\frac{9}{5}$ و ۱−

۵۰. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x+1=0$ باشند، حاصل $\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{6}$ ۴) $\sqrt{7}$

پاسخ‌نامه تشریحی

۱. گزینهٔ «۳»

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$\xrightarrow[ab=\frac{3}{4}]{a+b=2}(2)^3=a^3+b^3+3\times\frac{3}{4}\times2\Rightarrow a^3+b^3=8-\frac{9}{2}=\frac{7}{2}$$

۲. گزینهٔ «۴»

به کمک دو اتحاد $(a+b)^2$ و $(a-b)^2$ می‌توان ثابت کرد که $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ و با انتخاب $a=x$ و $b=\frac{1}{x}$ داریم:

$$(x+\frac{1}{x})^2-(x-\frac{1}{x})^2=4\times x\times\frac{1}{x}=4\Rightarrow(x+\frac{1}{x})^2=3+4=7$$

۳. گزینهٔ «۲»

به کمک اتحاد $(a+b)^3$ داریم:

$$(x+\frac{2}{x})^3=x^3+3x^2.\frac{2}{x}+3x.(\frac{2}{x})^2+(\frac{2}{x})^3$$

$$=x^3+6x+\frac{12}{x}+\frac{8}{x^3}\Rightarrow A=6,B=12,C=8$$

$$\sqrt{ABC}=\sqrt{6\times12\times8}=\sqrt{6\times6\times2\times8}=6\times4=24$$

۴. گزینهٔ «۳»

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)\Rightarrow(a+b)^3=(a^3+b^3)+3(a^2b+b^2a)$$

$$ab^2+ba^2=1\Rightarrow(a+b)^3=5+3(1)=8\Rightarrow(a+b)=2$$

$$ab(a+b)=1\xrightarrow{a+b=2}ab=\frac{1}{2}\Rightarrow a+b+4ab=2+2=4$$

۵. گزینهٔ «۱»

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\Rightarrow a^3+3a^2b+b^3+3ab^2=1$$

$$\Rightarrow(a+b)^3=1\Rightarrow a+b=1\Rightarrow(a+b)^{1398}=1$$

۶. گزینهٔ «۱»

سمت راست تساوی را مرتب می‌کنیم تا شبیه سمت چپ شود.

$$\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}=\frac{Ax^2-Ax+A+Bx^2+Cx+Bx+C}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-A+C+B)x+A+C}{x^3+1}$$

اگر جواب به‌دست آمده را با سمت چپ مقایسه کنیم داریم:

$$\begin{cases}A+B=1\\-A+B+C=1\end{cases}\xrightarrow{(-)}2A-C=0\Rightarrow C=2A$$

$$A+C=3\Rightarrow A+2A=3\Rightarrow A=1\Rightarrow C=2\Rightarrow B=0$$

در نتیجه:

$$A+C+B=3$$

فصل سوم

ریشه، توان و رادیکال

۱ ریشه و توان

هر عدد مثبت دارای دو ریشه است که قرینه یکدیگر هستند. اگر عدد مثبت مورد نظر را A در نظر بگیریم آن‌گاه ریشه‌های دوم عدد A برابر $+\sqrt{A}$ و $-\sqrt{A}$ می‌باشند.

نکته‌ها:

۱ اگر A عددی منفی باشد آن‌گاه ریشهٔ دوم و چهارم A تعریف نمی‌شود (بی‌معنی است). برای هر عدد حقیقی A ریشهٔ سوم آن برابر $\sqrt[3]{A}$ و ریشهٔ پنجم آن $\sqrt[5]{A}$ می‌باشد.

۲ اگر $n \geq 2$ و یک عدد طبیعی باشد، b را ریشه nام عدد a می‌نامیم هرگاه $b^n = a$ باشد.

۳ اگر $\sqrt[n]{A}$ عدد گویا نشود در نتیجه گنگ است. بنابراین $\sqrt[n]{A}$ در صورتی که تعریف شود، بین دو عدد صحیح متوالی قرار دارد و می‌توان مقدار تقریبی آن را که در دنیای واقعی پرکاربرد است را محاسبه کنیم.

مقایسه اعداد با ریشه‌ها و توان‌های خود

۱ $a > 1 \Rightarrow \begin{cases} a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a} > \dots \\ a < a^2 < a^3 < a^4 < \dots \end{cases}$

۲ $0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \dots \\ a > a^2 > a^3 > a^4 > \dots \end{cases}$

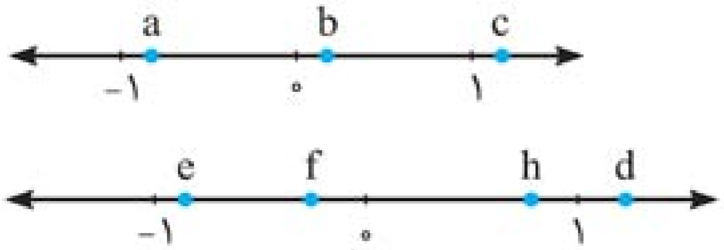
۳ $a = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{a} = \sqrt[3]{a} = \dots = \sqrt[n]{a} \\ a = a^2 = a^3 = \dots = a^n \end{cases}$

۴ $a = -1 \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt[3]{a} = \sqrt[5]{a} = \dots = \sqrt[2n+1]{a} \\ a = a^3 = a^5 = \dots = a^{2n+1} \end{cases}$

۵ $a < -1 \Rightarrow \begin{cases} a < \sqrt[3]{a} < \sqrt[5]{a} < \dots \\ a > a^3 > a^5 > \dots \end{cases}$

۶ $-1 < a < 0 \Rightarrow \begin{cases} a > \sqrt[3]{a} > \sqrt[5]{a} > \dots \\ a < a^3 < a^5 < \dots \end{cases}$

تست **اگر اعداد محور پایینی ریشه‌های سوم اعداد محور بالایی باشند، در این صورت کدام رابطه زیر قطعاً نادرست است؟**



۱) $\sqrt[3]{a} = e$

۲) $\sqrt[3]{b} = h$

۳) $\sqrt[3]{c} = d$

۴) $\sqrt[3]{a} = f$

پاسخ **گزینهٔ «۴»** اگر $-1 < a < 0$ باشد، در این صورت $a > \sqrt[3]{a}$ است.

قوانین رادیکال‌ها

۱ $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ (اگر n زوج باشد، آن‌گاه a و b باید نامنفی باشند)

۲ $\sqrt[k]{a^m}=(\sqrt[k]{a})^m$ (اگر k زوج باشد، آن‌گاه a باید مثبت باشد)

۳ $\sqrt[n]{a^n}=a$ (n فرد است)

۴ $\sqrt[n]{a^n}=|a|$ (n زوج است)

۵ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (اگر n زوج باشد، آن‌گاه a باید نامنفی و b باید مثبت باشد)

تست اگر $\sqrt[۶]{۸}=\sqrt[x+۱]{۲}$ و $۲=\sqrt[x+۳]{۱۶^{y-۳}}$ باشد، مقدار y چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ «۴»

$\sqrt[x+۱]{۲}=\sqrt[۶]{۲^۳}\Rightarrow x+۱=۲\Rightarrow x=۱$

$\sqrt[x+۳]{۱۶^{y-۳}}=۲\Rightarrow\sqrt[۴]{۱۶^{y-۳}}=۲\Rightarrow y-۳=۱\Rightarrow y=۴$

۲ توان‌های گویا

برای هر عدد طبیعی $n\geq ۲$، توان $\frac{۱}{n}$ عدد مثبت a را به صورت مقابل تعریف می‌کنیم: $a^{\frac{۱}{n}}=\sqrt[n]{a}$

توجه کنید که اگر $a<۰$ باشد $a^{\frac{۱}{n}}$ تعریف نمی‌شود.

در حالت کلی‌تر هرگاه $a>۰$ باشد برای هر دو عدد طبیعی m و n، توان کسری و غیر صحیحِ $\frac{m}{n}$ برای a را چنین تعریف می‌کنیم: $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

و همچنین قوانین زیر برای توان‌های گویا نیز برقرار است $(a,b>۰)$:

۱ $a^r\times a^s=a^{r+s}$ ۲ $(a^r)^s=a^{rs}$ ۳ $(ab)^r=a^rb^r$

نکته: اگر $a>۰$ و همچنین n، m و k اعداد طبیعی باشند، آن‌گاه:

۱ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

۲ $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$

تست حاصل $\sqrt[۳]{۳\sqrt{۳\sqrt{۳}}}$ برابر $۳^{b-۱}$ است، $۱۲b$ کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۱۸ ۳) ۱۷ ۴) ۱۶

پاسخ گزینهٔ «۱»

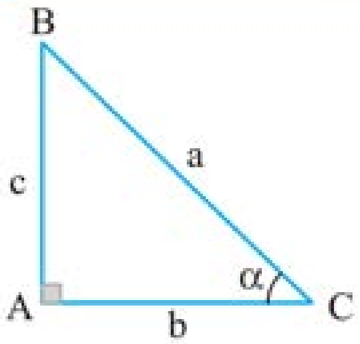
$\sqrt[۳]{۳\sqrt{۳\sqrt{۳}}}=\sqrt[۳]{۳\sqrt{\sqrt{۳^۲\times ۳}}}=\sqrt[۳]{۳\sqrt[۴]{۳^۳}}$

$=\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{۳^۴\times ۳^۳}}=\sqrt[۱۲]{۳^۷}=۳^{\frac{۷}{۱۲}}\Rightarrow b-۱=\frac{۷}{۱۲}\Rightarrow b=\frac{۷}{۱۲}+۱=\frac{۱۹}{۱۲}\Rightarrow ۱۲b=۱۹$

فصل پنجم

مثلثات

۱ نسبت‌های مثلثاتی



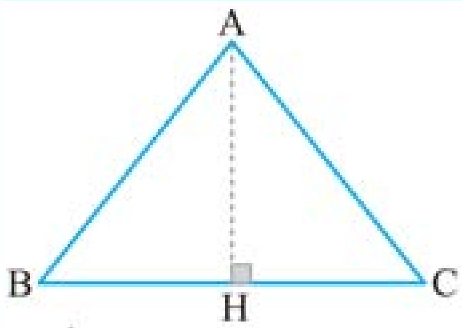
مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC\ (\hat{A}=۹۰^\circ)$ را در نظر بگیرید.
اگر زاویهٔ حاده $\hat{C}$ برابر α باشد در این صورت نسبت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت زاویهٔ α به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\cos\alpha=\frac{\text{طول ضلع مجاور }\alpha}{\text{وتر}}=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a} \qquad \sin\alpha=\frac{\text{طول ضلع مقابل }\alpha}{\text{وتر}}=\frac{AB}{BC}=\frac{c}{a}$$

$$\cot\alpha=\frac{\text{طول ضلع مجاور }\alpha}{\text{طول ضلع مقابل }\alpha}=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c} \qquad \tan\alpha=\frac{\text{طول ضلع مقابل }\alpha}{\text{طول ضلع مجاور }\alpha}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$$

تست در مثلث **ABC** داریم $a=BC=۸$
مقدار عددی $AB\cos\hat{B}+AC\cos\hat{C}$ چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ۴
۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۸\sqrt{۳}$



پاسخ گزینهٔ «۱»

$$A\overset{\triangle}{B}H:\cos\hat{B}=\frac{BH}{AB}\Rightarrow BH=AB\cos\hat{B} \quad ①$$

$$A\overset{\triangle}{H}C:\cos\hat{C}=\frac{CH}{AC}\Rightarrow CH=AC\cos\hat{C} \quad ②$$

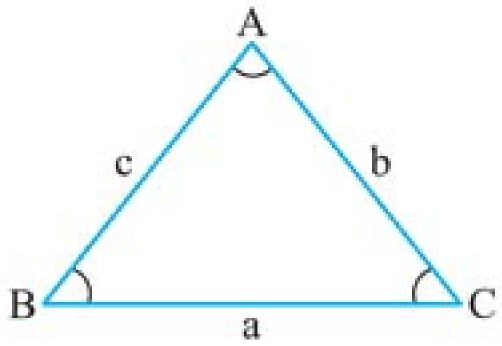
طرفین رابطه ① و ② را جمع می‌کنیم.

$$\underbrace{BH+CH}_{BC}=AB\cos\hat{B}+AC\cos\hat{C}\Rightarrow AB\cos\hat{B}+AC\cos\hat{C}=۸$$

» جدول زوایای اصلی

زاویه / نسبت	۳۰°	۴۵°	۶۰°
sin	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
cos	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
tan	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
cot	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

مساحت مثلث



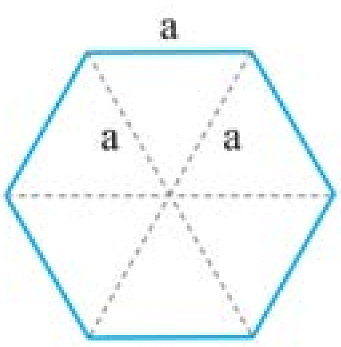
در هر مثلث مانند ABC با معلوم بودن دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها مساحت به‌دست می‌آید.

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A} = \frac{۱}{۲}ac\sin\hat{B} = \frac{۱}{۲}ab\sin\hat{C}$$

نکته: با تقسیم رابطهٔ بالا بر abc، قانون سینوس‌ها به صورت زیر برقرار است:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$$

مساحت شش ضلعی منتظم



شش ضلعی منتظم از شش مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است. اگر طول ضلع را a فرض کنیم آن‌گاه مساحت شش ضلعی منتظم به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$S = ۶\times\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$$

تست قطر کوچک شش ضلعی منتظم نصف توان دوم قطر بزرگ آن است. مساحت شش ضلعی منتظم چقدر است؟

۱) $\frac{۸}{۹}\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۹}\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۸}\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۹}{۸}\sqrt{۳}$

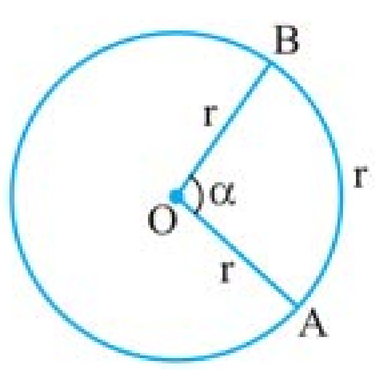
پاسخ گزینهٔ «۴» اگر ضلع ۶ ضلعی منتظم را a فرض کنیم، قطرهای کوچک و بزرگ به ترتیب $a\sqrt{۳}$ و ۲a می‌باشند.

$$a\sqrt{۳} = \frac{۱}{۲}(۲a)^۲ \Rightarrow a\sqrt{۳} = ۲a^۲ \Rightarrow a = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow S = \frac{۳}{۲}a^۲\sqrt{۳} = \frac{۳}{۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲\sqrt{۳} = \frac{۹}{۸}\sqrt{۳}$$

واحدهای اندازه‌گیری زاویه

دو واحد معروف برای اندازه‌گیری زاویه، درجه و رادیان هستند.

- **درجه:** اگر محیط یک دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم هر کدام از کمان‌های ساخته شده ۱ درجه خواهد بود. یعنی اندازهٔ هر کمان $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دایره است.



- **رادیان:** اگر روی محیط دایره کمانی به اندازه شعاع دایره جدا کنیم در این صورت زاویه مرکزی روبه‌رو به این کمان برابر ۱ رادیان خواهد بود. بنابراین یک دایرهٔ کامل ۲π رادیان خواهد بود.

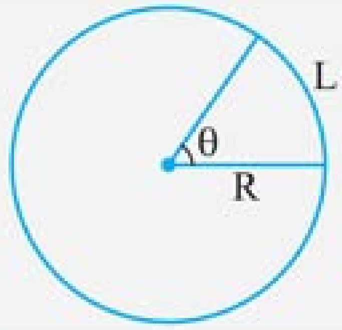
$$|\widehat{AB}| = r \Rightarrow \alpha = ۱^{rad}$$

تبدیل واحدهای اندازه‌گیری زاویه: اگر زاویه α برحسب درجه را با D و برحسب رادیان را R در نظر بگیریم آن‌گاه:

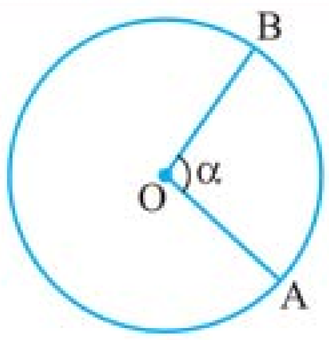
$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

تذکر 1^{rad} تقریباً $57/3°$ می‌باشد.

نکته: توجه داشته باشید که اگر در یک دایره زاویه θ برحسب رادیان باشد آن‌گاه $L = R\theta$ خواهد بود که L طول کمان ایجاد شده روی محیط دایره به کمک زاویه θ می‌باشد.



تست **با نخی به اندازهٔ ۲۰ واحد دایره‌ای مطابق شکل ساخته‌ایم. اگر طول کمان AB برابر ۳ باشد، زاویهٔ AOB چند درجه است؟**



۱) $36°$ ۲) $54°$

۳) $48°$ ۴) $72°$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** محیط دایره برابر ۲۰ واحد است پس:

$$2\pi r = 20 \Rightarrow r = \frac{10}{\pi}$$

حال طول کمان را بر حسب α حساب می‌کنیم.

$$L = r\alpha$$

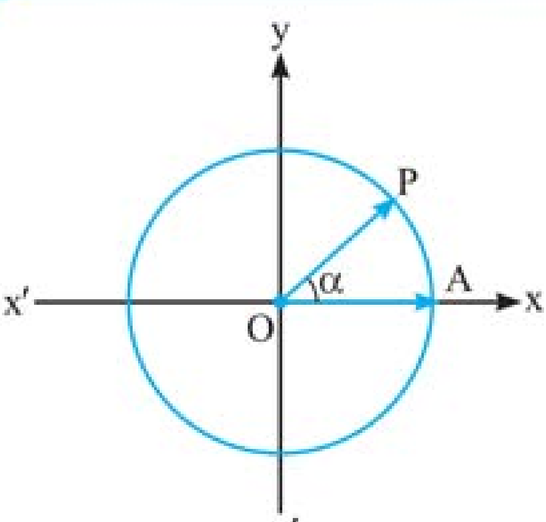
$$3 = \frac{10}{\pi}\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi^{rad}}{10} = \frac{3 \times 180°}{10} = 3 \times 18° = 54°$$

۲ دایرهٔ مثلثاتی

دایره‌ای به شعاع واحد و مرکز مبدأ مختصات را در نظر بگیرید. با دوران پاره خط OA حول نقطهٔ O در جهت عکس عقربه‌های ساعت زاویهٔ α تولید می‌شود. این زاویه را زاویهٔ مثلثاتی مثبت می‌نامیم.

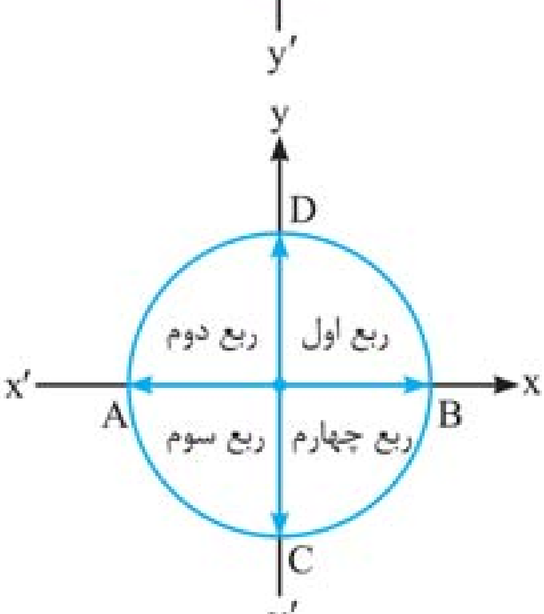
اگر OA در جهت عقربه‌های ساعت بچرخد این زاویه را زاویهٔ منفی مثلثاتی می‌نامیم.

دایره‌ای با مشخصات بالا را یک دایره مثلثاتی می نامیم.



نسبت‌های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی

در دایرهٔ مثلثاتی مقابل که چهار ناحیه (ربع) وجود دارد، محور AB را محور کسینوس‌ها و محور CD را محور سینوس‌ها می‌نامیم.

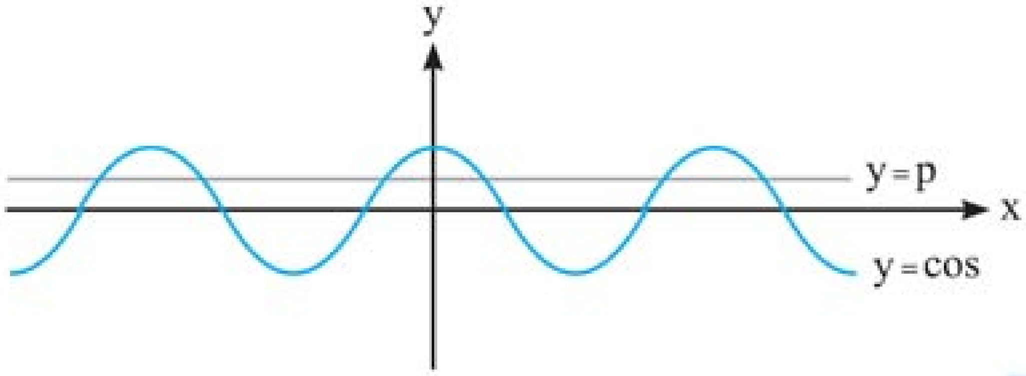


معادلهٔ کسینوسی

هر معادله به صورت $\cos x = p$ را معادلهٔ کسینوسی می نامیم و شرط وجود جواب آن این است که $-۱ \le p \le ۱$ باشد. اگر چنین باشد $p = \cos\alpha$ خواهد بود که α زاویه‌ای معلوم است، در این صورت:

$$\cos x = \cos\alpha \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \alpha \; ; k \in \mathbb{Z}$$

تعبیر هندسی جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos x = p$ طول نقاط برخورد دو تابع $y = \cos x$ و $y = p$ است.



حالات خاص معادلهٔ کسینوسی

۱) $\cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$

۲) $\cos x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi$

۳) $\cos x = -۱ \Rightarrow x = (۲k+۱)\pi$

۴) $\cos^۲ x = \cos^۲ \alpha \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha$

تست جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۲ x - \cos^۲ x = \sin(\frac{۳\pi}{۲} + x)$، به کدام صورت است؟ **(تجربی ۹۱)**

۱) $\frac{k\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$

پاسخ گزینهٔ «۲»

$$\sin^۲ x - \cos^۲ x = \sin(\frac{۳\pi}{۲} + x) \Rightarrow -\cos ۲x = -\cos x \Rightarrow \cos ۲x = \cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + x \Rightarrow x = ۲k\pi \\ ۲x = ۲k\pi - x \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \end{cases} \xrightarrow{\cup} x = \frac{۲k\pi}{۳}$$

معادلهٔ تانژانتی و کتانژانتی

معادلات به صورت $\tan x = p$ و $\cot x = p$ را معادلات تانژانتی و کتانژانتی می‌نامیم. این معادلات برای هر $p \in \mathbb{R}$ جواب دارند. اگر این معادلات به صورت $\tan x = \tan\alpha$ یا $\cot x = \cot\alpha$ باشند جواب آنها به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha \; ; \; k \in \mathbb{Z} \\ \cot x = \cot\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha \; ; \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

نکته: هرگاه جواب‌های کلی یک معادلهٔ مثلثاتی $x = \frac{۲k\pi}{n} + \alpha$ باشد نقاط پایانی جواب‌ها روی دایرهٔ مثلثاتی، یک n ضلعی منتظم پدید می‌آورند. (α حاده)

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۴۰. جواب کلی معادلهٔ $\sin ۴x \cos ۳x + \cos ۴x \sin ۳x = ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۲k\pi}{۷} + \frac{\pi}{۱۴}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۷} - \frac{\pi}{۱۴}$ ۳) $\frac{k\pi}{۷} - \frac{\pi}{۱۴}$ ۴) $\frac{k\pi}{۷} + \frac{\pi}{۱۴}$

۴۱. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{۴}) = \cos(x - \frac{\pi}{۴})$ کدام است؟

۱) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ۲) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\varnothing$

۴۲. مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۴x = \sin^۴ x - \cos^۴ x$، در بازهٔ $[۰,\pi]$، برابر کدام است؟ (ریاضی ۹۵)

۱) $\frac{۷\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۹\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۱۱\pi}{۳}$

۴۳. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{۸}) + \cos(x - \frac{۳\pi}{۸}) = ۱$، در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ برابر کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)

۱) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۷\pi}{۴}$

۴۴. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos(x + \frac{\pi}{۴})\cos(x - \frac{\pi}{۴}) = \frac{۱}{۴}$، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ ۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ ۴) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

۴۵. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{۱ - \tan x}{۱ + \tan x} = \tan ۳x$، به کدام صورت است؟ (ریاضی خارج ۹۴)

۱) $\frac{k\pi}{۴} - \frac{\pi}{۱۶}$ ۲) $\frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۱۶}$ ۳) $\frac{k\pi}{۴} - \frac{\pi}{۸}$ ۴) $\frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۸}$

۴۶. نمودار تابع $y = -۴\cos(\frac{\pi}{۴} - ۳\pi x)$، روی بازهٔ $[-۱,۱]$ در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟ (تجربی ۹۱)

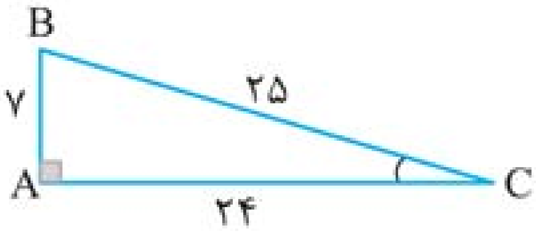
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ‌نامه تشریحی

۱. گزینهٔ «۴»

$$\overset{\triangle}{ABC}: (x+۱۸)^۲ = x^۲ + ۲۴^۲ \Rightarrow x^۲ + ۳۶x + ۳۲۴ = x^۲ + ۵۷۶ \Rightarrow x = ۷$$

پس مثلث به صورت مقابل است:



$$\sin \hat{C} = \frac{۷}{۲۵} \ , \ \cos \hat{C} = \frac{۲۴}{۲۵}$$

$$\Rightarrow \sin \hat{C} + \cos \hat{C} = \frac{۳۱}{۲۵} = ۱ + \frac{۶}{۲۵} = ۱ + \frac{۲۴}{۱۰۰} = ۱/۲۴$$

۷ حد بی‌نهایت

الف) فرض کنید تابع f در هر دو طرف a (به جز احتمالاً خود a) تعریف شده باشد در این حالت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$. یعنی این‌که می‌توانیم مقادیر $f(x)$ را به مقدار دلخواه از هر عدد مثبت بزرگ‌تر به شرط آن‌که x را به اندازهٔ کافی به a نزدیک کرده باشیم.

ب) فرض کنید تابع f در هر دو طرف (به جز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشد در این حالت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ یعنی این‌که می‌توانیم مقادیر $f(x)$ را به مقدار دلخواه از هر عدد منفی کوچک‌تر کنیم به شرط آن‌که x را به اندازهٔ کافی به a نزدیک کرده باشیم.

قضایای حدود نامتناهی

قضیهٔ ۱: اگر n عددی طبیعی باشد داریم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & (\text{زوج } n) \\ -\infty & (\text{فرد } n) \end{cases} \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty \end{cases}$$

قضیهٔ ۲:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty \end{cases} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty \end{cases} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$$

قضیهٔ ۳: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ (به شرط آن‌که تابع $g(x)$ در همسایگی $x=a$ صفر مطلق نباشد) داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l\neq 0}{\text{حدی } 0}=\infty$$

نکته: هر کسری که صورت آن عددی غیر صفر و مخرج آن صفر حدی باشد، به ∞ میل می‌کند. به صورت دقیق‌تر می‌توان گفت:

$$\begin{cases} \dfrac{l>0}{0^+}=+\infty \\ \dfrac{l>0}{0^-}=-\infty \\ \dfrac{l<0}{0^+}=-\infty \\ \dfrac{l<0}{0^-}=+\infty \end{cases}$$

قضیهٔ ۴: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ در این صورت خواهیم داشت: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

قضیهٔ ۵ (اعمال روی حدود نامتناهی): اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$ داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\times g(x)\right)=\begin{cases}+\infty & ;\ l>0\\ -\infty & ;\ l<0\end{cases}\end{cases}$$

همین‌طور اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$ داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\times g(x)\right)=\begin{cases}-\infty & ;\ l>0\\ +\infty & ;\ l<0\end{cases}\end{cases}$$

نکته: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ در این صورت اعمال جبری بین حدود نامتناهی با اعمال جبری حدهای متناهی با یکدیگر متفاوت‌اند؛ یعنی $+\infty$ و $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند.

تست

حاصل $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-2}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ **گزینهٔ «۲»** چون $0<x<1$ می‌باشد، پس $\sqrt[3]{x}>\sqrt{x}$ است، در نتیجه $(\sqrt[3]{x}-\sqrt{x})\to 0^+$ و داریم:

$$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-2}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

اگر $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3-2x^2+x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $+\infty$ ۳) $-\infty$ ۴) صفر

پاسخ **گزینهٔ «۲»**

$$f(x)=\frac{x^3-x^2+x-1}{x^3-2x^2+x}=\frac{x^2(x-1)+(x-1)}{x(x^2-2x+1)}=\frac{(x^2+1)(x-1)}{x(x-1)^2}$$

$$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x^2+1)(x-1)}{x(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2+1}{x(x-1)}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۴۱. حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2}$ کدام است؟

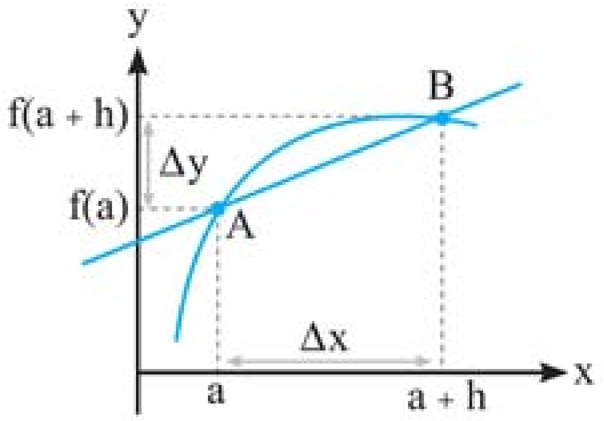
۱) صفر ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۴۲. حد چپ و راست تابع $f(x)=\dfrac{(-1)^{[x]+1}}{x^2-4}$ در $x=2$ به ترتیب کدام است؟

۱) $+\infty\ ,\ +\infty$ ۲) $+\infty\ ,\ -\infty$ ۳) $-\infty\ ,\ -\infty$ ۴) $-\infty\ ,\ +\infty$

۵ آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

آهنگ متوسط



آهنگ متوسط تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ $[a,a+h]$ برابر با نسبت تغییرات $y=f(x)$ به تغییرات x است، یعنی داریم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

این نسبت برابر شیب خط واصل دو نقطهٔ $A(a,f(a))$ و $B(a+h,f(a+h))$ می‌باشد.

تست آهنگ متوسط تابع $f(x)=\frac{x}{x+1}$ در بازهٔ $[۱,a]$ برابر $\frac{۱}{۸}$ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۱

پاسخ گزینهٔ «۳»

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a)-f(۱)}{a-۱}=\frac{\frac{a}{a+۱}-\frac{۱}{۲}}{a-۱}=\frac{a-۱}{۲(a^۲-۱)}=\frac{۱}{۲(a+۱)}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow a=۳$$

آهنگ لحظه‌ای

آهنگ لحظه‌ای تابع $y=f(x)$ در $x=a$ برابر است با حد آهنگ متوسط، زمانی که $h\to ۰$، یعنی برابر با $f'(a)$ است. به عبارت دیگر آهنگ لحظه‌ای تابع $y=f(x)$ در لحظهٔ $x=a$ برابر شیب خط مماس بر f در a می‌باشد.

تست اگر $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+۲h)-f(۱)}{h}=۲$ باشد، آهنگ لحظه‌ای تابع $y=f(x^۲)$ در لحظهٔ $x=۱$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

پاسخ گزینهٔ «۲»

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+۲h)-f(۱)}{h}=۲\Rightarrow \lim_{h\to ۰}\frac{۲f'(۱+۲h)}{۱}=۲\Rightarrow f'(۱)=۱$$

$$y=f(x^۲)\Rightarrow y'=۲xf'(x^۲)\Rightarrow y'(۱)=۲f'(۱)=۲$$

نکته: در تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ آهنگ متوسط در بازهٔ $[m,n]$ با آهنگ لحظه‌ای در وسط بازه برابر است، یعنی داریم:

$$\frac{f(n)-f(m)}{n-m}=f'(\frac{m+n}{۲})$$

تست آهنگ لحظه‌ای تابع $f(x)=\frac{x^۲}{۲}-x-\frac{۱}{۳}$ در نقطهٔ $\frac{a}{۳}$ با آهنگ متوسط f در بازهٔ $[\frac{a}{۴},b]$ برابر است. b کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۸}a$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}a$ ۳) $\frac{۵}{۱۶}a$ ۴) $\frac{۵}{۲۴}a$

پاسخ گزینهٔ «۲» در تابع درجهٔ دوم آهنگ متوسط در بازهٔ $[m,n]$ برابر آهنگ لحظه‌ای در وسط بازه یعنی $\frac{m+n}{۲}$ است، پس:

$$\frac{a}{۳}=\frac{\frac{a}{۴}+b}{۲}\Rightarrow ۲a=\frac{۳a}{۴}+۳b\Rightarrow ۳b=\frac{۵a}{۴}\Rightarrow b=\frac{۵}{۱۲}a$$

نقاط بحرانی توابع براکتی

تابع $[P(x)]$ در تمام نقاط درونی دامنهٔ خود بحرانی‌اند.

نقاط بحرانی توابع ترکیبی

در توابع ترکیبی ابتدا دامنه را تعیین می‌کنیم، سپس مشتق تابع را حساب می‌کنیم و با توجه به نوع تابع نقاطی که مشتق صفر باشد و یا وجود نداشته باشد را به‌دست می‌آوریم.

تست **مجموعه طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-2|\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟** (ریاضی ۸۵)

۱) $\{0,\frac{4}{5},2\}$ ۲) $\{0,\frac{2}{3},2\}$ ۳) $\{0,1\}$ ۴) $\{\frac{2}{3},2\}$

پاسخ **گزینهٔ«۱»** $x=2$ و $x=0$ نقاط بحرانی تابع $f(x)=|x-2|\sqrt[3]{x^2}$ هستند، زیرا $f'(2)$ و $f'(0)$ وجود ندارد. ریشهٔ مشتق نیز نقطهٔ بحرانی است:

$$f(x)=\begin{cases}(x-2)\sqrt[3]{x^2} & ; \ x\geq 2\\ (2-x)\sqrt[3]{x^2} & ; \ x<2\end{cases}$$

چون ضابطه‌ها قرینهٔ یکدیگر هستند پس کافی است که مشتق یکی از ضابطه‌ها را حساب کنیم و ریشهٔ آن را به‌دست آوریم.

$$y=(x-2)\sqrt[3]{x^2}\Rightarrow y'=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}=0\Rightarrow x=\frac{4}{5}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

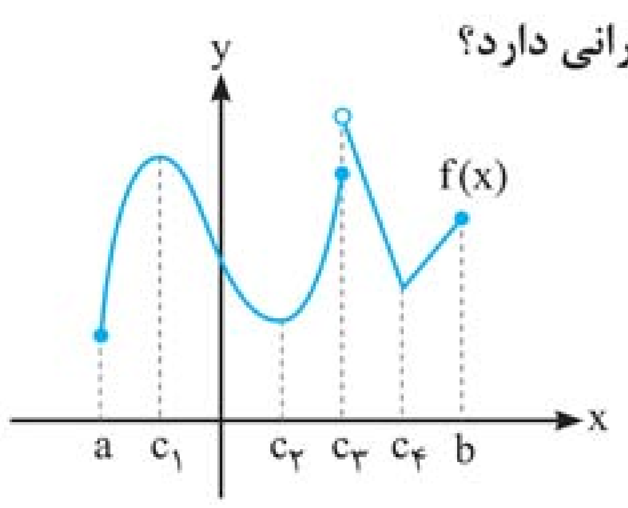
۶. تابع $f(x)=-2x^3+3x^2$ در فاصلهٔ $[-\frac{1}{2},2]$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲

۷. اگر تابع $y=x^3+x^2+ax+b$ دو نقطهٔ بحرانی داشته باشد، حدود a کدام است؟

۱) $a>\frac{1}{3}$ ۲) $a>1$ ۳) $a<0$ ۴) $a<\frac{1}{3}$

۸. اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، این تابع چند نقطهٔ بحرانی دارد؟



۱) ۱
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۲

۹. نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2(x-2)^2$ سه رأس یک مثلث‌اند، نوع این مثلث کدام است؟ (تجربی ۸۵)

۱) متساوی‌الاضلاع ۲) فقط متساوی‌الساقین
۳) فقط قائم‌الزاویه ۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

۱۰. **نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x)=(x-۱)|x^۲+x-۲|$ سه رأس مثلثی هستند، مساحت این مثلث کدام است؟** (ریاضی خارج ۹۲)

۱) ۴   ۲) ۴/۵   ۳) ۶   ۴) ۸

۱۱. **تابع $y=|x|(x^۲-۱)$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟**

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

۱۲. **تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x & ; \ -۲\le x\le ۰ \\ x^۲-x & ; \ ۰<x\le ۱\end{cases}$ کدام است؟**

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) صفر

۱۳. **تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[۳]{x^۳-۳x^۲+۴}$ روی بازهٔ $(-۱,۲)$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟**

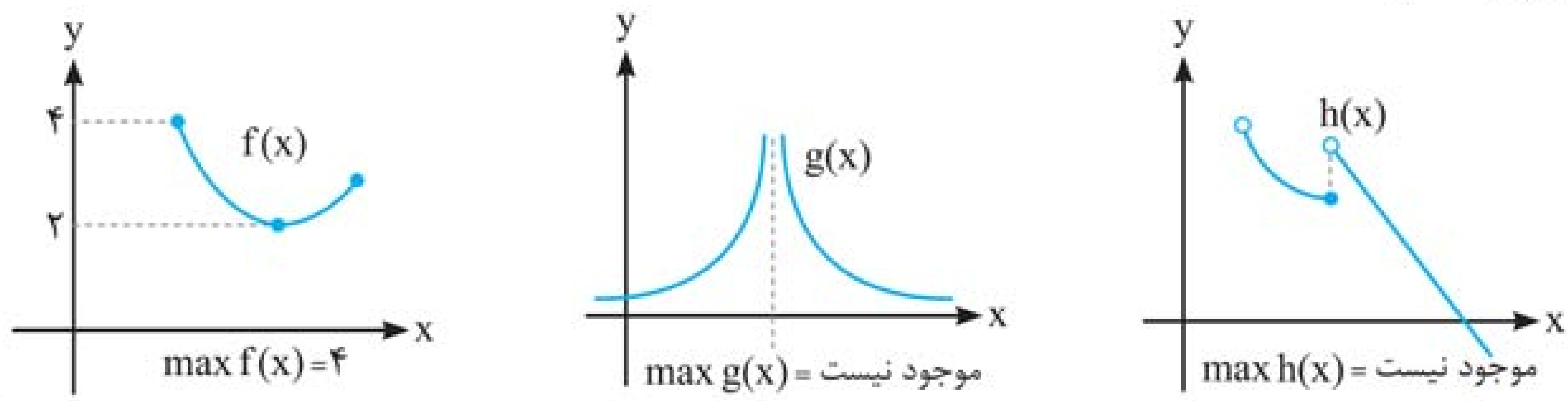
۱) ۳   ۲) ۲   ۳) صفر   ۴) ۱

۳ اکسترمم‌های مطلق

فرض کنید D دامنهٔ تابع f و نقطهٔ c عضو دامنه باشد، می‌گوییم:

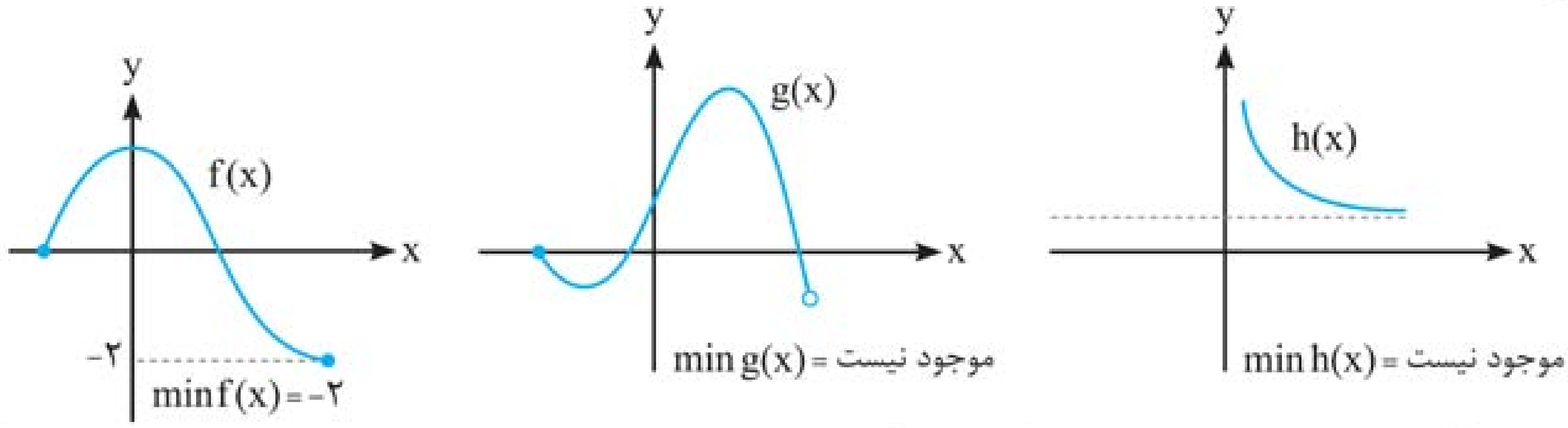
الف) مقدار $f(c)$ ماکزیمم (ماکزیمم سراسری یا مطلق) تابع f روی D است، به شرطی که به ازای هر x عضو D داشته باشیم: $f(x)\le f(c)$

به عبارت ساده‌تر عرض بالاترین نقطه در نمودار f در صورت وجود ماکزیمم تابع f است.به نمونه‌های زیر توجه کنید:



ب) $f(c)$ مقدار مینیمم (مینیمم سراسری یا مطلق) تابع f روی D است، به شرطی که به ازای هر x عضو D داشته باشیم: $f(x)\ge f(c)$

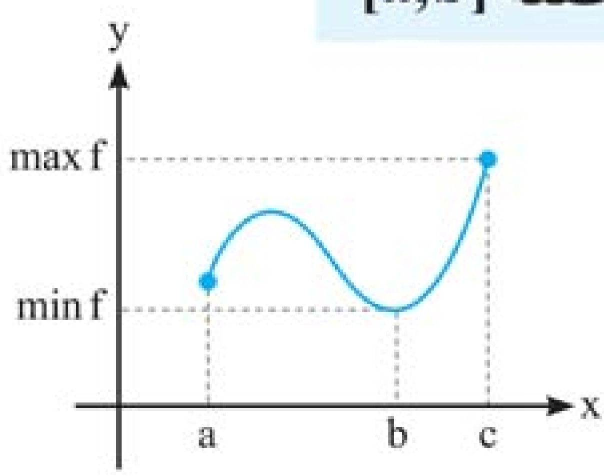
به عبارت دیگر عرض پایین‌ترین نقطه در نمودار f در صورت وجود مینیمم تابع f است.به نمونه‌های زیر توجه کنید:



پ) $f(c)$ مقدار اکسترمم مطلق تابع f روی D است به شرطی که ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلـق تـابع f روی D باشد.

نکته: یکی از روش‌های یافتن اکسترمم‌های سراسری (مطلق) رسم تابع است.

اکسترمم‌های مطلق تابع پیوسته $f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$



نمودار تابع پیوسته $y=f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ را در شکل روبه‌رو ببینید.

ماکزیمم تابع در نقطهٔ انتهایی راست c اتفاق افتاده است و مینیمم مطلق این تابع در نقطهٔ بحرانی b رخ داده است.

قضیه

اگر تابع f در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه تابع f در این بازه هم max و هم min مطلق دارد.
اگر تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه برای یافتن اکسترمم‌های مطلق تابع در این بازه ابتدا نقاط بحرانی تابع را حساب می‌کنیم و مقادیر f در نقاط بحرانی را با مقادیر f در نقاط ابتدا و انتهای بازه مقایسه می‌کنیم. بزرگ‌ترین عدد به‌دست آمده max و کوچک‌ترین آن min مطلق تابع f می‌باشد.

تست **بیش‌ترین مقدار تابع $f(x)=۲x^۳-۳x^۲+۲$ در فاصلهٔ $[-۲,۱]$ و کم‌ترین مقدار تابع $g(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-x^۲$ در فاصلهٔ $[۰,۱]$ به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟**

۱) $۲, -\frac{۲}{۳}$ ۲) $۲, -۳$ ۳) -۲۶، صفر ۴) $۱, -\frac{۴}{۳}$

پاسخ **گزینهٔ «۱»**

$$f(x)=۲x^۳-۳x^۲+۲\Rightarrow f'(x)=۶x^۲-۶x=۰\Rightarrow x=۰\,,\,۱$$

x	-۲	۰	۱
f(x)	-۲۶	۲	۱

$\Rightarrow \max f(x)=۲$

$$g(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-x^۲\Rightarrow g'(x)=x^۲-۲x=۰\Rightarrow x=۰\,,\,۲$$

x	۰	۱
g(x)	۰	$-\frac{۲}{۳}$

$\Rightarrow \min g(x)=-\frac{۲}{۳}$

اکسترمم‌های مطلق توابع چندجمله‌ای

تابع چندجمله‌ای $f(x)=a_۰+a_۱x+a_۲x^۲+...+a_nx^n\,,a_n\neq ۰$ را در نظر بگیرید. در مورد اکسترمم‌های مطلق این تابع در حالت‌های مختلف n بحث می‌کنیم:

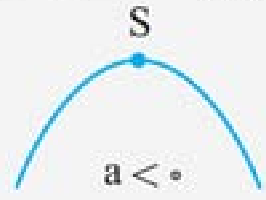
الف) اگر n زوج و $a_n>۰$ باشد آن‌گاه $f(x)$ مینیمم مطلق دارد و ماکزیمم مطلق ندارد.

ب) اگر n زوج و $a_n<۰$ باشد آن‌گاه $f(x)$ ماکزیمم مطلق دارد و مینیمم مطلق ندارد.

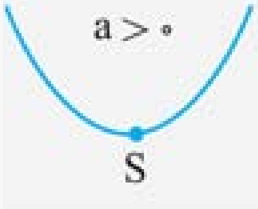
پ) اگر n فرد باشد آن‌گاه تابع $f(x)$ ماکزیمم و مینیمم مطلق ندارد.

نکته: حالت خاص نکات بالا برای $n=۲$ به صورت تابع درجهٔ دوم $y=ax^۲+bx+c$ خواهد بود.

$$\max y=f(-\frac{b}{۲a})=-\frac{\Delta}{۴a}$$



$$\min y=f(-\frac{b}{۲a})=-\frac{\Delta}{۴a}$$



پیوست

دو دوره آزمون شبیه سازی کنکور براساس تغییرات کتاب درسی جدید که بهترین ابزار برای جمعبندی است را همراه با پاسخ تشریحی آورده ایم و یک فرمول نامه ی کامل و جامع که می توانید با یک نگاه،تمام فرمول ها را دوره کنید.

آزمون جامع «۱»

۱. اگر $a+b+c=0$ باشد و $abc\neq 0$، آن‌گاه حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)+\frac{a+c}{ac}(a^2+c^2-b^2)+\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)$$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) abc ۴) $a^2+b^2+c^2$

۲. حاصل $\frac{4^{0/75}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+9^{0/25}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}+1$ ۲) $\sqrt{2}-1$ ۳) $\sqrt{3}+1$ ۴) $\sqrt{3}-1$

۳. معادلهٔ $(x^2-2x)^2-(x^2-2x)=2$، چند ریشهٔ حقیقی متمایز دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴. مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y=5-|x-1|$ و $y=|x|$، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۵. در یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۳، مجموع مربعات ۸ جملهٔ اول ۳۲۸۱ برابر مجموع ۸ جملهٔ اول است. جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۴ ۴) ۲

۶. اگر $f(x)=x+|x|$ و $g(x)=|x+1|+1$ باشند، آن‌گاه برد تابع $(\frac{f}{g})(x)$، کدام است؟

۱) $[0,1)$ ۲) $[0,2)$ ۳) $[0,+\infty)$ ۴) $[1,+\infty)$

۷. کدام‌یک از توابع زیر، یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x)=x+\sqrt{x}$ ۲) $g(x)=x-\sqrt{x}$ ۳) $h(x)=2x+\frac{1}{x}$ ۴) $p(x)=\frac{x}{x^2+1}$

۸. یک قایق کاملاً بادی، روزانه ۵ درصد بادش را از دست می‌دهد. باد این قایق پس از چند روز، به نصف باد روز اول می‌رسد؟ ($\log 2=0/301$ و $\log 19=1/287$)

۱) ۱۷ ۲) ۱۸/۵ ۳) ۲۱/۵ ۴) ۲۵

۹. از رابطهٔ $\log(x+2)+\log(2x-1)=\log(4x+1)$، مقدار لگاریتم $(5+2x)$ در پایهٔ ۴، کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۱/۵

۱۰. حاصل عبارت $\sqrt{3}\sin 75^\circ-\sin 15^\circ$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۱. یک تسمه و دو قرقره به شعاع‌های ۱۲ و ۳/۵ سانتی‌متر را به‌هم وصل کرده‌ایم. وقتی قرقرهٔ بزرگ‌تر $\frac{1}{6}$ دور می‌چرخد قرقرهٔ کوچک‌تر چند دور می‌چرخد؟

۱) $\frac{1}{7}$ ۲) $\frac{2}{7}$ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $\frac{4}{7}$

۲۱. خط راستی بر نمودار تابع $y = x^۳ - ۲x^۲ + ۳x$ مماس شده و از آن عبور می‌کند. شیب این خط، کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۲۲. آهنگ تغییر لحظه‌ای محیط یک مربع نسبت به مساحت آن برابر $\frac{۱}{۲}$ است. مساحت مربع کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۲۳. نقاط عطف و ماکزیمم نسبی تابع $f(x) = \frac{۲}{۳x^۲ + ۱}$ سه رأس یک مثلث هستند. مساحت این مثلث کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۱۸}$

۲۴. تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر از مرتبهٔ دوم است. به ازای هر عدد حقیقی x تابع $g(x) = f(۴ - x^۲)$ است. اگر $f'(۱) = -۵$ و $f''(۱) = -۱$ باشد، مقدار $g''(\sqrt{۳})$، کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ‌نامه آزمون جامع «۱»

۱. گزینهٔ «۱»

$$a + b = -c \Rightarrow a^۲ + ۲ab + b^۲ = c^۲ \Rightarrow a^۲ + b^۲ - c^۲ = -۲ab$$
$$a + c = -b \Rightarrow a^۲ + ۲ac + c^۲ = b^۲ \Rightarrow a^۲ + c^۲ - b^۲ = -۲ac$$
$$b + c = -a \Rightarrow b^۲ + ۲bc + c^۲ = a^۲ \Rightarrow b^۲ + c^۲ - a^۲ = -۲bc$$

با جای‌گذاری این مقادیر، داریم:

$$\frac{b+c}{bc}(-۲bc) + \frac{a+c}{ac}(-۲ac) + \frac{a+b}{ab}(-۲ab) = -۴(a+b+c) = ۰$$

۲. گزینهٔ «۱»

$$\frac{۴^{۰/۷۵}}{(۱+\sqrt{۲}) + \sqrt{۳}} \times \frac{(۱+\sqrt{۲}) - \sqrt{۳}}{(۱+\sqrt{۲}) - \sqrt{۳}} + (۳^۲)^{۰/۲۵} = \frac{(۲^۲)^{۰/۷۵}(۱+\sqrt{۲} - \sqrt{۳})}{(۱+\sqrt{۲})^۲ - (\sqrt{۳})^۲} + ۳^{۰/۵}$$

$$= \frac{۲^{\frac{۳}{۲}}(۱+\sqrt{۲} - \sqrt{۳})}{۱+۲+۲\sqrt{۲} - ۳} + ۳^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۲} - \sqrt{۳})}{۲\sqrt{۲}} + \sqrt{۳} = \sqrt{۲} + ۱$$

۳. گزینهٔ «۳»

$x^۲ - ۲x$ را A فرض می‌کنیم.

$$(x^۲ - ۲x)^۲ - (x^۲ - ۲x) = ۲ \Rightarrow A^۲ - A = ۲ \Rightarrow A^۲ - A - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (A-۲)(A+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} A = ۲ \\ A = -۱ \end{cases}$$

فرمول‌نامه

اتحاد، رادیکال و توان

۱ اتحادها

اتحادهای مهم و اصلی به شرح زیر است:

مربع دوجمله‌ای: الف) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

مزدوج: ب) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

جمله مشترک: پ) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

مکعب دوجمله‌ای: ت) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

چاق و لاغر: ث) $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

۲ قوانین رادیکال‌ها $(n > 1, m, n \in \mathbb{N})$

الف) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \ (a \geq 0)$

ب) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

پ) $\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \ (b \neq 0)$

ت) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

ث) $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$

۳ قوانین توان

الف) $a^0 = 1$

ب) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

پ) $a^m \div a^n = a^{m-n} \ (a \neq 0)$

ت) $a^m \times b^m = (ab)^m$

ث) $a^m \div b^m = (\frac{a}{b})^m \ (b \neq 0)$

الگو و دنباله

۱ مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی

$$S_n = \frac{n}{2}(2\underbrace{a_1}_{\text{جملهٔ اول}} + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + \underbrace{a_n}_{\text{جملهٔ آخر}})$$

۲ مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \ (q \neq 1)$$

۳ قانون اندیس‌ها

دنبالهٔ حسابی: $m+n = p+q \Rightarrow a_m + a_n = a_p + a_q$

دنبالهٔ هندسی: $m+n = h+k \Rightarrow a_m \cdot a_n = a_h \cdot a_k$

معادلات گویا و گنگ

۱ حل معادلات گویا

الف) دو طرف معادله را در مخرج مشترک کسرها ضرب می‌کنیم.

ب) عبارت به‌دست آمده را حل می‌کنیم. جواب‌ها باید مخرج هیچ کسری را صفر نکنند و با عالم واقعیت مطابقت داشته باشند.

۲ حل معادلات گنگ

الف) دو طرف معادله را به توان فرجهٔ مشترک رادیکال‌ها می‌رسانیم.

ب) با حل عبارت به‌دست آمده، جواب‌ها را در معادلهٔ اصلی امتحان می‌کنیم، زیرا ممکن است که ریشهٔ اضافی تولید شود.

هندسه تحلیلی

۱ فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

۲ مختصات وسط پاره‌خط AB

$$M\left|\begin{array}{l} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}\end{array}\right.$$

۳ فاصلهٔ نقطهٔ (x_0,y_0) از خط $ax+by+c=0$

$$AH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

۴ فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$

$$AH=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

قدرمطلق

۱ ویژگی‌های قدرمطلق

الف) $|x|\geq 0$

ب) $|x|=|-x|$

پ) $\sqrt{x^2}=|x|$

ت) $|x^2|=x^2$

ث) $|xy|=|x||y|$

ج) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}\quad (y\neq 0)$

چ) $|x|=|a|\Rightarrow\begin{cases}x=a\\x=-a\end{cases}$

ح) $|x|\geq c \Rightarrow \begin{cases}x\geq c\\ \text{یا} \\ x\leq -c\end{cases}$ $(c>0)$

خ) $|x+y|\leq|x|+|y|$ (نامساوی مثلثی)

۲ معادلات قدرمطلقی

جواب‌های معادلهٔ $|f(x)|=|g(x)|$ همان جواب‌های دو معادلهٔ $f(x)=g(x)$ و $f(x)=-g(x)$ هستند یا می‌توان جواب‌های معادله را با به توان رساندن دو طرف معادله به‌دست آورد.