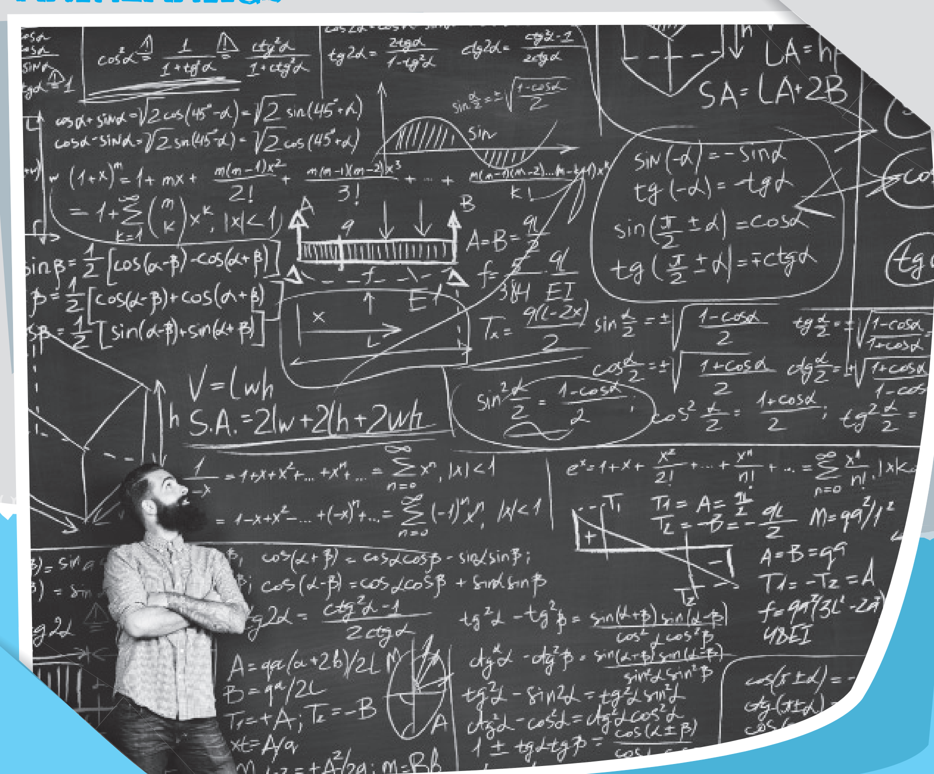
فصل ۱

MATHEMATICS



جبر و معادله

فصل اول

درس اول مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

دنبالهٔ حسابی و مجموع جملات آن

دنبالهٔ حسابی[1]: دنباله‌ای است که هر جملهٔ آن (به جز جملهٔ اول)، با اضافه کردن عددی ثابت به جملهٔ قبلی به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌گوییم. قدرنسبت را با d و جملهٔ اول را با a_1 یا a نمایش می‌دهیم. در شکل کلی، جملات یک دنبالهٔ حسابی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a_1,\overbrace{a_1+d}^{a_2},\overbrace{a_1+2d}^{a_3},\overbrace{a_1+3d}^{a_4},\dots,\overbrace{a_1+(n-1)d}^{a_n},\dots$$

بنابراین جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی یا همان جملهٔ n اُم به صورت زیر می‌باشد:

$$\boxed{\text{جملهٔ عمومی}: a_n=a_1+(n-1)d}$$

در این رابطه، n تعداد جملات است.

می‌دانیم اگر هر جمله را از جملهٔ بعدی کم کنیم، قدرنسبت به دست می‌آید، پس به طور کلی داریم:

$$\boxed{a_{n+1}-a_n=d}$$

مثال: در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ پنجم -2 و جملهٔ دوازدهم 19 است. جملهٔ عمومی دنباله را مشخص کنید.

پاسخ: از رابطهٔ $a_n=a_1+(n-1)d$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}a_5=-2\Rightarrow a_1+4d=-2\\ a_{12}=19\Rightarrow a_1+11d=19\end{cases}\Rightarrow d=3,a_1=-14$$

$$a_n=a_1+(n-1)d\Rightarrow a_n=-14+3(n-1)\Rightarrow a_n=3n-17$$

نکته: اگر a_m و a_n دو جمله از یک دنبالهٔ حسابی باشند، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\boxed{a_m-a_n=(m-n)d}$$

برای مثال، در سؤال قبل که $a_5=-2$ و $a_{12}=19$ است، داریم:

$$a_{12}-a_5=(12-5)d\Rightarrow 19-(-2)=7d\Rightarrow 21=7d\Rightarrow d=3$$

واسطهٔ حسابی: اگر a، b و c تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند، آن‌گاه $b=\frac{a+c}{2}$ است. در این حالت می‌گوییم b واسطهٔ حسابی a و c می‌باشد.

رابطهٔ اندیس‌ها: اگر a_m، a_n، a_p و a_k جملاتی از یک دنبالهٔ حسابی باشند که رابطهٔ $m+n=p+k$ بین اندیس‌ها برقرار باشد، آن‌گاه همواره داریم:

$$\boxed{a_m+a_n=a_p+a_k}$$

از این رابطه می‌توان نتیجه گرفت که هر جمله، واسطهٔ حسابی بین دو جمله‌ای است که به یک فاصله از طرفین آن قرار دارند.

$$\underbrace{a_{n-k},\dots,}_{\text{جملهٔ قبل }k}a_n\underbrace{,\dots,a_{n+k}}_{\text{جملهٔ بعد }k}\qquad \boxed{a_{n-k}+a_{n+k}=2a_n}$$

برای مثال با توجه به رابطهٔ اندیس‌ها داریم:

$$a_4+a_{10}=a_5+a_9=2a_7\quad ;\quad a_5+a_{14}+a_{17}=3a_{12}$$

بررسی یک اشتباه متداول: توجه داشته باشید که در رابطهٔ اندیس‌ها، علاوه‌بر این‌که باید جمع اندیس‌ها در دو سمت تساوی برابر باشد، تعداد جملات نیز باید برابر باشد. پس دقت داشته باشید که:

$$\underbrace{a_4+a_{10}}_{\text{دو جمله}}\neq\underbrace{a_{14}}_{\text{یک جمله}}\quad ;\quad \underbrace{a_5+a_{14}+a_{17}}_{\text{سه جمله}}\neq\underbrace{2a_{18}}_{\text{دوجمله}}$$

تست: اگر در یک دنبالهٔ حسابی $a_1=1$ و $a_2=\frac{5}{3}$ باشد، حاصل $\frac{a_{15}+a_{17}+a_{19}}{a_{33}+a_{35}+a_{37}}$ کدام است؟

۱) $\frac{35}{71}$ ۲) $\frac{105}{71}$ ۳) $\frac{7}{17}$ ۴) $\frac{21}{17}$

پاسخ: قدرنسبت این دنباله برابر است با $d=a_2-a_1=\frac{2}{3}$. حال با توجه به رابطهٔ اندیس‌ها داریم:

$$\frac{a_{15}+a_{17}+a_{19}}{a_{33}+a_{35}+a_{37}}=\frac{3a_{17}}{3a_{35}}=\frac{a_{17}}{a_{35}}=\frac{a_1+16d}{a_1+34d}=\frac{1+16\left(\frac{2}{3}\right)}{1+34\left(\frac{2}{3}\right)}=\frac{3+32}{3+68}=\frac{35}{71}$$

پس گزینهٔ (۱) صحیح است.

---

[1] به دنبالهٔ حسابی، دنبالهٔ عددی، تصاعد حسابی یا تصاعد عددی نیز می‌گویند.

درج m واسطهٔ حسابی بین دو عدد: چنان‌چه بخواهیم بین دو عدد a و b تعداد m جمله قرار دهیم، به طوری که کلیهٔ اعداد با هم تشکیل یک دنبالهٔ حسابی بدهند، اصطلاحاً به این عمل درج m واسطهٔ حسابی می‌گویند. در این حالت چون m جمله درج می‌کنیم، با احتساب جملات a و b در کل $m+2$ جمله وجود دارد. پس برای تعیین قدرنسبت، کافی است a_{m+2} را تشکیل داد.

$$\underset{a_1}{a},\underbrace{\bigcirc,\bigcirc,\dots,\bigcirc}_{m\ \text{جمله}},\underset{a_{m+2}}{b}$$

مثال: بین اعداد ۲ و ۲۷ چهار واسطهٔ حسابی درج کنید.

پاسخ: **روش اول:** چون چهار واسطه درج می‌کنیم، پس دنبالهٔ حاصل شش جمله دارد که جملهٔ اول برابر ۲ و جملهٔ ششم برابر ۲۷ است:

$$\underset{a_1}{۲},\underbrace{\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc}_{۴\ \text{جمله}},\underset{a_6}{۲۷}$$

$$a_n=a_1+(n-1)d \Rightarrow a_6=a_1+5d \Rightarrow 27=2+5d \Rightarrow d=5$$

بنابراین واسطه‌ها به‌صورت ۲۲، ۱۷، ۱۲ و ۷ به دست می‌آیند.

روش دوم:

نکته: برای درج m واسطهٔ حسابی بین دو عدد a و b به کمک رابطهٔ زیر، قدرنسبت را به‌دست می‌آوریم:

$$\underset{a_1}{a},\underbrace{\bigcirc,\bigcirc,\dots,\bigcirc}_{m\ \text{جمله}},\underset{a_{m+2}}{b} \qquad d=\frac{b-a}{m+1}$$

به کمک نکتهٔ بالا داریم:

$$d=\frac{27-2}{5}=5 \Rightarrow \text{واسطه‌ها}: 7,12,17,22$$

نکته: جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی، عبارتی درجه اول برحسب n است:

$$a_n=a+(n-1)d=a+nd-d \Rightarrow a_n=\underbrace{d}_{A}\,n+\underbrace{a-d}_{B}=An+B$$

ملاحظه می‌شود که در رابطهٔ جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی، ضریب n، برابر قدرنسبت می‌باشد.

مثال: کدام‌یک از عبارات زیر می‌تواند جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی باشد؟

الف) $a_n=n^2+2n$ ب) $b_n=\frac{n}{n+1}$ پ) $c_n=-\frac{n}{2}+3$

پاسخ: عبارات «الف» و «ب» چون چندجمله‌ای درجهٔ اول نیستند، پس نمی‌توانند جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی باشند، اما $c_n=-\frac{n}{2}+3$ جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $-\frac{1}{2}$ می‌باشد. (ضریب n، برابر قدرنسبت است.)

مجموع جملات دنبالهٔ حسابی

در هر دنباله، مجموع n جملهٔ اول را با S_n نمایش می‌دهند:

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

در یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1 برای محاسبهٔ S_n کافی است، مجموع جملهٔ اول و جملهٔ nاُم را در نصف تعداد جملات، ضرب کنیم:

$$\boxed{S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)}$$

اگر در رابطهٔ بالا از تساوی $a_n=a_1+(n-1)d$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\boxed{S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)}$$

بدیهی است که هرگاه جملهٔ اول و قدرنسبت را داشتیم، از این رابطه و اگر به جای قدرنسبت، a_n را داشتیم از رابطهٔ قبلی برای محاسبهٔ مجموع جملات استفاده می‌کنیم.

در رابطهٔ S_n، مجموع $n-1$ جملهٔ اول، یعنی $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$ برابر است با S_{n-1}، پس نتیجه می‌گیریم:

$$S_n=\underbrace{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}_{S_{n-1}}+a_n \Rightarrow S_n=S_{n-1}+a_n$$

بنابراین با در اختیار داشتن S_n می‌توان به کمک رابطهٔ زیر، جملهٔ عمومی دنباله را تعیین کرد:

$$\boxed{a_n=S_n-S_{n-1}}$$

مثال: در دنبالهٔ حسابی ...,۱,۴,۷ مجموع بیست جملهٔ اول را به دست آورید.

پاسخ: جملهٔ اول دنباله برابر ۷ و قدرنسبت برابر $-3 = 7 - 4$ می‌باشد، بنابراین:

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d) \Rightarrow S_{20}=\frac{20}{2}(2(7)+19(-3))=10(14-57)=10(-43)=-430$$

مثال: مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n را به دست آورید.

پاسخ: مقدار $۱+۲+\cdots+n$، حاصل جمع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی با $a_۱=۱$ و $a_n=n$ است. پس طبق رابطهٔ $S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$، مقدار آن برابر $\frac{n}{۲}(۱+n)$ می‌شود.

نتیجه: مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n برابر است با:

$$\boxed{۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}}$$

تست: در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع n جملهٔ اول از رابطهٔ $S_n=۳n^۲+۵n$ به دست می‌آید. جملهٔ عمومی دنباله کدام است؟

۱) $a_n=۶n+۲$ ۲) $a_n=۶n+۱$

۳) $a_n=۱۴n-۶$ ۴) $a_n=۱۴n-۲$

پاسخ: **روش اول:** با توجه به این‌که $S_۱=a_۱\ ,S_۲=a_۱+a_۲$ است داریم:

$$\begin{cases}S_۱=۳+۵=۸\Rightarrow a_۱=۸\\ S_۲=۳(۲)^۲+۵(۲)=۲۲\Rightarrow a_۱+a_۲=۲۲\xrightarrow{a_۱=۸}a_۲=۱۴\end{cases}\Rightarrow d=a_۲-a_۱=۱۴-۸=۶$$

$$\text{جملهٔ عمومی}:\ a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow a_n=۸+(n-۱)(۶)=۶n+۲$$

روش دوم: از رابطهٔ $a_n=S_n-S_{n-۱}$ استفاده می‌کنیم:

$$a_n=S_n-S_{n-۱}=۳n^۲+۵n-(۳(n-۱)^۲+۵(n-۱))=۳n^۲+۵n-(۳n^۲-۶n+۳+۵n-۵)$$

$$=۳n^۲+۵n-(۳n^۲-n-۲)=۶n+۲$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

تست: یک دنبالهٔ حسابی دارای ۲۹ جمله است. اگر مجموع سه جملهٔ وسط برابر ۱۸ باشد، مجموع ۲۹ جمله برابر کدام است؟

۱) ۱۷۴ ۲) ۱۶۸ ۳) ۱۶۲ ۴) ۱۸۲

پاسخ: چون دنباله ۲۹ جمله دارد، جملهٔ وسط، جملهٔ پانزدهم است $\left(\frac{۲۹+۱}{۲}=۱۵\right)$، در نتیجه داریم:

$$a_{۱۴}+a_{۱۵}+a_{۱۶}=۱۸\xrightarrow{\text{رابطهٔ اندیس‌ها}}۳a_{۱۵}=۱۸\Rightarrow a_{۱۵}=۶$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\Rightarrow S_{۲۹}=\frac{۲۹}{۲}(a_۱+a_{۲۹})\xrightarrow{\text{رابطهٔ اندیس‌ها}}\frac{۲۹}{۲}(۲a_{۱۵})=۲۹\times۶=۱۷۴$$

پس گزینهٔ (۱) صحیح است.

تست: در یک دنبالهٔ حسابی $S_۸-S_۵=۷$ می‌باشد. حاصل عبارت $a_۴+a_۵+\cdots+a_{۱۰}$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) $\frac{۱۴}{۳}$ ۳) ۴۹ ۴) $\frac{۴۹}{۳}$

پاسخ: می‌دانیم $S_۸=a_۱+a_۲+\cdots+a_۸$ و $S_۵=a_۱+a_۲+\cdots+a_۵$ است، پس نتیجه می‌گیریم:

$$S_۸-S_۵=a_۶+a_۷+a_۸=۷\xrightarrow{\text{رابطهٔ اندیس‌ها}}۳a_۷=۷\Rightarrow a_۷=\frac{۷}{۳}$$

$$a_۴+a_۵+\cdots+a_{۱۰}=(a_۴+a_{۱۰})+(a_۵+a_۹)+(a_۶+a_۸)+a_۷=۲a_۷+۲a_۷+۲a_۷+a_۷=۷a_۷=۷\left(\frac{۷}{۳}\right)=\frac{۴۹}{۳}$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

نکته: در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع تعداد فردی از جملات هم‌فاصله، با حاصل‌ضرب جملهٔ وسط در تعداد جملات برابر است.

برای مثال در تست قبل داریم:

$$\overbrace{a_۴+a_۵+a_۶+\underset{\text{جملهٔ وسط}}{a_۷}+a_۸+a_۹+a_{۱۰}}^{\text{۷ جمله}}=۷a_۷$$

نکته: مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی (S_n)، عبارتی درجه دوم برحسب n است:

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a+(n-۱)d)=an+\frac{n^۲}{۲}d-\frac{n}{۲}d\Rightarrow S_n=\underbrace{\frac{d}{۲}}_{A}n^۲+\underbrace{\left(a-\frac{d}{۲}\right)}_{B}n=An^۲+Bn$$

ملاحظه می‌شود که در رابطهٔ S_n، عدد ثابت وجود ندارد و ضریب $n^۲$ برابر نصف قدرنسبت است.

تست: مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی از رابطهٔ $S_n = pn^۲ + (q+۳)n + q$ به‌دست می‌آید. اگر قدرنسبت برابر ۴ باشد، جملهٔ پنجم دنباله کدام است؟

۱) ۴۲　۲) ۳۷　۳) ۳۲　۴) ۲۱

پاسخ: در رابطهٔ S_n، نباید عدد ثابت داشته باشیم، پس $q = ۰$ است. از طرفی ضریب $n^۲$ برابر نصف قدرنسبت $\left(\frac{d}{۲}\right)$ می‌باشد، یعنی ۲ $p = \frac{۴}{۲} = ۲$ است. بنابراین S_n به صورت زیر در می‌آید:

$$S_n = ۲n^۲ + ۳n$$

$$a_۱ = S_۱ = ۲+۳ = ۵ \; ; \; a_۵ = a_۱ + ۴d = ۵ + ۴(۴) = ۲۱$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

دنبالهٔ هندسی و مجموع جملات آن

دنبالهٔ هندسی[۱]: دنباله‌ای است که هر جملهٔ آن (به جز جملهٔ اول)، از ضرب جملهٔ قبل در یک عدد ثابت به دست آمده باشد. عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌گوییم. قدرنسبت را با q و جملهٔ اول را با $a_۱$ یا a نمایش می‌دهیم. در شکل کلی، جملات یک دنبالهٔ هندسی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a_۱, \underbrace{a_۱q}_{a_۲}, \underbrace{a_۱q^۲}_{a_۳}, \underbrace{a_۱q^۳}_{a_۴}, \ldots, \underbrace{a_۱q^{n-۱}}_{a_n}, \ldots$$

بنابراین جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی یا همان جملهٔ n اُم به صورت زیر است:

$$\boxed{\text{جملهٔ عمومی}: a_n = a_۱q^{n-۱}}$$

در این رابطه، n تعداد جملات است.

می‌دانیم حاصل تقسیم هر جمله (به جز جملهٔ اول) به جملهٔ قبل برابر است با قدرنسبت، پس به طور کلی داریم:

$$\boxed{q = \frac{a_n}{a_{n-۱}} \quad (n > ۱)}$$

نکته: در یک دنبالهٔ هندسی اگر جملهٔ اول مثبت (منفی) باشد، آن‌گاه داریم:

۱) $q > ۱$: جملات دنبالهٔ صعودی (نزولی) هستند.

۲) $q = ۱$: جملات دنبالهٔ ثابت هستند.

۳) $۰ < q < ۱$: جملات دنبالهٔ نزولی (صعودی) هستند.

۴) $q < ۰$: دنبالهٔ نه صعودی و نه نزولی می‌شود.

توجه: اگر هر جملهٔ یک دنباله (به جز جملهٔ اول) بزرگ‌تر یا مساوی جملهٔ قبل خود باشد، دنباله صعودی و اگر هر جمله، کوچک‌تر یا مساوی جملهٔ قبل خود باشد، دنباله نزولی است.

واسطهٔ هندسی: اگر اعداد a، b و c تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند، آن‌گاه $b^۲ = ac$ است. در این حالت می‌گوییم، b واسطهٔ هندسی a و c می‌باشد.

تست: اعداد $۲^a, ۴\sqrt{۲}, ۲^b$ سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی هستند. واسطهٔ عددی بین a و b کدام است؟ ریاضی داخل ۸۷

۱) ۲/۵　۲) ۲　۳) ۱/۵　۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ:

$$(۴\sqrt{۲})^۲ = ۲^b \times ۲^a \Rightarrow ۳۲ = ۲^{a+b} \Rightarrow ۲^۵ = ۲^{a+b} \Rightarrow a+b = ۵$$

در نتیجه، واسطهٔ حسابی (عددی) بین a و b برابر $\frac{۵}{۲} = \frac{a+b}{۲}$ می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

درج m واسطهٔ هندسی بین دو عدد: چنان‌چه بخواهیم بین دو عدد a و b، تعداد m جمله قرار دهیم، طوری که کلیهٔ اعداد با هم تشکیل یک دنبالهٔ هندسی بدهند، اصطلاحاً به این عمل درج m واسطهٔ هندسی می‌گویند. در این حالت چون m جمله درج می‌کنیم با احتساب جملات a و b در کل $m+۲$ جمله وجود دارد. پس برای تعیین قدرنسبت، کافی است $a_{m+۲}$ را تشکیل داد.

$$\underset{a_۱}{a}, \underbrace{\bigcirc, \bigcirc, \ldots, \bigcirc}_{m \text{ جمله}}, \underset{a_{m+۲}}{b}$$

مثال: بین اعداد $\frac{۱}{۴}$ و ۸- چهار واسطهٔ هندسی درج کنید.

پاسخ: چون چهار واسطه، درج می‌کنیم، پس دنبالهٔ حاصل، شش جمله دارد که جملهٔ اول برابر $\frac{۱}{۴}$ و جملهٔ ششم برابر ۸- است:

$$\underset{a_۱}{\frac{۱}{۴}}, \underbrace{\bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc}_{۴ \text{ جمله}}, \underset{a_۶}{-۸}$$

$$a_n = a_۱q^{n-۱} \Rightarrow a_۶ = a_۱q^۵ \Rightarrow -۸ = \frac{۱}{۴}q^۵ \Rightarrow q^۵ = -۳۲ \Rightarrow q = -۲$$

بنابراین واسطه‌ها به صورت $-\frac{۱}{۲}, ۱, -۲, ۴$ به دست می‌آیند.

تذکر: برای درج m واسطهٔ هندسی بین دو عدد a و b از رابطهٔ $q^{m+۱} = \frac{b}{a}$ نیز می‌توان قدرنسبت را تعیین کرد.

۱- به دنبالهٔ هندسی، تصاعد هندسی نیز می‌گویند.

مثال: آیا یک دنباله می‌تواند هم یک دنبالهٔ هندسی باشد و هم یک دنبالهٔ حسابی؟

پاسخ: دنبالهٔ ثابت $a,a,a,\dots,a$، یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۱ و یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت صفر محسوب می‌شود. $(a\neq 0)$

تست: در یک دنبالهٔ هندسی، حاصل‌ضرب ۹ جملهٔ اول برابر ۸ است $(a_1a_2\cdots a_9=8)$. حاصل‌ضرب $a_2a_4a_6a_8$ برابر کدام است؟

۱) $2\sqrt[3]{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt[4]{2}$ ۴) ۴

پاسخ: با درنظر گرفتن $a_n=a_1q^{n-1}$ داریم:

$$a_1a_2\cdots a_9=8\Rightarrow a_1(a_1q)(a_1q^2)\cdots(a_1q^8)=a_1^9q^{(1+2+\cdots+8)}=a_1^9q^{36}=(a_1q^4)^9=8\Rightarrow a_1q^4=\sqrt[9]{8}=\sqrt[3]{2}$$

یادآور می‌شویم که $1+2+\dots+8=\frac{8\times 9}{2}=36$. حال داریم:

$$a_2a_4a_6a_8=(a_1q)(a_1q^3)(a_1q^5)(a_1q^7)=a_1^4q^{16}=(a_1q^4)^4=(\sqrt[3]{2})^4=2\sqrt[3]{2}$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

رابطهٔ اندیس‌ها: اگر a_m، a_n، a_p، a_k جملاتی از یک دنبالهٔ هندسی باشند که رابطهٔ $m+n=p+k$ بین اندیس‌ها برقرار باشد، آن‌گاه همواره داریم:

$$\boxed{a_ma_n=a_pa_k}$$

(توجه داشته باشید که از رابطهٔ اندیس‌ها در دنبالهٔ هندسی کم‌تر استفاده می‌شود.)

برای مثال در یک دنبالهٔ هندسی، تساوی‌های زیر برقرارند:

$$a_4a_{10}=a_5a_9=(a_7)^2\ ;\quad a_6a_9a_{15}=a_7a_{10}a_{13}=(a_{10})^3;\quad a_2a_4a_6a_8=(a_5)^4$$

تست: در یک دنبالهٔ هندسی مجموع جملات اول و دوم $\frac{9}{2}$ و مجموع جملات چهارم و پنجم ۳۶ می‌باشد. جملهٔ سوم این دنباله کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

پاسخ:

$$\begin{cases}a_1+a_2=\frac{9}{2}\Rightarrow a_1+a_1q=\frac{9}{2}\\ a_4+a_5=36\Rightarrow a_1q^3+a_1q^4=36\end{cases}\xrightarrow{\text{تقسیم دو رابطه}}\frac{a_1+a_1q}{a_1q^3+a_1q^4}=\frac{\frac{9}{2}}{36}\Rightarrow\frac{\cancel{a_1}\cancel{(1+q)}}{\cancel{a_1}q^3\cancel{(1+q)}}=\frac{\cancel{9}}{2\times\cancel{36}_4}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{q^3}=\frac{1}{8}\Rightarrow q^3=8\Rightarrow q=2$$

حال با توجه به رابطهٔ $a_1+a_1q=\frac{9}{2}$، مقدار a_1 را تعیین می‌کنیم:

$$a_1+a_1q=\frac{9}{2}\xrightarrow{q=2}a_1+2a_1=\frac{9}{2}\Rightarrow 3a_1=\frac{9}{2}\Rightarrow a_1=\frac{3}{2}$$

$$a_3=a_1q^2=\frac{3}{2}(2)^2=6$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

تست: در یک دنبالهٔ عددی (حسابی)، جملات اول، پنجم و یازدهم به ترتیب سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی صعودی‌اند، قدرنسبت این دنباله کدام است؟ ریاضی خارج ۸۷

۱) $\frac{6}{5}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: روش اول: می‌دانیم اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه $b^2=ac$ است. در این تست، جملات اول (a_1)، پنجم (a_1+4d) و یازدهم (a_1+10d) از یک دنبالهٔ حسابی، سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی هستند، پس داریم:

$$(a_1+4d)^2=a_1(a_1+10d)\Rightarrow a_1^2+16d^2+8a_1d=a_1^2+10a_1d\Rightarrow 16d^2=2a_1d\xrightarrow{d\neq 0}a_1=8d$$

جملات متوالی دنبالهٔ هندسی : $a_1,a_1+4d,a_1+10d\xrightarrow{a_1=8d}8d,12d,18d$

می‌دانیم قدرنسبت در دنبالهٔ هندسی، از نسبت هر جمله به جمله قبلی به دست می‌آید، پس $q=\frac{12d}{8d}=\frac{3}{2}$ $(q=\frac{18d}{12d}=\frac{3}{2})$.

روش دوم:

نکته: اگر در یک دنبالهٔ حسابی غیرثابت، جملات mاُم، nاُم و pاُم $(p>n>m)$، به ترتیب جملات متوالی از یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه قدرنسبت دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ $q=\frac{p-n}{n-m}$ به دست می‌آید.

با توجه به نکتهٔ بالا $q=\frac{11-5}{5-1}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

در یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت q، مجموع n جملهٔ اول دنباله از رابطهٔ زیر به دست می‌آید: $(q \neq ۱)$

$$S_n = \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$$

از رابطهٔ بالا در مواردی که $q = ۱$ باشد، نمی‌توان استفاده کرد. بدیهی است در حالتی‌که قدرنسبت برابر ۱ باشد، دنبالهٔ ثابت $a, a, ..., a$ را داریم که مجموع n جملهٔ اول آن از رابطهٔ $S_n = na$ به دست می‌آید.

مثال: در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ اول برابر ۳- و قدرنسبت برابر $\frac{۱}{۲}$ است. الف) وضعیت جملات دنباله از لحاظ صعودی یا نزولی بودن چگونه است؟ ب) مجموع ۸ جملهٔ اول آن را به دست آورید.

پاسخ: **الف)** چون جملهٔ اول منفی و قدرنسبت $۰ < q < ۱$ است، پس دنباله صعودی می‌باشد. البته با نوشتن چند جملهٔ اول آن، این موضوع به سادگی قابل مشاهده است:

$$-۳, -\frac{۳}{۲}, -\frac{۳}{۴}, -\frac{۳}{۸}, ...$$

ب) برای محاسبهٔ $S_۸$ با استفاده از رابطهٔ $S_n = \frac{a(۱-q^n)}{۱-q}$ داریم:

$$S_۸ = \frac{-۳\left(۱-(\frac{۱}{۲})^۸\right)}{۱-\frac{۱}{۲}} = \frac{-۳(۱-\frac{۱}{۲^۸})}{\frac{۱}{۲}} = -۶(۱-\frac{۱}{۲۵۶}) = \overset{-۳}{\cancel{-۶}}\left(\frac{۲۵۵}{\underset{۱۲۸}{\cancel{۲۵۶}}}\right) = -\frac{۷۶۵}{۱۲۸}$$

نکته: در مسائل مربوط به دنباله‌های هندسی، از اعداد توان‌دار زیاد استفاده می‌شود، پس بهتر است برای این‌که سریع‌تر پاسخ بدهید آن‌ها را به خاطر بسپارید:

$$۲^۳ = ۸ \quad , \quad ۲^۴ = ۱۶ \quad , \quad ۲^۵ = ۳۲ \quad , \quad ۲^۶ = ۶۴ \quad , \quad ۲^۷ = ۱۲۸ \quad , \quad ۲^۸ = ۲۵۶ \quad , \quad ۲^۹ = ۵۱۲ \quad , \quad ۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$$

$$۳^۳ = ۲۷ \quad , \quad ۳^۴ = ۸۱ \quad , \quad ۳^۵ = ۲۴۳ \quad , \quad ۴^۳ = ۲^۶ = ۶۴ \quad , \quad ۴^۴ = ۲^۸ = ۲۵۶ \quad , \quad ۴^۵ = ۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$$

$$۵^۳ = ۱۲۵ \quad , \quad ۵^۴ = ۶۲۵ \quad , \quad ۶^۳ = ۲۱۶$$

تست: در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع هشت جملهٔ اول، $\frac{۵}{۴}$ مجموع چهار جملهٔ اول آن است. جملهٔ هفتم چند برابر جملهٔ اول است؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۳۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$ ریاضی داخل ۸۵

پاسخ: با توجه به رابطهٔ $(q \neq ۱)$، $S_n = \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$ داریم:

$$S_۸ = \frac{۵}{۴}S_۴ \Rightarrow \frac{\cancel{a_۱}(۱-q^۸)}{\cancel{۱-q}} = \frac{۵}{۴} \times \frac{\cancel{a_۱}(۱-q^۴)}{\cancel{۱-q}} \Rightarrow ۱-q^۸ = \frac{۵}{۴}(۱-q^۴) \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \cancel{(۱-q^۴)}(۱+q^۴) = \frac{۵}{۴}\cancel{(۱-q^۴)}$$

$$\Rightarrow ۱+q^۴ = \frac{۵}{۴} \Rightarrow q^۴ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow q^۲ = \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{a_۷}{a_۱} = \frac{a_۱q^۶}{a_۱} = q^۶ = (q^۲)^۳ = (\frac{۱}{۲})^۳ = \frac{۱}{۸}$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

نکته: در دنبالهٔ هندسی بین مجموع n جملهٔ اول و مجموع ۲n جملهٔ اول رابطهٔ زیر برقرار است: $(q \neq \pm ۱)$

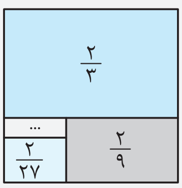
$$\frac{S_{۲n}}{S_n} = q^n + ۱$$

به عنوان مثال، در تست قبل برای تعیین قدرنسبت می‌توان گفت:

$$\frac{S_۸}{S_۴} = q^۴ + ۱ \Rightarrow q^۴ + ۱ = \frac{۵}{۴} \Rightarrow ...$$

تست: طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا $\frac{۲}{۳}$ از مساحت آن را رنگ کرده، سپس $\frac{۲}{۳}$ از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. به‌همین‌ترتیب در هر مرحله $\frac{۲}{۳}$ از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله حداقل ۹۹/۵ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴



پاسخ: **روش اول:** مساحت مربع اولیه برابر ۱ است. در مرحلهٔ اول $\frac{۲}{۳}$ از سطح مربع رنگ می‌شود. در مرحلهٔ دوم $\frac{۲}{۳}$ از $\frac{۱}{۳}$ باقی مانده، یعنی $\frac{۲}{۹}$ رنگ می‌شود، در مرحلهٔ سوم نیز $\frac{۲}{۳}$ از $\frac{۱}{۹}$ باقی مانده، یعنی $\frac{۲}{۲۷}$ رنگ می‌شود و به همین ترتیب، قسمتی از مربع که در هر مرحله رنگ می‌شود، تشکیل یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱ = \frac{۲}{۳}$ و قدرنسبت $q = \frac{۱}{۳}$ می‌دهند:

جملات دنباله: $\frac{۲}{۳}, \frac{۲}{۹}, \frac{۲}{۲۷}, ...$

حال باید مجموع این مساحت‌های رنگ شده، بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{۹۹/۵}{۱۰۰}$ باشد:

$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}=\frac{\frac{۲}{۳}(۱-(\frac{۱}{۳})^n)}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{\cancel{\frac{۲}{۳}}(۱-(\frac{۱}{۳})^n)}{\cancel{\frac{۲}{۳}}}=۱-(\frac{۱}{۳})^n$$

$$S_n\ge\frac{۹۹/۵}{۱۰۰}\Rightarrow ۱-(\frac{۱}{۳})^n\ge\frac{۹۹/۵}{۱۰۰}\Rightarrow(\frac{۱}{۳})^n\le ۱-\frac{۹۹/۵}{۱۰۰}\Rightarrow(\frac{۱}{۳})^n\le\frac{۰/۵}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{۱}{۳^n}\le\frac{۱}{۲۰۰}\Rightarrow ۳^n\ge ۲۰۰\Rightarrow n\ge ۵$$

یعنی از مرحلهٔ پنجم، حداقل ۹۹/۵ درصد مربع رنگ شده است.

روش دوم: به جای این‌که بگوییم مجموع مساحت‌های رنگ‌شده بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{۹۹/۵}{۱۰۰}$ باشد، می‌گوییم باید مساحت قسمت رنگ‌نشده کم‌تر یا مساوی $\frac{۰/۵}{۱۰۰}$ باشد.

در مرحلهٔ اول $\frac{۱}{۳}$، مرحلهٔ دوم $\frac{۱}{۹}$، مرحلهٔ سوم $\frac{۱}{۲۷}$ و به همین ترتیب در مرحلهٔ n اُم، $\frac{۱}{۳^n}$ از مساحت مربع، رنگ نشده است. پس داریم:

$$\frac{۱}{۳^n}\le\frac{۰/۵}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{۱}{۳^n}\le\frac{۱}{۲۰۰}\Rightarrow ۳^n\ge ۲۰۰\Rightarrow n\ge ۵$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

اثبات چند اتحاد مهم به کمک مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

اگر a یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه فرض کنید:

$$S=۱+a+a^۲+\cdots+a^{n-۱}$$

S مجموع جملات دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱=۱$ و قدرنسبت $q=a$ می‌باشد، پس داریم:

$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}\Rightarrow S=\frac{۱(۱-a^n)}{۱-a}=\frac{-(a^n-۱)}{-(a-۱)}=\frac{a^n-۱}{a-۱}\Rightarrow a^n-۱=S(a-۱)\Rightarrow a^n-۱=(۱+a+a^۲+\cdots+a^{n-۱})(a-۱)$$

اگر n عددی فرد باشد، با تبدیل a به $-a$ خواهیم داشت:

$$a^n+۱=(a+۱)(a^{n-۱}-a^{n-۲}+\cdots-a+۱)$$

با توجه به مطالب بالا اتحادهای مهم زیر را می‌توان نتیجه گرفت: $(n\in\mathbb{N})$

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-۱}+x^{n-۲}y+x^{n-۳}y^۲+\cdots+xy^{n-۲}+y^{n-۱})$$

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-۱}-x^{n-۲}y+x^{n-۳}y^۲-\cdots-xy^{n-۲}+y^{n-۱})\qquad (\text{فرد } n)$$

$$x^n-y^n=(x+y)(x^{n-۱}-x^{n-۲}y+x^{n-۳}y^۲-\cdots+xy^{n-۲}-y^{n-۱})\qquad (\text{زوج } n)$$

مثال: حاصل عبارت $A=\frac{(x^۵+۱)(x-۱)}{x^۲-۱}+x^۳+x$ را به‌ازای $x=\sqrt[۴]{۳}$ به‌دست آورید.

پاسخ: با تجزیهٔ عبارت $x^۵+۱$ داریم:

$$A=\frac{\cancel{(x+۱)}(x^۴-x^۳+x^۲-x+۱)\cancel{(x-۱)}}{\cancel{(x-۱)}\cancel{(x+۱)}}+x^۳+x=x^۴-\cancel{x^۳}+x^۲-\cancel{x}+۱+\cancel{x^۳}+\cancel{x}$$

$$=x^۴+x^۲+۱\xlongequal{x=\sqrt[۴]{۳}}۳+\sqrt{۳}+۱=۴+\sqrt{۳}$$

تست: حاصل عبارت $\frac{t^۸-t^۷+t^۶-\cdots-t+۱}{t^۶-t^۳+۱}$ به‌ازای $t=\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲}$ کدام است؟ ریاضی خارج ۹۳

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: **روش اول:** عبارت $A=۱-t+t^۲+\cdots-t^۷+t^۸$، مجموع ۹ جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱=۱$ و قدرنسبت $q=-t$ می‌باشد. بنابراین:

$$A=S_۹=\frac{a_۱(۱-q^۹)}{۱-q}=\frac{(۱-(-t)^۹)}{۱-(-t)}=\frac{۱+t^۹}{۱+t}$$

عبارت $B=۱-t^۳+t^۶$، مجموع ۳ جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱=۱$ و قدرنسبت $q=-t^۳$ می‌باشد. بنابراین:

$$B=S_۳=\frac{a_۱(۱-q^۳)}{۱-q}=\frac{(۱-(-t^۳)^۳)}{۱-(-t^۳)}=\frac{۱+t^۹}{۱+t^۳}\Rightarrow\frac{A}{B}=\frac{۱+t^۳}{۱+t}=\frac{\cancel{(۱+t)}(۱-t+t^۲)}{\cancel{۱+t}}=۱-t+t^۲=۱-\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲}+(\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲})^۲$$

$$=۱-\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲}+\frac{۱۸+۲\sqrt{۱۷}}{۴}=۱+\frac{-۲-۲\sqrt{۱۷}+۱۸+۲\sqrt{۱۷}}{۴}=۱+۴=۵$$

روش دوم: با توجه به اتحادهای گفته‌شده داریم:

$$t^9+1=(t+1)(t^8-t^7+\cdots-t+1)\quad,\quad t^9+1=((t^3)^3+1)=(t^3+1)(t^6-t^3+1)$$

$$\Rightarrow \frac{t^8-t^7+t^6-\cdots-t+1}{t^6-t^3+1}=\frac{\frac{\cancel{t^9+1}}{t+1}}{\frac{\cancel{t^9+1}}{t^3+1}}=\frac{t^3+1}{t+1}=\frac{\cancel{(t+1)}(t^2-t+1)}{\cancel{(t+1)}}=t^2-t+1 \xlongequal{\text{مانند روش اول}} 5$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

دنبالهٔ حسابی و مجموع جملات آن

۱- حاصل $1+3+5+\ldots+(2n-1)$ کدام است؟ کتاب درسی

۱) n^2 ۲) $(n+1)^2$ ۳) $(2n-1)^2$ ۴) n^2-1

۲- بر محیط دایره‌ای ۲۰ نقطهٔ متمایز وجود دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای متمایز به دست آمده کدام است؟ کتاب درسی

۱) ۱۹۰ ۲) ۲۱۰ ۳) ۳۸۰ ۴) ۴۲۰

۳- اگر $1, x, y, \frac{5}{2}$ چهار جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی باشند، مجموع ۱۵ جملهٔ اول این دنباله کدام است؟ ریاضی خارج ۸۶

۱) ۵۷ ۲) ۶۲/۵ ۳) ۶۷/۵ ۴) ۶۸

۴- در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ نوزدهم برابر ۱۰ می‌باشد. مجموع ۳۷ جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) ۳۷۰ ۲) ۱۸۵ ۳) ۲۷۰ ۴) ۱۳۵

۵- در یک دنبالهٔ عددی، جملهٔ هفتم، نصف جملهٔ سوم می‌باشد. مجموع چند جملهٔ اول از این دنباله صفر است؟ ریاضی خارج ۸۸

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

۶- در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع n جملهٔ اول از رابطهٔ $S_n=4n^2+3n$ به‌دست می‌آید. جملهٔ عمومی دنبالهٔ a_n کدام است؟ کتاب درسی

۱) $a_n=8n+1$ ۲) $a_n=8n-1$ ۳) $a_n=4n+3$ ۴) $a_n=4n+1$

۷- جملهٔ چهارم و شانزدهم از یک دنبالهٔ حسابی به‌ترتیب ۱ و ۱۷ می‌باشند. مجموع ۱۳ جملهٔ اول آن کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) ۳۶ ۳) ۵۶ ۴) ۶۵

۸- در دنبالهٔ حسابی $-27, x, -21, \ldots$ مجموع جملات منفی کدام است؟

۱) ۱۳۵- ۲) ۱۵۰- ۳) ۷۵- ۴) ۲۷۰-

۹- در دنبالهٔ حسابی $5, 8, 11, \ldots$ حداقل چند جملهٔ آن را با هم جمع کنیم تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟ کتاب درسی

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

۱۰- بین اعداد ۱۳- و ۷۱، بیست واسطهٔ حسابی درج کرده‌ایم. قدرنسبت دنباله و مجموع این بیست واسطهٔ حسابی به ترتیب از راست به چپ، کدام است؟(۱۳- جملهٔ اول است.)

۱) ۴، ۵۸۰ ۲) ۴، ۵۹۳ ۳) ۳، ۵۸۰ ۴) ۳، ۵۹۳

۱۱- در یک دنبالهٔ عددی مجموع ۲۰ جملهٔ اول، سه برابر مجموع ۱۲ جملهٔ اول آن است. اگر جملهٔ سوم آن برابر ۶ باشد، جملهٔ دهم آن کدام است؟ ریاضی داخل ۹۰

۱) ۳۲ ۲) ۳۴ ۳) ۳۶ ۴) ۳۸

۱۲- در یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a، اگر یک واحد به قدرنسبت افزوده شود، آن‌گاه به مجموع ۲۰ جملهٔ اول چه‌قدر افزوده خواهد شد؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۷۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱۹۰

۱۳- مجموع اعداد طبیعی فرد و بخش‌پذیر بر عدد ۳ که کوچک‌تر از ۱۰۱ می‌باشند، کدام است؟ کتاب درسی

۱) ۸۱۶ ۲) ۸۵۲ ۳) ۸۶۷ ۴) ۸۸۴

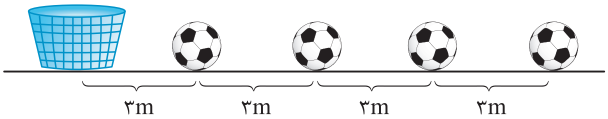
۱۴- مجموع همهٔ اعداد طبیعی سه‌رقمی مضرب ۷ کدام است؟ کتاب درسی

۱) ۳۵۱۶۸ ۲) ۶۹۲۳۷ ۳) ۷۰۴۰۰ ۴) ۷۰۳۳۶

۱۵- مجموع اعداد بین ۲۰ تا ۲۰۰ که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر عدد ۴ برابر ۲ باشد، کدام است؟

۱) ۴۷۵۲ ۲) ۴۹۲۸ ۳) ۴۹۵۰ ۴) ۴۹۹۵

۱۶- مطابق شکل، تعدادی توپ روی یک خط مستقیم و به فاصلهٔ ۳ متر از هم قرار دارند. فاصلهٔ توپ اول تا سبد ۳ متر است. دونده‌ای باید از کنار سبد شروع کرده و هر توپ را برداشته و به سبد بیندازد و مجدداً به طرف توپ بعدی بدود و آن را تا سبد حمل کند و به داخل آن بیندازد. اگر این دونده مجموعاً ۹۱۸ متر دویده باشد، او چند توپ را در سبد انداخته است؟ کتاب درسی



۱) ۱۵
۲) ۱۶
۳) ۱۷
۴) ۱۸

۱۷- مجموع n جملهٔ اول از یک دنبالهٔ حسابی به صورت $S_n=\frac{n(n-۱۵)}{۶}$ می‌باشد. در این دنباله، مجموع جملات با شروع از جملهٔ هفتم و ختم به جملهٔ هجدهم، کدام است؟ ریاضی خارج ۹۰

۱) ۹ ۲) $\frac{۲۹}{۳}$ ۳) $\frac{۴۹}{۳}$ ۴) ۱۸

۱۸- در دنباله‌ای با جملهٔ عمومی $a_n=\frac{n}{۲}-۱$، مجموع جملات متوالی با شروع از جملهٔ دهم و ختم به جملهٔ سی‌اُم کدام است؟

۱) ۱۶۸ ۲) ۱۸۹ ۳) ۱۹۰ ۴) ۲۱۰

۱۹- در یک دنبالهٔ عددی، مجموع ۴ جملهٔ اول برابر ۱۵ و مجموع ۵ جملهٔ بعدی آن برابر ۳۰ می‌باشد. جملهٔ یازدهم این دنباله کدام است؟

۱) ۷/۵ ۲) ۸ ۳) ۸/۵ ۴) ۹ ریاضی خارج ۸۵

۲۰- در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع ۵ جملهٔ اول، $\frac{۱}{۳}$ مجموع ۵ جملهٔ بعدی می‌باشد. جملهٔ دوم چند برابر جملهٔ اول است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱- یک دنبالهٔ حسابی دارای ۴۱ جمله است. اگر مجموع ۵ جملهٔ وسط برابر ۲۰ باشد، مجموع این ۴۱ جمله کدام است؟

۱) ۱۲۳ ۲) ۱۶۴ ۳) ۲۰۵ ۴) ۲۴۶

۲۲- در یک دنبالهٔ حسابی $S_{۱۰}-S_{۷}=۶$ است. حاصل عبارت $a_۶+a_۷+\dots+a_{۱۲}$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۲۳- در بیست جملهٔ اول از یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد. جملهٔ اول کدام است؟ کتاب درسی

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۴- در دو دنبالهٔ حسابی به صورت‌های ...,۲,۴,۶ و ...,۵,۸,۱۱ مجموع جملات مشترک کم‌تر از ۱۰۰ کدام است؟

۱) ۸۴۸ ۲) ۷۵۰ ۳) ۶۵۸ ۴) ۶۴۲

۲۵- در یک دنبالهٔ حسابی، $a_۱=۳+\sqrt{۲}$ و $a_۲=۵+\sqrt{۲}$ است. مجموع چهار جملهٔ چهارم این دنباله چه‌قدر از مجموع چهار جملهٔ دومش بیشتر است؟

۱) ۸ ۲) ۶۴ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۲۶- در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع ۸ جملهٔ اول آن با مجموع ۱۴ جملهٔ اول آن برابر است. مجموع ۲۲ جملهٔ اول دنباله کدام است؟

۱) ۱۴- ۲) ۱۴ ۳) ۲۸ ۴) صفر

۲۷- در دنبالهٔ حسابی ...,۱,۴,۷,۱۰، مجموع جملات چهارم، هشتم، دوازدهم، ... و شصتم کدام است؟

۱) ۱۳۸۰ ۲) ۱۳۹۰ ۳) ۱۴۰۰ ۴) ۱۴۱۰

۲۸- کدام گزینه به ترتیب جملهٔ عمومی و مجموع n جملهٔ اول، یک دنبالهٔ حسابی را نشان می‌دهد؟

۱) $\{۲n^۲+n\},\{۳n-\frac{۱}{۲}\}$ ۲) $\{۲n^۲+۵\},\{۳n-\frac{۱}{۲}\}$ ۳) $\{۲n^۲+n\},\{۳n+\frac{۱}{n}\}$ ۴) $\{۲n^۲+۵\},\{۳n+\frac{۱}{n}\}$

۲۹- اگر $a_n=(p-۲)n^۲+(۲p-۱)n-۵$ جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی باشد، مجموع ده جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) ۹۵ ۲) ۱۱۰ ۳) ۱۱۵ ۴) ۱۲۵

۳۰- مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی از رابطهٔ $S_n=(۲p-۱)n^۳+qn^۲+pn+q+۱$ به‌دست می‌آید. مجموع ۵ جملهٔ دوم این دنباله کدام است؟

۱) ۸۷/۵- ۲) ۸۲/۵- ۳) ۷۷/۵- ۴) ۷۲/۵-

۳۱- در یک دنبالهٔ حسابی ۶۰ جمله‌ای، مجموع ۱۱ جملهٔ اول برابر با ۷۰ و مجموع ۱۱ جملهٔ آخر برابر ۵۱ می‌باشد. مجموع تمام جملات کدام است؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۳۳۰ ۳) ۴۲۰ ۴) ۵۱۰

۳۲- در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع سه جملهٔ اول ۱۵ و مجموع سه جملهٔ آخر برابر ۶۹ است و مجموع تمام جملات ۱۶۸ می‌باشد. این دنباله چند جمله دارد؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۲ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

۳۳- اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملهٔ هر دسته برابر شمارهٔ آن دسته باشد. ...,(۷,۹,۱۱),(۳,۵),(۱) جملهٔ آخر در دستهٔ بیستم کدام است؟ ریاضی خارج ۹۱

۱) ۴۱۵ ۲) ۴۱۹ ۳) ۴۲۱ ۴) ۴۲۳

۳۴- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جملهٔ هر دسته، مجذور کامل باشد. ...,(۵,۶,۷,۸,۹),(۲,۳,۴),(۱) مجموع جملات در دستهٔ دهم کدام است؟ ریاضی خارج ۸۴

۱) ۱۶۹۱ ۲) ۱۷۱۰ ۳) ۱۷۲۹ ۴) ۱۷۴۸

۳۵- در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع ۵ جملهٔ متوالی برابر ۵ و مجموع مربعات آن ۴۵ می‌باشد. جملهٔ وسط این پنج جمله چند برابر مجذور قدرنسبت می‌باشد؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۳۶- اعداد $a_۱,a_۲,a_۳,\cdots,a_{n-۱},a_n$ جملات متوالی تصاعد حسابی هستند. اگر $a_۱=۴$ و $a_n=۱۶۹$ باشند، مجموع $\frac{۱}{\sqrt{a_۱}+\sqrt{a_۲}}+\frac{۱}{\sqrt{a_۲}+\sqrt{a_۳}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{a_{n-۱}}+\sqrt{a_n}}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{n}{۱۲}$ ۲) $\frac{n-۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{n}{۱۵}$ ۴) $\frac{n-۱}{۱۵}$

۳۷- در یک دنبالهٔ عددی جملهٔ دوم ۳ برابر جملهٔ سوم می‌باشد و داریم: $a_n=a_{n+۳}+۹$. مجموع چهار جملهٔ سوم این دنباله کدام است؟

۱) ۸۴- ۲) ۸۲- ۳) ۷۸- ۴) ۷۶-

۳۸- بین دو عدد ۵ و ۵۳، تعدادی عدد طوری قرار می‌دهیم که کل اعداد تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند و تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این اعداد قرار داده شده ۳۶ باشد. مجموع کل اعداد قرار داده شده کدام است؟

۱) ۱۸۷ ۲) ۲۱۰ ۳) ۱۹۷ ۴) ۲۰۳

۳۹- در دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی $a_n=۲n-۱$، حاصل $\frac{۲}{a_۱a_۲}+\frac{۲}{a_۲a_۳}+\frac{۲}{a_۳a_۴}+...+\frac{۲}{a_{۱۲}a_{۱۳}}$ کدام است؟

۱) ۰/۹۲ ۲) ۰/۹۴ ۳) ۰/۹۶ ۴) ۰/۹۸

۴۰- در یک دنبالهٔ حسابی، اگر $S_m=S_n$ $(m\neq n)$، حاصل S_{m+n} کدام است؟

۱) $۴(m+n)$ ۲) $n+S_m$ ۳) $m+S_n$ ۴) صفر

دنبالهٔ هندسی و مجموع جملات آن

۴۱- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع پنج جملهٔ اول برابر ۱۲ و جملهٔ ششم ۲۴ واحد از جملهٔ اول بیشتر می‌باشد. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۴۲- دنبالهٔ هندسی $۲, x, \frac{۱}{۲}, \cdots$ غیرنزولی است. مجموع شش جملهٔ اول آن کدام است؟ ریاضی داخل ۸۶

۱) $\frac{۴۱}{۳۲}$ ۲) $\frac{۲۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱۱}{۸}$ ۴) $\frac{۲۳}{۱۶}$

۴۳- در یک دنبالهٔ هندسی صعودی به‌صورت $..., ۴, a, ۹, b$، مجموع شش جملهٔ اول کدام است؟ ریاضی خارج ۸۹

۱) $۸۱\frac{۳}{۸}$ ۲) $۸۱\frac{۷}{۸}$ ۳) $۸۲\frac{۳}{۸}$ ۴) $۸۳\frac{۱}{۸}$

۴۴- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع سه جملهٔ اول ۱۳۶ و مجموع شش جملهٔ اول آن ۱۵۳ می‌باشد. جملهٔ اول چند برابر جملهٔ پنجم است؟ ریاضی داخل ۸۹

۱) $\frac{۸۱}{۱۶}$ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۶

۴۵- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع ده جملهٔ اول $(۱ + ۴\sqrt{۲})$ برابر مجموع ۵ جملهٔ اول است. در این دنباله، مجموع ۸ جملهٔ اول چند برابر مجموع چهار جملهٔ اول است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) ۱۷

۴۶- در یک دنبالهٔ هندسی نزولی با جملهٔ اول مثبت، بین جملات، رابطهٔ $\frac{a_۱a_۲a_۳}{(a_۴)^۳} = ۶۴$ برقرار است. مجموع شش جملهٔ اول، چند برابر جملهٔ اول است؟

۱) $\frac{۶۳}{۶۴}$ ۲) $\frac{۶۳}{۳۲}$ ۳) $\frac{۶۳}{۱۲۸}$ ۴) $\frac{۶۳}{۱۶}$

۴۷- بین دو عدد ۲ و $۱۶\sqrt{۲}$، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، دنبالهٔ هندسی تشکیل داده‌اند. مجموع این ۸ عدد کدام است؟ ریاضی خارج ۸۸

۱) $۳۰(۲ + \sqrt{۲})$ ۲) $۴۸\sqrt{۲}$ ۳) $۳۰(\sqrt{۲} + ۱)$ ۴) $۳۶(\sqrt{۲} + ۱)$

۴۸- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جملهٔ اول آن برابر ۳ می‌باشد. مجموع شش جملهٔ اول کدام است؟ ریاضی داخل ۸۸

۱) ۱۰/۸ ۲) ۱۱/۲ ۳) ۱۲/۶ ۴) ۱۳/۴

۴۹- برای محافظت از تابش مضر مواد رادیو اکتیویته، لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد مضر ۹۷ درصد کاهش یابد؟ کتاب درسی

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۵۰- طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن و سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. به همین ترتیب در هر مرحله، نیمی از مساحت باقی‌مانده از مرحلهٔ قبل را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله، حداقل ۹۹ درصد سطح مربع، رنگ شده است؟ کتاب درسی

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۵۱- تعداد جملات یک دنبالهٔ هندسی عددی زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟ ریاضی داخل ۹۴

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۲- جملات اول، دوم و ششم از یک دنبالهٔ حسابی، جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی هستند. مجموع ۱۰ جملهٔ اول این دنبالهٔ حسابی چند برابر جملهٔ اول آن است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۵۵ ۴) ۱۴۵

۵۳- در یک دنبالهٔ حسابی جملات اول، پنجم و هفدهم به ترتیب سه جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی هستند. مجموع چهار جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی چند برابر جملهٔ اول آن است؟

۱) ۱۵ ۲) ۴۰ ۳) ۸۵ ۴) ۵۶

۵۴- در خانهٔ اول شطرنج، یک عدد گندم می‌گذاریم. در خانهٔ دوم ۲ گندم، در خانهٔ سوم ۴ گندم و به همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانهٔ قبل گندم قرار می‌دهیم. اگر وزن هر دانهٔ گندم یک گرم باشد، وزن کل گندم‌ها چند گرم می‌شود؟ مقدار آن از ۱۰۰۰ میلیارد تُن بیشتر است یا کم‌تر؟ (صفحهٔ شطرنج ۶۴ خانه دارد.) کتاب درسی

۱) $۱۶^{۱۶} - ۱$، کم‌تر ۲) $۸^{۸} - ۱$، کم‌تر ۳) $۱۶^{۶} - ۱$، بیشتر ۴) $۱۶^{۶} - ۱$، کم‌تر

۵۵- در خانهٔ اول شطرنج یک عدد گندم، در خانهٔ دوم ۲ گندم، در خانهٔ سوم ۴ گندم و به همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانهٔ قبل گندم می‌گذاریم. اگر وزن هر دانهٔ گندم یک گرم باشد، حداقل در چند خانه، گندم قرار داده شود تا میزان کل گندم بیشتر از ۶۴ کیلوگرم باشد؟

۱) ۱۷　۲) ۱۸　۳) ۲۰　۴) ۱۶

۵۶- در دنبالهٔ هندسی $\sqrt{۳}, \sqrt[۴]{۲۴۳}, \dots$ مجموع چهار جملهٔ اول چند برابر مجموع چهار جملهٔ دوم است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$　۲) $\frac{۱}{۹}$　۳) $\frac{۱}{۲۷}$　۴) $\frac{۱}{۸۱}$

۵۷- به ازای یک مقدار x، اعداد $x^۲-۲$ ، $۲x$ و $x^۲+۴$ به ترتیب سه جملهٔ اول از دنبالهٔ هندسی نزولی‌اند. مجموع هفت جملهٔ اول این دنباله کدام است؟ تجربی داخل ۹۳

۱) $\frac{۱۱۷}{۱۶}$　۲) $\frac{۱۲۵}{۱۶}$　۳) $\frac{۶۳}{۴}$　۴) $\frac{۱۲۷}{۸}$

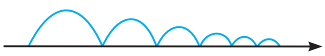
۵۸- توپی را از سطح زمین به هوا پرتاب می‌کنیم به‌طوری که تا ارتفاع ۶۴ متری بالا می‌رود و بعد از هر بار برخورد به زمین به اندازهٔ نصف ارتفاع قبلی بالا می‌رود. در لحظه‌ای که برای دهمین بار به زمین برخورد می‌کند، این توپ چه مسافتی را برحسب متر طی کرده است؟

۱) ۱۲۷/۷۵　۲) ۱۹۱/۷۵　۳) ۲۵۵/۷۵　۴) ۲۶۴/۷۵

۵۹- یک بانک به حساب سپردهٔ مشتری، سالانه ۲۰٪ سود می‌دهد. اگر شخصی دو میلیون تومان سپرده‌گذاری کند، بعد از ۵ سال مقدار موجودی حسابش تقریباً چند میلیون تومان می‌شود؟ (فرض کنید $۱۲^۵ \simeq ۲۵۰۰۰۰$)

۱) ۴　۲) ۴/۵　۳) ۵/۵　۴) ۵

۶۰- موجی بر روی نیم‌دایره‌های بالای یک محور حرکت می‌کند. با قطر اولیهٔ یک واحد، هر بار که به محور برخورد کند، ۲۰ درصد از طول قطر آن کاسته می‌شود. اندازهٔ محیط این نیم‌دایره‌های متوالی دنباله‌ای از اعداد حقیقی است. مجموع ۱۰ جملهٔ اول این دنباله کدام است؟ مشابه ریاضی داخل ۸۴



۱) $\frac{۵\pi}{۲}\left(۱-(\frac{۴}{۵})^۵\right)$　۲) $\frac{۵\pi}{۲}\left(۱-(\frac{۱}{۵})^۵\right)$　۳) $۵\pi\left(۱-(\frac{۴}{۵})^۵\right)$　۴) $۵\pi\left(۱-(\frac{۱}{۵})^۵\right)$

۶۱- در یک دنبالهٔ هندسی که نه صعودی است و نه نزولی، مجموع چهار جملهٔ اول $\frac{۱}{۲۰}$ مجموع جملات پنجم تا دوازدهم می‌باشد. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) $-\sqrt{۲}$　۲) $\sqrt{۲}$　۳) $-\sqrt[۳]{۲}$　۴) $\sqrt[۴]{۲}$

۶۲- سه عدد، جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی‌اند به‌طوری‌که مجموع آن‌ها ۲۱ و مجموع معکوس آن‌ها $\frac{۷}{۱۲}$ است. عدد بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۹　۲) ۱۰　۳) ۱۲　۴) ۱۵

۶۳- در تجزیهٔ $x^۹+x^۳y^۳$ کدام عامل وجود دارد؟

۱) $x^۲-y$　۲) $x^۴+y^۲+x^۲y$　۳) $x^۳+y$　۴) $x^۴+y^۲-x^۲y$

۶۴- در تجزیهٔ عبارت $(x^۳+x^۲+۱)^۹+(x^۳-x^۲+۳)^۹$ کدام عامل وجود دارد؟

۱) $x^۳+۲$　۲) $x^۲-۱$　۳) $۲x^۲-۱$　۴) $۲x^۳+۲$

۶۵- حاصل عبارت $A=\frac{(x^۷+۱)(x-۲)}{x^۲-x-۲}+x^۵+x^۳+x$ به‌ازای $x=\sqrt{۳}$ کدام است؟

۱) ۴۰　۲) ۴۱　۳) ۴۲　۴) ۴۳

۶۶- حاصل $A=(۱+x+x^۲+\dots+x^۸)(۱-x+x^۲-\dots+x^۸)$ به‌ازای $x=\sqrt{۲}$ کدام است؟

۱) ۵۰۷　۲) ۵۱۱　۳) ۵۱۲　۴) ۵۱۶

۶۷- حاصل عبارت $\frac{t^{۱۱}+t^{۱۰}+t^۹+\dots+t+۱}{t^۹+t^۶+t^۳+۱}$ به‌ازای $t=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ کدام است؟ ریاضی داخل ۹۳

۱) ۲　۲) ۳　۳) ۴　۴) ۵

معادلات درجه دوم

معادلهٔ درجهٔ دوم: معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ یک معادلهٔ درجه دوم است. عبارت $\Delta=b^2-4ac$ را دلتای معادله می‌نامیم که با توجه به علامت آن تعداد ریشه‌ها معلوم می‌شود:

۱ اگر $\Delta>0$ باشد، معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است که از رابطهٔ $x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ به‌دست می‌آیند.

۲ اگر $\Delta=0$ باشد، معادله دارای یک ریشهٔ مضاعف (مکرر مرتبهٔ ۲) است که از رابطهٔ $x_0=-\frac{b}{2a}$ به‌دست می‌آید.

۳ اگر $\Delta<0$ باشد، معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

تعیین ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم در حالت خاص: در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر شرایط زیر را داشته باشیم، می‌توان سریع‌تر جواب معادله را تعیین کرد.

۱ اگر $a+b+c=0$ (مجموع ضرایب صفر باشد)، آن‌گاه دو ریشهٔ معادله عبارت است از: $x_1=1$ و $x_2=\frac{c}{a}$

۲ اگر $a+c=b$ باشد، آن‌گاه دو ریشهٔ معادله عبارت است از: $x_1=-1$ و $x_2=-\frac{c}{a}$

طرح یک سؤال: هر یک از معادلات $(x-a)=0$، $(x-a)^2=0$ و $(x-a)^3=0$ چند ریشه دارند؟

$$x-a=0\Rightarrow x=a$$
$$(x-a)^2=0\Rightarrow (x-a)(x-a)=0\Rightarrow x=a$$
$$(x-a)^3=0\Rightarrow (x-a)(x-a)(x-a)=0\Rightarrow x=a$$

در معادلهٔ $x-a=0$ اصطلاحاً می‌گوییم یک ریشهٔ **ساده** دارد. در معادلهٔ $(x-a)^2=0$ چون دارای دو ریشهٔ برابر است، اصطلاحاً می‌گوییم یک ریشهٔ **مضاعف یا مکرر مرتبهٔ ۲** دارد. همچنین $(x-a)^3=0$ در $x=a$ ریشهٔ مکرر مرتبهٔ ۳ دارد. پس باید بگوییم که هر سه معادله، فقط یک ریشه دارند و اختلافشان در نوع ریشه‌ها است نه در تعداد ریشه‌ها.

به تقسیم‌بندی زیر توجه کنید:

- ریشهٔ معادله
  - ساده: مانند $x=a$ برای $x-a=0$
  - مکرر (تکراری)
    - مکرر مرتبهٔ زوج
      - مکرر مرتبهٔ ۲ = مضاعف؛ مانند $x=a$ برای $(x-a)^2=0$
      - مکرر مرتبهٔ ۴؛ مانند $x=a$ برای $(x-a)^4=0$
      - ⋮
    - مکرر مرتبهٔ فرد
      - مکرر مرتبهٔ ۳؛ مانند $x=a$ برای $(x-a)^3=0$
      - مکرر مرتبهٔ ۵؛ مانند $x=a$ برای $(x-a)^5=0$
      - ⋮

ملاحظه می‌شود که به ریشهٔ مکرر مرتبهٔ ۲، ریشهٔ مضاعف می‌گوییم. ویژگی‌های خاص این ریشه را در قسمت‌های بعد خواهید آموخت.

مثال: هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2x^2+3x-2=0\Rightarrow\Delta=3^2-4\times2\times(-2)=25\Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{-3\pm5}{4}=-2,\frac{1}{2}$

ب) $4x^2-4x+1=0\Rightarrow\Delta=(-4)^2-4\times4\times1=0\Rightarrow x=\frac{4\pm0}{8}=\frac{1}{2}$

پ) $x^2+x+1=0\Rightarrow\Delta=1^2-4\times1\times1=-3<0\Rightarrow$ معادله جواب ندارد.

ت) $5x^2-3x-2=0\xRightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است.}}x_1=1,x_2=\frac{c}{a}=-\frac{2}{5}$

ث) $5x^2+3x-2=0\xRightarrow{a+c=b}x_1=-1,x_2=-\frac{c}{a}=\frac{2}{5}$

تست: به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲+(m+۱)x+\frac{۱}{۲}m+۲=۰$، فاقد ریشهٔ حقیقی است؟ تجربی خارج ۸۹

۱) $-۳<m<۵$ ۲) $-۳<m<۴$ ۳) $-۲<m<۴$ ۴) $-۱<m<۵$

پاسخ: زمانی معادلهٔ درجه دوم ریشه ندارد که $\Delta<۰$ باشد:

$$\Delta=(m+۱)^۲-۴(۲)(\frac{۱}{۲}m+۲)<۰\Rightarrow m^۲+۲m+۱-۴m-۱۶<۰\Rightarrow m^۲-۲m-۱۵<۰\Rightarrow(m-۵)(m+۳)<۰\Rightarrow -۳<m<۵$$

برای حل نامعادلهٔ $(m-۵)(m+۳)<۰$ از جدول تعیین علامت استفاده می‌کنیم:

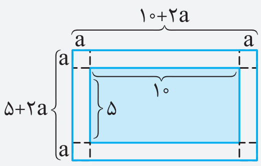
m		-۳		۵	
$(m-۵)(m+۳)$	+	۰	−	۰	+

(جهت یادآوری، تعیین علامت عبارات جبری را در آخر این بخش می‌توانید ملاحظه کنید.)

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

تست: درون یک اتاق مستطیل شکل، فرشی وجود دارد که فاصلهٔ هر طرف آن از دیوارهٔ اتاق، مقدار ثابت a است. اگر ابعاد فرش ۵ و ۱۰ متر و مساحت قسمت‌های فرش نشده ۳۴ مترمربع باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$



پاسخ: مساحت فرش $۵۰=۵\times۱۰$ و مساحت قسمت‌های فرش نشده ۳۴ مترمربع است. پس مساحت اتاق برابر ۸۴ مترمربع می‌باشد. فاصلهٔ هر طرف فرش از دیوارهٔ اتاق، برابر a است، پس طول و عرض اتاق، به ترتیب $۱۰+۲a$ و $۵+۲a$ می‌شود. بنابراین:

$$(۱۰+۲a)(۵+۲a)=۸۴\Rightarrow ۵۰+۲۰a+۱۰a+۴a^۲=۸۴\Rightarrow ۴a^۲+۳۰a-۳۴=۰$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است.}}\begin{cases}a=۱\\ \text{یا}\\ a=-\frac{۳۴}{۴}<۰\ (\text{غ‌ق‌ق})\end{cases}$$

بنابراین $a=۱$ می‌باشد و گزینهٔ (۱) صحیح است.

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

می‌دانیم اگر دلتای معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ مثبت باشد، آن‌گاه معادله دو ریشهٔ متمایز دارد. با فرض آن‌که $\alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}$ و $\beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$ باشد، داریم:

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۲b}{۲a}=\frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\times\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{(-b)^۲-(\sqrt{\Delta})^۲}{۴a^۲}=\frac{b^۲-\Delta}{۴a^۲}=\frac{b^۲-(b^۲-۴ac)}{۴a^۲}=\frac{۴ac}{۴a^۲}=\frac{c}{a}$$

بنابراین اگر معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ دارای دو ریشهٔ α و β باشد، آن‌گاه جمع و ضرب دو ریشه را به کمک روابط زیر تعیین می‌کنیم:

$$\boxed{S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}\quad;\quad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}}$$

قدرمطلق تفاضل دو ریشه را نیز به صورت زیر می‌توان به دست آورد:

$$|\alpha-\beta|=\left|\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}\right|=\left|\frac{-b+\sqrt{\Delta}+b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\right|=\left|\frac{۲\sqrt{\Delta}}{۲a}\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

محاسبهٔ عبارات متقارن برحسب ریشه‌ها: اگر α و β ریشه‌های یک معادلهٔ درجه دوم باشند، معمولاً جهت تعیین مقدار عباراتی که نسبت به α و β متقارن هستند (یعنی با تعویض جای α و β عبارت تغییر نمی‌کند)، ابتدا آن‌ها را برحسب $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$ نوشته و سپس مقدار آن را حساب می‌کنیم. (عباراتی برحسب α و β متقارن هستند که اگر جای α و β را در آن‌ها عوض کنیم، عبارت تغییری نکند، برای مثال $\alpha^۲+\beta^۲$ متقارن است، اما $\alpha^۳+\beta^۲$ متقارن نیست.)

نکته: بین ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم و S و P دو رابطهٔ کاربردی زیر برقرار است:

$$\boxed{\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P\quad;\quad \alpha^۳+\beta^۳=S^۳-۳SP}$$

این دو رابطه به کمک اتحادهای مربع دوجمله‌ای و مکعب دوجمله‌ای به دست آمده‌اند:

$$(\alpha+\beta)^۲=\alpha^۲+\beta^۲+۲\alpha\beta\Rightarrow\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=S^۲-۲P$$

$$(\alpha+\beta)^۳=\alpha^۳+۳\alpha^۲\beta+۳\alpha\beta^۲+\beta^۳=\alpha^۳+\beta^۳+۳\alpha\beta(\alpha+\beta)\Rightarrow\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^۳-۳SP$$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^{۲}-۳x+۱=۰$ باشند، بدون حل معادله، مقدار عددی عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\alpha^{۳}\beta+\alpha\beta^{۳}+\frac{۱}{\alpha^{۳}}+\frac{۱}{\beta^{۳}}$ ب) $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$

پاسخ: الف) باید سعی کنیم عبارت را برحسب S و P بنویسیم:

$$S=\frac{-b}{a}=۳\ ,\ P=\frac{c}{a}=۱$$

$$\alpha\beta(\alpha^{۲}+\beta^{۲})+\frac{\alpha^{۳}+\beta^{۳}}{\alpha^{۳}\beta^{۳}}=P(S^{۲}-۲P)+\frac{S^{۳}-۳SP}{P^{۳}}=۱(۹-۲)+\frac{۲۷-۹}{۱}=۷+۱۸=۲۵$$

ب) عبارت را مساوی A گرفته و طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=A\Rightarrow A^{۲}=\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}=S+۲\sqrt{P}=۳+۲=۵\Rightarrow A=\pm\sqrt{۵}\xrightarrow{A>۰}A=\sqrt{۵}$$

تست: در معادلهٔ $۳x^{۲}-۱۵x+m=۰$، اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشهٔ دیگر بیشتر باشد، m کدام است؟

۱) $\frac{۵۹}{۵}$ ۲) $\frac{۶۳}{۵}$ ۳) $\frac{۵۹}{۴}$ ۴) $\frac{۶۳}{۴}$

پاسخ: اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، آن‌گاه داریم:

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{۱۵}{۳}=۵\quad ,\quad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{m}{۳}$$

از طرفی با توجه به فرض سوال $\alpha=\beta+۲$ است، بنابراین:

$$\alpha+\beta=۵\Rightarrow(\beta+۲)+\beta=۵\Rightarrow ۲\beta=۳\Rightarrow\beta=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{\alpha=\beta+۲}\alpha=\frac{۳}{۲}+۲=\frac{۷}{۲}$$

$$\alpha\beta=\frac{m}{۳}\Rightarrow\frac{۷}{۲}\times\frac{۳}{۲}=\frac{m}{۳}\Rightarrow\frac{۲۱}{۴}=\frac{m}{۳}\Rightarrow m=\frac{۶۳}{۴}$$

پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

نکته: شرط وجود دو ریشه قرینه در معادلهٔ درجه دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$:

$b=۰\ ,\ \Delta>۰$

توضیح: برای وجود دو ریشه باید $\Delta>۰$ باشد و زمانی دو ریشهٔ قرینه (مانند α و $-\alpha$) داریم که جمع دو ریشه یعنی $S=\frac{-b}{a}$ برابر صفر شود، پس $b=۰$ خواهد بود.

نکته: شرط وجود دو ریشهٔ معکوس در معادلهٔ درجه دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$:

$a=c\ ,\ \Delta>۰$

توضیح: برای وجود دو ریشه باید $\Delta>۰$ باشد و زمانی دو ریشهٔ معکوس (مانند α و $\frac{۱}{\alpha}$) داریم که ضرب دو ریشه یعنی $P=\frac{c}{a}$ برابر یک باشد، پس $a=c$ خواهد بود.

تست: به ازای کدام مقدار m، معادلهٔ درجه دوم $mx^{۲}+۵x+m^{۲}-۶=۰$، دو ریشهٔ حقیقی و معکوس هم دارد؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: اگر دو ریشه معکوس هم باشند، ضرب دو ریشه برابر یک می‌شود، بنابراین:

$$P=\frac{c}{a}=۱\Rightarrow\frac{m^{۲}-۶}{m}=۱\Rightarrow m^{۲}-m-۶=۰\Rightarrow(m-۳)(m+۲)=۰\Rightarrow m=۳\ ,\ m=-۲$$

اما باید شرط $\Delta>۰$ نیز برقرار باشد، بنابراین:

$m=-۲\Rightarrow -۲x^{۲}+۵x-۲=۰\xrightarrow{\Delta>۰}$ $m=-۲$ قابل قبول است. ; $m=۳\Rightarrow ۳x^{۲}+۵x+۳=۰\xrightarrow{\Delta<۰}$ $m=۳$ قابل قبول نیست.

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست: به ازای کدام مقدار k بین دو ریشهٔ معادلهٔ $x^{۲}-kx+۸=۰$ رابطهٔ $\sqrt[۳]{\alpha}+\sqrt[۳]{\beta}=۳$ برقرار است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

پاسخ: می‌دانیم $S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=k$ و $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=۸$. حال به کمک اتحاد $(a+b)^{۳}=a^{۳}+b^{۳}+۳ab(a+b)$ دو سمت رابطهٔ $\sqrt[۳]{\alpha}+\sqrt[۳]{\beta}=۳$ را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$(\sqrt[۳]{\alpha}+\sqrt[۳]{\beta})^{۳}=۳^{۳}\Rightarrow\alpha+\beta+۳\sqrt[۳]{\alpha\beta}\,(\sqrt[۳]{\alpha}+\sqrt[۳]{\beta})=۲۷\Rightarrow S+۳\sqrt[۳]{P}\,(۳)=۲۷$$

$$\Rightarrow k+۳\sqrt[۳]{۸}\,(۳)=۲۷\Rightarrow k+۱۸=۲۷\Rightarrow k=۹$$

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

محاسبهٔ عبارات نامتقارن برحسب ریشه‌ها: می‌دانیم همواره ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، مثلاً اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، آن‌گاه $a\alpha^۲+b\alpha+c=۰$ و $a\beta^۲+b\beta+c=۰$ است. در محاسبهٔ عباراتی که برحسب α و β متقارن نیستند، معمولاً از این ویژگی صدق کردن ریشه‌ها استفاده می‌شود.

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۴x+۱=۰$ باشند، حاصل $\alpha^۲(۴\beta-۱)$ را به‌دست آورید.

پاسخ: β ریشهٔ معادله است و در معادله صدق می‌کند، بنابراین $\beta^۲-۴\beta+۱=۰$ و در نتیجه $\beta^۲=۴\beta-۱$، پس داریم:

$$\alpha^۲(۴\beta-۱)=\alpha^۲\beta^۲=(\alpha\beta)^۲=P^۲ \xlongequal{P=\frac{c}{a}=۱} (۱)^۲=۱$$

تست: در معادلهٔ درجه دوم $x^۲+۲x-۴=۰$، حاصل $x_۱^۳-۲x_۲^۲+۴x_۲$ کدام است؟ ($x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌اند.)

۱) -۱۶ ۲) صفر ۳) ۱۶ ۴) -۳۲

پاسخ: اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله باشند، آن‌گاه $x_۱+x_۲=S=\frac{-b}{a}=-۲$ و $x_۱x_۲=P=\frac{c}{a}=-۴$. حال $x_۲$ را در معادله صدق می‌دهیم:

$$x_۲^۲+۲x_۲-۴=۰\Rightarrow x_۲^۲=-۲x_۲+۴ \quad (*)$$

$$x_۱^۳-۲x_۲^۲+۴x_۲=x_۱^۳+x_۲(-۲x_۲+۴)\xlongequal{(*)} x_۱^۳+x_۲(x_۲^۲)=x_۱^۳+x_۲^۳=S^۳-۳SP=(-۲)^۳-۳(-۲)(-۴)=-۳۲$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

بحث در علامت ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم: در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ اگر $\Delta>۰$ باشد، معادله دو ریشه دارد. برای تعیین علامت ریشه‌ها از مطلب زیر استفاده می‌کنیم:

$\Delta>۰$:
- $P>۰$: معادله دو ریشهٔ هم‌علامت دارد.
  - $S>۰$: دو ریشهٔ مثبت دارد.
  - $S<۰$: دو ریشهٔ منفی دارد.
- $P<۰$: معادله دو ریشهٔ غیر هم‌علامت دارد.
  - $S>۰$: از لحاظ قدرمطلق ریشهٔ مثبت، بزرگ‌تر است.
  - $S<۰$: از لحاظ قدرمطلق ریشهٔ منفی بزرگ‌تر است.

تذکر: فراموش نشود که $S=-\frac{b}{a}$ و $P=\frac{c}{a}$ زمانی مفهوم جمع و ضرب دارند که Δ مثبت باشد، پس باید قبل از تعیین S و P از مثبت بودن Δ مطمئن بود. فقط در حالتی که $P=\frac{c}{a}<۰$ باشد، دیگر نیازی به تعیین علامت Δ نیست؛ زیرا در این حالت، چون a و c غیر هم‌علامت می‌شوند $ac<۰$ و در نتیجه $\Delta=b^۲-۴ac$ همواره مثبت خواهد بود:

$$\Delta=\underbrace{b^۲}_{\oplus\text{ یا صفر}}+\underbrace{(-۴\overbrace{ac}^{\ominus})}_{\oplus}>۰$$

در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ اگر $\Delta=۰$ باشد، معادله یک ریشهٔ مضاعف دارد که مقدار این ریشه برابر $x=\frac{-b}{۲a}$ می‌باشد. بدیهی است که اگر $\frac{-b}{۲a}>۰$، معادله یک ریشهٔ مضاعف مثبت و اگر $\frac{-b}{۲a}<۰$، معادله یک ریشهٔ مضاعف منفی دارد.

تست: به ازای کدام مجموعه مقادیر a، معادلهٔ $ax^۲+(a+۳)x-۱=۰$ دو ریشهٔ منفی دارد؟

۱) $a<-۹$ ۲) $a<-۳$ ۳) $a>-۱$ ۴) $-۳<a<۰$

پاسخ: زمانی معادلهٔ درجه دوم، دو ریشهٔ منفی دارد که $\Delta>۰$، $S<۰$ و $P>۰$ باشد:

$$\Delta>۰\Rightarrow(a+۳)^۲+۴a>۰\Rightarrow a^۲+۱۰a+۹>۰\Rightarrow(a+۱)(a+۹)>۰\Rightarrow a<-۹ \text{ یا } a>-۱$$

$$S<۰\Rightarrow\frac{-(a+۳)}{a}<۰\Rightarrow a<-۳ \text{ یا } a>۰ \quad , \quad P>۰\Rightarrow\frac{-۱}{a}>۰\Rightarrow a<۰$$

از اشتراک جواب‌های به دست آمده، محدودهٔ جواب به صورت $a<-۹$ می‌باشد، بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

تشکیل معادلهٔ درجه دوم از روی ریشه‌ها: تا این‌جا روش به دست آوردن ریشه‌های یک معادلهٔ درجه دوم را یاد گرفتیم. اکنون می‌خواهیم با در اختیار داشتن ریشه‌ها، معادلهٔ درجه دوم را بسازیم.

برای نوشتن معادلهٔ درجه دومی که دو ریشهٔ α و β دارد، کافی است مقادیر جمع و ضرب ریشه‌ها (S و P) را تعیین کرده و در معادلهٔ $x^۲-Sx+P=۰$ قرار دهیم. زیرا:

$$ax^۲+bx+c=۰\xrightarrow{\div a}x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=۰\Rightarrow x^۲-(-\frac{b}{a})x+\frac{c}{a}=۰\Rightarrow x^۲-Sx+P=۰$$

نکته: اگر α و β ریشه‌های یک معادلهٔ درجه دوم باشند، آن‌گاه معادله را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\boxed{(x-\alpha)(x-\beta)=0}$$

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0 \Leftrightarrow x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \Leftrightarrow x^2-Sx+P=0$$

مثال: معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ باشند. کتاب درسی

پاسخ: اگر فرض کنیم $\alpha=\frac{1}{3}$ و $\beta=\frac{2}{3}$، آن‌گاه:

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1 \\ P=\alpha\beta=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9} \end{cases} \xrightarrow{x^2-Sx+P=0} x^2-x+\frac{2}{9}=0$$

توجه داشته باشید که برای حل این مثال، معادلهٔ مورد نظر را به صورت $(x-\frac{1}{3})(x-\frac{2}{3})=0$ نیز می‌توان نوشت که با ضرب دو پرانتز و ساده کردن آن به جواب $x^2-x+\frac{2}{9}=0$ می‌رسیم.

تشکیل معادلهٔ درجه دوم جدید: هرگاه معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ را داشته باشیم و بخواهیم معادلهٔ درجه دوم جدیدی تشکیل دهیم که ریشه‌هایش با ریشه‌های معادلهٔ اول رابطه‌ای خاص داشته باشند، ابتدا S' و P' (جمع و ضرب ریشه‌ها) را برای معادلهٔ جدید به‌دست آورده و سپس با قرار دادن در رابطهٔ $x^2-S'x+P'=0$ معادلهٔ مطلوب را به‌دست می‌آوریم.

تست: معادلهٔ درجه دومی که ریشه‌هایش به‌ترتیب ۹ برابر ریشه‌های معادلهٔ $x^2+x-3=0$ باشد، کدام است؟

۱) $x^2+9x-243=0$
۲) $x^2+9x-27=0$
۳) $x^2+18x-243=0$
۴) $x^2+18x-27=0$

پاسخ: اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^2+x-3=0$ را α و β درنظر بگیریم، آن‌گاه $S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=-1$ و $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-3$ است. از طرفی ریشه‌های معادلهٔ مطلوب 9α و 9β است. بنابراین:

$$S'=9\alpha+9\beta=9(\alpha+\beta)=9S=-9 \quad \text{و} \quad P'=9\alpha\times9\beta=81\alpha\beta=81P=81(-3)=-243$$

بنابراین معادله به‌صورت $x^2+9x-243=0$ درمی‌آید و در نتیجه گزینهٔ (۱) صحیح است.

تست: ریشه‌های معادلهٔ $x^2-x=a$ از دو برابر ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-3x=1$ یک واحد کم‌تر است. a کدام است؟

۱) -4
۲) -2
۳) 3
۴) 4

پاسخ: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-3x-1=0$ باشند، آن‌گاه $S=\alpha+\beta=\frac{3}{2}$ و $P=\alpha\beta=\frac{-1}{2}$ است. در معادلهٔ $x^2-x-a=0$ نیز جمع و ضرب دو ریشه برابر $S'=1$ و $P'=-a$ می‌باشد. از طرفی طبق فرض سؤال، ریشه‌های این معادله $2\alpha-1$ و $2\beta-1$ است. حال برای محاسبهٔ a کافی است، مقدار P' را تعیین کنیم:

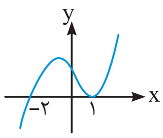
$$P'=(2\alpha-1)(2\beta-1)=-a \Rightarrow 4\alpha\beta-2\alpha-2\beta+1=-a \Rightarrow 4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1=-a$$

$$\Rightarrow 4(-\frac{1}{2})-2(\frac{3}{2})+1=-a \Rightarrow -4=-a \Rightarrow a=4$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

صفرهای تابع: برای تابع $f(x)$، جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$ را در صورت وجود، صفرهای تابع f می‌نامیم. صفرهای تابع f مقادیری از x هستند که به ازای آن‌ها $f(x)$ صفر می‌شود. اگر نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم، صفرهای f ، طول نقاط **تلاقی** یا **تماس** نمودار با محور طول‌ها است.

برای مثال اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، آن‌گاه صفرهای تابع برابر -2 و 1 می‌باشند، زیرا $x=1$ طول نقطهٔ تلاقی و $x=-2$ طول نقطهٔ تماس نمودار $y=f(x)$ با محور طول‌ها است. -2 و 1 ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ محسوب می‌شوند.



نکته: اگر $x=a$ یکی از صفرهای تابع $f(x)$ باشد، در این حالت $x=a$ ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=0$ است و در نتیجه $(x-a)$ را یک **فاکتور** یا **عامل** $f(x)$ می‌نامند. برای به دست آوردن فاکتور یا فاکتورهای دیگر آن باید $f(x)$ را بر $(x-a)$ تقسیم کنیم. چنان‌چه همهٔ صفرهای تابع را بخواهیم تعیین کنیم، باید تمامی فاکتورها را مساوی صفر قرار دهیم.

مثال: اگر $x=۲$ یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^۳-x^۲-۴x+۴$ باشد، سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید. کتاب درسی

پاسخ: در تابع $f(x)=x^۳-x^۲-۴x+۴$ چون $f(۲)=۰$ است، پس $(x-۲)$ یک فاکتور یا عامل $f(x)$ محسوب می‌شود. برای تعیین عامل‌های دیگر باید $f(x)$ را بر $(x-۲)$ تقسیم کرد:

$$
\begin{array}{l|l}
x^۳-x^۲-۴x+۴ & x-۲ \\ \cline{2-2}
-x^۳+۲x^۲ & x^۲+x-۲ \\ \cline{1-1}
\quad x^۲-۴x+۴ & \\
\quad -x^۲+۲x & \\ \cline{1-1}
\qquad -۲x+۴ & \\
\qquad ۲x-۴ & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad ۰ &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow f(x)=(x-۲)(x^۲+x-۲)=(x-۲)(x+۲)(x-۱)\xrightarrow{f(x)=۰}x=۲,x=-۲,x=۱$$

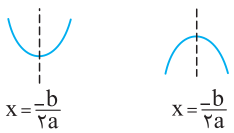
در نتیجه ریشه‌های معادله یا همان صفرهای تابع، عبارت است از: ۱، ۲- و ۲.

نمودار تابع درجه دوم

در تابع درجه دوم به شکل کلی $f(x)=ax^۲+bx+c \ \ (a\neq ۰)$ به نکات زیر توجه کنید:

۱ نمودار این تابع یک سهمی قائم است و علامت a جهت سهمی را تعیین می‌کند. اگر $a>۰$ باشد، (انحنای) سهمی رو به بالا است و در نتیجه نمودار، مینیمم دارد و اگر $a<۰$ باشد، (انحنای) سهمی رو به پایین است و در نتیجه نمودار، ماکزیمم دارد.

۲ خط عمودی به معادلهٔ $x=\frac{-b}{۲a}$، محور تقارن سهمی است.



۳ نقطهٔ رأس سهمی (S) محل برخورد نمودار با محور تقارن است، بنابراین طول آن $x=\frac{-b}{۲a}$ می‌باشد. برای به دست آوردن عرض نقطهٔ رأس، این طول را به جای x در تابع قرار می‌دهیم و با محاسبهٔ $f(\frac{-b}{۲a})$ به مقدار $\frac{-\Delta}{۴a}$ خواهیم رسید. پس می‌توان گفت مختصات نقطهٔ رأس سهمی $S(\frac{-b}{۲a},\frac{-\Delta}{۴a})$ می‌باشد. کاملاً مشخص است که نقطهٔ رأس سهمی، همان نقطهٔ ماکزیمم یا مینیمم تابع است.

مثال: مقدار ماکزیمم تابع $f(x)=-x^۲+۴x+۱$ را به دست آورید.

پاسخ: منظور از ماکزیمم تابع، عرض نقطهٔ ماکزیمم یا همان عرض نقطهٔ رأس سهمی می‌باشد. برای پیدا کردن عرض نقطهٔ رأس یا باید $y_S=-\frac{\Delta}{۴a}$ را حفظ بود یا باید مقدار تابع را به ازای $x_S=\frac{-b}{۲a}$ به‌دست آورد:

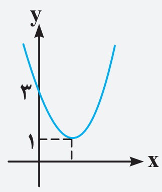
روش اول:

$$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۴}{-۲}=۲\Rightarrow f(۲)=-۴+۸+۱=۵$$

روش دوم:

$$y_S=\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{-(b^۲-۴ac)}{۴a}=\frac{-(۱۶+۴)}{-۴}=\frac{۲۰}{۴}=۵$$

تست: اگر نمودار $f(x)=۲x^۲+bx+c$ به صورت روبه‌رو باشد، مقدار b کدام است؟



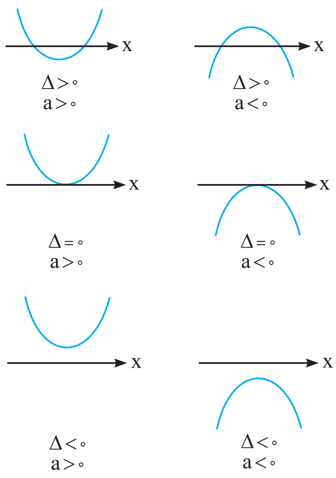
۱) ۴
۲) ۴-
۳) ۲
۴) ۲-

پاسخ: نمودار تابع از نقطهٔ $(۰,۳)$ می‌گذرد، پس $f(۰)=۳$ و در نتیجه $c=۳$ می‌شود. همچنین عرض نقطهٔ رأس سهمی برابر ۱ است، بنابراین داریم:

$$f(x)=۲x^۲+bx+۳\Rightarrow x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-b}{۴}\Rightarrow f(\frac{-b}{۴})=۲(\frac{b^۲}{۱۶})-\frac{b^۲}{۴}+۳=۱\Rightarrow\frac{-b^۲}{۸}=-۲\Rightarrow b^۲=۱۶\Rightarrow b=\pm ۴$$

چون طول رأس سهمی مثبت است، پس $\frac{-b}{۴}>۰$ و از آن‌جا b منفی می‌شود. بنابراین $b=-۴$ بوده و گزینهٔ (۲) صحیح است.

وضعیت نمودار تابع درجه دوم نسبت به محور طول‌ها: در نمودار تابع درجه دوم بستگی به علامت Δ و a حالت‌های مختلف زیر را داریم:



۱ اگر $\Delta > ۰$ باشد، نمودار تابع محور xها را در ۲ نقطه قطع می‌کند.

۲ اگر $\Delta = ۰$ باشد، نمودار تابع بر محور xها مماس است.

۳ اگر $\Delta < ۰$ باشد، نمودار تابع و محور xها نقطهٔ مشترک ندارند.

نکات:

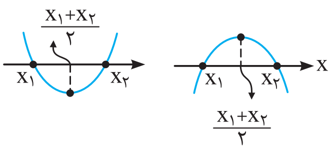
از نمودارهای بالا نکات زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

۱ شرط همواره مثبت بودن تابع درجه دوم $a > ۰$ و $\Delta < ۰$ است.

۲ شرط همواره منفی بودن تابع درجه دوم $a < ۰$ و $\Delta < ۰$ است.

۳ شرط همواره نامنفی بودن تابع درجه دوم $a > ۰$ و $\Delta \leq ۰$ است.

۴ شرط همواره نامثبت بودن تابع درجه دوم $a < ۰$ و $\Delta \leq ۰$ است.



نکته: در تابع درجه دوم اگر $\Delta > ۰$ باشد، طول رأس سهمی، وسط صفرهای تابع است. یعنی اگر نمودار تابع درجه دوم محور xها را در نقاط $x_۱$ و $x_۲$ قطع کند، طول نقطهٔ رأس سهمی $x = \frac{x_۱ + x_۲}{۲}$ می‌باشد.

مثال: اگر صفرهای تابع $f(x) = -x^۲ + bx + c$ برابر ۲ و ۳- باشد، طول رأس سهمی را تعیین کنید.

پاسخ: با توجه به نکتهٔ قبل، طول رأس سهمی (S) وسط صفرهای تابع است، پس $x_S = \frac{x_۱ + x_۲}{۲} = \frac{-۳+۲}{۲} = -\frac{۱}{۲}$

تست: به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y = (m+۲)x^۲ - ۲mx + ۱$ همواره بالای محور xها است؟ ریاضی خارج ۸۵

۱) $m > -۲$ ۲) $-۲ < m < -۱$ ۳) $-۲ < m < ۲$ ۴) $-۱ < m < ۲$

پاسخ: چون نمودار تابع، بالای محور xها است، پس این تابع، همواره مثبت است، در نتیجه باید Δ منفی و ضریب $x^۲$ مثبت باشد:

$$\begin{cases} x^۲ \text{ ضریب } > ۰ \Rightarrow m+۲>۰ \Rightarrow m > -۲ \quad (۱) \\ \Delta < ۰ \Rightarrow ۴m^۲ - ۴(m+۲) < ۰ \Rightarrow ۴m^۲ - ۴m - ۸ < ۰ \xRightarrow{\div ۴} m^۲ - m - ۲ < ۰ \Rightarrow (m+۱)(m-۲) < ۰ \Rightarrow -۱ < m < ۲ \quad (۲) \end{cases}$$

از اشتراک (۱) و (۲) مجموعه جواب به صورت $-۱ < m < ۲$ می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

روش رسم نمودار تابع درجه دوم: برای رسم نمودار یک تابع درجه دوم به صورت $f(x) = ax^۲ + bx + c$ معمولاً مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱ جهت سهمی را معلوم می‌کنیم، اگر $a > ۰$، سهمی رو به بالا و اگر $a < ۰$، سهمی رو به پایین است.

۲ Δ را محاسبه می‌کنیم و در صورتی که مثبت یا صفر باشد، صفرهای تابع را مشخص می‌کنیم.

۳ مختصات نقطهٔ رأس سهمی $S(-\frac{b}{۲a}, \frac{-\Delta}{۴a})$ را تعیین می‌کنیم.

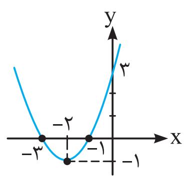
۴ نقطهٔ تلاقی نمودار با محور عرض‌ها را به دست می‌آوریم.

مثال: نمودار تابع $f(x) = x^۲ + ۴x + ۳$ را رسم کنید و مختصات رأس سهمی و معادلهٔ محورتقارن آن را مشخص نمایید. کتاب درسی

پاسخ: چون $a = ۱ > ۰$، پس سهمی رو به بالا است و چون $f(۰) = ۳$، پس نمودار، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند. حال صفرهای تابع و مختصات رأس سهمی را معلوم می‌کنیم:

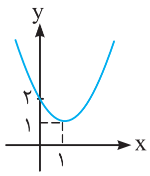
مختصات رأس سهمی $x_S = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۴}{۲} = -۲ \Rightarrow f(-۲) = ۴ - ۸ + ۳ = -۱ \Rightarrow S(-۲, -۱)$

صفرهای تابع $f(x) = ۰ \Rightarrow (x+۱)(x+۳) = ۰ \Rightarrow x = -۱, x = -۳$



ملاحظه می‌شود که خط به معادلهٔ $x = -۲$ محور تقارن این سهمی است.

مثال: نمودار تابع $f(x)=x^۲-۲x+۲$ را رسم کنید.



پاسخ: چون $a=۱>۰$، پس سهمی رو به بالا است و چون $f(۰)=۲$، پس نمودار، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع می‌کند. هم‌چنین علامت Δ منفی است، بنابراین نمودار محور xها را قطع نمی‌کند. حال مختصات رأس سهمی را معلوم می‌کنیم.

$$x_S=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۲}{۲}=۱\Rightarrow f(۱)=۱\Rightarrow S(۱,۱)$$

نکته: اگر $x_۱$ و $x_۲$ صفرهای تابع درجه دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ باشند، آن‌گاه:

$$\boxed{ax^۲+bx+c=a(x-x_۱)(x-x_۲)}$$

دلیل این نکته را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

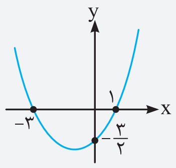
$$a(x-x_۱)(x-x_۲)\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}}a(x^۲-(x_۱+x_۲)x+x_۱x_۲)=a(x^۲-Sx+P)$$

$$=a\left(x^۲-(\frac{-b}{a})x+\frac{c}{a}\right)=ax^۲+bx+c$$

نکته: در تابع درجه دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ اگر $x_۱$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $f(x)=۰$ باشد، آن‌گاه:

$$ax^۲+bx+c=a(x-x_۱)^۲$$

تست: اگر نمودار سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ به صورت زیر باشد، مقدار $۴a^۲+b$ کدام است؟ کتاب درسی



۱) ۱۸ ۲) ۱۷

۳) ۵ ۴) ۲

پاسخ: **روش اول:** چون $x_۱=-۳$ و $x_۲=۱$ صفرهای تابع هستند، با استفاده از نکات قبل داریم:

$$f(x)=ax^۲+bx+c=a(x+۳)(x-۱)$$

می‌دانیم نمودار تابع از نقطهٔ $(۰,\frac{-۳}{۲})$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند:

$$\frac{-۳}{۲}=a(۰+۳)(۰-۱)\Rightarrow\frac{-۳}{۲}=-۳a\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

معادلهٔ سهمی به صورت $f(x)=\frac{۱}{۲}(x+۳)(x-۱)$ می‌باشد که پس از ساده‌سازی به صورت $f(x)=\frac{۱}{۲}x^۲+x-\frac{۳}{۲}$ نوشته می‌شود.

بنابراین $۴a^۲+b=۴(\frac{۱}{۴})+۱=۲$.

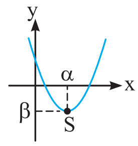
روش دوم: از آن‌جاکه $f(۰)=-\frac{۳}{۲}$، می‌توان گفت $c=-\frac{۳}{۲}$ و در نتیجه $f(x)=ax^۲+bx-\frac{۳}{۲}$ است، حال از روابط بین صفرهای تابع استفاده می‌کنیم:

$$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}\Rightarrow(-۳)(۱)=\frac{\frac{-۳}{۲}}{a}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\ ,\ S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}\Rightarrow(-۳)+۱=\frac{-b}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow b=۱\Rightarrow ۴a^۲+b=۴(\frac{۱}{۴})+۱=۲$$

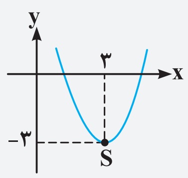
بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

نکته: اگر مختصات رأس سهمی $S(\alpha,\beta)$ باشد، معادلهٔ تابع را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$f(x)=ax^۲+bx+c=a(x-\alpha)^۲+\beta$$



تست: اگر نمودار سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ که در آن $|a|=۱$ است به صورت زیر باشد، مقدار bc کدام است؟ کتاب درسی



۱) ۴۲- ۲) ۴۲

۳) ۳۶- ۴) ۳۶

پاسخ: **روش اول:** جهت سهمی رو به بالا بوده و در نتیجه a مثبت می‌شود، بنابراین از $|a|=۱$ نتیجه می‌گیریم $a=۱$ است. مختصات رأس سهمی $S(۳,-۳)$ است، با توجه به نکتهٔ قبل داریم:

$$ax^۲+bx+c=a(x-۳)^۲-۳\xrightarrow{a=۱}(x-۳)^۲-۳=x^۲-۶x+۶$$

بنابراین $b=-۶$ و $c=۶$ و از آن‌جا $bc=-۳۶$ می‌شود.

روش دوم: مانند روش قبل $a=۱$ می‌شود. از طرفی طول رأس سهمی برابر ۳ می‌باشد، پس داریم:

$$\frac{-b}{۲a}=۳\Rightarrow b=-۶a\xrightarrow{a=۱}b=-۶$$

نمودار از نقطهٔ $(۳,-۳)$ می‌گذرد:

$$f(۳)=-۳\Rightarrow ۹a+۳b+c=-۳\xrightarrow[b=-۶]{a=۱}۹-۱۸+c=-۳\Rightarrow c=۶\Rightarrow bc=-۳۶$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

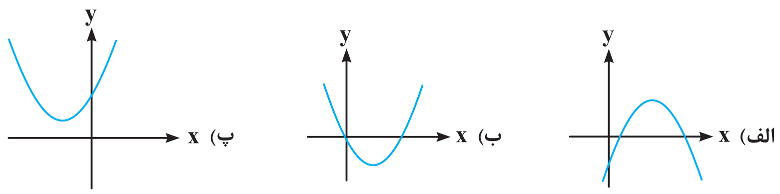
بحث در علامت پارامترهای a، b و c از روی نمودار تابع: در قسمت‌های قبل از روی ضابطهٔ تابع درجه دوم، نمودار و ویژگی‌های آن را مشخص کردیم، در این‌جا از روی نمودار تابع می‌خواهیم علامت پارامترهای a، b و c را معلوم کنیم. برای این منظور مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱ اگر سهمی رو به بالا باشد $a>0$ و اگر رو به پایین باشد $a<0$ است.

۲ اگر طول رأس سهمی، سمت چپ محور yها باشد، $\frac{-b}{2a}<0$ و اگر سمت راست باشد، $\frac{-b}{2a}>0$ و اگر روی محور yها باشد، $\frac{-b}{2a}=0$ است. چون در قسمت ۱ علامت a را مشخص کردیم، پس در این مرحله می‌توانیم علامت b را تعیین کنیم.

۳ عرض از مبدأ یا همان عرض نقطهٔ تلاقی سهمی با محور عرض‌ها، اگر بالای محور xها باشد، $c>0$، اگر پایین باشد، $c<0$ و اگر نمودار از مبدأ عبور کند، $c=0$ است.

مثال: اگر هر یک از شکل‌های زیر، نمودار سهمی به معادلهٔ $f(x)=ax^2+bx+c$ باشد، علامت پارامترهای a ، b و c را برای هر کدام مشخص کنید.



پاسخ: **الف)** سهمی رو به پایین است، پس a منفی می‌شود. نقطهٔ تلاقی سهمی با محور عرض‌ها زیر محور xها است، پس $c<0$ می‌شود. هم‌چنین رأس سهمی، سمت راست محور yها است، پس طول رأس، مثبت می‌شود:

$$\frac{-b}{2a}>0 \Rightarrow \frac{b}{2a}<0 \xRightarrow{a<0} b>0$$

ب) سهمی رو به بالا است، پس a مثبت می‌شود. منحنی از مبدأ گذشته، پس $c=0$ است. هم‌چنین رأس سهمی، سمت راست محور yها است، پس طول رأس، مثبت می‌شود:

$$\frac{-b}{2a}>0 \Rightarrow \frac{b}{2a}<0 \xRightarrow{a>0} b<0$$

پ) سهمی رو به بالا است، پس a مثبت می‌شود. نقطهٔ تلاقی سهمی با محور عرض‌ها، بالای محور xها است، پس $c>0$ می‌شود. هم‌چنین رأس سهمی، سمت چپ محور yها است، بنابراین طول رأس، منفی می‌شود:

$$\frac{-b}{2a}<0 \Rightarrow \frac{b}{2a}>0 \xRightarrow{a>0} b>0$$

بحث در گذشتن یا نگذشتن نمودار تابع درجه دوم از ناحیه‌های محور مختصات: در بعضی از سؤال‌ها باید معلوم کنیم که یک تابع درجه دوم با چه شرطی از چه نواحی محور مختصات می‌گذرد یا نمی‌گذرد. برای این منظور باید جهت سهمی (به کمک علامت ضریب x^2)، داشتن یا نداشتن ریشه (به کمک علامت Δ) و در صورت وجود، علامت ریشه‌ها (به کمک S و P) را مورد بررسی قرار داد.

نکته: در نمودار تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ اگر $a>0$ باشد، قطعاً از نواحی اول و دوم عبور می‌کند و اگر $a<0$ باشد، قطعاً از نواحی سوم و چهارم عبور می‌کند.

نکته: نمودار تابع درجه دوم، زمانی از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات عبور می‌کند که $P=\frac{c}{a}<0$ باشد، زیرا در این حالت معادلهٔ $f(x)=0$ دو ریشهٔ غیر هم‌علامت دارد.

مثال: بررسی کنید سهمی $y=ax^2+bx+c$ در چه حالتی از ناحیهٔ اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

پاسخ: اولین شرط این سؤال آن است که سهمی رو به پایین باشد، پس باید a منفی باشد. در مورد علامت Δ دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر $\Delta\le 0$ باشد، سهمی از ناحیهٔ اول نمی‌گذرد (زیرا پایین محور xها یا مماس بر محور xها می‌شود.)

حالت دوم: اگر $\Delta>0$ باشد، چون معادله، دو ریشه دارد، زمانی از ناحیهٔ اول نمی‌گذرد که ریشهٔ مثبت نداشته باشد. $(S<0, P>0)$

***تست:* به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y=mx^2+(m-1)x$ از ناحیهٔ سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟**

۱) $m\le 1$ ۲) $0\le m\le 1$ ۳) $m\ge 1$ ۴) $1\le m\le 2$

پاسخ: چون نمودار از ناحیهٔ سوم نمی‌گذرد، پس حتماً سهمی رو به بالا و $m>0$ می‌باشد. از طرفی معادلهٔ $mx^2+(m-1)x=0$ دو ریشه دارد، بنابراین زمانی نمودار تابع از ناحیهٔ سوم نمی‌گذرد که این ریشه‌ها نامنفی (مثبت یا صفر) باشند:

$$mx^2+(m-1)x=0 \Rightarrow x(mx+m-1)=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x=\frac{1-m}{m}$$

$$x=\frac{1-m}{m}\ge 0 \xRightarrow{m>0} 1-m\ge 0 \Rightarrow m\le 1$$

از اشتراک $m>0$ و $m\le 1$، محدودهٔ $0<m\le 1$ به دست می‌آید. در حالتی که $m=0$ باشد، تابع تبدیل به خط $y=-x$ می‌شود که باز هم از ناحیهٔ سوم عبور نمی‌کند، بنابراین مجموعه جواب به صورت $0\le m\le 1$ در می‌آید و در نتیجه گزینهٔ (۲) صحیح است.

وضعیت تلاقی یا تماس دو تابع نسبت به هم

برای این‌که وضعیت دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را نسبت به هم معلوم کنیم، ابتدا دو معادله را با هم برابر می‌گیریم، در نتیجه $f(x)-g(x)=0$ می‌شود. حال ریشه‌های این معادله را به دست می‌آوریم، اگر ریشهٔ به دست آمده ساده باشد، آن ریشه، طول نقطهٔ **تقاطع (تلاقی)** دو تابع است و در صورتی که ریشهٔ مکرر باشد، طول نقطهٔ **تماس** می‌شود.

نکته: برای بررسی **وضعیت یک خط و یک سهمی**، ابتدا دو تابع را مساوی هم می‌گیریم، یعنی معادلهٔ تلاقی سهمی و خط را می‌نویسیم و آن را ساده می‌کنیم تا به یک معادلهٔ درجه ۲ برسیم، در این‌جا سه حالت وجود دارد:

۱ اگر در معادلهٔ تلاقی $\Delta>0$ باشد، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم خط، سهمی را در دو نقطه قطع می‌کند.

۲ اگر در معادلهٔ تلاقی $\Delta=0$ باشد، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم خط، بر سهمی مماس است.

۳ اگر در معادلهٔ تلاقی $\Delta<0$ باشد، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم خط و سهمی نقطهٔ مشترک ندارند.

تست: خط به معادلهٔ $y=(m+1)x-2$ با منحنی به معادلهٔ $y=2x^2+\frac{m}{2}$ هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند. مجموعهٔ مقادیر m به کدام صورت است؟

۱) $-3<m<5$ ۲) $-3<m<4$ ۳) $-2<m<4$ ۴) $-1<m<5$

پاسخ: منحنی $y=2x^2+\frac{m}{2}$ و خط $y=(m+1)x-2$ را قطع می‌دهیم، معادلهٔ تلاقی آن‌ها نباید ریشه داشته باشد:

$$2x^2+\frac{m}{2}=(m+1)x-2 \Rightarrow 2x^2-(m+1)x+\frac{m}{2}+2=0$$

$$\Delta<0 \Rightarrow (m+1)^2-8(\frac{m}{2}+2)<0 \Rightarrow m^2-2m-15<0 \Rightarrow (m-5)(m+3)<0 \Rightarrow -3<m<5$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

تست: به ازای کدام مقدار a منحنی به معادلهٔ $ay=x^2+5x+4$ بر نیمساز ناحیهٔ اول مماس است؟ ریاضی داخل ۸۵

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۹

پاسخ: نیمساز ناحیهٔ اول، $y=x$ $(x\geq 0)$ است، چون این خط بر منحنی مماس است، پس باید معادلهٔ تلاقی آن‌ها ریشهٔ مضاعف بدهد، بنابراین:

$$\begin{cases} y=x \\ ay=x^2+5x+4 \end{cases} \Rightarrow ax=x^2+5x+4 \Rightarrow x^2+(5-a)x+4=0 \xrightarrow[\Delta=0]{\text{ریشهٔ مضاعف}} (5-a)^2-16=0$$

$$\Rightarrow (5-a)^2=16 \Rightarrow 5-a=\pm 4 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \Rightarrow x^2+4x+4=0 \Rightarrow (x+2)^2=0 \Rightarrow x=-2<0 (\text{غ ق ق}) \\ a=9 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x=2>0 \end{cases}$$

چون باید در ناحیهٔ اول مماس باشد، پس طول نقطهٔ تماس مثبت است، بنابراین $a=9$ قابل‌قبول می‌باشد.

برای این‌که تشخیص دهیم $a=1$ و $a=9$ کدام قابل قبول است، به جای روش بالا می‌توانیم، بگوییم طول ریشهٔ مضاعف در معادلهٔ درجهٔ دوم، $\frac{-b}{2a}$ است، پس باید $\frac{-(5-a)}{2}>0$ باشد و در نتیجه $a>5$ می‌شود. بنابراین $a=9$ قابل قبول است و در نتیجه گزینهٔ (۴) صحیح می‌باشد.

معادلات قابل تبدیل به معادلهٔ درجه دوم: در بعضی از معادلات می‌توان با استفاده از تغییر متغیر، آن را به‌صورت معادلهٔ درجه دوم $at^2+bt+c=0$ تبدیل کرد تا حل آن به‌صورت ساده‌تری امکان‌پذیر باشد.

مثال: هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^4-5x^2+6=0$ ب) $x^4+4x^2-5=0$ پ) $x^4-4x^2+4=0$

پاسخ: با تغییر متغیر $t=x^2$ هر یک از معادلات را حل می‌کنیم:

الف) $x^2=t \Rightarrow t^2-5t+6=0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ t=3 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$

پس معادلهٔ $x^4-5x^2+6=0$ دارای چهار ریشه است.

ب) $x^2=t \Rightarrow t^2+4t-5=0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \\ t=-5 \Rightarrow x^2=-5 (\text{غ ق ق}) \end{cases}$

پس معادلهٔ $x^4+4x^2-5=0$ دارای دو ریشه است.

پ) $x^2=t \Rightarrow t^2-4t+4=0 \Rightarrow (t-2)^2=0 \Rightarrow t=2 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

پس معادلهٔ $x^4-4x^2+4=0$ دارای دو ریشه است.

از مثال بالا می‌توان نکتهٔ زیر را نتیجه گرفت.

نکته: معادلهٔ $ax^۴+bx^۲+c=۰$ در دو حالت زیر یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی دارد $(x^۲=t)$:

۱ در معادلهٔ $at^۲+bt+c=۰$، $P=\frac{c}{a}<۰$ باشد. (مانند قسمت (ب) مثال قبل)

۲ در معادلهٔ $at^۲+bt+c=۰$، $\Delta=۰$ و $\frac{-b}{۲a}>۰$ باشد. (مانند قسمت (پ) مثال قبل)

تست: اگر معادلهٔ $x^۴+۴x^۲+m=۰$ دارای یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی باشد، مجموعهٔ مقادیر m به کدام صورت است؟

۱) $m<۰$ ۲) $m<۳$ ۳) $m>۱$ ۴) $۰<m<۳$

پاسخ: با توجه به نکتهٔ قبل، ۲ حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $P<۰$ و در نتیجه $m<۰$.

حالت دوم: $\Delta=۰$ و $\frac{-b}{۲a}>۰$ که در این‌جا $۰<۲-=\frac{-۴}{۲}=\frac{-b}{۲a}$ است و این شرط هیچ‌گاه برقرار نیست. بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

نکته: معادلهٔ $ax^۴+bx^۲+c=۰$ زمانی دارای چهار ریشه است که بعد از تبدیل به معادلهٔ درجه دوم، سه شرط $\Delta>۰$، $S>۰$ و $P>۰$ برای آن برقرار باشد. (زیرا باید معادلهٔ $at^۲+bt+c=۰$ دو ریشهٔ مثبت داشته باشد.)

تست: منحنی $f(x)=x^۴+(m+۲)x^۲+۹$ محور xها را در چهار نقطه قطع می‌کند، حدود m کدام است؟

۱) $m<-۸$ ۲) $m<-۲$ ۳) $m>۴$ ۴) $m>-۲$

پاسخ: با تغییر متغیر $x^۲=t$ به معادلهٔ $t^۲+(m+۲)t+۹=۰$ می‌رسیم که با توجه به نکتهٔ قبل داریم:

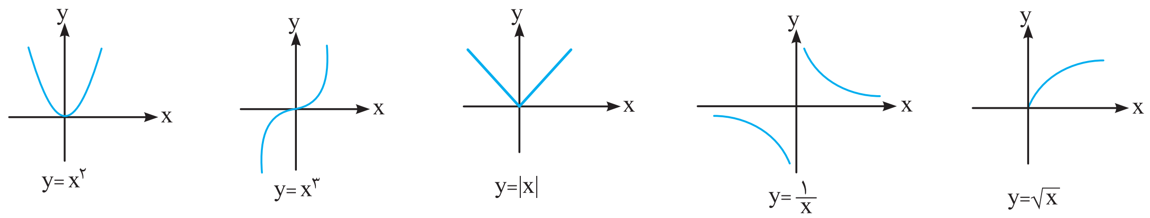
$\Delta>۰\Rightarrow(m+۲)^۲-۳۶>۰\Rightarrow(m+۲)^۲>۳۶\Rightarrow m+۲>۶$ یا $m+۲<-۶\Rightarrow m>۴$ یا $m<-۸$

$S>۰\Rightarrow-(m+۲)>۰\Rightarrow m<-۲$; $P>۰\Rightarrow ۹>۰\Rightarrow$ همواره برقرار است.

از اشتراک محدوده‌های به دست آمده، حدود m به صورت $m<-۸$ می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

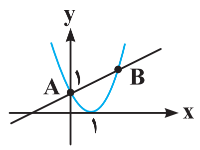
حل معادلات به روش هندسی: اگر $y=f(x)$ و $y=g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط محل تلاقی یا تماس این دو نمودار، جواب‌های معادلهٔ $f(x)=g(x)$ خواهند بود و برعکس هر جواب این معادله طول یکی از نقاط محل تلاقی یا تماس این دو نمودار است. این روش حل معادله که از طریق آن تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی (وگاهی دقیق) جواب‌ها قابل تشخیص است را روش هندسی (نموداری) حل معادلات می‌نامند.

جهت حل هندسی معادلات، بهتر است نمودار توابع زیر را به خاطر بسپارید:



مثال: تعداد و علامت ریشه‌های معادلهٔ $\frac{۱}{۲}x+۱=(x-۱)^۲$ را به روش هندسی به دست آورید. کتاب درسی

پاسخ: نمودار دو تابع $y=(x-۱)^۲$ و $y=\frac{۱}{۲}x+۱$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

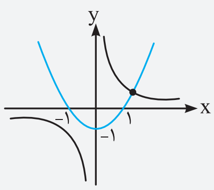


با توجه به شکل روبه‌رو نمودار دو تابع در نقاط A و B مشترک‌اند. طول نقطهٔ A برابر صفر و طول نقطهٔ B یک عدد مثبت است (از روش جبری $x_B=\frac{۵}{۲}$ می‌شود). بنابراین این معادله یک ریشهٔ صفر و یک ریشه به طول مثبت دارد.

تست: معادلهٔ $x^۲=\frac{۱}{x}+۱$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: برای راحتی کار، معادله را به صورت $\frac{۱}{x}=x^۲-۱$ نوشته، سپس نمودار توابع $y=\frac{۱}{x}$ و $y=x^۲-۱$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

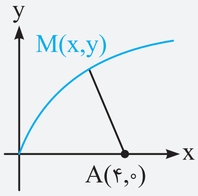


با توجه به شکل روبه‌رو، نمودار دو تابع در یک نقطه مشترک‌اند، پس این معادله یک ریشه دارد و در نتیجه گزینهٔ (۱) صحیح است.

کاربرد ماکزیمم و مینیمم توابع درجه دوم در حل مسائل: گاهی اوقات به مسائلی برخورد می‌کنیم که در آن بیشترین یا کم‌ترین مقدار یک کمیت مطلوب است. در این موارد که معمولاً کمیت برابر یک عبارت دو متغیره است، ابتدا با توجه به داده‌های مسأله آن را تبدیل به یک عبارت تک متغیره می‌کنیم، سپس اگر به عبارت درجه دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ رسیدیم، به کمک $\frac{-\Delta}{۴a}$ یا $f(\frac{-b}{۲a})$، مقدار ماکزیمم یا مینیمم آن را تعیین می‌کنیم.

تست: نقطهٔ A به طول ۴ روی محور طول‌ها واقع است. کوتاه‌ترین فاصله روی منحنی $y=۲\sqrt{x}$ از نقطهٔ A کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$
۲) $\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) $۳\sqrt{۲}$



پاسخ: اگر نقطه‌ای روی منحنی $y=۲\sqrt{x}$ که کوتاه‌ترین فاصله را تا A دارد M به مختصات (x,y) بنامیم، آن‌گاه داریم:

$$d=AM=\sqrt{(x-۴)^۲+(y-۰)^۲}=\sqrt{(x-۴)^۲+(۲\sqrt{x})^۲}=\sqrt{x^۲-۸x+۱۶+۴x}=\sqrt{x^۲-۴x+۱۶}$$

زمانی d کم‌ترین مقدار را دارد که عبارت $x^۲-۴x+۱۶$ مینیمم باشد، بنابراین:

$$x_{min}=\frac{-b}{۲a}=\frac{۴}{۲}=۲\Rightarrow d_{min}=\sqrt{۴-۸+۱۶}=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$$

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

تعیین علامت

برای این‌که معلوم کنیم علامت یک عبارت جبری، مثبت، منفی، صفر یا تعریف‌نشده است، از جدول تعیین علامت کمک می‌گیریم.

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه اول: چندجمله‌ای درجه اول $P(x)=ax+b\ (a\neq ۰)$ به‌ازای $x=\frac{-b}{a}$، صفر می‌شود و جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x		$\frac{-b}{a}$	
P(x)	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم: جدول تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم $P(x)=ax^۲+bx+c\ (a\neq ۰)$، بستگی به علامت Δ، به یکی از سه حالت زیر می‌باشد:

۱ اگر $\Delta>۰$ باشد، چندجمله‌ای دو ریشهٔ ساده $x_۱,x_۲=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$ دارد. با فرض $x_۲>x_۱$، جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x		$x_۱$		$x_۲$	
P(x)	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

۲ اگر $\Delta=۰$ باشد، چندجمله‌ای یک ریشهٔ مضاعف $x_۰=\frac{-b}{۲a}$ دارد که جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x		$\frac{-b}{۲a}$	
P(x)	موافق علامت a	۰	موافق علامت a

۳ اگر $\Delta<۰$ باشد، چندجمله‌ای ریشه ندارد و جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	
P(x)	موافق علامت a

مثال: هر یک از عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

$P_۱=x^۲-۵x+۶$ $\quad P_۲=-x^۲+۲x-۱$ $\quad P_۳=x^۲+x+۱$

پاسخ: در عبارت $P_۱$، دلتا مثبت است و $x^۲-۵x+۶=(x-۲)(x-۳)$، پس دو ریشهٔ سادهٔ $x=۲$ و $x=۳$ دارد. دلتا در عبارت $P_۲$ صفر است و $-x^۲+۲x-۱=-(x-۱)^۲$، بنابراین ریشهٔ مضاعف $x=۱$ دارد. در عبارت $P_۳$ دلتا منفی است و معادله ریشه ندارد. پس جدول تعیین علامت این عبارات به صورت زیر می‌باشد:

x		۲		۳	
$P_۱$	+	۰	−	۰	+

x		۱	
$P_۲$	−	۰	−

x	
$P_۳$	+

تعیین علامت عبارات به شکل کلی $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$: اگر $f(x)$ و $g(x)$ چندجمله‌ای باشند، برای تعیین علامت عبارت $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱ ریشه‌های f و g را پیدا کرده و از کوچک به بزرگ در یک جدول قرار می‌دهیم.

۲ از سمت راست، علامت اولین قسمت جدول را تعیین می‌کنیم. این علامت را می‌توان با امتحان یک عدد بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین ریشه، تعیین کرد.

۳ در جدول از سمت راست، علامت‌ها را یک در میان عوض می‌کنیم، فقط توجه داشته باشید که علامت در ریشه‌های مکرر مرتبهٔ زوج به شکل $(x-a)^{۲n}=۰$ $(n\in\mathbb{N})$ تغییر نمی‌کند.

مثال: عبارت $P(x)=\dfrac{(x+۲)(x-۱)^۲(۳-x)^{۱۵}}{(x-۲)^۵(x+۳)}$ **را تعیین علامت کنید.**

پاسخ: ابتدا ریشه‌ها را در جدول وارد می‌کنیم. برای تعیین علامت در بازهٔ $(۳,+\infty)$ علامت $P(۴)$ را معلوم می‌کنیم. $(P(۴)<۰)$ بنابراین داریم:

x		-۳		-۲		۱		۲		۳	
$P(x)$	$-$	ت ن	$+$	۰	$-$	۰	$-$	ت ن	$+$	۰	$-$

ملاحظه می‌شود که در این عبارت $x=۱$ ریشهٔ مضاعف (مکرر مرتبهٔ زوج) می‌باشد و به همین خاطر است که در اطراف آن، عبارت $P(x)$ تغییر علامت نمی‌دهد.

معادلات درجه دوم و مسائل مربوط به آن

۶۸- اگر معادلهٔ $k(x+۱)(x+۴)=x$ ریشهٔ حقیقی نداشته باشد، حدود تغییرات k کدام است؟

۱) $-۱<k<-\frac{۱}{۹}$ ۲) $۱<k<۹$ ۳) $\frac{۱}{۹}<k<۱$ ۴) $-\frac{۱}{۹}<k<\frac{۱}{۹}$

۶۹- به ازای کدام مقادیر m، معادلهٔ درجه دوم $m(x^۲+۱)+(x+۲)^۲=۵-x^۲$ دو ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) $-۳<m<۲$ ۲) $-۲<m<۳$ ۳) $-۱<m<۴$ ۴) $-۴<m<۱$

۷۰- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول اضلاع a، $a+۲$ و $a+۴$ مساحت کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

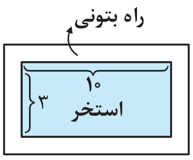
۷۱- اگر معادلهٔ $۲mx^۲+(m+۱)x+n=۰$ دارای ریشهٔ مضاعف $x=۳$ باشد، $\frac{n}{m}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۸- ۳) ۱۸ ۴) ۱۸-

۷۲- اختلاف سنی دو برادر با یک‌دیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل‌ضرب سن آن‌ها ۶۰ شود، مجموع سن فعلی آن‌ها کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۷۳- یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه در همه جا دارای پهنای یکسان و دارای مساحت ۱۴ متر مربع باشد، پهنای آبراه چند متر است؟



کتاب درسی

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۷۴- یک عکس به اندازهٔ ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع قرار دارد. اگر فاصلهٔ همهٔ لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، محیط این قاب عکس کدام است؟

۱) ۵۰ ۲) ۶۰ ۳) ۷۰ ۴) ۸۰

۷۵- طول یک نوع کاشی یک سانتی‌متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است. برای پوشاندن دیواری به مساحت ۵۲/۸ متر مربع، تعداد ۲۰۰۰ کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی چند سانتی‌متر است؟

کتاب درسی

۱) ۳۰ ۲) ۳۱ ۳) ۳۲ ۴) ۳۳

۷۶- فاصلهٔ هر طرف قالی از کنار دیوار یک اتاق مستطیل‌شکل، ثابت است. اگر مساحت اتاق ۲۴، محیط اتاق ۲۰ و محیط قالی ۱۲ باشد، مساحت قالی کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۸

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

۷۷- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x-1=0$ باشند، مقدار $\frac{\beta^2}{\alpha+1}+\frac{\alpha^2}{\beta+1}$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) $\frac{47}{3}$ ۳) $\frac{44}{3}$ ۴) ۱۶

۷۸- در معادلهٔ $3x^2-17x+m=0$ یک ریشه از ۳ برابر ریشهٔ دیگر ۳ واحد بیشتر می‌باشد. m کدام است؟ ریاضی داخل ۸۷

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۷۹- در معادلهٔ $x^2-8x+m=0$ یک ریشه از نصف ریشهٔ دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟ ریاضی خارج ۹۲

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۸۰- به ازای کدام مقدار m، یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2-6x+m=5$، مجذور دیگری می‌باشد؟

۱) ۳۲ ۲) ۱۳ ۳) ۳۲- ۴) ۳-

۸۱- به ازای چه مقدار m، معادلهٔ $3x^2+(m^2-16)x+m+3=0$ دارای دو ریشهٔ قرینه است؟

۱) ۴- ۲) ۴± ۳) ۳- ۴) ۳±

۸۲- به ازای چند مقدار k معادلهٔ $k^2x^2+3kx+(k+2)=0$ دو ریشهٔ حقیقی معکوس دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸۳- حدود m برای آن‌که معادلهٔ $(m-1)x^2+mx+m-3=0$ دو ریشهٔ غیر هم‌علامت داشته باشد، کدام است؟

۱) $m>2$ ۲) $1<m<3$ ۳) $m<1$ ۴) $0<m<1$

۸۴- به ازای کدام مقدار a، معادلهٔ درجه دوم $x^2-2(a-2)x+14-a=0$، دارای دو ریشهٔ مثبت است؟ ریاضی داخل ۹۶

۱) $-2<a<2$ ۲) $2<a<5$ ۳) $2<a<14$ ۴) $5<a<14$

۸۵- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2-4x=1$ باشند، حاصل عبارت $\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ کدام است؟

۱) ۳۲۲ ۲) ۲۸۷ ۳) ۲۵۲ ۴) ۱۹۴

۸۶- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $4x^2-12x+1=0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\beta}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ چقدر است؟ ریاضی خارج ۸۵

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۸۷- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ باشند، حاصل $x_1\sqrt{x_2}+x_2\sqrt{x_1}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) ۵ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۳

۸۸- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-mx+2=0$ و اعداد ۴، x_1+x_2 و x_1x_2 تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند، آن‌گاه مقدار m کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

۸۹- به ازای کدام مقدار m، مجموع مربع‌های دو ریشهٔ حقیقی معادلهٔ $x^2+mx+2-m=0$ برابر ۴ می‌باشد؟

۱) ۲ ۲) ۴- ۳) ۴-,۲ ۴) ۲-,۴

۹۰- به ازای کدام مقدار m، عدد $\frac{1}{8}$ واسطهٔ حسابی بین دو ریشهٔ معادلهٔ $(m^2-4)x^2-3x+m=0$ است؟ ریاضی داخل ۸۴

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۴ ۴) ۴-

۹۱- به ازای کدام مقدار m، عدد $\sqrt{2}$ واسطهٔ هندسی بین ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^2-5x+m^2=3$ است؟ ریاضی خارج ۸۴

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۳ ۴) ۳-

۹۲- به ازای کدام مقدار m، مجموع جذر هر دو ریشهٔ معادلهٔ درجه دوم $2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0$ برابر ۲ می‌باشد؟ ریاضی داخل ۹۶

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۹۳- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$ باشند، حاصل عبارت $|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|+\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt[3]{4}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $2\sqrt[4]{3}$

۹۴- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-36x-1=0$ باشند، حاصل عبارت $\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\alpha}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۴

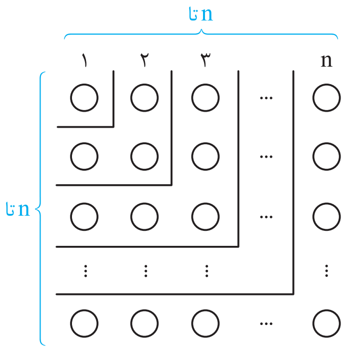
پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۱ **روش اول:** مجموع $۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)$، مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_۱=۱$ و قدرنسبت $d=۲$ است. بنابراین:

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)=\frac{n}{۲}(۲(۱)+(n-۱)۲)=\frac{n}{۲}(۲n)=n^۲$$

روش دوم: چون $a_n=۲n-۱$ را داریم، پس از رابطهٔ $S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$ نیز می‌توان استفاده کرد:

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)=\frac{n}{۲}(۱+(۲n-۱))=\frac{n}{۲}(۲n)=n^۲$$



در این تیپ تست‌ها می‌تونی از عددگذاری هم استفاده کنی، یعنی این‌که می‌دونیم در این‌جا، مجموع یک جملهٔ اول برابر ۱ و مجموع دو جملهٔ اول برابر ۴ هست، حالا اگه توی گزینه‌ها $n=۱$ و $n=۲$ رو بگذاریم، تنها گزینه‌ای که جواب درست می‌ده گزینهٔ یکه.

توجه: مطابق آن‌چه در کتاب درسی به آن اشاره شده، مجموع n جملهٔ اول اعداد فرد را از شکل روبه‌رو نیز می‌توان به‌دست آورد. بدین ترتیب که اگر در n سطر و n ستون، دایره قرار دهیم، بدیهی است که تعداد دایره‌ها برابر $n^۲$ می‌شود. حال به‌صورتی که در شکل، مشخص است کل دایره‌ها را n قسمت می‌کنیم، طوری که در قسمت اول ۱ دایره، در قسمت دوم ۳ دایره، در قسمت سوم ۵ دایره و به همین صورت در قسمت nاُم، $۲n-۱$ دایره وجود دارد. می‌دانیم مجموع تعداد آن‌ها باید برابر $n^۲$ باشد، پس:

$$۱+۳+\cdots+(۲n-۱)=n^۲$$

۲ ۱ نقطهٔ اول را به هریک از نقاط دیگر وصل می‌کنیم، در این صورت ۱۹ وتر پدید می‌آید. با وصل نقطهٔ دوم به نقاط دیگر (به غیر از نقطهٔ اول) ۱۸ وتر به‌دست می‌آید. سپس نقطهٔ سوم را به نقاط دیگر غیر از نقاط اول و دوم وصل می‌کنیم تا ۱۷ وتر حاصل شود. با ادامهٔ این عمل، تعداد وترهای حاصل برابر $۱+۲+\cdots+۱۷+۱۸+۱۹$ می‌شود. می‌دانیم $۱+۲+\cdots+n$، مجموع جملات یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت ۱ می‌باشد که بعد از ساده کردن به رابطهٔ $۱+۲+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$ می‌رسیم. بنابراین داریم:

$$۱+۲+\cdots+۱۷+۱۸+۱۹=\frac{۱۹(۱۹+۱)}{۲}=۱۹۰$$

۳ ۳ با توجه به سؤال $a_۱=۱$ و $a_۴=\frac{۵}{۲}$ است. بنابراین:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow a_۴=۱+۳d=\frac{۵}{۲}\Rightarrow ۳d=\frac{۳}{۲}\Rightarrow d=\frac{۱}{۲}$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)\Rightarrow S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}\left(۲+۱۴\left(\frac{۱}{۲}\right)\right)=۶۷/۵$$

۴ ۱ **روش اول:**

$$a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow a_{۱۹}=a_۱+۱۸d=۱۰\quad (*)$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)\Rightarrow S_{۳۷}=\frac{۳۷}{۲}(۲a_۱+۳۶d)=\frac{۳۷}{۲}(۲(a_۱+۱۸d))=۳۷(a_۱+۱۸d)\xrightarrow{\text{رابطهٔ }(*)}۳۷(۱۰)=۳۷۰$$

روش دوم: از رابطهٔ $S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$ استفاده می‌کنیم:

$$S_{۳۷}=\frac{۳۷}{۲}(a_۱+a_{۳۷})\xrightarrow{\text{رابطهٔ اندیس‌ها}}\frac{۳۷}{۲}(۲a_{۱۹})=۳۷a_{۱۹}=۳۷(۱۰)=۳۷۰$$

۵ ۴

$$a_۷=\frac{۱}{۲}a_۳\Rightarrow ۲a_۷=a_۳\Rightarrow ۲(a_۱+۶d)=a_۱+۲d\Rightarrow ۲a_۱+۱۲d=a_۱+۲d\Rightarrow a_۱=-۱۰d$$

$$S_n=۰\Rightarrow\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)=۰\xrightarrow{a_۱=-۱۰d}\frac{n}{۲}(-۲۰d+(n-۱)d)=۰\Rightarrow\frac{n}{۲}(d(-۲۰+n-۱))=۰$$

$$\Rightarrow\frac{nd}{۲}(n-۲۱)=۰\xrightarrow{nd\neq ۰}n-۲۱=۰\Rightarrow n=۲۱$$

۶ ۲ **روش اول:** با توجه به این‌که $S_۱=a_۱$ و $S_۲=a_۱+a_۲$ است، داریم:

$$\begin{cases}S_۱=۴+۳=۷\Rightarrow a_۱=۷\quad (*)\\ S_۲=۴(۲)^۲+۳(۲)=۲۲\Rightarrow a_۱+a_۲=۲۲\overset{(*)}{\Longrightarrow}۷+a_۲=۲۲\Rightarrow a_۲=۱۵\end{cases}\Rightarrow d=a_۲-a_۱=۱۵-۷=۸$$

جملهٔ عمومی: $a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow a_n=۷+(n-۱)(۸)=۸n-۱$

توجه! *برای تعیین d می‌تونستی از این نکته استفاده کنی که ضریب $n^۲$ برابر نصف قدرنسبته، پس $\frac{d}{۲}=۴$ و در نتیجه $d=۸$ می‌شه.*

روش دوم: از رابطهٔ $a_n=S_n-S_{n-۱}$ استفاده می‌کنیم:

$$a_n=S_n-S_{n-۱}=۴n^۲+۳n-(۴(n-۱)^۲+۳(n-۱))=۴n^۲+۳n-(۴n^۲-۸n+۴+۳n-۳)=۸n-۱$$

۷ **۴** ابتدا با تشکیل $a_۴$ و $a_{۱۶}$ و محاسبهٔ تفاضل آن‌ها مقدار قدرنسبت را تعیین کرده و سپس $S_{۱۳}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d \Rightarrow \begin{cases} a_۴=a_۱+۳d \\ a_{۱۶}=a_۱+۱۵d \end{cases} \Rightarrow a_{۱۶}-a_۴=(a_۱+۱۵d)-(a_۱+۳d)=۱۲d$$

$$\Rightarrow ۱۷-۱=۱۲d \Rightarrow ۱۶=۱۲d \Rightarrow d=\frac{۴}{۳}$$

$$a_۴=a_۱+۳d=۱ \xrightarrow{d=\frac{۴}{۳}} a_۱+۳(\frac{۴}{۳})=۱ \Rightarrow a_۱+۴=۱ \Rightarrow a_۱=-۳$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d) \Rightarrow S_{۱۳}=\frac{۱۳}{۲}\left(۲(-۳)+۱۲(\frac{۴}{۳})\right)=\frac{۱۳}{۲}(-۶+۱۶)=\frac{۱۳}{۲}(۱۰)=۱۳\times ۵=۶۵$$

البته می‌توان در قسمت اول راه‌حل از رابطهٔ $a_m-a_n=(m-n)d$ $(a_{۱۶}-a_۴=۱۲d)$ نیز استفاده کرد.

۸ **۱** چون -۲۱، x، -۲۷، سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ حسابی هستند، داریم:

$$۲x=(-۲۷)+(-۲۱) \Rightarrow ۲x=-۴۸ \Rightarrow x=-۲۴$$

پس جملات دنبالهٔ حسابی به‌صورت $-۲۷,-۲۴,-۲۱,\cdots$ در می‌آیند و در نتیجه $a_۱=-۲۷$ و $d=-۲۴-(-۲۷)=۳$ می‌شود. حال جملهٔ عمومی دنباله را تعیین می‌کنیم:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d \Rightarrow a_n=-۲۷+(n-۱)(۳)=۳n-۳۰$$

برای یافتن تعداد جملات منفی، نامعادلهٔ $a_n<۰$ را حل می‌کنیم:

$$۳n-۳۰<۰ \Rightarrow ۳n<۳۰ \Rightarrow n<۱۰ \Rightarrow n\le ۹ \Rightarrow$$ ۹ جملهٔ منفی وجود دارد.

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d) \Rightarrow S_۹=\frac{۹}{۲}(۲(-۲۷)+۸(۳))=\frac{۹}{۲}(-۵۴+۲۴)=\frac{۹}{۲}(-۳۰)=۹(-۱۵)=-۱۳۵$$

۹ **۲**

$$۵,۸,۱۱,\cdots \Rightarrow a_۱=۵\ ,\ d=a_۲-a_۱=۸-۵=۳$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d) \Rightarrow S_n=\frac{n}{۲}(۲(۵)+(n-۱)۳)=\frac{n}{۲}(۱۰+۳n-۳)=\frac{n}{۲}(۳n+۷)$$

برای این‌که $S_n>۵۰۰$ شود، به‌جای حل نامعادلهٔ $\frac{n}{۲}(۳n+۷)>۵۰۰$ که وقت‌گیر است، بهتر است از اعداد گزینه‌ها استفاده کنیم:

$$n=۱۷ \Rightarrow \frac{n}{۲}(۳n+۷)=\frac{۱۷}{۲}(۵۸)=۴۹۳<۵۰۰$$

$$n=۱۸ \Rightarrow \frac{n}{۲}(۳n+۷)=\frac{۱۸}{۲}(۶۱)=۵۴۹>۵۰۰$$

بنابراین اگر حداقل ۱۸ جمله را با هم جمع کنیم، حاصل از ۵۰۰ بیشتر می‌شود.

۱۰ **۱** چون ۲۰ واسطه درج می‌کنیم، پس دنبالهٔ حاصل ۲۲ جمله دارد که جملهٔ اول برابر -۱۳ و جملهٔ بیست‌ودوم برابر ۷۱ است. برای پیدا کردن مجموع ۲۰ واسطهٔ حسابی، ابتدا مجموع کل اعداد را حساب کرده و حاصل را منهای اعداد -۱۳ و ۷۱ می‌کنیم:

$$\underbrace{-۱۳}_{a_۱},\underbrace{\bigcirc,\bigcirc,\cdots\bigcirc}_{\text{۲۰ جمله}},\underbrace{۷۱}_{a_{۲۲}}$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n) \Rightarrow S_{۲۲}=\frac{۲۲}{۲}(a_۱+a_{۲۲})=۱۱(-۱۳+۷۱)=۱۱(۵۸)=۶۳۸$$

مجموع ۲۰ واسطه $=۶۳۸-(-۱۳+۷۱)=۶۳۸-۵۸=۵۸۰$

حال برای تعیین قدرنسبت، کافی است $a_{۲۲}$ را تشکیل دهیم:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d \Rightarrow a_{۲۲}=a_۱+۲۱d \Rightarrow ۷۱=-۱۳+۲۱d \Rightarrow ۸۴=۲۱d \Rightarrow d=۴$$

تذکر: *برای این‌که مجموع بیست واسطه‌رو حساب کنی، این‌طوری هم می‌شه:*

$$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(a_۲+a_{۲۱})=۱۰(a_۱+a_{۲۲})=۱۰(-۱۳+۷۱)=۱۰(۵۸)=۵۸۰$$

۱۱ **۲** با توجه به رابطهٔ $S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$ داریم:

$$S_{۲۰}=\frac{\overset{۱۰}{\cancel{۲۰}}}{\cancel{۲}}(۲a_۱+۱۹d)=۲۰a_۱+۱۹۰d \quad ; \quad S_{۱۲}=\frac{\overset{۶}{\cancel{۱۲}}}{\cancel{۲}}(۲a_۱+۱۱d)=۱۲a_۱+۶۶d$$

$$S_{۲۰}=۳S_{۱۲} \Rightarrow ۲۰a_۱+۱۹۰d=۳۶a_۱+۱۹۸d \Rightarrow -۸d=۱۶a_۱ \Rightarrow d=-۲a_۱$$

از طرفی جملهٔ سوم برابر ۶ می‌باشد، پس $a_۱+۲d=۶$، در نتیجه داریم:

$$a_۱+۲d=۶ \xrightarrow{d=-۲a_۱} a_۱-۴a_۱=۶ \Rightarrow -۳a_۱=۶ \Rightarrow a_۱=-۲ \xrightarrow{d=-۲a_۱} d=۴$$

$$a_{۱۰}=a_۱+۹d=-۲+۹(۴)=-۲+۳۶=۳۴$$

۱۲ **۴** مجموع ۲۰ جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a و قدرنسبت d برابر است با:

$$S_{۲۰}=\frac{\cancel{۲۰}^{۱۰}}{\cancel{۲}}(۲a+۱۹d)=۲۰a+۱۹۰d \quad (*)$$

حال مجموع ۲۰ جملهٔ اول دنباله با جملهٔ اول a و قدرنسبت $d+۱$ را حساب می‌کنیم:

$$S'_{۲۰}=\frac{\cancel{۲۰}^{۱۰}}{\cancel{۲}}(۲a+۱۹(d+۱))=۲۰a+۱۹۰(d+۱)=(۲۰a+۱۹۰d)+۱۹۰\overset{(*)}{=\!=}S_{۲۰}+۱۹۰$$

بنابراین اگر یک واحد به قدرنسبت اضافه شود، به مجموع ۲۰ جملهٔ اول، ۱۹۰ واحد افزوده خواهد شد.

۱۳ **۳** **روش اول:** اولین عدد طبیعی فرد مضرب ۳ برابر خود عدد ۳ و آخرین آن که کوچک‌تر از ۱۰۱ باشد، عدد ۹۹ است. بنابراین اعداد فرد مضرب ۳ کوچک‌تر از ۱۰۱ به صورت ۳,۹,۱۵,...,۹۹ هستند که دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت ۶ را تشکیل می‌دهند. ابتدا تعداد جملات این دنباله و سپس مجموع آن را تعیین می‌کنیم:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d \Rightarrow ۹۹=۳+(n-۱)(۶)\Rightarrow ۹۶=۶n-۶\Rightarrow ۶n=۱۰۲\Rightarrow n=۱۷$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\Rightarrow S_{۱۷}=\frac{۱۷}{۲}(۳+۹۹)=\frac{۱۷}{۲}(۱۰۲)=۱۷\times ۵۱=۸۶۷$$

روش دوم: با توجه به صورت سؤال این اعداد تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۶ و جملهٔ اول ۳ می‌دهند. ابتدا جملهٔ عمومی دنباله را تعیین می‌کنیم:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow a_n=۳+(n-۱)(۶)\Rightarrow a_n=۶n-۳$$

با حل نامعادلهٔ $a_n<۱۰۱$ تعداد جملات فرد مضرب ۳، کم‌تر از ۱۰۱ به‌دست می‌آید:

$$۶n-۳<۱۰۱\Rightarrow ۶n<۱۰۴\Rightarrow n<\frac{۱۰۴}{۶}=\frac{۵۲}{۳}\simeq ۱۷/۳\Rightarrow n\leq ۱۷$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)\Rightarrow S_{۱۷}=\frac{۱۷}{۲}(۲(۳)+۱۶(۶))=\frac{۱۷}{۲}(۶+۹۶)=\frac{۱۷}{۲}(۱۰۲)=۸۶۷$$

۱۴ **۴** کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عدد سه رقمی مضرب ۷ به‌ترتیب برابر ۱۰۵ و ۹۹۴ است. اعداد سه‌رقمی مضرب ۷ تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۱۰۵ و قدرنسبت ۷ می‌دهند که با نوشتن جملهٔ عمومی، تعداد جملات آن را تعیین می‌کنیم:

$$۱۰۵,۱۱۲,\cdots,۹۹۴$$

$$a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow ۹۹۴=۱۰۵+(n-۱)(۷)\Rightarrow ۸۸۹=۷(n-۱)\Rightarrow ۱۲۷=n-۱\Rightarrow n=۱۲۸$$

پس این دنباله، ۱۲۸ جمله دارد، حال مجموع این جملات را حساب می‌کنیم:

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\Rightarrow S_{۱۲۸}=\frac{۱۲۸}{۲}(۱۰۵+۹۹۴)=۶۴(۱۰۹۹)=۷۰۳۳۶$$

به جای این‌که ۶۴ رو در ۱۰۹۹ ضرب کنی می‌تونی بگی یکان عدد حاصل برابر ۶ می‌شه، پس گزینهٔ (۴) درسته.

۱۵ **۳** کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عددی که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر عدد ۴ برابر ۲ است، برابر ۲۲ و ۱۹۸ می‌باشد. پس اعداد مورد نظر، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۲۲ و قدرنسبت ۴ می‌دهند که با نوشتن جملهٔ عمومی، تعداد جملات آن را تعیین می‌کنیم:

$$۲۲,۲۶,\cdots,۱۹۸$$

$$a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow ۱۹۸=۲۲+(n-۱)(۴)\Rightarrow ۱۷۶=۴(n-۱)\Rightarrow n-۱=۴۴\Rightarrow n=۴۵$$

بنابراین این دنباله ۴۵ جمله دارد، حال مجموع این اعداد را حساب می‌کنیم:

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\Rightarrow S_{۴۵}=\frac{۴۵}{۲}(۲۲+۱۹۸)=\frac{۴۵}{۲}(۲۲۰)=۴۵(۱۱۰)=۴۹۵۰$$

۱۶ **۳** دونده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد، باید مسافت $۲(۳)=۶$ متر را طی کند، برای توپ دوم باید $۲(۳+۳)=۱۲$ متر و برای توپ سوم $۲(۳+۳+۳)=۱۸$ متر و ...، بنابراین مسافت‌های طی‌شده در هر مرحله، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۶ و قدرنسبت ۶ می‌دهند. اگر n، تعداد توپ‌های انداخته‌شده در سبد باشد، از فرمول مجموع جملات دنبالهٔ حسابی، داریم:

$$۶,۱۲,۱۸,\cdots$$

$$S=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)\Rightarrow ۹۱۸=\frac{n}{۲}(۱۲+(n-۱)۶)\Rightarrow ۹۱۸=\frac{n}{۲}(۶n+۶)\Rightarrow ۹۱۸=۳n(n+۱)\Rightarrow ۳۰۶=n(n+۱)$$

برای حل معادلهٔ $n(n+۱)=۳۰۶$ به جای استفاده از دلتا بهتر است، بگوییم ضرب دو عدد طبیعی متوالی ۳۰۶ شده و چون $۳۰۶=۱۸\times ۱۷$، پس $n=۱۷$ می‌باشد.

۱۷ **۴** چون رابطهٔ S_n را داریم، برای محاسبهٔ $a_۷+a_۸+\cdots+a_{۱۸}$ کافی است، مجموع هجده جملهٔ اول را منهای مجموع شش جملهٔ اول کنیم:

$$S_n=\frac{n(n-۱۵)}{۶}\Rightarrow S_{۱۸}=\frac{۱۸(۱۸-۱۵)}{۶}=۹\ ;\ S_۶=\frac{۶(۶-۱۵)}{۶}=-۹$$

$$a_۷+a_۸+\ldots+a_{۱۸}=\underbrace{S_{۱۸}}_{a_۱+a_۲+\ldots+a_{۱۸}}-\overbrace{S_۶}^{a_۱+a_۲+\ldots+a_۶}=۹-(-۹)=۱۸$$

نتیجه: با در اختیار داشتن S_n، برای تعیین مجموع جملات mاُم تا nاُم $(n>m)$ داریم:

$$a_m+a_{m+۱}+\cdots+a_n=S_n-S_{m-۱}$$

۱۸ | ۲ چون a_n یک عبارت درجهٔ اول برحسب n می‌باشد، پس این دنباله، حسابی است. (با نوشتن چند جملهٔ اول دنباله هم می‌توان فهمید که دنبالهٔ حسابی است.)

روش اول: می‌خواهیم مجموع جملات $a_{10}, a_{11}, \cdots, a_{29}, a_{30}$ را تعیین کنیم، این دنباله ۲۱ جمله دارد (زیرا $21 = 1 + (30-10)$). حال با توجه به این‌که $a_n = \frac{n}{2} - 1$، پس $a_{10} = \frac{10}{2} - 1 = 4$ و $a_{30} = \frac{30}{2} - 1 = 14$، بنابراین داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(\text{جملهٔ اول} + \text{جملهٔ آخر}) \Rightarrow S_{21} = \frac{21}{2}(4+14) = \frac{21}{2}(18) = 21 \times 9 = 189$$

روش دوم:

$$a_n = \frac{n}{2} - 1 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2} \\ a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow d = a_2 - a_1 = \frac{1}{2}$$

مجموع جملات با شروع از جملهٔ دهم و ختم به جملهٔ سی‌اُم، برابر است با $S_{30} - S_9$، بنابراین:

$$S_{30} - S_9 = \frac{30}{2}\left(2\left(-\frac{1}{2}\right) + 29\left(\frac{1}{2}\right)\right) - \frac{9}{2}\left(2\left(-\frac{1}{2}\right) + 8\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 15\left(-1 + \frac{29}{2}\right) - \frac{9}{2}(-1+4) = 15\left(\frac{27}{2}\right) - \frac{9}{2}(3) = \frac{405}{2} - \frac{27}{2} = 189$$

۱۹ | ۲ مجموع ۴ جملهٔ اول، برابر ۱۵ $(S_4 = 15)$ و مجموع ۵ جملهٔ بعدی برابر ۳۰ است. پس نتیجه می‌گیریم مجموع ۹ جملهٔ اول آن برابر $30+15=45$ می‌باشد $(S_9 = 45)$. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} S_4 = 15 \Rightarrow \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{2}}(2a_1+3d) = 15 \Rightarrow 2a_1 + 3d = \frac{15}{2} \\ S_9 = 45 \Rightarrow \frac{\cancel{9}}{2}(2a_1+8d) = \overset{5}{\cancel{45}} \Rightarrow \frac{1}{2}(2(a_1+4d)) = 5 \Rightarrow a_1 + 4d = 5 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 3 \ , \ d = \frac{1}{2}$$

جملهٔ یازدهم : $a_{11} = a_1 + 10d = 3 + 10\left(\frac{1}{2}\right) = 3 + 5 = 8$

۲۰ | ۳ مجموع پنج جملهٔ اول S_5 و مجموع پنج جملهٔ بعدی $S_{10} - S_5$ است. بنابراین طبق فرض مسئله داریم:

$$S_5 = \frac{1}{3}(S_{10} - S_5) \xRightarrow{\times 3} 3S_5 = S_{10} - S_5 \Rightarrow 4S_5 = S_{10} \Rightarrow \overset{2}{\cancel{4}} \times \frac{5}{\cancel{2}}(2a_1+4d) = \frac{\overset{5}{\cancel{10}}}{\cancel{2}}(2a_1+9d) \Rightarrow \overset{2}{\cancel{10}}(2a_1+4d) = \cancel{5}(2a_1+9d)$$

$$\Rightarrow 4a_1 + 8d = 2a_1 + 9d \Rightarrow d = 2a_1 \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1+d}{a_1} \overset{d=2a_1}{=\!=} \frac{a_1 + 2a_1}{a_1} = \frac{3a_1}{a_1} = 3$$

۲۱ | ۲ چون دنباله، ۴۱ جمله دارد، پس جملهٔ وسط، جملهٔ ۲۱ اُم است (زیرا $21 = \frac{41+1}{2}$). بنابراین:

مجموع پنج جملهٔ وسط : $a_{19} + a_{20} + a_{21} + a_{22} + a_{23} = 20 \xRightarrow{\text{رابطهٔ اندیس‌ها}} 5a_{21} = 20 \Rightarrow a_{21} = 4$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{41} = \frac{41}{2}(a_1 + a_{41}) \xRightarrow{\text{رابطهٔ اندیس‌ها}} \frac{41}{2}(2a_{21}) = 41(a_{21}) = 41(4) = 164$$

برای تعیین مجموع جملات از نکتهٔ زیر نیز می‌توان استفاده کرد:

> **نکته:** اگر در یک دنبالهٔ حسابی تعداد جملات فرد باشد، مجموع جملات آن برابر است با تعداد جملات ضرب در جملهٔ وسط.

بنابراین در این تست می‌توان نوشت:

$$S_{41} = 41(a_{21}) = 41(4) = 164$$

۲۲ | ۱ می‌دانیم $S_{10} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}$ و $S_7 = a_1 + a_2 + \cdots + a_7$، پس نتیجه می‌گیریم:

$$S_{10} - S_7 = a_8 + a_9 + a_{10} = 6 \xRightarrow{\text{رابطهٔ اندیس‌ها}} 3a_9 = 6 \Rightarrow a_9 = 2$$

$$a_6 + a_7 + \ldots + a_{12} = (a_6 + a_{12}) + (a_7 + a_{11}) + (a_8 + a_{10}) + a_9 = 2a_9 + 2a_9 + 2a_9 + a_9 = 7a_9 = 7(2) = 14$$

۲۳ | ۱ مجموع جملات زوج و فرد را نوشته و از هم کم می‌کنیم:

$$\begin{array}{rl} & a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{20} = 150 \\ - & a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{19} = 135 \\ \hline \end{array}$$

$$(a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + (a_6 - a_5) + \ldots + (a_{20} - a_{19}) = 15 \Rightarrow \overbrace{d + d + \ldots + d}^{\text{۱۰ تا}} = 15 \Rightarrow 10d = 15 \Rightarrow d = 1.5$$

می‌دانیم $S_{20} = 150 + 135 = 285$، بنابراین:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = 285 \overset{d=1.5}{=\!=} 10(2a_1 + 19 \times 1.5) = 285 \Rightarrow 285 = 20a_1 + 285 \Rightarrow a_1 = 0$$

۲۴ ۱

نکته: اگر دو دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت‌های d_1 و d_2 دارای جملات مشترک باشند، این جملات مشترک، با یکدیگر تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبتی برابر ک.م.م d_1 و d_2 خواهند داد.

$$\begin{cases} 2,4,6,8,10,12,14,\ldots \Rightarrow \text{قدرنسبت} = 2 \\ 5,8,11,14,17,\ldots \Rightarrow \text{قدرنسبت} = 3 \end{cases}$$

دنبالهٔ جملات مشترک به صورت $8,14,20,\ldots$ می‌باشد که جملهٔ اول آن برابر ۸ و قدرنسبت آن برابر ۶ است (ک.م.م اعداد ۲ و ۳ برابر عدد ۶ می‌باشد.)

حال تعداد جملات کم‌تر از ۱۰۰ این دنباله را تعیین می‌کنیم:

$$a_1 = 8, d = 6 \ ; \ a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 8 + (n-1)6 \Rightarrow a_n = 6n + 2$$

$$6n + 2 < 100 \Rightarrow 6n < 98 \Rightarrow n < \frac{98}{6} \simeq 16/3 \Rightarrow n = 1,2,\ldots,16$$

این دنباله ۱۶ جمله دارد، بنابراین داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{16} = \frac{16}{2}(2\times 8 + 15\times 6) = 8(16+90) = 8\times 106 = 848$$

۲۵ ۲

$$\underbrace{a_1,\ldots,a_4}^{\text{۴جملهٔ اول}} \quad \underbrace{a_5,\ldots,a_8}^{\text{۴جملهٔ دوم}} \quad \underbrace{a_9,\ldots,a_{12}}^{\text{۴جملهٔ سوم}} \quad \underbrace{a_{13},\ldots,a_{16}}^{\text{۴جملهٔ چهارم}}$$

مجموع چهار جملهٔ چهارم را منهای مجموع چهار جملهٔ دوم می‌کنیم. با توجه به رابطهٔ $a_m - a_n = (m-n)d$ داریم:

$$\begin{array}{r} a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16} \\ - \quad a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \\ \hline \end{array}$$

$$(a_{13}-a_5)+(a_{14}-a_6)+(a_{15}-a_7)+(a_{16}-a_8) = 8d+8d+8d+8d = 32d$$

$$d = a_2 - a_1 = (5+\sqrt{2}) - (3+\sqrt{2}) = 2 \Rightarrow 32d = 64$$

اگه رابطهٔ $a_m - a_n = (m-n)d$ رو یادت نبود، کافیه جملهٔ عمومی هر کدوم رو بنویسی و از هم کم کنی. مثلاً: $a_{13} - a_5 = (a_1 + 12d) - (a_1 + 4d) = 8d$.

۲۶ ۴ با توجه به رابطهٔ $S_n = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$ داریم:

$$S_8 = S_{14} \Rightarrow \frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{2}}(2a+7d) = \frac{\cancel{14}^{7}}{\cancel{2}}(2a+13d) \Rightarrow 8a + 28d = 14a + 91d \Rightarrow 6a + 63d = 0$$

$$\Rightarrow 3(2a+21d) = 0 \Rightarrow 2a + 21d = 0 \qquad (*)$$

$$S_{22} = \frac{22}{2}(2a+21d) \xRightarrow{(*)} S_{22} = 11\times 0 = 0$$

تذکر: به طور کلی می‌توان گفت در هر دنبالهٔ حسابی، اگر $S_n = S_m \ (m \neq n)$ باشد، آن‌گاه S_{m+n} برابر صفر است. اثبات این موضوع را در تست‌های بعد خواهید دید.

۲۷ ۴ دنبالهٔ $1,4,7,10,\ldots$ یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d = 3$ می‌باشد، پس:

$$a_8 = a_1 + 7d = 1 + 21 = 22 \ , \ a_{60} = a_1 + 59d = 1 + 59(3) = 178$$

بنابراین جملات $a_4, a_8, a_{12}, \cdots, a_{60}$ به‌صورت $10,22,\ldots,178$ درمی‌آیند که خود یک دنبالهٔ عددی با جملهٔ اول ۱۰ و قدرنسبت ۱۲ را تشکیل می‌دهند.

در نتیجه داریم:

$$178 = 10 + (n-1)(12) \Rightarrow 12(n-1) = 168 \Rightarrow 12n = 180 \Rightarrow n = 15$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}\big(2(10) + (15-1)(12)\big) = \frac{15}{2}(188) = 15\times 94 = 1410$$

برای تعیین قدرنسبت دنبالهٔ جدید از نکتهٔ زیر نیز می‌توان استفاده کرد:

نکته: اگر در دنبالهٔ حسابی $\{a_n\}$ با قدرنسبت d، جملات آن را با فاصلهٔ k از هم انتخاب کنیم، جملات حاصل، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی جدید با قدرنسبت kd می‌دهند.

در این تست چون جملات چهارم، هشتم، دوازدهم و ... با فاصلهٔ ۴ تا از هم هستند، پس قدرنسبت برابر $12 = 3\times 4$ است.

۲۸ ۱ با توجه به مطالب درسنامه، a_n باید یک عبارت درجه اول برحسب n و S_n یک عبارت درجه دوم بدون عدد ثابت باشد که فقط گزینهٔ (۱) این شرایط را دارد.

۲۹ **۳** با توجه به مطالب درسنامه می‌دانیم جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی، عبارتی درجه اول برحسب n است و ضریب n برابر قدرنسبت می‌باشد. پس برای این‌که a_n عبارت درجه دوم نباشد، باید ضریب $n^۲$ را صفر بگیریم:

$$p-۲=۰ \Rightarrow p=۲ \Rightarrow a_n=۳n-۵ \Rightarrow d=۳, a_۱=-۲$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a+(n-۱)d) \Rightarrow S_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}(۲(-۲)+۹(۳))=۵(-۴+۲۷)=۱۱۵$$

۳۰ **۴** می‌دانیم زمانی $S_n=(۲p-۱)n^۳+qn^۲+pn+q+۱$ می‌تواند مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی باشد که جملهٔ درجه سوم و جملهٔ مستقل از n نداشته باشد. بنابراین:

$$۲p-۱=۰ \Rightarrow p=\frac{۱}{۲}\ ,\ q+۱=۰ \Rightarrow q=-۱ \Rightarrow S_n=-n^۲+\frac{n}{۲}$$

$$\text{مجموع ۵ جملهٔ دوم}=S_{۱۰}-S_۵=(-۱۰۰+۵)-\left(-۲۵+\frac{۵}{۲}\right)=-۷۲/۵$$

۳۱ **۲**

$$a_۱+a_۲+\ldots+a_{۱۰}+a_{۱۱}=۷۰\ ;\quad a_{۶۰}+a_{۵۹}+\ldots+a_{۵۱}+a_{۵۰}=۵۱$$

ابتدا دو رابطهٔ بالا را با هم جمع می‌کنیم:

$$(a_۱+a_{۶۰})+(a_۲+a_{۵۹})+\ldots+(a_{۱۰}+a_{۵۱})+(a_{۱۱}+a_{۵۰})=۱۲۱\quad (*)$$

طبق رابطهٔ اندیس‌ها داریم:

$$a_۱+a_{۶۰}=a_۲+a_{۵۹}=\ldots=a_{۱۱}+a_{۵۰}\xrightarrow{(*)}۱۱(a_۱+a_{۶۰})=۱۲۱\Rightarrow a_۱+a_{۶۰}=۱۱$$

مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی به فرم $S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$ می‌باشد، بنابراین:

$$\text{مجموع تمام جملات}: S_{۶۰}=\frac{۶۰}{۲}(a_۱+a_{۶۰})=۳۰\times۱۱=۳۳۰$$

۳۲ **۲** فرض می‌کنیم دنباله، n جمله دارد. بنابراین با جمع سه جملهٔ اول و سه جملهٔ آخر داریم:

$$\begin{cases}a_۱+a_۲+a_۳=۱۵\\ a_n+a_{n-۱}+a_{n-۲}=۶۹\end{cases}\Rightarrow(a_۱+a_n)+(a_۲+a_{n-۱})+(a_۳+a_{n-۲})=۸۴$$

با توجه به رابطهٔ اندیس‌ها $a_۱+a_n=a_۲+a_{n-۱}=a_۳+a_{n-۲}$ است، بنابراین:

$$۳(a_۱+a_n)=۸۴\Rightarrow a_۱+a_n=۲۸$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\Rightarrow ۱۶۸=\frac{n}{۲}(۲۸)\Rightarrow ۱۶۸=۱۴n\Rightarrow n=۱۲$$

۳۳ **۲** در دستهٔ اول، یک عدد فرد، در دستهٔ دوم، دو عدد فرد، در دستهٔ سوم، سه عدد فرد و به همین ترتیب در دستهٔ بیستم، بیست عدد فرد وجود دارد. ابتدا تعداد کل جملات را از دستهٔ اول تا دستهٔ بیستم تعیین می‌کنیم:

$$۱+۲+\ldots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}\Rightarrow ۱+۲+\ldots+۲۰=\frac{۲۰\times۲۱}{۲}=۲۱۰$$

بنابراین آخرین جملهٔ دستهٔ بیستم، ۲۱۰اُمین جملهٔ دنبالهٔ اعداد فرد می‌باشد:

$$۱,۳,۵,۷,\ldots$$

$$a_n=a_۱+(n-۱)d\xrightarrow[d=۲]{a_۱=۱}a_{۲۱۰}=۱+۲۰۹\times۲=۴۱۹$$

۳۴ **۳** با توجه به فرض سوال، جملهٔ آخر دستهٔ nاُم برابر $n^۲$ است. پس آخرین عدد دستهٔ نهم و دهم به‌ترتیب ۸۱ و ۱۰۰ هستند و در نتیجه دستهٔ دهم به‌صورت $(۸۲,۸۳,\cdots,۱۰۰)$ خواهد بود، بنابراین دنبالهٔ دستهٔ دهم، ۱۹ جمله دارد (زیرا $(۱۰۰-۸۲)+۱=۱۹$) که $S_{۱۹}$ را به‌صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\Rightarrow S_{۱۹}=\frac{۱۹}{۲}(۸۲+۱۰۰)=۱۷۲۹$$

۳۵ **۴** ۵ جملهٔ متوالی دنبالهٔ حسابی را به‌صورت $a-۲d, a-d, a, a+d, a+۲d$ نمایش می‌دهیم، بنابراین:

$$a-۲d+a-d+a+a+d+a+۲d=۵a=۵\Rightarrow a=۱\Rightarrow \text{جملهٔ وسط}=۱$$

$$\text{مجموع مربعات ۵ جمله}=(۱-۲d)^۲+(۱-d)^۲+۱^۲+(۱+d)^۲+(۱+۲d)^۲=۴۵$$

$$\Rightarrow ۱+۴d^۲-۴d+۱+d^۲-۲d+۱+۱+d^۲+۲d+۱+۴d^۲+۴d=۴۵\Rightarrow ۵+۱۰d^۲=۴۵\Rightarrow d^۲=۴$$

جملهٔ وسط برابر ۱ و $d^۲=۴$ است، بنابراین جملهٔ وسط، $\frac{۱}{۴}$ مجذور قدرنسبت می‌باشد.

۳۶ **۴** هریک از کسرها را گویا می‌کنیم. تفاضل جملات متوالی برابر قدرنسبت d است:

$$\frac{\sqrt{a_۲}-\sqrt{a_۱}}{\underbrace{a_۲-a_۱}_{d}}+\frac{\sqrt{a_۳}-\sqrt{a_۲}}{\underbrace{a_۳-a_۲}_{d}}+\cdots+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-۱}}}{\underbrace{a_n-a_{n-۱}}_{d}}=\frac{\cancel{\sqrt{a_۲}}-\sqrt{a_۱}+\cancel{\sqrt{a_۳}}-\cancel{\sqrt{a_۲}}+\cdots+\sqrt{a_n}-\cancel{\sqrt{a_{n-۱}}}}{d}$$

$$=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_۱}}{d}=\frac{a_n-a_۱}{d(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_۱})}=\frac{a_۱+(n-۱)d-a_۱}{d(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_۱})}=\frac{n-۱}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_۱}}=\frac{n-۱}{\sqrt{۱۶۹}+\sqrt{۴}}=\frac{n-۱}{۱۵}$$

۳۷ **۱**

$$a_n=a_{n+۳}+۹\Rightarrow a_۱+(n-۱)d=a_۱+(n+۲)d+۹\Rightarrow ۳d=-۹\Rightarrow d=-۳$$

$$a_۲=۳a_۳\Rightarrow a_۱+d=۳(a_۱+۲d)\xrightarrow{d=-۳} a_۱-۳=۳a_۱-۱۸\Rightarrow a_۱=\frac{۱۵}{۲}$$

برای تعیین مجموع چهار جملهٔ سوم، دو روش وجود دارد:

روش اول:

$$\text{مجموع ۴ جملهٔ سوم}=a_۹+a_{۱۰}+a_{۱۱}+a_{۱۲}=a_۱+۸d+a_۱+۹d+a_۱+۱۰d+a_۱+۱۱d=۴a_۱+۳۸d=۳۰-۱۱۴=-۸۴$$

روش دوم:

$$\text{مجموع ۴ جملهٔ سوم}=S_{۱۲}-S_۸=\frac{۱۲}{۲}(۲a_۱+۱۱d)-\frac{۸}{۲}(۲a_۱+۷d)=۶(۱۵-۳۳)-۴(۱۵-۲۱)=-۸۴$$

۳۸ **۴** با فرض $a_۱=۵$ و $a_n=۵۳$ داریم:

$$۵,a_۲,\ldots,a_{n-۱},۵۳\Rightarrow a_{n-۱}-a_۲=۳۶\Rightarrow a_۱+(n-۲)d-(a_۱+d)=۳۶\Rightarrow (n-۳)d=۳۶\quad(۱)$$

$$a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow ۵۳=۵+(n-۱)d\Rightarrow (n-۱)d=۴۸\quad(۲)$$

از تقسیم دو رابطهٔ (۱) و (۲)، تعداد جملات و قدرنسبت را به دست می‌آوریم:

$$\frac{(n-۳)d}{(n-۱)d}=\frac{۳۶}{۴۸}\Rightarrow\frac{n-۳}{n-۱}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow ۴n-۱۲=۳n-۳\Rightarrow n=۹\xrightarrow{(n-۳)d=۳۶} d=۶$$

بنابراین واسطه‌های عددی به‌صورت $۱۱,۱۷,\ldots,۴۷$ می‌باشند که شامل ۷ جمله هستند. در نتیجه:

$$S_۷=\frac{۷}{۲}(۱۱+۴۷)=۷\times ۲۹=۲۰۳$$

۳۹ **۳** در دنبالهٔ $a_n=۲n-۱$، جملهٔ اول برابر ۱ و جملهٔ دوم برابر ۳ است، پس قدرنسبت دنباله ۲ می‌شود. از طرفی می‌دانیم اگر هر جمله را از جملهٔ بعدی کم کنیم، قدرنسبت به دست می‌آید، بنابراین:

$$\frac{۲}{a_۱a_۲}+\frac{۲}{a_۲a_۳}+\frac{۲}{a_۳a_۴}+\ldots+\frac{۲}{a_{۱۲}a_{۱۳}}=\frac{d}{a_۱a_۲}+\frac{d}{a_۲a_۳}+\frac{d}{a_۳a_۴}+\ldots+\frac{d}{a_{۱۲}a_{۱۳}}$$

$$=\frac{a_۲-a_۱}{a_۱a_۲}+\frac{a_۳-a_۲}{a_۲a_۳}+\frac{a_۴-a_۳}{a_۳a_۴}+\ldots+\frac{a_{۱۳}-a_{۱۲}}{a_{۱۲}a_{۱۳}}=\frac{۱}{a_۱}-\cancel{\frac{۱}{a_۲}}+\cancel{\frac{۱}{a_۲}}-\cancel{\frac{۱}{a_۳}}+\cancel{\frac{۱}{a_۳}}-\cancel{\frac{۱}{a_۴}}+\ldots+\cancel{\frac{۱}{a_{۱۲}}}-\frac{۱}{a_{۱۳}}$$

$$=\frac{۱}{a_۱}-\frac{۱}{a_{۱۳}}=\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۲(۱۳)-۱}=۱-\frac{۱}{۲۵}=۱-\frac{۴}{۱۰۰}=۰/۹۶$$

۴۰ **۴**

$$S_m=S_n\Rightarrow\frac{m}{\cancel{۲}}(۲a+(m-۱)d)=\frac{n}{\cancel{۲}}(۲a+(n-۱)d)\Rightarrow ۲am+m(m-۱)d=۲an+n(n-۱)d$$

$$\Rightarrow ۲a(m-n)+(m^۲-m-n^۲+n)d=۰\Rightarrow ۲a(m-n)+\big((m^۲-n^۲)-(m-n)\big)d=۰$$

$$\xrightarrow{\text{از } (m-n) \text{ فاکتور می‌گیریم}}(m-n)(۲a+(m+n-۱)d)=۰\xrightarrow{m\neq n}۲a+(m+n-۱)d=۰\Rightarrow S_{m+n}=۰$$

۴۱ **۲** می‌دانیم $a_۶-a_۱=۲۴$ است، پس با توجه به $a_n=a_۱q^{n-۱}$ داریم:

$$a_۶-a_۱=۲۴\Rightarrow a_۱q^۵-a_۱=۲۴\Rightarrow a_۱(q^۵-۱)=۲۴$$

از طرفی $S_۵=۱۲$ است، بنابراین:

$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}\Rightarrow S_۵=\frac{a_۱(۱-q^۵)}{۱-q}\xrightarrow{a_۱(q^۵-۱)=۲۴}۱۲=\frac{-۲۴}{۱-q}\Rightarrow ۱-q=\frac{-۲۴}{۱۲}\Rightarrow ۱-q=-۲\Rightarrow q=۳$$

۴۲ **۲** می‌دانیم اگر a,b,c سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه $b^۲=ac$. پس ابتدا مقدار x را به‌دست می‌آوریم و به کمک آن q را تعیین می‌کنیم:

$$x^۲=۲(\frac{۱}{۲})\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow\begin{cases}x=۱\Rightarrow ۲,۱,\frac{۱}{۲},\ldots\Rightarrow \text{دنبالهٔ نزولی}\\ x=-۱\Rightarrow ۲,-۱,\frac{۱}{۲},\ldots\Rightarrow \text{دنبالهٔ غیرنزولی}\Rightarrow q=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$S_n=\frac{a(۱-q^n)}{۱-q}\Rightarrow S_۶=\frac{a_۱(۱-q^۶)}{۱-q}=\frac{۲\left(۱-(-\frac{۱}{۲})^۶\right)}{۱-(-\frac{۱}{۲})}=\frac{۲(۱-\frac{۱}{۶۴})}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۲(\frac{۶۳}{۶۴})}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۴}{۳}\times\frac{۶۳}{۶۴}=\frac{۲۱}{۱۶}$$

۴۳ **۴** طبق واسطهٔ هندسی بین سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی داریم:

$$a^۲=۴\times ۹\Rightarrow a^۲=۳۶\Rightarrow a=\pm ۶\Rightarrow\begin{cases}a=۶\ \Rightarrow\ ۴,۶,۹,\ldots\Rightarrow \text{دنباله صعودی است.}\\ a=-۶\ \Rightarrow\ ۴,-۶,۹,\ldots\Rightarrow \text{دنباله نه صعودی و نه نزولی است.}\end{cases}$$

پس $a=6$ قابل قبول است و در نتیجه $q=\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$ می‌شود. بنابراین:

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\Rightarrow S_6=\frac{4\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{3}{2}}=\frac{4\left(1-\frac{729}{64}\right)}{-\frac{1}{2}}=-8\left(1-\frac{729}{64}\right)=-8\left(-\frac{665}{64}\right)=\frac{665}{8}=83\frac{1}{8}$$

۴۴ **۴** با توجه به رابطهٔ $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $(q\neq 1)$ داریم:

$$\begin{cases}S_6=\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}=153\\[2mm] S_3=\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=136\end{cases}\xrightarrow{\text{تقسیم دو رابطه}}\frac{\dfrac{\cancel{a_1}(1-q^6)}{\cancel{1-q}}}{\dfrac{\cancel{a_1}(1-q^3)}{\cancel{1-q}}}=\frac{153}{136}\Rightarrow\frac{1-q^6}{1-q^3}=\frac{153}{136}$$

$$\xrightarrow{\text{مزدوج}}\frac{\cancel{(1-q^3)}(1+q^3)}{\cancel{1-q^3}}=\frac{153}{136}\Rightarrow 1+q^3=\frac{153}{136}\Rightarrow q^3=\frac{17}{136}=\frac{1}{8}\Rightarrow q=\frac{1}{2}$$

حال نسبت $\frac{a_1}{a_5}$ را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{a_1}{a_5}=\frac{\cancel{a_1}}{a_1q^4}=\frac{1}{q^4}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4}=\frac{1}{\frac{1}{16}}=16$$

یادت باشه در تست‌های این بخش، هر جا در معادله‌ای $(1-q)$ رو با هم ساده کردیم، با فرض $q\neq 1$ این کار رو انجام دادیم.

تذکر: با توجه به درسنامه بین مجموع n جملهٔ اول و مجموع $2n$ جملهٔ اول، رابطهٔ $\frac{S_{2n}}{S_n}=q^n+1$ $(q\neq\pm1)$ برقرار است، بنابراین در این تست از همان ابتدا می‌توانستیم بگوییم $\frac{S_6}{S_3}=q^3+1$ تا محاسبات ما بسیار کوتاه‌تر شود. در تست‌های بعد هم می‌توانید در صورت امکان این کار را انجام دهید.

۴۵ **۱** از معادلهٔ $S_{10}=(4\sqrt{2}+1)S_5$ مقدار قدرنسبت را تعیین کرده و سپس حاصل $\frac{S_8}{S_4}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$S_{10}=(4\sqrt{2}+1)S_5\Rightarrow\frac{\cancel{a_1}(1-q^{10})}{\cancel{1-q}}=(4\sqrt{2}+1)\left(\frac{\cancel{a_1}(1-q^5)}{\cancel{1-q}}\right)\xrightarrow{\text{مزدوج}}\cancel{(1-q^5)}(1+q^5)=(4\sqrt{2}+1)\cancel{(1-q^5)}$$

$$1+q^5=4\sqrt{2}+1\Rightarrow q^5=4\sqrt{2}=\sqrt{32}=\sqrt{2^5}=(\sqrt{2})^5\Rightarrow q=\sqrt{2}\qquad(*)$$

$$\frac{S_8}{S_4}=\frac{\dfrac{\cancel{a}(1-q^8)}{\cancel{1-q}}}{\dfrac{\cancel{a}(1-q^4)}{\cancel{1-q}}}=\frac{1-q^8}{1-q^4}\overset{\text{مزدوج}}{=}\frac{\cancel{(1-q^4)}(1+q^4)}{\cancel{1-q^4}}=1+q^4\overset{(*)}{=}1+(\sqrt{2})^4=1+2^2=5$$

۴۶ **۲**

$$\frac{a_1a_2a_3}{(a_4)^3}=\frac{a_1\times a_1q\times a_1q^2}{(a_1q^3)^3}=64\Rightarrow\frac{\cancel{a_1^3}q^3}{\cancel{a_1^3}q^9}=64\Rightarrow q^6=\frac{1}{64}\Rightarrow q=\pm\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{دنبالهٔ نزولی با جملهٔ اول مثبت}}q=\frac{1}{2}$$

باز هم یادآور می‌شویم که اگر $q<0$ باشد، دنباله نه صعودی و نه نزولی است. حال $\frac{S_6}{a_1}$ را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{S_6}{a_1}=\frac{\dfrac{\cancel{a_1}(1-q^6)}{1-q}}{\cancel{a_1}}=\frac{1-q^6}{1-q}=\frac{1-\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{63}{64}}{\frac{1}{2}}=\frac{63}{32}$$

۴۷ **۳** چون شش جمله درج می‌کنیم، پس دنبالهٔ حاصل ۸ جمله دارد که جملهٔ اول ۲ و جملهٔ هشتم برابر $16\sqrt{2}$ است:

$$a_8=a_1q^7\Rightarrow 16\sqrt{2}=2q^7\Rightarrow 8\sqrt{2}=q^7\Rightarrow 2^3\times 2^{\frac{1}{2}}=q^7\Rightarrow 2^{\frac{7}{2}}=q^7\Rightarrow\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^7=q^7\Rightarrow(\sqrt{2})^7=q^7\Rightarrow q=\sqrt{2}$$

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\Rightarrow S_8=\frac{2(1-(\sqrt{2})^8)}{1-\sqrt{2}}=\frac{2(1-16)}{1-\sqrt{2}}=\frac{-30}{1-\sqrt{2}}=\frac{30}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=30(\sqrt{2}+1)$$

۴۸ **۳**

$$S_4=3\Rightarrow\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=3\Rightarrow\frac{a_1\cancel{(1-q)}(1+q)(1+q^2)}{\cancel{1-q}}=3\Rightarrow a_1(1+q)(1+q^2)=3$$

$$a_1+a_3=1\Rightarrow a_1+a_1q^2=1\Rightarrow a_1(1+q^2)=1$$

از تقسیم دو رابطهٔ بالا داریم:

$$\frac{\cancel{a_1}(1+q)\cancel{(1+q^2)}}{\cancel{a_1}\cancel{(1+q^2)}}=3\Rightarrow 1+q=3\Rightarrow q=2\xrightarrow{a_1(1+q^2)=1}a_1=\frac{1}{5}\Rightarrow S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{\frac{1}{5}(1-64)}{-1}=\frac{1}{5}(63)=12/6$$

۴۹ ۱ **روش اول:** هر لایه، مقداری از مواد، مضر را جذب و مقداری را رد می‌کند. در این روش معلوم می‌کنیم که چند لایه قرار دهیم تا مجموع جذب لایه‌ها بیشتر از ۹۷ درصد شود.

اولین لایه، نصف مواد مضر را جذب و نصف آن را رد می‌کند، دومین لایه از نیم باقی مانده، نیمی از مواد مضر یعنی $\frac{۱}{۴}$ آن را جذب می‌کند و به همین ترتیب مقداری که هر لایه، مواد مضر را جذب می‌کند به‌صورت دنبالهٔ زیر خواهد بود:

$$\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۸},\dots$$

این دنباله یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد. حال می‌خواهیم بدانیم چند جمله از جملات این دنباله جمع شود تا حاصل، حداقل ۹۷ درصد شود:

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\dots+\frac{۱}{۲^n}\geq\frac{۹۷}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{\cancel{\frac{۱}{۲}}\left(۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^n\right)}{\underbrace{۱-\frac{۱}{۲}}_{\cancel{\frac{۱}{۲}}}}\geq\frac{۹۷}{۱۰۰}\Rightarrow ۱-\frac{۱}{۲^n}\geq\frac{۹۷}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{۱}{۲^n}\leq\frac{۳}{۱۰۰}\Rightarrow ۲^n\geq\frac{۱۰۰}{۳}\simeq ۳۳/۳\Rightarrow n\geq ۶$$

توجه کنید که با آزمایش اعداد طبیعی در نامعادلهٔ $۲^n\geq ۳۳/۳$ و این‌که $۶۴=۲^۶$، در می‌یابیم که حداقل مقدار n برابر ۶ خواهد بود. پس تعداد لایه‌ها باید حداقل ۶ تا باشد.

روش دوم: وقتی می‌گوییم ۹۷ درصد مواد، جذب لایه‌های محافظتی شده، بدین معنی است که ۳ درصد مواد مضر از لایه‌ها رد شده‌اند. در این روش معلوم می‌کنیم که چند لایه قرار دهیم تا کم‌تر از ۳ درصد مواد از لایه‌ها خارج شوند. اولین لایه شدت تابش را $\frac{۱}{۲}$ می‌کند، یعنی نصف مواد مضر از آن رد می‌شوند، لایهٔ دوم از نیم باقی‌مانده، نیمی از مواد مضر یعنی $\frac{۱}{۴}$ را رد می‌کند و به همین ترتیب در لایهٔ nاُم $\frac{۱}{۲^n}$ از مواد مضر از آن خارج می‌شود. بنابراین:

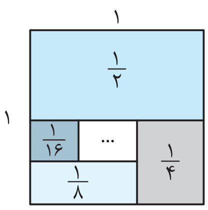
$$\frac{۱}{۲^n}\leq\frac{۳}{۱۰۰}\Rightarrow ۲^n\geq\frac{۱۰۰}{۳}\Rightarrow n\geq ۶$$

روش اول، روش کتاب درسیه، اما روش دوم، سریع تر و کوتاه‌تره. سعی کن مفهوم هر دو روش رو خوب یاد بگیری.

۵۰ ۲ **روش اول:** مساحت مربع اولیه برابر ۱ است. در مرحلهٔ اول $\frac{۱}{۲}$، مرحلهٔ دوم $\frac{۱}{۴}$، مرحلهٔ سوم $\frac{۱}{۸}$ و به همین ترتیب، قسمتی از مربع که در هر مرحله رنگ می‌شود، تشکیل یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱=\frac{۱}{۲}$ و قدرنسبت $q=\frac{۱}{۲}$ می‌دهند:

$$\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۸},\dots$$

حال باید مجموع این مساحت‌های رنگ شده، بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{۹۹}{۱۰۰}$ باشد:



$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}=\frac{\frac{۱}{۲}\left(۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^n\right)}{۱-\frac{۱}{۲}}=۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^n$$

$$S_n\geq\frac{۹۹}{۱۰۰}\Rightarrow ۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^n\geq\frac{۹۹}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{۱}{۲^n}\leq\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow ۲^n\geq ۱۰۰\Rightarrow n\geq ۷$$

یعنی بعد از مرحلهٔ هفتم، حداقل ۹۹ درصد مربع رنگ شده است.

روش دوم: به جای این‌که بگوییم، مجموع مساحت‌های رنگ‌شده بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{۹۹}{۱۰۰}$ باشد، می‌گوییم باید مساحت قسمت رنگ نشده کم‌تر یا مساوی $\frac{۱}{۱۰۰}$ باشد. در مرحلهٔ اول $\frac{۱}{۲}$، مرحلهٔ دوم $\frac{۱}{۴}$، مرحلهٔ سوم $\frac{۱}{۸}$ و به همین ترتیب در مرحلهٔ nاُم، $\frac{۱}{۲^n}$ از مساحت مربع رنگ نشده است. پس داریم:

$$\frac{۱}{۲^n}\leq\frac{۱}{۱۰۰}\Rightarrow ۲^n\geq ۱۰۰\Rightarrow n\geq ۷$$

۵۱ ۳ می‌دانیم اگر جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی $a_۱$، قدرنسبت آن q و تعداد جملات آن n باشد، آن‌گاه مجموع تمام جملات برابر است با:

$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$$

دنبالهٔ جملات ردیف فرد، یک دنبالهٔ هندسی است که جملهٔ اول آن $a_۱$، قدرنسبت آن $q^۲$ و تعداد جملات آن $\frac{n}{۲}$ می‌باشد. پس مجموع جملات ردیف فرد برابر است با:

$$S_{\frac{n}{۲}}=\frac{a_۱\left(۱-(q^۲)^{\frac{n}{۲}}\right)}{۱-q^۲}=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q^۲}$$

در نتیجه داریم:

$$S_n=۳S_{\frac{n}{۲}}\Rightarrow\frac{\cancel{a_۱(۱-q^n)}}{۱-q}=۳\times\frac{\cancel{a_۱(۱-q^n)}}{۱-q^۲}\Rightarrow\frac{۱}{۱-q}=\frac{۳}{۱-q^۲}\Rightarrow\frac{۱}{۱-q}=\frac{۳}{(۱-q)(۱+q)}\Rightarrow\frac{۳}{۱+q}=۱\Rightarrow q+۱=۳\Rightarrow q=۲$$

۵۲ **۴** جملات اول، دوم و ششم دنبالهٔ حسابی به‌صورت a، $a+d$ و $a+5d$ هستند. چون این جملات، تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند، پس می‌توان نوشت:

$$a(a+5d)=(a+d)^2 \Rightarrow \cancel{a^2}+5ad=\cancel{a^2}+d^2+2ad \Rightarrow 3ad=d^2 \xRightarrow{d\neq 0} d=3a$$

$$S_n=\frac{n}{2}(2a+(n-1)d) \Rightarrow S_{10}=\frac{10}{2}(2a+9d) \xRightarrow{d=3a} S_{10}=5(2a+27a)=5(29a)=145a$$

۵۳ **۲** **روش اول:** جملات اول، پنجم و هفدهم دنبالهٔ حسابی به‌صورت a، $a+4d$ و $a+16d$ هستند. چـون ایـن جمـلات، تشـکیل دنبالـهٔ هندسـی می‌دهند پس می‌توان نوشت:

$$a(a+16d)=(a+4d)^2 \Rightarrow \cancel{a^2}+16ad=\cancel{a^2}+16d^2+8ad \Rightarrow 8ad=16d^2 \xRightarrow{d\neq 0} a=2d$$

بـا جـایگزینی $a=2d$ جمـلات a، $a+4d$ و $a+16d$ بـه‌صـورت $2d$، $6d$ و $18d$ در می‌آینـد. چـون ایـن اعـداد، جمـلات متـوالی دنبالـهٔ هندسـی‌اند، پس $q=3$ می‌شود. حال مجموع چهار جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی را به‌دست می‌آوریم:

$$S_4=\frac{a(1-q^4)}{1-q}=\frac{a(1-3^4)}{1-3}=\frac{a(-80)}{-2}=40a$$

> **یادآوری:** اگر در یک دنبالهٔ حسابی غیرثابت جملات mاُم، nاُم و pاُم $(p>n>m)$ به‌ترتیب جملات متوالی از یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه قدرنسبت دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ $q=\frac{p-n}{n-m}$ به‌دست می‌آید.

روش دوم: با توجه به مطلب بالا $q=\frac{17-5}{5-1}=\frac{12}{4}=3$ می‌باشد و در ادامه مانند راه حل اول $S_4=40a$ به‌دست می‌آید.

۵۴ **۳** تعداد گندم‌های موجود در هر خانه تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهند که جملهٔ اول آن ۱، قدرنسبت آن ۲ و تعداد جمله‌ها ۶۴ می‌باشد. تعداد کل گندم‌ها حاصل جمع جملات این دنباله است:

$1,2,4,8,\cdots$: جملات دنباله

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{1(1-2^{64})}{1-2}=2^{64}-1=(2^4)^{16}-1=16^{16}-1$$

حال $2^{64}-1$ گرم را با ۱۰۰۰ میلیارد تن مقایسه می‌کنیم. (با صرف‌نظر کردن از یک گرم عدد $2^{64}-1$ را بـه‌صـورت سـاده‌تر 2^{64} می‌نویسـیم.) مـی‌دانیم هـزار میلیارد برابر 10^{12} و هر یک تن برابر 10^6 گرم است، پس هزار میلیارد تن برابـر 10^{18} گـرم می‌باشـد. از طرفـی $10^{18}=(10^3)^6$ و $2^{64}=(2^{10})^6\times 2^4$ اسـت. بنابراین داریم:

$$2^{10}=1024\ ,\ 10^3=1000 \Rightarrow 2^{10}>10^3 \Rightarrow (2^{10})^6>(10^3)^6 \Rightarrow 2^4(2^{10})^6>(10^3)^6 \Rightarrow 2^{64}>10^{18}$$

پس وزن کل گندم‌ها از ۱۰۰۰ میلیارد تن بیشتر است. (البته با مقایسهٔ بالا حتی می‌توان گفت از ۱۶۰۰۰ میلیارد تن هم بیشتر است.)

این مسئله به نام مسئلهٔ شطرنج معروفه که ابوریحان بیرونی، ریاضی‌دان برجستهٔ ایرانی به روش خاص خودش اون رو حل کرده. عدد حاصل، این قدر زیاده کـه اگه کل مساحت کرهٔ زمین رو هم گندم بکاریم باز پاسخ‌گوی این میزان گندم نیست.

۵۵ **۴** جملات دنباله به‌صورت $1,2,4,8,\cdots$ است که باید $S_n\geq 64(1000)$ باشد. (هر کیلوگرم برابر ۱۰۰۰ گرم است.) در نتیجه داریم:

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{1-2^n}{1-2}\geq 64(1000) \Rightarrow 2^n-1\geq 64(1000) \Rightarrow 2^n\geq 64(1000)+1$$

برای حل ساده‌تر نامعادلهٔ بالا ابتدا از عدد ۱ صرف‌نظر می‌کنیم:

$$2^n\geq 64(1000) \Rightarrow 2^n\geq 2^6(1000) \Rightarrow \frac{2^n}{2^6}\geq 1000 \Rightarrow 2^{n-6}\geq 1000$$

می‌دانیم $2^{10}=1024$ و $2^9=512$ می‌باشد، بنابراین نامعادلهٔ بالا زمانی برقرار است که $n-6\geq 10$ و در نتیجه $n\geq 16$ باشد.

۵۶ **۳** **روش اول:** می‌دانیم حاصل تقسیم دو جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی برابر قدرنسبت است:

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{9}}=\sqrt[4]{27}$$

در نتیجه نسبت مجموع چهار جملهٔ اول به مجموع چهار جملهٔ دوم برابر است با:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{a_5+a_6+a_7+a_8}=\frac{a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3}{a_1q^4+a_1q^5+a_1q^6+a_1q^7}=\frac{\cancel{a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3}}{q^4\cancel{(a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3)}}=\frac{1}{q^4}=\frac{1}{(\sqrt[4]{27})^4}=\frac{1}{27}$$

روش دوم: قدرنسبت مانند روش اول برابر $q=\sqrt[4]{27}$ است.

مجموع چهار جملهٔ اول S_4 و مجموع چهار جملهٔ دوم S_8-S_4 می‌باشد. حال می‌خواهیم $\frac{S_4}{S_8-S_4}$ را تعیین کنیم. بـرای راحتـی کـار ابتـدا $\frac{S_8-S_4}{S_4}$ را به‌دست آورده و جواب حاصل را معکوس می‌کنیم:

$$\frac{S_8-S_4}{S_4}=\frac{S_8}{S_4}-1=\frac{\frac{\cancel{a}(1-q^8)}{\cancel{1-q}}}{\frac{\cancel{a}(1-q^4)}{\cancel{1-q}}}-1=\frac{1-q^8}{1-q^4}-1=\frac{\cancel{(1-q^4)}(1+q^4)}{\cancel{1-q^4}}-1=1+q^4-1=q^4=(\sqrt[4]{27})^4=27 \Rightarrow \frac{S_4}{S_8-S_4}=\frac{1}{27}$$

۵۷ **۴** می‌دانیم اگر a، b و c دنباله‌ای هندسی تشکیل دهند، آن‌گاه $b^۲=ac$ است، بنابراین:

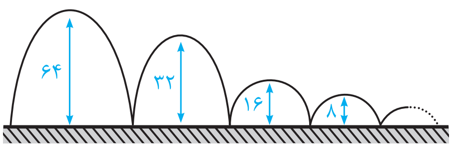
$$(۲x)^۲=(x^۲-۲)(x^۲+۴)\Rightarrow ۴x^۲=x^۴+۲x^۲-۸\Rightarrow x^۴-۲x^۲-۸=۰\Rightarrow (x^۲)^۲-۲(x^۲)-۸=۰$$

$$\Rightarrow (x^۲-۴)(x^۲+۲)=۰\Rightarrow \begin{cases} x^۲+۲=۰\Rightarrow x^۲=-۲ \ (\text{غ ق ق}) \\ x^۲-۴=۰\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=\pm ۲ \end{cases}$$

از جواب $x=-۲$ دنبالهٔ هندسی $...,۸,-۴,۲$ به‌دست می‌آید که نزولی نیست، اما از جواب $x=۲$ دنبالهٔ هندسی نزولی $۸,۴,۲,\cdots$ به‌دست می‌آید که قدرنسبت آن برابر $q=\frac{۱}{۲}$ و $a_۱=۸$ است. در نتیجه داریم:

$$S_۷=\frac{۸\left(۱-(\frac{۱}{۲})^۷\right)}{\underbrace{۱-\frac{۱}{۲}}_{\frac{۱}{۲}}}=۱۶\left(۱-(\frac{۱}{۲})^۷\right)=۱۶-۱۶\times\frac{۱}{۲^۷}=۱۶-\frac{\cancel{۲^۴}}{\underbrace{\cancel{۲^۷}}_{۲^۳}}=۱۶-\frac{۱}{۸}=\frac{۱۲۷}{۸}$$

اگه نحوهٔ حل معادلهٔ $x^۴-۲x^۲-۸=۰$ رو خوب نفهمیدی، در بخش بعدی این نوع معادلات رو توضیح می‌دیم.



۵۸ **۳** وقتی توپ را پرتاب می‌کنیم، ۶۴ متر بالا می‌رود و بعد ۶۴ متر پایین می‌آید، یعنی از لحظهٔ پرتاب تا برخورد اول $۱۲۸=۲\times ۶۴$ متر مسافت طی می‌کند، سپس ۳۲ متر بالا و ۳۲ متر پایین می‌آید، یعنی در مرحلهٔ دوم ۶۴ متر طی می‌کند. بنابراین دنبالهٔ مسافت‌های طی‌شده (برحسب متر) در هر مرحله به‌صورت زیر است:

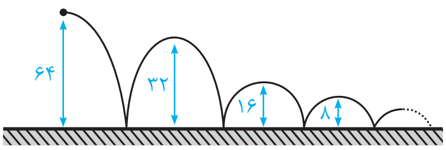
$$۱۲۸,۶۴,۳۲,\cdots$$

این دنباله، یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱=۱۲۸$ و قدرنسبت $q=\frac{۱}{۲}$ است.

برای این‌که کل مسافت پیموده شده در لحظه‌ای که توپ برای بار دهم به زمین برخورد می‌کند را حساب کنیم، کافی است $S_{۱۰}$ را به‌دست آوریم:

$$S_n=\frac{a(۱-q^n)}{۱-q}\Rightarrow S_{۱۰}=\frac{۱۲۸\left(۱-(\frac{۱}{۲})^{۱۰}\right)}{\underbrace{۱-\frac{۱}{۲}}_{\frac{۱}{۲}}}=۲۵۶\left(۱-\frac{۱}{۲^{۱۰}}\right)=۲۵۶\left(\frac{۲^{۱۰}-۱}{۲^{۱۰}}\right)=\cancel{۲^۸}\left(\frac{۱۰۲۴-۱}{\underbrace{\cancel{۲^{۱۰}}}_{۲^۲}}\right)=\frac{۱۰۲۳}{۴}=۲۵۵/۷۵ \ \text{متر}$$

سؤال: در شرایط این تست اگر توپ را از ارتفاع ۶۴ متری رها کنیم چه مسافتی را طی خواهد کرد؟



در این حالت توپ فقط در مرتبهٔ اول برخورد به زمین، یک مسافت از بالا به پایین را طی می‌کند. اما در مراتب بعدی یک مسافت پایین به بالا و یک مسافت بالا به پایین را طی می‌کند. یعنی در اولین برخورد ۶۴ متر، دومین برخورد $۶۴=۲\times ۳۲$ متر و سومین برخورد $۳۲=۲\times ۱۶$ متر را می‌پیماید که به همین ترتیب ادامه پیدا می‌کند. یعنی کل مسافت حاصل $۶۴+۶۴+۳۲+۱۶+\cdots+a_{۱۰}$ می‌باشد که ۶۴ متر کم‌تر از حاصل این تست می‌باشد، بنابراین: $۲۵۵/۷۵-۶۴=۱۹۱/۷۵$.

۵۹ **۴** اگر موجودی اولیه را m درنظر بگیریم، بعد از یک سال، سود آن برابر $\frac{۲}{۱۰}m=\frac{۲۰}{۱۰۰}m$ است. پس در پایان سال اول، موجودی برابر $a_۱=m+\frac{۲}{۱۰}m=m\left(۱+\frac{۲}{۱۰}\right)$ می‌شود، در نتیجه در پایان سال دوم، موجودی برابر است با:

$$a_۲=a_۱+\frac{۲}{۱۰}a_۱=a_۱\left(۱+\frac{۲}{۱۰}\right)=m\left(۱+\frac{۲}{۱۰}\right)\left(۱+\frac{۲}{۱۰}\right)=m\left(۱+\frac{۲}{۱۰}\right)^۲$$

به همین ترتیب مقدار موجودی در هر سال، جملات یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{۱۲}{۱۰}=۱+\frac{۲}{۱۰}$ می‌باشد. بنابراین مقدار موجودی بعد از n سال به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$a_n=m\left(۱+\frac{۲}{۱۰}\right)^n\Rightarrow a_۵=۲۰۰۰۰۰۰\left(۱+\frac{۲}{۱۰}\right)^۵=۲\times ۱۰^۶\left(\frac{۱۲}{۱۰}\right)^۵=۲\times \overset{۱۰}{\cancel{۱۰^۶}}\times\frac{۱۲^۵}{\cancel{۱۰^۵}}\simeq ۲۰(۲۵۰۰۰۰)=۵۰۰۰۰۰۰$$

۶۰ **۱** محیط دایره به قطر d برابر است با $P=\pi d$، پس محیط نیم‌دایره $\frac{\pi d}{۲}$ می‌باشد.

در این سؤال هر بار که موج به محور برخورد می‌کند، ۲۰ درصد از طول قطر آن کم می‌شود، یعنی ۸۰ درصد از طول قطر آن باقی می‌ماند، بنابراین داریم:

دنبالهٔ طول قطرها: $۱,۰/۸,(۰/۸)^۲,\cdots$ ؛ دنبالهٔ محیط نیم‌دایره‌ها: $\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}(۰/۸),\frac{\pi}{۲}(۰/۸)^۲,\cdots$

ملاحظه می‌شود که محیط نیم‌دایره‌ها تشکیل یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $\frac{\pi}{۲}$ و قدرنسبت ۰/۸ می‌دهند، در نتیجه:

$$S_n=\frac{a(۱-q^n)}{۱-q}\Rightarrow S_۵=\frac{\frac{\pi}{۲}\left(۱-(\frac{۴}{۵})^۵\right)}{\underbrace{۱-\frac{۴}{۵}}_{\frac{۱}{۵}}}\Rightarrow S_۵=\frac{۵\pi}{۲}\left(۱-(\frac{۴}{۵})^۵\right)$$

۶۱ **۱** *چون دنباله نه صعودیه و نه نزولی، پس $q<0$ و از همون اول گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شن.*

مجموع جملات پنجم تا دوازدهم برابر $S_{12}-S_4$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$S_4=\frac{1}{20}(S_{12}-S_4)\Rightarrow 20S_4=S_{12}-S_4\Rightarrow S_{12}=21S_4\Rightarrow \frac{\cancel{a_1}(1-q^{12})}{\cancel{1-q}}=\frac{21\cancel{a_1}(1-q^4)}{\cancel{1-q}}\Rightarrow 1-q^{12}=21(1-q^4)$$

$$\Rightarrow \cancel{(1-q^4)}(1+q^4+q^8)=21\cancel{(1-q^4)}\Rightarrow 1+q^4+q^8=21\Rightarrow q^8+q^4-20=0\Rightarrow (q^4+5)(q^4-4)=0$$

$$\begin{cases} q^4=-5\ (\text{غ ق ق}) \\ q^4=4\Rightarrow q=\pm\sqrt[4]{4}\Rightarrow q=\pm\sqrt{2}\xRightarrow{q<0} q=-\sqrt{2} \end{cases}$$

۶۲ **۳** اگر جملات دنباله را a، aq و aq^2 درنظر بگیریم، داریم:

$$a+aq+aq^2=21\Rightarrow a(1+q+q^2)=21\Rightarrow 1+q+q^2=\frac{21}{a}\quad (*)$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{aq}+\frac{1}{aq^2}=\frac{7}{12}\Rightarrow \frac{q^2+q+1}{aq^2}=\frac{7}{12}\xRightarrow{(*)}\frac{\frac{21}{a}}{aq^2}=\frac{7}{12}\Rightarrow \frac{21}{a^2q^2}=\frac{7}{12}\Rightarrow a^2q^2=\frac{21\times 12}{7}=36\Rightarrow aq=\pm 6$$

اگر $aq=6$ درنظر بگیریم، آن‌گاه $a=\frac{6}{q}$ می‌شود، در نتیجه:

$$a+aq+aq^2=21\Rightarrow \frac{6}{q}+6+6q=21\Rightarrow 6q-15+\frac{6}{q}=0\xRightarrow{\times q\neq 0} 6q^2-15q+6=0$$

$$\xRightarrow{\div 3} 2q^2-5q+2=0\Rightarrow q=\frac{5\pm 3}{4}\Rightarrow q=2\,,\,\frac{1}{2}\xRightarrow{a=\frac{6}{q}} a=3,12$$

پس سه عدد به‌صورت ۱۲ , ۶ , ۳ می‌باشند که عدد بزرگ‌تر برابر ۱۲ می‌شود. این تست با $aq=-6$ نیز جواب می‌دهد که در گزینه‌ها نیست.

۶۳ **۴** ابتدا از x^3 فاکتور می‌گیریم و بعد از اتحاد چاق و لاغر ($a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$) استفاده می‌کنیم:

$$x^9+x^3y^3=x^3(x^6+y^3)=x^3((x^2)^3+y^3)=x^3(x^2+y)(x^4-x^2y+y^2)$$

۶۴ **۱** می‌دانیم اگر n فرد باشد $x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots+y^{n-1})$، یعنی x^n+y^n بر $x+y$ بخش‌پذیر است، بنابراین عبارت $(x^3+x^2+1)^9+(x^3-x^2+3)^9$ نیز بر $x^3+\cancel{x^2}+1+x^3-\cancel{x^2}+3=2(x^3+2)$ بخش‌پذیر است.

۶۵ **۱** با استفاده از اتحاد $x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots+y^{n-1})$ (n طبیعی و فرد) عبارت x^7+1 را تجزیه می‌کنیم:

$$A=\frac{\cancel{(x+1)}(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-2)}}+x^5+x^3+x=x^6+x^4+x^2+1$$

$$\xlongequal{x=\sqrt{3}}(\sqrt{3})^6+(\sqrt{3})^4+(\sqrt{3})^2+1=3^3+3^2+3+1=40$$

۶۶ **۲** **روش اول:** عبارت $1+x+x^2+\cdots+x^8$، مجموع ۹ جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت x و عبارت $1-x+x^2-\cdots+x^8$، مجموع ۹ جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت $-x$ می‌باشد. بنابراین با توجه به رابطهٔ $S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$ داریم:

$$A=\frac{1(1-x^9)}{1-x}\times\frac{1-(-x)^9}{1+x}=\frac{(1-x^9)(1+x^9)}{(1-x)(1+x)}\xlongequal{\text{اتحاد مزدوج}}\frac{1-x^{18}}{1-x^2}$$

$$\xlongequal{x=\sqrt{2}}\frac{1-(\sqrt{2})^{18}}{1-(\sqrt{2})^2}=\frac{1-2^9}{1-2}=\frac{1-512}{-1}=511$$

روش دوم: از اتحادهایی که در درسنامه به آن‌ها اشاره شد استفاده می‌کنیم:

$$(n\ \text{طبیعی})\quad x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+y^{n-1})\Rightarrow x^9-1=(x-1)(x^8+x^7+\cdots+1)$$

$$(n\ \text{طبیعی و فرد})\quad x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots+y^{n-1})\Rightarrow x^9+1=(x+1)(x^8-x^7+\cdots+1)$$

$$\Rightarrow A=(1+x+x^2+\cdots+x^8)(1-x+x^2-\cdots+x^8)=\frac{x^9-1}{x-1}\times\frac{x^9+1}{x+1}=\frac{x^{18}-1}{x^2-1}\xlongequal{\text{مانند روش اول}}511$$

۶۷ **۱** عبارت $A=۱+t+t^{۲}+...+t^{۱۰}+t^{۱۱}$، مجموع ۱۲ جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_{۱}=۱$ و قدرنسبت $q=t$ می‌باشد. هم‌چنین عبارت $B=۱+t^{۳}+t^{۶}+t^{۹}$ مجموع ۴ جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_{۱}=۱$ و قدرنسبت $q=t^{۳}$ می‌باشد، بنابراین:

$$A=S_{۱۲}=\frac{۱(۱-t^{۱۲})}{۱-t}$$

$$B=S_{۴}=\frac{۱(۱-t^{۱۲})}{۱-t^{۳}}\Rightarrow\frac{A}{B}=\frac{۱-t^{۳}}{۱-t}=\frac{\cancel{(۱-t)}(۱+t+t^{۲})}{\cancel{۱-t}}=۱+t+t^{۲}=۱+\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}+(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲})^{۲}$$

$$=۱+\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}+\frac{۶-۲\sqrt{۵}}{۴}=۱+\frac{\cancel{۲\sqrt{۵}}-۲+۶-\cancel{۲\sqrt{۵}}}{۴}=۱+۱=۲$$

۶۸ **۳** ابتدا معادله را به‌صورت $ax^{۲}+bx+c=۰$ درآورده و سپس شرط $\Delta<۰$ را برای آن درنظر می‌گیریم:

$$k(x^{۲}+۵x+۴)=x\Rightarrow kx^{۲}+(۵k-۱)x+۴k=۰$$

$$\Delta<۰\Rightarrow(۵k-۱)^{۲}-۱۶k^{۲}<۰\Rightarrow ۲۵k^{۲}-۱۰k+۱-۱۶k^{۲}<۰\Rightarrow ۹k^{۲}-۱۰k+۱<۰$$

در معادلهٔ $۹k^{۲}-۱۰k+۱=۰$ مجموع ضرایب برابر صفر می‌باشد، پس ریشه‌های آن برابر ۱ و $\frac{۱}{۹}$ است، بنابراین جواب نامعادله به‌صورت $\frac{۱}{۹}<k<۱$ درمی‌آید.

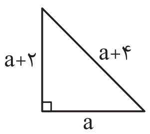
۶۹ **۱** ابتدا معادله را به صورت $ax^{۲}+bx+c=۰$ نوشته و سپس شرط $\Delta=b^{۲}-۴ac>۰$ را بررسی می‌کنیم:

$$m(x^{۲}+۱)+(x+۲)^{۲}=۵-x^{۲}\Rightarrow mx^{۲}+m+x^{۲}+۴x+۴-۵+x^{۲}=۰\Rightarrow(m+۲)x^{۲}+۴x+m-۱=۰$$

$$\xrightarrow{\Delta>۰}۱۶-۴(m+۲)(m-۱)>۰\Rightarrow ۱۶-۴(m^{۲}+m-۲)>۰\Rightarrow -۴m^{۲}-۴m+۲۴>۰\Rightarrow -۴(m^{۲}+m-۶)>۰$$

$$\Rightarrow m^{۲}+m-۶<۰\Rightarrow(m-۲)(m+۳)<۰\xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}}-۳<m<۲$$

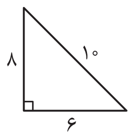
۷۰ **۳** در مثلث قائم‌الزاویه، بزرگ‌ترین ضلع، وتر مثلث است، پس در این مثلث، طول وتر $a+۴$ می‌باشد. بنابراین طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:



$$(a+۴)^{۲}=(a+۲)^{۲}+a^{۲}\Rightarrow\cancel{a^{۲}}+۸a+۱۶=\cancel{a^{۲}}+۴a+۴+a^{۲}$$

$$\Rightarrow a^{۲}-۴a-۱۲=۰\Rightarrow(a+۲)(a-۶)=۰\Rightarrow a=-۲(\text{غ‌ق‌ق})\text{ و }a=۶$$

با توجه به این‌که $a=۶$، پس طول اضلاع این مثلث به صورت ۶، ۸ و ۱۰ می‌شوند و در نتیجه داریم:



$$S=\frac{۱}{۲}\times۶\times۸=۲۴$$

۷۱ **۳** **روش اول:** معادلهٔ درجه دومی که دارای ریشهٔ مضاعف $x=۳$ است به صورت $k(x-۳)^{۲}=kx^{۲}-۶kx+۹k=۰$ می‌باشد. حال با توجه به معادلهٔ $۲mx^{۲}+(m+۱)x+n=۰$ داریم:

$$\begin{cases}۲m=k\\ m+۱=-۶k\Rightarrow\frac{n}{m}=\frac{۹k}{\frac{k}{۲}}=۱۸\\ n=۹k\end{cases}$$

روش دوم: اگر معادلهٔ $ax^{۲}+bx+c=۰$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، آن‌گاه $\Delta=۰$ است که طول ریشهٔ مضاعف آن برابر $\frac{-b}{۲a}$ می‌باشد. پس داریم:

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(m+۱)}{۴m}=۳\Rightarrow -m-۱=۱۲m\Rightarrow ۱۳m=-۱\Rightarrow m=\frac{-۱}{۱۳}\quad(*)$$

$$\Delta=۰\Rightarrow(m+۱)^{۲}-۴(۲m)(n)=۰\Rightarrow(\frac{-۱}{۱۳}+۱)^{۲}-۴(\frac{-۲}{۱۳})(n)=۰\Rightarrow(\frac{۱۲}{۱۳})^{۲}=\frac{-۸n}{۱۳}$$

$$\Rightarrow\frac{۱۴۴}{۱۳}=-۸n\Rightarrow n=-\frac{۱۸}{۱۳}\overset{(*)}{\Longrightarrow}\frac{n}{m}=۱۸$$

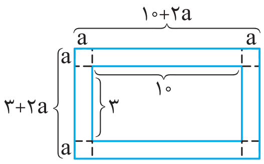
۷۲ **۱** سن فعلی دو برادر را x و y در نظر می‌گیریم، چون اختلاف سن آن‌ها ۴ سال است، پس $x-y=۴$ و در نتیجه $x=y+۴$ است. از طرفی چهار سال بعد، سن دو برادر $(x+۴)$ و $(y+۴)$ می‌شود، بنابراین:

$$(x+۴)(y+۴)=۶۰\xrightarrow{x=y+۴}(y+۴+۴)(y+۴)=۶۰\Rightarrow(y+۸)(y+۴)=۶۰$$

$$\Rightarrow y^{۲}+۱۲y+۳۲=۶۰\Rightarrow y^{۲}+۱۲y-۲۸=۰\Rightarrow(y+۱۴)(y-۲)=۰\Rightarrow y=-۱۴(\text{غ‌ق‌ق})\text{ و }y=۲$$

$$\xrightarrow{x=y+۴}x=۶\Rightarrow x+y=۸$$

۷۳ **۲** با توجه به صورت سوال، مساحت استخر برابر $۳۰ = ۱۰ \times ۳$ و مساحت آبراه بتونی ۱۴ متر مربع است، پس مساحت کل برابر ۴۴ متر مربع می‌باشد. اگر پهنای آبراه بتونی را a در نظر بگیریم، طول کل آبراه برابر $۱۰ + ۲a$ و عرض کل آن برابر $۳ + ۲a$ می‌شود. بنابراین داریم:



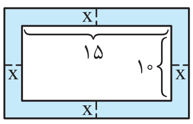
$$S = (۱۰ + ۲a)(۳ + ۲a) = ۴۴ \Rightarrow ۳۰ + ۲۰a + ۶a + ۴a^۲ = ۴۴$$

$$\Rightarrow ۴a^۲ + ۲۶a - ۱۴ = ۰ \xRightarrow{\div ۲} ۲a^۲ + ۱۳a - ۷ = ۰$$

$$\Rightarrow a = \frac{-۱۳ \pm \sqrt{۱۶۹ + ۵۶}}{۴} = \frac{-۱۳ \pm ۱۵}{۴} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{۱}{۲} \\ a = -۷ < ۰ \quad (\text{غ‌ق‌ق}) \end{cases}$$

در نتیجه پهنای آبراه بتونی $\frac{۱}{۲}$ متر می‌باشد.

۷۴ **۳** اگر فاصلهٔ لبهٔ عکس تا قاب را x در نظر بگیریم، طول و عرض قاب به ترتیب $۱۵ + ۲x$ و $۱۰ + ۲x$ می‌شود. چون مساحت قاب برابر ۳۰۰ سانتی‌متر مربع است، پس داریم:



$$(۱۵ + ۲x)(۱۰ + ۲x) = ۳۰۰ \Rightarrow ۱۵۰ + ۳۰x + ۲۰x + ۴x^۲ = ۳۰۰ \Rightarrow ۴x^۲ + ۵۰x - ۱۵۰ = ۰$$

$$\xRightarrow{\div ۲} ۲x^۲ + ۲۵x - ۷۵ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۲۵ \pm \sqrt{۲۵^۲ + ۴ \times ۲ \times ۷۵}}{۴} = \frac{-۲۵ \pm \sqrt{۲۵(۲۵ + ۲۴)}}{۴}$$

$$= \frac{-۲۵ \pm \sqrt{۲۵ \times ۴۹}}{۴} = \frac{-۲۵ \pm (۵ \times ۷)}{۴} = \frac{-۲۵ \pm ۳۵}{۴} \xlongequal{x>۰} \frac{۵}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \text{طول قاب} = ۱۵ + ۲x = ۲۰ \\ \text{عرض قاب} = ۱۰ + ۲x = ۱۵ \end{cases}$$

$$\text{محیط قاب} = ۲(\text{طول} + \text{عرض}) = ۲(۲۰ + ۱۵) = ۷۰$$

توجه: برای حل معادلهٔ $۴x^۲ + ۵۰x - ۱۵۰ = ۰$ از تجزیه نیز می‌توان کمک گرفت:

$$(۲x)^۲ + ۲۵(۲x) - ۱۵۰ = ۰ \Rightarrow (۲x - ۵)(۲x + ۳۰) = ۰ \xRightarrow{x>۰} x = \frac{۵}{۲}$$

۷۵ **۴** اگر طول کاشی را با x و عرض آن را با y نمایش دهیم، طبق فرض $x = ۴y + ۱$ است. از طرفی می‌دانیم هر متر مربع $۱۰۰^۲ = ۱۰۰۰۰$ سانتی‌متر مربع می‌باشد، پس مساحت دیوار ۵۲۸۰۰۰ سانتی‌متر مربع است. در نتیجه باید مساحت ۲۰۰۰ مستطیل برابر ۵۲۸۰۰۰ بشود:

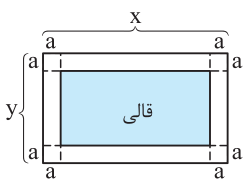
$$۲۰۰۰\overbrace{(xy)}^{\text{مساحت مستطیل}} = ۵۲۸۰۰۰ \Rightarrow ۲xy = ۵۲۸ \Rightarrow xy = ۲۶۴ \xRightarrow{x=۴y+۱} (۴y + ۱)y = ۲۶۴$$

$$\Rightarrow ۴y^۲ + y - ۲۶۴ = ۰ \Rightarrow y = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱ - ۴(۴)(-۲۶۴)}}{۲(۴)} = \frac{-۱ \pm \sqrt{۴۲۲۵}}{۸} = \frac{-۱ \pm ۶۵}{۸} \Rightarrow \begin{cases} y = ۸ \Rightarrow x = ۴y + ۱ = ۳۳ \\ y = \frac{-۶۶}{۸} < ۰ (\text{غ‌ق‌ق}) \end{cases}$$

برای این‌که حاصل $\sqrt{۴۲۲۵}$ رو تعیین کنی، می‌تونی از امتحان‌کردن چند تا عدد کمک بگیری. از اعداد رُند شروع می‌کنیم. مثلاً $۵۰^۲ = ۲۵۰۰$، $۶۰^۲ = ۳۶۰۰$ و $۷۰^۲ = ۴۹۰۰$. پس معلومه که بین ۶۰ تا ۷۰ هست. حالا اگه چند تا عدد دیگه رو هم امتحان کنی به ۶۵ میرسی.

البته اگه همون اول توی معادلهٔ $(۴y + ۱)y = ۲۶۴$، عدد ۲۶۴ رو تجزیه کنی و ببینی ضرب کدوم عددها ۲۶۴ می‌شه، چون $۸ \times ۳۳ = ۲۶۴$ پس $y = ۸$ به دست میاد.

۷۶ **۴** طول و عرض اتاق را به ترتیب x و y در نظر می‌گیریم. داریم:



$$\text{محیط اتاق} = ۲۰ \Rightarrow ۲(x + y) = ۲۰ \Rightarrow x + y = ۱۰ \Rightarrow y = ۱۰ - x$$

$$\text{مساحت اتاق} = ۲۴ \Rightarrow xy = ۲۴ \xRightarrow{y=۱۰-x} x(۱۰ - x) = ۲۴ \Rightarrow -x^۲ + ۱۰x - ۲۴ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۱۰x + ۲۴ = ۰$$

$$\Rightarrow (x - ۴)(x - ۶) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۶ \Rightarrow y = ۴ \\ x = ۴ \Rightarrow y = ۶ \; (\text{غ‌ق‌ق}) \; (\text{چون طول از عرض بزرگ‌تر است.}) \end{cases}$$

پس طول اتاق برابر $x = ۶$ و عرض آن برابر $y = ۴$ است. اگر فاصلهٔ هر طرف قالی از کنار دیوار را a در نظر بگیریم، طول قالی برابر $x - ۲a = ۶ - ۲a$ و عرض قالی برابر $y - ۲a = ۴ - ۲a$ می‌شود. بنابراین:

$$\text{محیط قالی} = ۲(\text{طول قالی} + \text{عرض قالی}) = ۲(۶ - ۲a + ۴ - ۲a) = ۱۲ \Rightarrow ۲(۱۰ - ۴a) = ۱۲ \Rightarrow ۱۰ - ۴a = ۶$$

$$\Rightarrow ۴a = ۴ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow \begin{cases} \text{طول قالی} = ۶ - ۲a = ۶ - ۲ = ۴ \\ \text{عرض قالی} = ۴ - ۲a = ۴ - ۲ = ۲ \end{cases} \Rightarrow \text{مساحت قالی} = ۲ \times ۴ = ۸$$