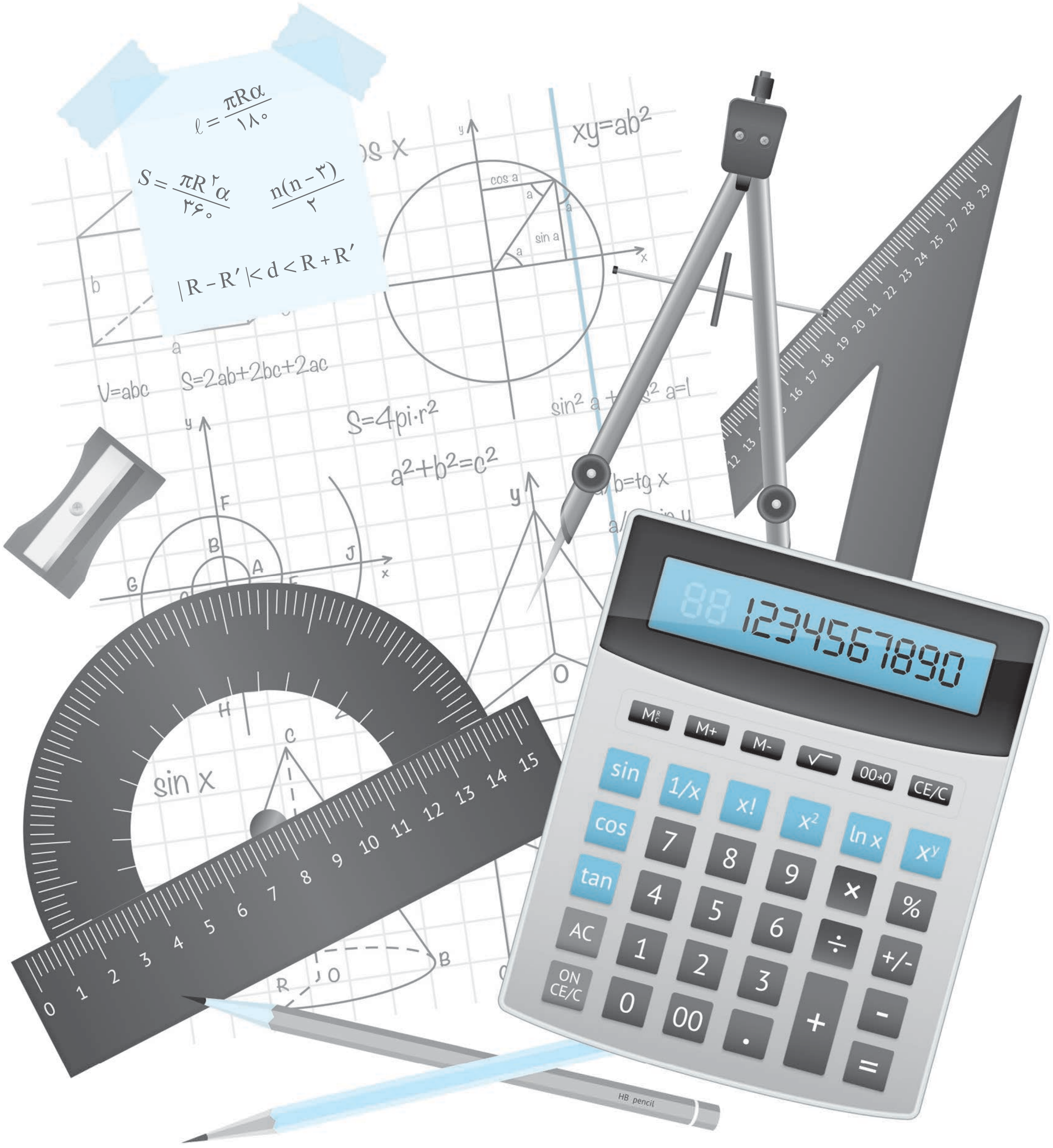
فهرست

پایهٔ دهم	شماره صفحه	تعداد تست
فصل ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال	۸	۸۱
فصل ۲: قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن	۳۶	۱۴۳
فصل ۳: چندضلعی‌ها	۸۴	۱۰۹
فصل ۴: تجسم فضایی	۱۲۱	۱۰۹

پایهٔ یازدهم	شماره صفحه	تعداد تست
فصل ۱: دایره	۱۶۷	۲۵۳
فصل ۲: تبدیل‌های هندسی و کاربردها	۲۵۴	۷۰
فصل ۳: روابط طولی در مثلث	۲۸۸	۱۱۶

پایهٔ دوازدهم	شماره صفحه	تعداد تست
فصل ۱: ماتریس و کاربردها	۳۲۶	۱۷۶
فصل ۲: آشنایی با مقاطع مخروطی	۳۷۸	۱۸۲
فصل ۳: بردارها	۴۴۲	۱۷۷

پایهٔ دهم



$\ell = \frac{\pi R \alpha}{۱۸۰}$
$S = \frac{\pi R^۲ \alpha}{۳۶۰}$
$\frac{n(n-۳)}{۲}$
$|R-R'| < d < R+R'$
xy=ab2
V=abc
S=2ab+2bc+2ac
S=4pi·r2
a2+b2=c2
sin x
12345678890

نسبت و تناسب

نسبت دو عدد: دو عدد حقیقی a و b مفروض‌اند $(b \neq 0)$، عبارت $\frac{a}{b}$ را نسبت این دو عدد گوییم.

تناسب: اگر دو نسبت، با هم برابر باشند، یک تناسب تشکیل می‌دهند، مانند $\frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$.

خواص تناسب: اعداد حقیقی a ، b ، c و d مفروض‌اند. در این صورت:

۱) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

۲) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

۳) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

۴) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ (ترکیب در صورت)

۵) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ (ترکیب در مخرج)

۶) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ (تفضیل در صورت)

۷) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ (تفضیل در مخرج)

۸) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

۹) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \Rightarrow \frac{a+c+e}{b+d+f} = k$

(در عبارت‌های بالا، همهٔ کسرها با معنا فرض شده‌اند.)

تعریف: دو عدد a و b مفروض‌اند. در این‌صورت:

الف) میانگین حسابی (واسطهٔ حسابی) a و b ، عدد $\frac{a+b}{۲}$ است.

ب) میانگین هندسی (واسطهٔ هندسی) a و b عددی مانند c است به‌طوری‌که $\frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ یا به‌عبارت دیگر، $c^۲ = ab$.

نتیجه: اگر c میانگین هندسی a و b باشد، آن‌گاه a ، c و b، سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی‌اند.

به عنوان مثال، میانگین حسابی دو عدد ۴ و ۱۶، برابر ۱۰ و میانگین هندسی آن‌ها، برابر ۸± می‌باشد.

۱- اگر $\frac{a}{b} = \frac{۳}{۷}$ ، حاصل $\frac{a+b}{b-a}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲}$

۲- اگر $\frac{۳a-b}{۲a+b} = \frac{۹}{۱۱}$ ، حاصل $\frac{a+۲b}{۳b-a}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) ۳

۳- اگر $\frac{a}{۲} = \frac{b}{۳} = \frac{c}{۴}$ ، حاصل $\frac{b}{۳a-b+۲c}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۱۳}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{۱۱}$

۴- اگر $\frac{a}{۲} = \frac{b}{۳} = \frac{c}{۵}$ ، حاصل $\frac{۲a-b+۳c}{۳a+۲b-c}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۶}{۷}$ ۲) $\frac{۱۳}{۸}$ ۳) $\frac{۱۲}{۵}$ ۴) $\frac{۱۷}{۳}$

۵- میانگین حسابی دو عدد a و b برابر ۱۵ و میانگین هندسی آن‌ها، برابر ۹ است. نسبت عدد بزرگ‌تر به کوچک‌تر، کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۴

۶- در چهارضلعی محدب ABCD، رابطهٔ $\frac{\widehat{C}+\widehat{D}}{۱۱} = \frac{\widehat{B}}{۳} = \frac{\widehat{A}}{۴}$ بین زاویه‌ها برقرار است. زاویهٔ حادهٔ بین نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ مجاور A و B ، چند درجه است؟ *(تجربی ۹۶ خارج)*

۱) ۵۰ ۲) ۶۰ ۳) ۷۰ ۴) ۷۵

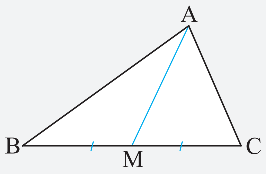
۷- در چهارضلعی محدب ABCD، رابطهٔ $\frac{۵\widehat{D}}{۱۲} = \frac{\widehat{C}}{۵} = \frac{\widehat{B}}{۴} = \frac{\widehat{A}}{۳}$ بین زاویه‌ها برقرار است. زاویهٔ حادهٔ بین نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ متقابل A و C ، چند درجه است؟ *(تجربی ۹۶ داخل)*

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۳۵

نکاتی دربارهٔ مساحت مثلث

۱ اگر قاعده و ارتفاع دو مثلث با هم برابر باشند، مساحت آن‌ها یکسان است.

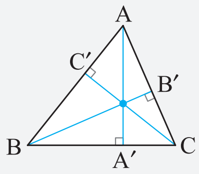
نتیجه: هر میانهٔ مثلث، آن را به دو مثلث هم‌ارز (هم‌مساحت) تقسیم می‌کند و برعکس.



$$S_{\overset{\Delta}{AMB}} = S_{\overset{\Delta}{AMC}} \Leftrightarrow M$$ وسط BC است

۲ در هر مثلث داریم:

الف حاصل‌ضرب طول هر ضلع در ارتفاع وارد بر آن ضلع، مقداری ثابت است (دو برابر مساحت مثلث است).



$$ah_a = bh_b = ch_c = ۲S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

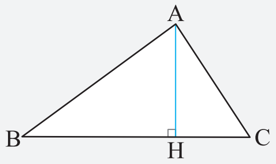
ب نسبت هر دو ارتفاع، عکس نسبت اضلاع نظیر آن‌ها است.

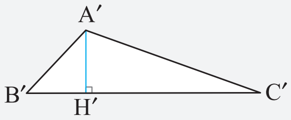
$$\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a} \ , \ \frac{h_a}{h_c} = \frac{c}{a} \ , \ \frac{h_b}{h_c} = \frac{c}{b}$$

ج ترتیب طول ارتفاع‌ها، عکس ترتیب طول اضلاع نظیر آن‌ها است.

$$a \ge b \ge c \Leftrightarrow h_a \le h_b \le h_c$$

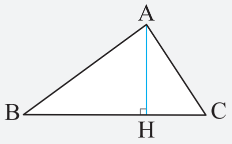
۳ اگر قاعده‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت ارتفاع‌های وارد بر آن قاعده‌ها.

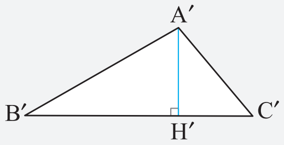




$$BC = B'C' \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}} = \frac{AH}{A'H'}$$

۴ اگر ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع‌ها.



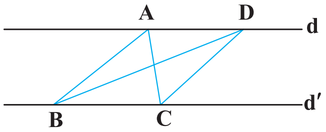


$$AH = A'H' \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}} = \frac{BC}{B'C'}$$

۸- در مثلث ABC که $AB = ۵$ و $AC = ۳$ ، طول ارتفاع وارد بر AC ، ۶ واحد است. طول ارتفاع وارد بر AB ، کدام است؟

۱) ۳/۶ ۲) ۳/۵ ۳) ۳/۷ ۴) ۳/۸

۹- در شکل زیر، اگر $d \parallel d'$ ، $BD = ۴$ و $S_{\overset{\Delta}{ABC}} = ۱۱$ ، فاصلهٔ نقطهٔ C از BD کدام است؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*



۱) ۵ ۲) ۵/۵ ۳) ۴/۵ ۴) ۴

۱۰- در مثلث ABC داریم $AB = AC = ۱۷$ و $BC = ۱۶$. دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۲۵ واحد، خطی را که از رأس A موازی BC رسم می‌شود، در نقطهٔ D قطع می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ C از خط BD ، کدام است؟ *(ریاضی ۹۸ خارج و مشابه تمرین کتاب درسی)*

۱) ۷/۲ ۲) ۸/۴ ۳) ۹/۶ ۴) ۱۰/۲

۱۱- در مثلث ABC به اضلاع $a = ۴$ ، $b = ۶$ و $c = ۸$ ، حاصل $\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_c}{h_b}$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۲- در مثلث ABC که $AB = ۴$ ، $BC = ۳$ و $AC = ۶$ ، طول ارتفاع AH برابر $\frac{۱}{k}$ است. مجموع طول دو ارتفاع دیگر مثلث، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۵k}$ ۲) $\frac{۵}{k}$ ۳) $\frac{۵}{۴k}$ ۴) $\frac{۴}{k}$

پاسخنامه تشریحی

۱ | ۱ **روش اول:** طبق ویژگی‌های تناسب، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a}{b}=\frac{۳}{۷}\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}}\frac{a+b}{b}=\frac{۳+۷}{۷}=\frac{۱۰}{۷}\\[2mm] \frac{a}{b}=\frac{۳}{۷}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{a}{b-a}=\frac{۳}{۷-۳}=\frac{۳}{۴}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\frac{a+b}{b}\right)\left(\frac{a}{b-a}\right)=\left(\frac{۱۰}{۷}\right)\left(\frac{۳}{۴}\right)\Rightarrow\left(\frac{a+b}{b-a}\right)\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{۱۵}{۱۴}$$

$$\xrightarrow{\frac{a}{b}=\frac{۳}{۷}}\left(\frac{a+b}{b-a}\right)\left(\frac{۳}{۷}\right)=\frac{۱۵}{۱۴}\Rightarrow\frac{a+b}{b-a}=\frac{۱۵}{۱۴}\times\frac{۷}{۳}=\frac{۵}{۲}$$

روش دوم: با توجه به فرض، داریم:

$$a=\frac{۳}{۷}b\Rightarrow\frac{a+b}{b-a}=\frac{\frac{۳}{۷}b+b}{b-\frac{۳}{۷}b}=\frac{\frac{۱۰}{۷}b}{\frac{۴}{۷}b}=\frac{۵}{۲}$$

روش سوم: چون $\frac{a}{b}=\frac{۳}{۷}$، فرض می‌کنیم $a=۳k$ و $b=۷k$. حال داریم:

$$\frac{a+b}{b-a}=\frac{۳k+۷k}{۷k-۳k}=\frac{۱۰k}{۴k}=\frac{۵}{۲}$$

روش چهارم: با فرض $a=۳$ و $b=۷$، داریم:

$$\frac{a+b}{b-a}=\frac{۳+۷}{۷-۳}=\frac{۱۰}{۴}=\frac{۵}{۲}$$

۲ | ۲ **روش اول:** ابتدا به کمک فرض سؤال، رابطه‌ای بین مقادیر a و b یافته و سپس حاصل عبارت مورد نظر را می‌یابیم:

$$\frac{۳a-b}{۲a+b}=\frac{۹}{۱۱}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}۳۳a-۱۱b=۱۸a+۹b\Rightarrow ۱۵a=۲۰b\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۲۰}{۱۵}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow a=۴k,b=۳k$$

$$\Rightarrow\frac{a+۲b}{۳b-a}=\frac{۴k+۶k}{۹k-۴k}=\frac{۱۰k}{۵k}=۲$$

روش دوم: ابتدا با فرض $۳a-b=۹$ و $۲a+b=۱۱$، مقادیر a و b را یافته و سپس حاصل عبارت $\frac{a+۲b}{۳b-a}$ را محاسبه می‌کنیم.

۳ | ۴ **روش اول:** با فرض $\frac{a}{۲}=\frac{b}{۳}=\frac{c}{۴}=k$، داریم:

$$a=۲k\ ,\ b=۳k\ ,\ c=۴k\Rightarrow\frac{b}{۳a-b+۲c}=\frac{۳k}{۶k-۳k+۸k}=\frac{۳k}{۱۱k}=\frac{۳}{۱۱}$$

روش دوم: با استفاده از ویژگی‌های تناسب، داریم:

$$\frac{a}{۲}=\frac{b}{۳}=\frac{c}{۴}\Rightarrow\frac{۳a-b+۲c}{۳(۲)-۳+۲(۴)}=\frac{b}{۳}\Rightarrow\frac{۳a-b+۲c}{۱۱}=\frac{b}{۳}\Rightarrow\frac{b}{۳a-b+۲c}=\frac{۳}{۱۱}$$

روش سوم: سه عدد $a=۲$، $b=۳$ و $c=۴$ در تناسب داده شده صدق می‌کنند و داریم:

$$\frac{b}{۳a-b+۲c}=\frac{۳}{۶-۳+۸}=\frac{۳}{۱۱}$$

۴ | ۱ فرض کنیم $\frac{a}{۲}=\frac{b}{۳}=\frac{c}{۵}=k$. در این‌صورت، $a=۲k$، $b=۳k$، $c=۵k$ و داریم:

$$\frac{۲a-b+۳c}{۳a+۲b-c}=\frac{۴k-۳k+۱۵k}{۶k+۶k-۵k}=\frac{۱۶k}{۷k}=\frac{۱۶}{۷}$$

۵ | ۱

یادآوری: اگر مجموع دو عدد، برابر S و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر P باشد، آن دو عدد، ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-Sx+P=۰$ می‌باشند.

دو عدد را a و b فرض می‌کنیم. طبق معلومات سؤال، داریم:

$$\begin{cases}\frac{a+b}{۲}=۱۵\\ ab=۹^۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=۳۰\\ ab=۸۱\end{cases}$$

پس a و b ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۳۰x+۸۱=۰$ می‌باشند و داریم:

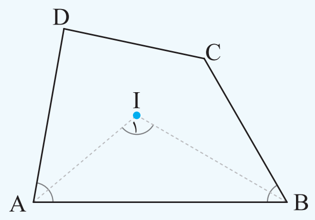
$$x^۲-۳۰x+۸۱=۰\Rightarrow(x-۳)(x-۲۷)=۰\Rightarrow a=۳\ ,\ b=۲۷\Rightarrow\frac{b}{a}=۹$$

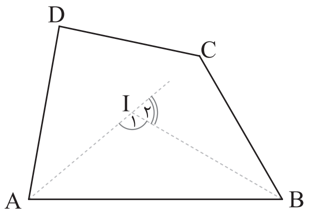
۶ | ۳

روش اول:

نکته: در هر چهارضلعی محدب، زاویهٔ بین نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ مجاور، برابر است با نصف مجموع دو زاویهٔ دیگر.

$$\hat{I}_۱=\frac{۱}{۲}(\hat{C}+\hat{D})$$



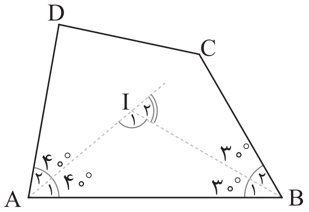


ابتدا اندازهٔ زاویه‌های چهارضلعی را می‌یابیم:

$$\frac{\hat{A}}{۴}=\frac{\hat{B}}{۳}=\frac{\hat{C}+\hat{D}}{۱۱}=k\Rightarrow \hat{A}=۴k\,,\hat{B}=۳k\,,\hat{C}+\hat{D}=۱۱k\xRightarrow{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=۳۶۰^\circ}۱۸k=۳۶۰^\circ\Rightarrow k=۲۰^\circ(*)$$

حال فرض کنیم نقطهٔ I، محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های A و B است. طبق نکتهٔ فوق داریم:

$$\hat{I}_۱=\frac{۱}{۲}(\hat{C}+\hat{D})=\frac{۱}{۲}(۱۱k)\overset{(*)}{=\!=}\frac{۱}{۲}(۲۲۰^\circ)=۱۱۰^\circ\Rightarrow \hat{I}_۲=۱۸۰^\circ-۱۱۰^\circ=۷۰^\circ$$



روش دوم: ابتدا همانند روش اول، اندازهٔ زاویه‌ها را می‌یابیم. در ادامه داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=۴k=۸۰^\circ\Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{A}_۲=۴۰^\circ\\ \hat{B}=۳k=۶۰^\circ\Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{B}_۲=۳۰^\circ\end{array}\right\}\xRightarrow{\hat{I}_۲=\hat{A}_۱+\hat{B}_۱}\hat{I}_۲=۷۰^\circ$$

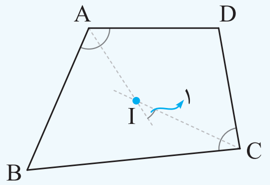
تذکر: با استفاده از ویژگی‌های تناسب هم می‌توانستیم اندازهٔ زاویه‌های چهارضلعی را بیابیم:

$$\frac{\hat{A}}{۴}=\frac{\hat{B}}{۳}=\frac{\hat{C}+\hat{D}}{۱۱}=\frac{\overbrace{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}}^{۳۶۰^\circ}}{۴+۳+۱۱}=۲۰\Rightarrow \hat{A}=۸۰^\circ\,,\hat{B}=۶۰^\circ\,,\hat{C}+\hat{D}=۲۲۰^\circ$$

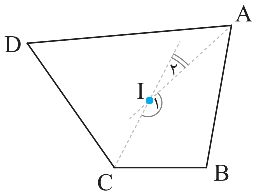
۷ ۱

روش اول:

نکته: در هر چهارضلعی محدب، زاویهٔ بین نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ مقابل، برابر است با نصف تفاضل دو زاویهٔ دیگر.



$$\hat{I}_۱=\frac{۱}{۲}|\hat{D}-\hat{B}|$$

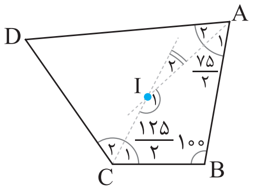


ابتدا به کمک ویژگی‌های تناسب، اندازهٔ زاویه‌های چهارضلعی را می‌یابیم:

$$\frac{\hat{A}}{۳}=\frac{\hat{B}}{۴}=\frac{\hat{C}}{۵}=\frac{\hat{D}}{\frac{۱۲}{۵}}=\frac{\overbrace{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}}^{۳۶۰^\circ}}{\underbrace{۳+۴+۵+\frac{۱۲}{۵}}_{\frac{۷۲}{۵}}}=۲۵^\circ\Rightarrow \hat{A}=۷۵^\circ\,,\hat{B}=۱۰۰^\circ\,,\hat{C}=۱۲۵^\circ\,,\hat{D}=۶۰^\circ$$

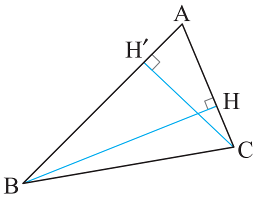
حال فرض کنیم نیمسازهای زاویه‌های A و C در نقطهٔ I متقاطع‌اند. طبق نکتهٔ فوق، داریم:

$$\hat{I}_۲=\frac{۱}{۲}|\hat{B}-\hat{D}|=\frac{۱}{۲}|۱۰۰^\circ-۶۰^\circ|=۲۰^\circ$$



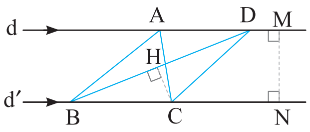
روش دوم: ابتدا همانند روش اول، اندازهٔ زاویه‌های چهارضلعی را می‌یابیم. حال در چهارضلعی ABCI داریم:

$$\hat{A}_۱+\hat{B}+\hat{C}_۱+\hat{I}_۱=۳۶۰^\circ\Rightarrow \frac{۷۵^\circ}{۲}+۱۰۰^\circ+\frac{۱۲۵^\circ}{۲}+\hat{I}_۱=۳۶۰^\circ\Rightarrow \hat{I}_۱=۱۶۰^\circ\Rightarrow \hat{I}_۲=۱۸۰^\circ-\hat{I}_۱=۲۰^\circ$$



۸ ۱ می‌دانیم در هر مثلث، حاصل‌ضرب طول هر ضلع در ارتفاع وارد بر آن ضلع، مقداری ثابت است، بنابراین داریم:

$$AB\times CH'=AC\times BH\xRightarrow{\text{فرض سؤال}}۵\times CH'=۳\times ۶\Rightarrow CH'=\frac{۱۸}{۵}=۳/۶$$

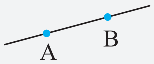


۹ ۲ اگر BC را قاعدهٔ مثلث‌های ABC و DBC فرض کنیم، طول ارتفاع وارد بر قاعدهٔ هر دو مثلث برابر با طول MN است. پس مساحت دو مثلث، یکسان است و $S_{\overset{\Delta}{DBC}}=S_{\overset{\Delta}{ABC}}=۱۱$. حال اگر BD را قاعدهٔ مثلث DBC فرض کنیم، داریم:

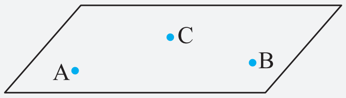
$$S_{\overset{\Delta}{DBC}}=\frac{۱}{۲}BD\times CH\Rightarrow ۱۱=\frac{۱}{۲}(۴)(CH)\Rightarrow ۱۱=۲CH\Rightarrow CH=\frac{۱۱}{۲}=۵/۵$$

هندسه در فضا

اصول هندسه فضایی



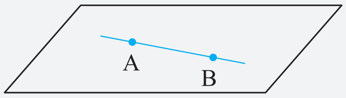
۱ از هر دو نقطهٔ متمایز در فضا، یک و تنها یک خط می‌گذرد.



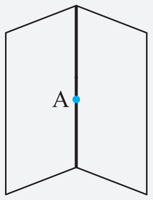
۲ از هر سه نقطهٔ متمایز در فضا که بر یک خط قرار ندارند، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد.

۳ در هر صفحه، حداقل سه نقطه وجود دارند که بر یک خط قرار ندارند.

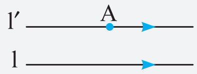
۴ در فضا، حداقل چهار نقطه وجود دارند که در یک صفحه قرار ندارند.



۵ اگر دو نقطهٔ متمایز از خطی در یک صفحه قرار داشته باشند، آن خط به تمامی در آن صفحه قرار می‌گیرد.

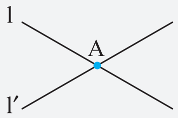


۶ اگر دو صفحهٔ متمایز، یک نقطهٔ مشترک داشته باشند، در یک خط مشترک‌اند.

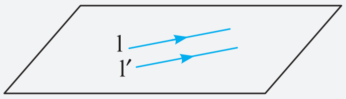


۷ **اصل توازی اقلیدس:** از هر نقطه خارج یک خط در فضا، یک و تنها یک خط به موازات آن می‌گذرد.

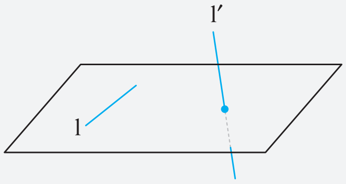
وضعیت دو خط نسبت به هم در فضا



۱ **متقاطع:** دو خط که در یک و تنها یک نقطه، مشترک باشند را متقاطع گوییم.



۲ **موازی:** دو خط که در یک صفحه بوده و یک‌دیگر را قطع نکنند، موازی گوییم.



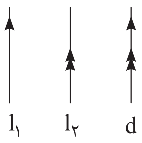
۳ **متنافر:** دو خط که در یک صفحه قرار نمی‌گیرند را متنافر گوییم.

تذکر

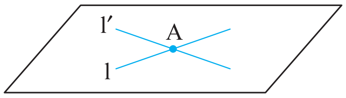
دو خط که بر هم منطبق باشند را یک خط در نظر می‌گیریم.

نکات

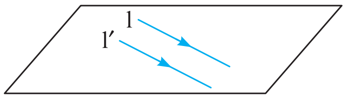
۱ دو خط موازی با یک خط، با هم موازی‌اند.



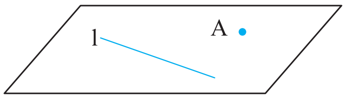
$(l_1 \parallel d), (l_2 \parallel d) \Rightarrow l_1 \parallel l_2$



۲ از دو خط متقاطع در فضا، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد.



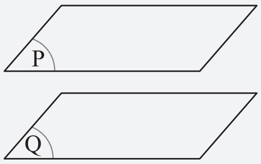
۳ از دو خط موازی در فضا، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد.



۴ از یک خط و یک نقطه خارج آن خط در فضا، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد.

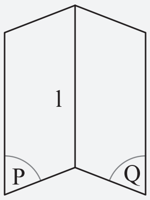
وضعیت دو صفحه نسبت به هم در فضا

۱ **موازی:** دو صفحه که هیچ نقطهٔ مشترکی نداشته باشند را موازی گوییم.



۲ **متقاطع:** دو صفحه که فقط در یک خط مشترک باشند را متقاطع گوییم.

فصل مشترک دو صفحهٔ متقاطع: خطی که اشتراک دو صفحهٔ متقاطع است را فصل مشترک آن‌ها گوییم.

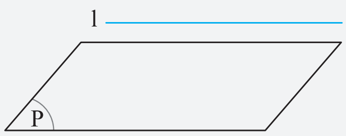


تذکر

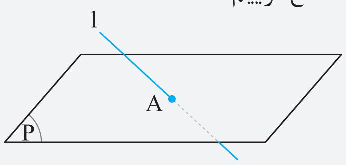
اگر دو صفحه بر هم منطبق باشند، آن‌ها را یک صفحه در نظر می‌گیریم.

وضعیت خط و صفحه در فضا

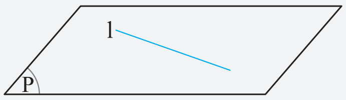
۱ **موازی:** اگر خط و صفحه، هیچ نقطهٔ مشترکی نداشته باشند، آن‌ها را موازی گوییم.



۲ **متقاطع:** اگر خط و صفحه، یک و تنها یک نقطهٔ مشترک داشته باشند، آن‌ها را متقاطع گوییم.



۳ **منطبق:** اگر خط و صفحه، بیش از یک نقطهٔ مشترک داشته باشند، گوییم خط بر صفحه منطبق است.



۱- از سه نقطهٔ متمایز A ، B و C در فضا، چند صفحه می‌گذرد؟

۱) یک یا دو   ۲) یک یا بی‌شمار   ۳) یک، دو یا بی‌شمار   ۴) صفر، یک یا بی‌شمار

۲- از چهار نقطهٔ متمایز A ، B ، C و D در فضا، چند صفحه می‌گذرد؟

۱) صفر یا بی‌شمار   ۲) صفر، یک یا دو   ۳) صفر، یک یا سه   ۴) صفر، یک یا بی‌شمار

۳- در یک مکعب‌مستطیل، با امتداد دادن تمام یال‌ها، هر یال با چند یال دیگر متنافر است؟ (ریاضی ۹۶ خارج)

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

۴- در فضا، کدام گزینه درست است؟

۱) اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند.   ۲) اگر خطی یکی از دو خط متنافر را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند.

۳) اگر دو صفحه در سه نقطه مشترک باشند، متقاطع یا منطبق‌اند.   ۴) دو خط با هم موازی‌اند هرگاه یک‌دیگر را قطع نکنند.

۵- دو خط متنافر l و l' در فضا مفروض‌اند. چند خط وجود دارد که با هر دو خط l و l' موازی باشد؟

۱) یک   ۲) دو   ۳) صفر   ۴) بی‌شمار

۶- چند مورد از گزاره‌های زیر، درست است؟

الف) اگر دو صفحه در یک نقطه مشترک باشند، با هم متقاطع‌اند.

ب) اگر صفحه‌ای یکی از دو خط متنافر را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند.

ج) اگر خطی با صفحه‌ای متقاطع باشد، با خطوط آن صفحه، متقاطع یا متنافر است.

۱) یک   ۲) دو   ۳) سه   ۴) صفر

۷- کدام یک از گزینه‌های زیر، درست نیست؟

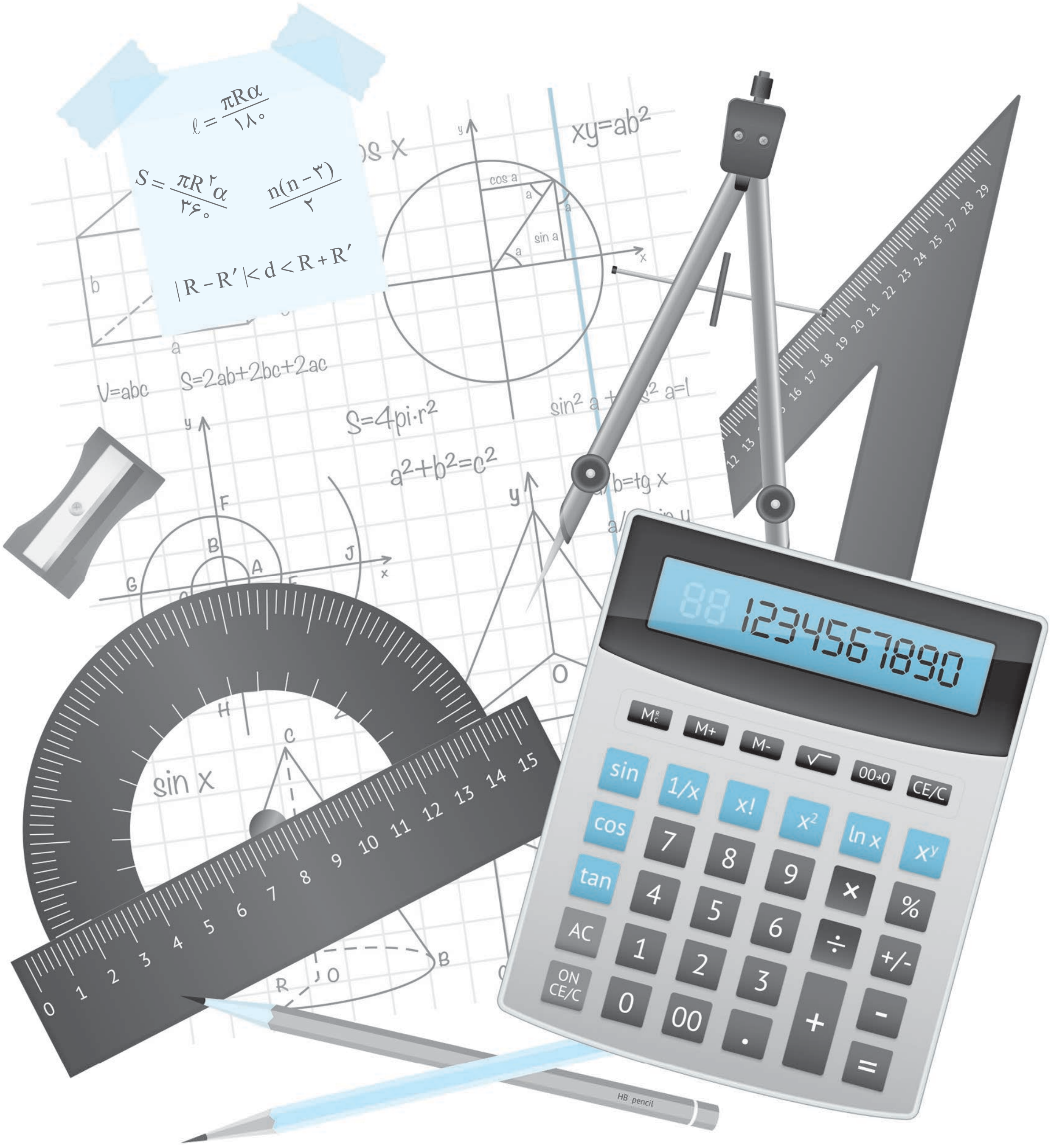
۱) اگر دو صفحه با هم موازی باشند، هر خط از یکی از این صفحات، با صفحهٔ دیگر موازی است.

۲) اگر هر خط از یک صفحه با صفحهٔ دیگری موازی باشد، آن دو صفحه، موازی‌اند.

۳) اگر دو خط در دو صفحهٔ موازی قرار داشته باشند، موازی‌اند.

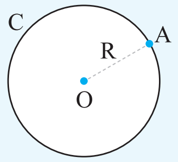
۴) اگر صفحه‌ای دو صفحهٔ موازی را قطع کند، فصل مشترک‌های صفحات، با هم موازی‌اند.

پایهٔ یازدهم



$\ell = \frac{\pi R \alpha}{۱۸۰}$
$S = \frac{\pi R^{۲} \alpha}{۳۶۰}$
$\frac{n(n-۳)}{۲}$
$|R-R'| < d < R+R'$
xy=ab²
V=abc
S=2ab+2bc+2ac
S=4pi·r²
a²+b²=c²
sin x
12345678901234567890
sin
cos
tan
1/x
x!
ln x
AC
ON CE/C
M+
M-
CE/C
HB pencil

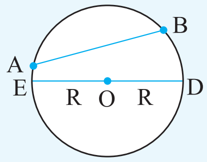
مفاهیم اولیه در دایره



دایره: مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت (مرکز)، به فاصله‌ای ثابت قرار دارند.

شعاع دایره: پاره‌خطی است که مرکز دایره را به یک نقطه از محیط آن وصل می‌کند.

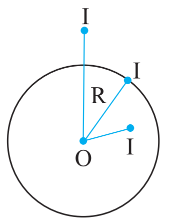
قرارداد: دایرهٔ C به مرکز O و شعاع R را با نماد $C(O,R)$ نشان می‌دهیم.



وتر: پاره‌خطی است که دو نقطه از محیط دایره را به هم وصل می‌کند.

قطر: وتری است که از مرکز دایره می‌گذرد.

نکات



هر دایره، صفحه را به سه بخش افراز می‌کند:

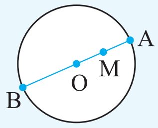
۱ درون دایره: مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آن‌ها تا مرکز دایره، کم‌تر از شعاع دایره است.

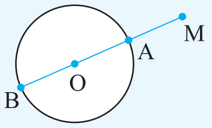
۲ روی دایره: مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آن‌ها تا مرکز دایره، برابر با شعاع دایره است.

۳ بیرون دایره: مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آن‌ها تا مرکز دایره، بیشتر از شعاع دایره است.

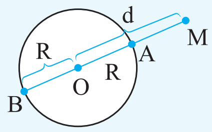
نزدیک‌ترین و دورترین نقاط یک دایره از یک نقطه

نقطهٔ M و دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض‌اند. نقاط برخورد خط گذرنده از M و O با دایره، نزدیک‌ترین و دورترین نقاط دایره نسبت به نقطهٔ M می‌باشند.





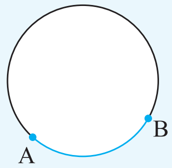
نتیجه: نقطهٔ M به فاصلهٔ d از مرکز دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض است. اگر امتداد OM، دایره را در A و B قطع کند، طول پاره‌خط‌های MA و MB، کم‌ترین و بیشترین فاصلهٔ نقطهٔ M از دایره می‌باشند.



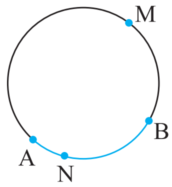
$MA = |R - d| =$ کم‌ترین فاصلهٔ M از دایره

$MB = R + d =$ بیشترین فاصلهٔ M از دایره

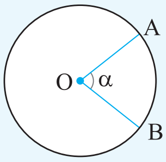
کمان: اگر دو نقطهٔ A و B روی یک دایره باشند، دایره را به دو بخش تقسیم می‌کنند. هر یک از این بخش‌ها را کمان AB گوییم و با نماد $\overset{\frown}{AB}$ نشان می‌دهیم.



تذکر

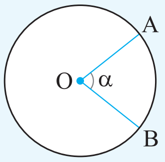


می‌توانیم برای جلوگیری از بروز خطا، کمان را با سه حرف نشان دهیم. به عنوان مثال در شکل مقابل، کمان‌های $\overset{\frown}{AMB}$ و $\overset{\frown}{ANB}$ توسط نقاط A و B ایجاد شده‌اند.



زاویهٔ مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن، مرکز دایره باشد.

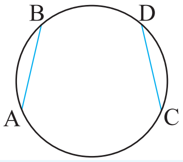
اندازهٔ کمان: اندازهٔ یک کمان را همان اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به آن کمان تعریف می‌کنیم.



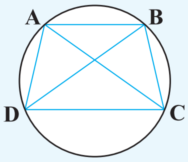
$$\hat{O}=\alpha \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=\alpha$$

نکته

در یک دایره، دو کمان با هم برابرند اگر و تنها اگر وترهای نظیر آن‌ها برابر باشند.



$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow AB=CD$$

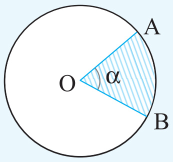


؟ در شکل روبه‌رو، اگر $AC=BD$ ، ثابت کنید $AD=BC$.

طبق نکتهٔ قبل، داریم:

$$AC=BD \Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD} \Rightarrow \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AD} \Rightarrow \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AD} \Rightarrow BC=AD$$

تمرین: درستی عکس رابطهٔ فوق را اثبات کنید.



قطاع: ناحیه‌ای از درون و روی دایره است که به دایره و دو شعاع آن، محدود است.

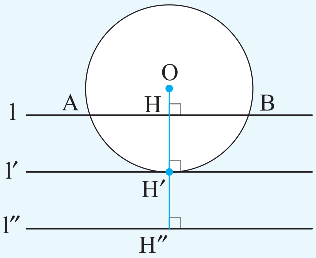
قرارداد: اگر زاویهٔ مرکزی ایجادشده توسط شعاع‌های یک قطاع، α درجه باشد، آن قطاع را «قطاع α درجه» گوییم.

وضعیت یک خط و یک دایره نسبت به هم

۱ خط و دایره، دو نقطه برخورد دارند (متقاطع‌اند) هرگاه فاصلهٔ مرکز دایره تا خط، کم‌تر از شعاع دایره باشد.

۲ خط و دایره، فقط یک نقطهٔ برخورد دارند (مماس‌اند) هرگاه فاصلهٔ مرکز دایره تا خط، برابر با شعاع دایره باشد.

۳ خط و دایره، هیچ نقطهٔ برخوردی ندارند هرگاه فاصلهٔ مرکز دایره تا خط، بیشتر از شعاع دایره باشد.

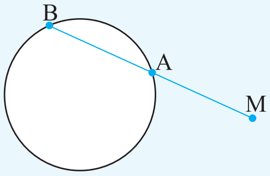


$(OH<R) \Leftrightarrow$ (خط l با دایره متقاطع باشد.)

$(OH'=R) \Leftrightarrow$ (خط l' بر دایره، مماس باشد.)

$(OH''>R) \Leftrightarrow$ (خط l''، دایره را قطع نکند.)

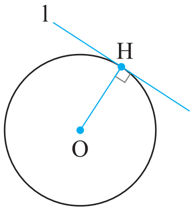
خط قاطع دایره: خطی است که دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.



قرارداد: اگر از نقطهٔ M (غیرواقع بر دایره) قاطعی رسم کنیم تا دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کند، پاره‌خط‌های MA و MB را دو قطعهٔ قاطع گوییم.

نکته

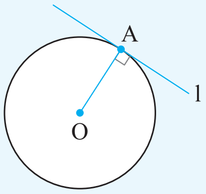
یک خط بر یک دایره مماس است اگر و تنها اگر در نقطه‌ای از دایره، بر شعاع گذرنده از آن نقطه، عمود باشد.



(خط l بر دایره مماس است.) $\Leftrightarrow (l \perp OH)$

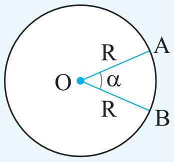
نتایج: ۱ از هر نقطه واقع بر دایره، یک و فقط یک خط مماس بر دایره می‌گذرد.

۲ **روش رسم خط مماس بر دایره از نقطه‌ای واقع بر دایره:** نقطهٔ A روی دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض است. شعاع OA را رسم کرده و از نقطهٔ A خط l را بر OA عمود می‌کنیم. طبق نکتهٔ قبل، این خط بر دایره مماس است.



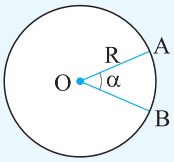
طول کمان - مساحت قطاع و قطعهٔ دایره

طول کمان: طول یک کمان برابر است با طول بخشی از محیط دایره که به دو سر آن کمان محدود است.



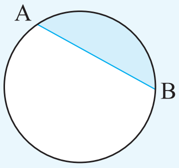
نتایج: ۱ در دایرهٔ $C(O,R)$ ، اگر اندازهٔ کمان AB برابر α درجه و طول آن L واحد باشد، آن‌گاه:

$$\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}=\frac{L}{\text{محیط دایره}}\xrightarrow{\text{محیط دایره}=۲\pi R}\boxed{L=(\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ})(۲\pi R)=\frac{\pi R\alpha}{۱۸۰^\circ}}$$



۲ اگر AOB یک قطاع α درجه از دایرهٔ $C(O,R)$ باشد، آن‌گاه:

$$\frac{S_{\text{قطاع}}}{S_{\text{دایره}}}=\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}\xrightarrow{S_{\text{دایره}}=\pi R^۲}\boxed{S_{\text{قطاع}}=(\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ})(\pi R^۲)=\frac{\pi R^۲\alpha}{۳۶۰^\circ}}$$



قطعهٔ دایره: ناحیه‌ای از درون و روی دایره است که به دایره و یک وتر از آن، محدود است.

۲۶- طول کمان ۶۰° از دایرهٔ $C(O,۱۲)$ ، کدام است؟

۱) ۱۲π ۲) ۶π ۳) ۴π ۴) ۸π

۲۷- طول کمان ۴۵° از دایرهٔ $C(O,R)$ با طول کمان ۳۰° از دایرهٔ $C'(O',R')$ برابر است. مساحت دایرهٔ C ، چند برابر مساحت دایرهٔ C' است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۱۶}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

۲۸- در دایرهٔ $C(O,۹)$ ، محیط و مساحت قطاع ۸۰° ، به‌ترتیب، کدام است؟

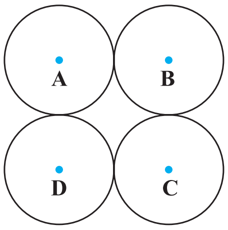
۱) $۱۸\pi , ۱۸+۴\pi$ ۲) $۲۰\pi , ۲۰+۶\pi$

۳) $۱۲\pi , ۱۸+۴\pi$ ۴) $۱۸\pi , ۲۰+۶\pi$

۲۹- اگر مساحت یک قطاع از دایرهٔ $C(O,۱۰)$ برابر ۲۰π باشد، طول کمان این قطاع، کدام است؟

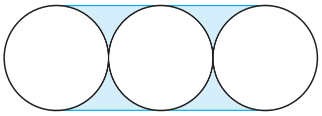
۱) π ۲) ۲π ۳) ۳π ۴) ۴π

۳۰- در شکل زیر، شعاع هر یک از دایره‌ها ۵ واحد است و مرکزهای آن‌ها، یک مربع تشکیل می‌دهند. اگر $\pi \simeq ۳$ ، مساحت ناحیهٔ محدود بین دایره‌ها، کدام است؟



۱) ۲۰
۲) ۲۵
۳) ۲۸
۴) ۳۲

۳۱- مطابق شکل، سه دایره به شعاع R ، بر هم مماس‌اند و مرکزهای آن‌ها، روی یک خط قرار دارند. مساحت ناحیهٔ رنگی، چند برابر $R^۲$ است؟



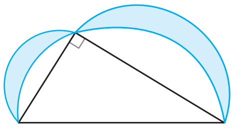
۱) $۸-۲\pi$ ۲) $۴-\pi$

۳) $۲\pi-۶$ ۴) $\pi-۳$

۳۲- سه دایره به شعاع R ، دوبه‌دو مماس خارج‌اند. مساحت ناحیهٔ محصور بین سه دایره، چند برابر $R^۲$ است؟

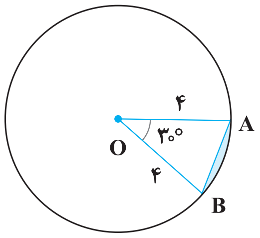
۱) $\sqrt{۲}+\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\sqrt{۵}-\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\sqrt{۶}+\frac{\pi}{۳}$

۳۳- در مثلث قائم‌الزاویهٔ روبه‌رو، طول اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد است. نیم‌دایره‌ها به قطر اضلاع رسم شده‌اند. مجموع مساحت‌های دو ناحیهٔ سایه‌زده، کدام است؟ (تجربی ۹۳ خارج)



۱) ۲π ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۳π

۳۴- در دایرهٔ روبه‌رو، مساحت ناحیهٔ رنگی، کدام است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)



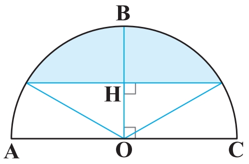
۱) $\frac{۲\pi}{۳}-۱$

۲) $\frac{۴\pi}{۳}-۲$

۳) $\frac{۲\pi}{۳}-۲$

۴) $\frac{۴\pi}{۳}-۴$

۳۵- در شکل مقابل، نقطهٔ O مرکز نیم‌دایره به شعاع ۶ و نقطهٔ H وسط OB است. مساحت ناحیهٔ رنگی، کدام است؟



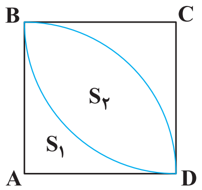
۱) $۲(۴\pi+\sqrt{۳})$

۲) $۳(۳\pi+\sqrt{۲})$

۳) $۲(۵\pi-\sqrt{۲})$

۴) $۳(۴\pi-۳\sqrt{۳})$

۳۶- در مربع مقابل، دو کمان به مرکزهای A و C و به شعاعی برابر با طول ضلع مربع، رسم شده‌اند. نسبت $S_۱$ به $S_۲$ کدام است؟



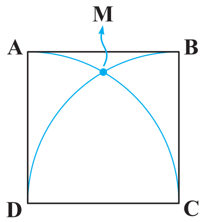
۱) $\frac{۴-\pi}{۲\pi-۴}$

۲) $\frac{۲\pi-۳}{۳\pi+۱}$

۳) $\frac{۵-\pi}{۲\pi-۳}$

۴) $\frac{۳\pi-۵}{۲\pi-۱}$

۳۷- در مربع مقابل، به مرکزهای C و D و شعاعی برابر با طول ضلع مربع، دو کمان زده‌ایم. اگر طول ضلع مربع ۱ واحد باشد، مساحت ناحیهٔ MCD، کدام است؟



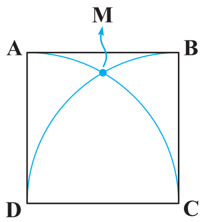
۱) $\frac{\pi}{۴}-\frac{\sqrt{۲}}{۵}$

۲) $\frac{\pi}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۳) $\frac{\pi}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۴) $\frac{۳\pi}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

۳۸- در مربع مقابل، به مرکزهای C و D و شعاعی برابر با طول ضلع مربع، دو کمان زده‌ایم. اگر طول ضلع مربع ۱ واحد باشد و $\pi \simeq ۳$، نسبت مساحت ناحیهٔ MAB به ناحیهٔ MAD، کدام است؟



۱) $\frac{۲\sqrt{۲}-۱}{۳}$

۲) $\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}+۱}{۲}$

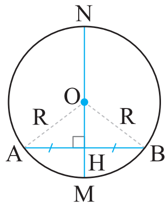
۴) $\frac{۲\sqrt{۳}-۱}{۳}$

نکاتی دربارهٔ وترها و خطوط مماس بر دایره

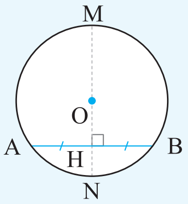
نکته

در دایره، قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن را نصف می‌کند.

$MN \perp AB \Rightarrow AH = HB,\ \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB},\ \overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NB}$



نتایج: اگر AB وتری دلخواه از دایرهٔ $C(O,R)$ و نقاط M، H و N به‌ترتیب وسط AB و کمان‌های نظیرش باشند، چهار نقطهٔ M، H، O و N روی یک خط قرار دارند، پس در هر دایره:



۱ خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن دایره وصل کند، بر آن وتر عمود است.

۲ خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر وصل کند، بر آن وتر عمود است.

۳ خطی که وسط یک وتر را به وسط کمان نظیر آن وصل کند، از مرکز دایره می‌گذرد.

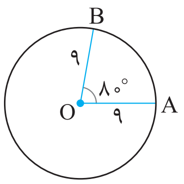
۴ عمودمنصف هر وتر، از مرکز دایره می‌گذرد.

۲۷ **۴** طول کمان اول را l و طول کمان دوم را l' می‌نامیم. طبق فرض، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} l=(\frac{۴۵^\circ}{۳۶۰^\circ})(۲\pi R)=\frac{\pi R}{۴} \\ l'=(\frac{۳۰^\circ}{۳۶۰^\circ})(۲\pi R')=\frac{\pi R'}{۶} \end{array}\right\} \xRightarrow{l=l'} \frac{\pi R}{۴}=\frac{\pi R'}{۶} \xRightarrow{\times\frac{۱۲}{\pi}} ۳R=۲R' \Rightarrow R=\frac{۲}{۳}R' \quad (*)$$

$$\frac{\text{مساحت دایرهٔ } C}{\text{مساحت دایرهٔ } C'}=\frac{\pi R^۲}{\pi R'^۲}=\frac{R^۲}{R'^۲}\overset{(*)}{=\!=}\frac{\frac{۴}{۹}R'^۲}{R'^۲}=\frac{۴}{۹}$$

۲۸ **۱** طبق مطالب درسنامه، داریم:



$$\text{طول کمان } AB=(\frac{۸۰^\circ}{۳۶۰^\circ})(\underbrace{\text{محیط دایره}}_{۱۸\pi})=\frac{۲}{۹}(۱۸\pi)=۴\pi$$

$$\text{محیط قطاع } OAB=OA+OB+(\text{طول کمان } AB)=۹+۹+۴\pi=۱۸+۴\pi$$

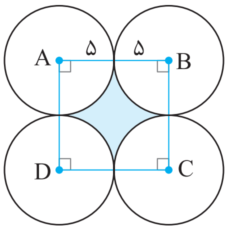
$$\text{مساحت قطاع } OAB=(\frac{۸۰^\circ}{۳۶۰^\circ})(\underbrace{\text{مساحت دایره}}_{۸۱\pi})=\frac{۲}{۹}(۸۱\pi)=۱۸\pi$$

۲۹ **۴** زاویهٔ قطاع را α درجه فرض می‌کنیم. طبق مطالب درسنامه، داریم:

$$S_{\text{قطاع}}=(\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ})(S_{\text{دایره}}) \Rightarrow ۲۰\pi=(\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ})(۱۰۰\pi) \xRightarrow{\div ۲۰\pi} ۱=\frac{۵\alpha}{۳۶۰^\circ} \Rightarrow ۵\alpha=۳۶۰^\circ \Rightarrow \alpha=۷۲^\circ$$

$$\Rightarrow \text{طول کمان } ۷۲^\circ=(\frac{۷۲^\circ}{۳۶۰^\circ})(\text{محیط دایره})=(\frac{۱}{۵})(۲۰\pi)=۴\pi$$

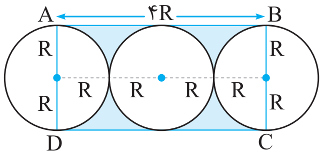
۳۰ **۲** مطابق شکل، چون هر دو دایرهٔ مجاور، مماس خارج‌اند، طول ضلع مربع، ۱۰ واحد است و چهار ربع دایره به شعاع ۵، درون مربع قرار دارند، بنابراین:



$$\text{مساحت ناحیهٔ رنگی}=S_{ABCD}-(\text{مساحت چهار ربع دایره به شعاع ۵})$$

$$=S_{ABCD}-(\text{مساحت یک دایره به شعاع ۵})=۱۰۰-۲۵\pi \overset{\pi\simeq ۳}{=\!=} ۱۰۰-۷۵=۲۵$$

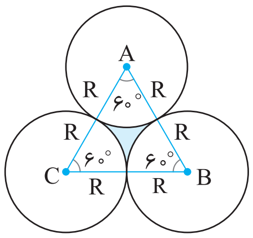
۳۱ **۱** مطابق شکل، داریم:



$$S_{\text{رنگی}}=S_{ABCD}-[(\underbrace{\text{مساحت یک دایره}}_{\pi R^۲})+۲(\underbrace{\text{مساحت نیم‌دایره}}_{\frac{\pi R^۲}{۲}})]=(۴R)(۲R)-(\pi R^۲+\pi R^۲)$$

$$=۸R^۲-۲\pi R^۲=(۸-۲\pi)R^۲$$

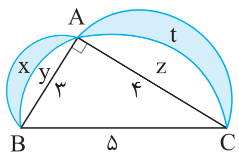
۳۲ **۲** چون دایره‌ها مماس خارج‌اند، $AB=BC=CA=۲R$ و مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، بنابراین:



$$S_{\text{رنگی}}=S_{\overset{\Delta}{ABC}}-۳(\text{مساحت قطاع } ۶۰^\circ \text{ به شعاع } R)=\frac{(۲R)^۲\sqrt{۳}}{۴}-۳(\frac{۱}{۶}\pi R^۲)$$

$$=R^۲\sqrt{۳}-\frac{\pi R^۲}{۲}=R^۲(\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۲})$$

۳۳ **۲** **روش اول:** اولاً طبق قضیهٔ فیثاغورس، $BC=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵$. ضمناً مساحت مثلث ABC برابر است با $\frac{۱}{۲}(۳\times۴)=۶$. حال با نامگذاری مساحت ناحیه‌ها مطابق شکل، داریم:



$$\text{مساحت نیم‌دایره به قطر } BC=\frac{۱}{۲}(\pi(\frac{۵}{۲})^۲) \Rightarrow \overbrace{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}^{۶}+y+z=\frac{۲۵\pi}{۸} \Rightarrow y+z=\frac{۲۵\pi}{۸}-۶ \quad (*)$$

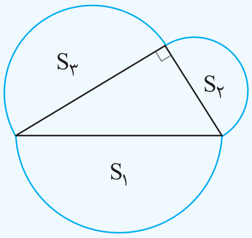
$$\left.\begin{array}{l} \text{مساحت نیم‌دایره به قطر } AB=\frac{۱}{۲}(\pi(\frac{۳}{۲})^۲) \Rightarrow x+y=\frac{۹\pi}{۸} \\ \text{مساحت نیم‌دایره به قطر } AC=\frac{۱}{۲}(\pi(۲)^۲) \Rightarrow z+t=۲\pi \end{array}\right\} \Rightarrow x+y+z+t=\frac{۹\pi}{۸}+۲\pi$$

$$\Rightarrow (x+t)+(y+z)=\frac{۲۵\pi}{۸} \xRightarrow{(*)} (x+t)+(\frac{۲۵\pi}{۸}-۶)=\frac{۲۵\pi}{۸} \Rightarrow x+t=۶$$

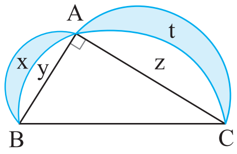
روش دوم:

نکته: اگر روی اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه، سه شکل متشابه بسازیم، مساحت شکل بزرگ‌تر، برابر است با مجموع مساحت‌های دو شکل دیگر.

$S_۱ = S_۲ + S_۳$



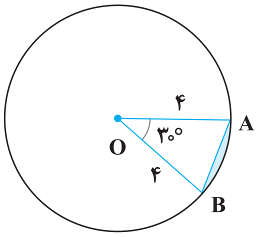
طبق نکتهٔ فوق، داریم:



(مساحت نیم‌دایره به قطر AC) + (مساحت نیم‌دایره به قطر AB) = مساحت نیم‌دایره به قطر BC

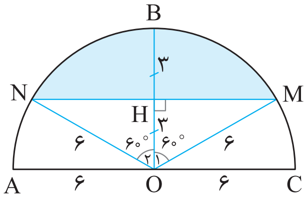
$$\Rightarrow y + S_{\overset{\Delta}{ABC}} + z = (x+y)+(z+t) \xrightarrow{S_{\overset{\Delta}{ABC}}=۶} y+۶+z = x+y+z+t \Rightarrow ۶ = x+t$$

۳۴ **۴** می‌دانیم مساحت هر مثلث، برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها. حال داریم:



$$S_{\text{رنگی}} = S_{\text{قطاع}\,OAB} - S_{\overset{\Delta}{OAB}} = (\frac{۳۰^\circ}{۳۶۰^\circ})(۱۶\pi) - \frac{۱}{۲}(۴)(۴)(\sin ۳۰^\circ) = (\frac{۱}{۱۲})(۱۶\pi) - \frac{۱}{۲}(۴)(۴)(\frac{۱}{۲}) = \frac{۴\pi}{۳} - ۴$$

۳۵ **۴** طبق فرض سؤال، $OH = HB = ۳$ و $OM = ۶$، پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHM داریم:



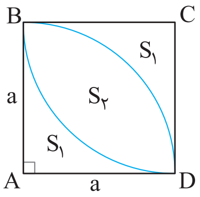
$$\cos \hat{O}_۱ = \frac{OH}{OM} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \hat{O}_۱ = ۶۰^\circ$$

به روش مشابه $\Rightarrow \hat{O}_۲ = ۶۰^\circ$

در نتیجه، باید مساحت قطعهٔ دایرهٔ روبه‌رو به کمان ۱۲۰° را بیابیم. حال داریم:

$$S_{\text{رنگی}} = (\text{مساحت قطاع } ۱۲۰^\circ) - S_{\overset{\Delta}{OMN}} = (\frac{۱}{۳}\pi(۶)^۲) - (\frac{۱}{۲}(۶)(۶)\underbrace{(\sin ۱۲۰^\circ)}_{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}) = ۱۲\pi - ۹\sqrt{۳} = ۳(۴\pi - ۳\sqrt{۳})$$

۳۶ **۱** طول ضلع مربع را a فرض می‌کنیم. با توجه به شکل، داریم:

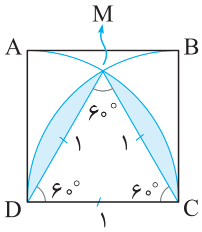


$$\begin{cases} ۲S_۱ + S_۲ = S_{ABCD} \\ S_۱ + S_۲ = S_{\text{ربع دایره}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲S_۱ + S_۲ = a^۲ \\ S_۱ + S_۲ = \frac{\pi a^۲}{۴} \end{cases} \xrightarrow{\text{معادلهٔ دوم را از معادلهٔ اول کم می‌کنیم.}} S_۱ = a^۲ - \frac{\pi a^۲}{۴}$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در معادلهٔ دوم}} a^۲ - \frac{\pi a^۲}{۴} + S_۲ = \frac{\pi a^۲}{۴} \Rightarrow S_۲ = \frac{\pi a^۲}{۲} - a^۲$$

$$\Rightarrow \frac{S_۱}{S_۲} = \frac{a^۲ - \frac{\pi a^۲}{۴}}{\frac{\pi a^۲}{۲} - a^۲} = \frac{a^۲(۱ - \frac{\pi}{۴})}{a^۲(\frac{\pi}{۲} - ۱)} = \frac{\frac{۴-\pi}{۴}}{\frac{\pi - ۲}{۲}} = \frac{۴-\pi}{۲(\pi-۲)} = \frac{۴-\pi}{۲\pi - ۴}$$

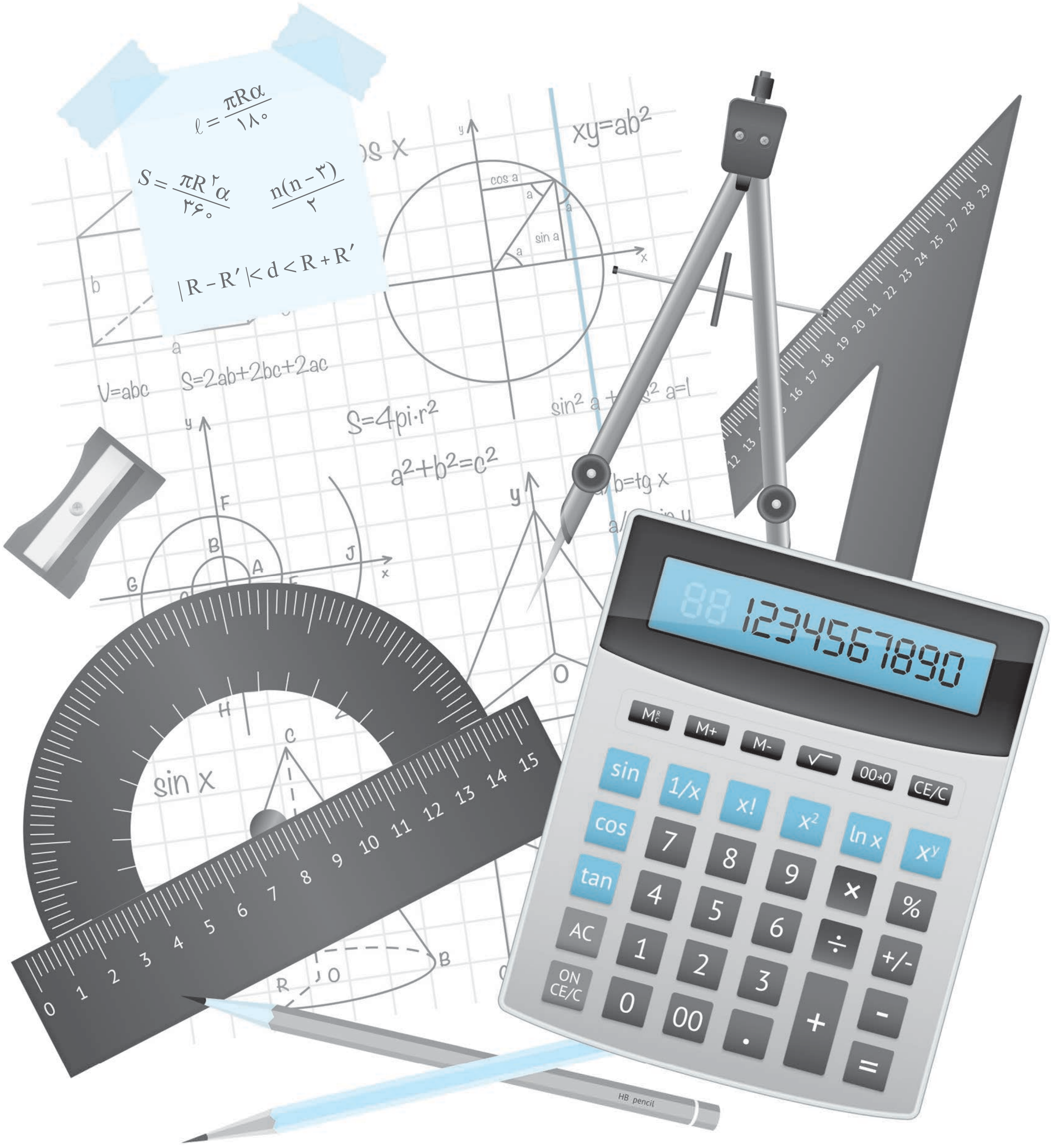
۳۷ **۳** اولاً چون شعاع‌های دایره‌ها با طول ضلع مربع برابرند، مثلث MCD متساوی‌الاضلاع است و $S_{\overset{\Delta}{MCD}} = \frac{(۱)^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$. حال داریم:



$$\text{مساحت هریک از دو ناحیهٔ رنگی} = (\text{مساحت قطاع } ۶۰^\circ) - S_{\overset{\Delta}{MCD}} = \frac{\pi}{۶} - \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

$$\text{مساحت ناحیهٔ } MCD = S_{\overset{\Delta}{MCD}} + ۲S_{\text{رنگی}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} + ۲(\frac{\pi}{۶} - \frac{\sqrt{۳}}{۴}) = \frac{\pi}{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

پایهٔ دوازدهم



آشنایی با ماتریس

ماتریس: هر جدول مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون را ماتریس گوییم. ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A، B، C و ... نام‌گذاری می‌کنیم، مانند:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & -۵\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}-۷\\ ۶\\ ۴\end{bmatrix}$$

مرتبهٔ ماتریس: اگر ماتریسی، m سطر و n ستون داشته باشد، آن را از مرتبهٔ $m\times n$ گوییم. به‌عنوان مثال، در ماتریس‌های بالا، A ماتریسی ۲×۲، B ماتریسی ۱×۳ و C ماتریسی ۳×۱ است. (مرتبهٔ ماتریس را کنار نام آن هم می‌نویسند: $A_{۲\times ۲}$، $B_{۱\times ۳}$ و $C_{۳\times ۱}$)

درایه: هر یک از اعداد داخل ماتریس را یک درایهٔ آن ماتریس گوییم.

قرارداد: اگر A ماتریسی $m\times n$ باشد، درایهٔ واقع در سطر iاُم و ستون jاُم آن را با نماد a_{ij} و ماتریس A را به‌صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نشان می‌دهیم.

تذکر

۱ a_{ij} را درایهٔ عمومی ماتریس A گوییم.

۲ اگر $A=[a]_{۱\times ۱}$، آن‌گاه به‌طور خلاصه می‌نویسیم $A=a$. به‌عنوان مثال: $A=[۷]=۷$

؟ ماتریس $A=[۲i-j]_{۲\times ۳}$ را با درایه‌هایش مشخص کنید.

با توجه به فرض، ماتریس A دو سطر و سه ستون دارد، پس به فرم $A=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳}\end{bmatrix}_{۲\times ۳}$ می‌باشد و چون $a_{ij}=۲i-j$، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}a_{۱۱}=۲(۱)-۱=۱,\ a_{۱۲}=۲(۱)-۲=۰,\ a_{۱۳}=۲(۱)-۳=-۱\\ a_{۲۱}=۲(۲)-۱=۳,\ a_{۲۲}=۲(۲)-۲=۲,\ a_{۲۳}=۲(۲)-۳=۱\end{array}\right\}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۳ & ۲ & ۱\end{bmatrix}$$

ماتریس مربعی: ماتریسی است که تعداد سطرها و ستون‌های آن، یکسان باشد، مانند:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}_{۲\times ۲},\ B=\begin{bmatrix}-۴ & ۰ & ۱\\ ۲ & ۵ & ۷\\ ۶ & ۳ & ۱\end{bmatrix}_{۳\times ۳}$$

قرارداد: در ماتریس مربعی $A=[a_{ij}]_{n\times n}$، درایه‌های $a_{۱۱},a_{۲۲},\dots,a_{nn}$ را درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن گوییم.

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۴ & ۵ & ۶\\ ۷ & ۸ & ۹\end{bmatrix}$$

قطر فرعی　　قطر اصلی

ماتریس سطری: ماتریسی است که فقط یک سطر داشته باشد (از مرتبهٔ $۱\times n$ باشد)، مانند:

$$A=\begin{bmatrix}-۵ & ۰ & ۲ & ۴\end{bmatrix}_{۱\times ۴}$$

ماتریس ستونی: ماتریسی است که فقط یک ستون داشته باشد (از مرتبهٔ $m\times ۱$ باشد)، مانند:

$$A=\begin{bmatrix}۳\\ -۴\\ ۶\end{bmatrix}_{۳\times ۱}$$

ماتریس قطری: ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن، صفر باشند، مانند:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}۵ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۵\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

(دقت کنید که درایه‌های واقع بر قطر اصلی ممکن است صفر باشند یا نباشند.)

ماتریس اسکالر: ماتریسی قطری است که درایه‌های قطر اصلی آن، با هم برابرند، مانند:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۳\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

ماتریس همانی (واحد): ماتریسی اسکالر است که همهٔ درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن، ۱ باشند.

قرارداد: ماتریس همانی $n\times n$ را با نماد I_n نشان می‌دهیم، به‌عنوان مثال:

$$I_۲=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix},\ I_۳=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

ماتریس صفر: ماتریسی است که همهٔ درایه‌های آن، صفر باشند.

قرارداد: ماتریس صفر از مرتبهٔ $m\times n$ را با نماد $\bar{O}_{m\times n}$ نشان می‌دهیم، به‌عنوان مثال:

$$\bar{O}_{2\times2}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\ ,\ \bar{O}_{1\times2}=\begin{bmatrix}0&0\end{bmatrix}\ ,\ \bar{O}_{2\times1}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

ماتریس بالامثلثی: ماتریسی مربعی است که همهٔ درایه‌های زیر قطر اصلی آن، صفر باشند، مانند:

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}1&-1&3\\0&2&4\\0&0&0\end{bmatrix}\ ,\ C=\begin{bmatrix}0&5&7\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}$$

(دقت کنید که درایه‌های بالای قطر اصلی و روی آن، ممکن است صفر باشند یا نباشند.)

ماتریس پایین‌مثلثی: ماتریسی مربعی است که همهٔ درایه‌های بالای قطر اصلی آن، صفر باشند، مانند:

$$A=\begin{bmatrix}-1&0\\3&5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\1&-1&0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

(دقت کنید که درایه‌های زیر قطر اصلی و روی آن، ممکن است صفر باشند یا نباشند.)

نتایج: ۱ ماتریس همانی، هم بالامثلثی است و هم پایین‌مثلثی.

۲ ماتریس‌های صفر مربعی، هم بالامثلثی‌اند و هم پایین‌مثلثی.

۳ اگر ماتریسی، هم بالامثلثی و هم پایین‌مثلثی باشد، قطری است.

دو ماتریس مساوی: دو ماتریس را مساوی گوییم هرگاه اولاً هم مرتبه باشند، ثانیاً درایه‌های آن‌ها، نظیربه‌نظیر با هم برابر باشند.

جمع دو ماتریس: اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ دو ماتریس هم مرتبه باشند، مجموع آن‌ها ماتریسی از همان مرتبه است که هر درایهٔ آن، برابر است با مجموع درایه‌های نظیرش در A و B.

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\ ,\ B=[b_{ij}]_{m\times n}\ ,\ A+B=C\Rightarrow C=[c_{ij}]_{m\times n}\ ,\ c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&3\\2&4&0\end{bmatrix}_{2\times3}+\begin{bmatrix}5&2&0\\-1&7&1\end{bmatrix}_{2\times3}=\begin{bmatrix}6&1&3\\1&11&1\end{bmatrix}_{2\times3}$$

ضرب عدد در ماتریس: حاصل‌ضرب عدد حقیقی r در ماتریس $A_{m\times n}$، ماتریسی هم‌مرتبه با A است که هر درایهٔ آن، r برابر درایهٔ نظیرش در ماتریس A است.

$$r\in\mathbb{R}, A=[a_{ij}]_{m\times n}\Rightarrow rA=[ra_{ij}]_{m\times n}$$

$$A=\begin{bmatrix}2&-1\\4&0\end{bmatrix}\Rightarrow 3A=\begin{bmatrix}6&-3\\12&0\end{bmatrix}$$

نتیجه: هر ماتریس اسکالر، مضربی از ماتریس همانی هم‌مرتبه با آن است، به‌عنوان مثال:

$$\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix}_{3\times3}=\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{3\times3}=\lambda I_3$$

قرینهٔ یک ماتریس: به ازای هر ماتریس A، ماتریس $(-1)A$ را قرینهٔ ماتریس A گوییم و با نماد $-A$ نشان می‌دهیم، به‌عنوان مثال:

$$A=\begin{bmatrix}3&0\\-1&2\end{bmatrix}\Rightarrow -A=\begin{bmatrix}-3&0\\1&-2\end{bmatrix}$$

تفاضل دو ماتریس: اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، $A-B$ را به‌صورت $A+(-B)$ تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر، درایه‌های ماتریس $A-B$ از تفریق درایه‌های نظیرشان در A و B به‌دست می‌آیند. به‌عنوان مثال:

$$\begin{bmatrix}5&7\\-6&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&3\\-4&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4\\-2&1\end{bmatrix}$$

ویژگی‌های جمع ماتریس‌ها: اگر A، B و C سه ماتریس هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه:

۳ $A+B=B+A$ (خاصیت جابه‌جایی دارد)

۴ $A+(B+C)=(A+B)+C$ (خاصیت شرکت‌پذیری دارد)

۵ $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$ (عضو خنثی دارد (ماتریس صفر))

۶ $A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$ (عضو قرینه دارد ($-A$))

۳۵- اگر $A-B=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ -۱ & -۱\end{bmatrix}$ و $AB+BA=\begin{bmatrix}۵ & -۳\\ -۵ & ۱۳\end{bmatrix}$ ، حاصل $A^۲+B^۲$ ، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۲ & -۴\\ -۱ & ۱۰\end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix}۴ & -۲\\ ۱ & ۱۰\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}-۳ & -۵\\ ۵ & ۱۳\end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix}۵ & -۵\\ -۳ & ۱۳\end{bmatrix}$

۳۶- اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & x\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ ۱ & y\end{bmatrix}$ و $(A+B)(A-B)=A^۲-B^۲$ ، حاصل xy ، کدام است؟

۱) -۱۵
۲) ۱۸
۳) -۲۰
۴) ۱۶

۳۷- اگر A ماتریسی مربعی باشد و $A^۲+I=-A$ ، ماتریس $A^{۵۸}$ برابر با کدام ماتریس است؟

۱) I
۲) A
۳) $A^۲$
۴) O

۳۸- اگر A یک ماتریس مربعی غیرهمانی باشد و $A^۳+A=A^۲+I$ ، حاصل $A^{۱۰۲}$ کدام است؟

۱) I
۲) A
۳) $A^۲$
۴) $A^۳$

۳۹- اگر A ماتریسی مربعی باشد و $۲A^۲-I=A$ ، حاصل $(A-۲I)^۳$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۷}{۵}A+\frac{۳۱}{۵}I$
۲) $\frac{۳۹}{۴}A-\frac{۴۳}{۴}I$
۳) $\frac{۴۱}{۳}A-\frac{۳۱}{۳}I$
۴) $\frac{۳۷}{۶}A+\frac{۴۱}{۶}I$

۴۰- اگر A ماتریسی مربعی، $A^۲=\bar{O}$ و n عددی طبیعی بزرگ‌تر از ۲ باشد، حاصل $(A+I)^n$ کدام است؟

۱) I
۲) $A+I$
۳) $A+nI$
۴) $I+nA$

۴۱- اگر A ماتریسی مربعی، $A^۲=A$ و n عددی طبیعی باشد، حاصل $(A+I)^n$ کدام است؟

۱) I
۲) $A+I$
۳) $(۲^n-۱)A$
۴) $(۲^n-۱)A+I$

۴۲- اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & -۳ & ۴\\ ۲ & -۳ & ۴\\ ۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی ماتریس $A^۴$ ، کدام است؟ (مشابه ریاضی ۹۲ خارج)

۱) -۱
۲) ۱
۳) -۳
۴) ۳

۴۳- اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & -۲\end{bmatrix}$ ، حاصل $A^۷-A^۴$ ، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۳ & -۳\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۳ & -۳\end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۲ & -۳\end{bmatrix}$

۴۴- اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس $A^۸$ ، کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) -۲
۴) -۱

۴۵- اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$ ، حاصل $A^{۱۳۹۹}-A^{۱۳۹۸}$ ، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}-۱ & -۱\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$

۴۶- اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & -۳\\ ۰ & -۳ & ۰\\ -۳ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس $A^۵$ ، کدام است؟

۱) $۳^۵$
۲) $-۳^۵$
۳) $۳^۶$
۴) $-۳^۶$

۴۷- اگر $A=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳}\end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۱۳۹۸}$ ، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) ۱
۳) ۳
۴) ۶

۴۸- اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۱\\ -۱ & ۱ & -۱\\ ۱ & -۱ & ۱\end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۲۵}$ ، کدام است؟

۱) $۳^{۲۳}$
۲) $۳^{۲۶}$
۳) $۳^{۲۴}$
۴) $۳^{۲۵}$

گزارهٔ (ب): چون $AB=-BA$ ، داریم:

$AB^۲=(AB)B=(-BA)B=-B(AB)=-B(-BA)=B(BA)=(BB)A=B^۲A\Rightarrow$ این گزاره، غلط است.

گزارهٔ (ج): چون $AB=A$ ، داریم:

$$AB=A\Rightarrow(AB)B=AB\Rightarrow A(\underbrace{BB}_{B^۲})=\underbrace{AB}_{A}\Rightarrow AB^۲=A\Rightarrow(AB^۲)B=AB$$

$\Rightarrow A(B^۲B)=\underbrace{AB}_{A}\Rightarrow AB^۳=A\xRightarrow{B^۳=\bar{O}}A=\bar{O}\Rightarrow$ این گزاره، درست است.

نتیجه: فرض کنیم A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه‌اند، در این‌صورت:

۱ اگر $AB=BA$ ، آن‌گاه به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$ ، $AB^n=B^nA$.

۲ اگر $AB=-BA$ ، آن‌گاه به‌ازای هر $n\in\mathbb{N}$ ، $AB^n=(-۱)^nB^nA$.

۳۳ **۲** ماتریس B را یک‌بار از سمت راست و بار دیگر، از سمت چپ در رابطهٔ $AB-BA=I$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases}(AB-BA)B=IB\\B(AB-BA)=BI\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AB^۲-BAB=B\\BAB-B^۲A=B\end{cases}\xRightarrow{\text{جمع می‌زنیم}}AB^۲-B^۲A=۲B$$

۳۴ **۲** با توجه به فرض، داریم:

$$A-B=C\Rightarrow(A-B)^۲=C^۲\Rightarrow(A-B)(A-B)=C^۲\Rightarrow A^۲+B^۲-AB-BA=C^۲$$

۳۵ **۴** از مطالب درسنامه، می‌دانیم:

$$(A-B)^۲=(A-B)(A-B)=A^۲-AB-BA+B^۲\Rightarrow(A-B)^۲=A^۲-(AB+BA)+B^۲$$

حال با جای‌گذاری ماتریس‌های $A-B$ و $AB+BA$ در رابطهٔ فوق، داریم:

$$\begin{bmatrix}-۱&۱\\-۱&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۱\\-۱&-۱\end{bmatrix}=A^۲-\begin{bmatrix}۵&-۳\\-۵&۱۳\end{bmatrix}+B^۲\Rightarrow\begin{bmatrix}۰&-۲\\۲&۰\end{bmatrix}=A^۲-\begin{bmatrix}۵&-۳\\-۵&۱۳\end{bmatrix}+B^۲\Rightarrow\begin{bmatrix}۰&-۲\\۲&۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۵&-۳\\-۵&۱۳\end{bmatrix}=A^۲+B^۲\Rightarrow\begin{bmatrix}۵&-۵\\-۳&۱۳\end{bmatrix}=A^۲+B^۲$$

۳۶ **۱** طبق فرض، داریم:

$$(A+B)(A-B)=A^۲-B^۲\Rightarrow A^۲-AB+BA-B^۲=A^۲-B^۲\Rightarrow AB=BA\Rightarrow\begin{bmatrix}۳&x\\-۱&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۵\\۱&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۵\\۱&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&x\\-۱&۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۶+x&۱۵+xy\\۰&-۵+۲y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۲x+۱۰\\۳-y&x+۲y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}۶+x=۱\\۳-y=۰\end{cases}\Rightarrow x=-۵,\ y=۳\Rightarrow xy=-۱۵$$

۳۷ **۲** با توجه به فرض، داریم:

$$A^۲+A+I=\bar{O}\xRightarrow{\text{طرفین را در }(A-I)\text{ ضرب می‌کنیم}}(A-I)(A^۲+A+I)=(A-I)\times\bar{O}\Rightarrow A^۳-I=\bar{O}\Rightarrow A^۳=I\quad(*)$$

$$A^{۵۸}=(A^۳)^{۱۹}A\overset{(*)}{=}I^{۱۹}A=IA=A$$

۳۸ **۳** با توجه به فرض، داریم:

$$A^۳-A^۲+A-I=\bar{O}\xRightarrow{\text{طرفین را در }(A+I)\text{ ضرب می‌کنیم}}(A+I)(A^۳-A^۲+A-I)=(A+I)\times\bar{O}\Rightarrow A^۴-I=\bar{O}\Rightarrow A^۴=I\ (*)$$

$$A^{۱۰۲}=(A^۴)^{۲۵}A^۲\overset{(*)}{=}I^{۲۵}A^۲=IA^۲=A^۲$$

تمرین: اگر $A^۲-A+I=\bar{O}$ ، حاصل $A^{۵۸}$ را بیابید. (پاسخ: $-A$)

۳۹ **۲** **روش اول:** اولاً طبق اتحادهای ماتریسی، داریم:

$$(A-۲I)^۳=A^۳-۶A^۲+۱۲A-۸I\quad(*)$$

حال به کمک فرض سؤال، ماتریس‌های $A^۲$ و $A^۳$ را برحسب ماتریس A یافته و در رابطهٔ $(*)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۲A^۲-I=A\Rightarrow۲A^۲=A+I\Rightarrow A^۲=\frac{۱}{۲}A+\frac{۱}{۲}I\quad(**)$$

$$A^۳=AA^۲\overset{(**)}{=\!=\!=}A(\frac{۱}{۲}A+\frac{۱}{۲}I)=\frac{۱}{۲}A^۲+\frac{۱}{۲}A\overset{(**)}{=\!=\!=}\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}A+\frac{۱}{۲}I)+\frac{۱}{۲}A=\frac{۳}{۴}A+\frac{۱}{۴}I\quad(***)$$

$$(*),(**),(***)\Rightarrow(A-۲I)^۳=(\frac{۳}{۴}A+\frac{۱}{۴}I)-۶(\frac{۱}{۲}A+\frac{۱}{۲}I)+۱۲A-۸I=\frac{۳}{۴}A+\frac{۱}{۴}I-۳A-۳I+۱۲A-۸I=\frac{۳۹}{۴}A-\frac{۴۳}{۴}I$$

روش دوم: با توجه به فرض، داریم:

$$2A^2-I=A\Rightarrow 2A^2=A+I\Rightarrow A^2=\frac{1}{2}(A+I)\qquad (*)$$

$$(A-2I)^2=A^2-4A+4I\overset{(*)}{=\!=}\frac{1}{2}(A+I)-4A+4I=-\frac{7}{2}A+\frac{9}{2}I\qquad (**)$$

$$(A-2I)^3=(A-2I)^2(A-2I)\overset{(**)}{=\!=}(-\frac{7}{2}A+\frac{9}{2}I)(A-2I)=-\frac{7}{2}A^2+7A+\frac{9}{2}A-9I=-\frac{7}{2}A^2+\frac{23}{2}A-9I$$

$$\overset{(*)}{=\!=}-\frac{7}{2}(\frac{1}{2}(A+I))+\frac{23}{2}A-9I=\frac{39}{4}A-\frac{43}{4}I$$

تمرین: اگر $A^3+A^2+A+I=\bar{O}$ ، ماتریس A^{102} را بیابید.(پاسخ: A^2)

۴۰ **۴** **روش اول:**

یادآوری: $(x+y)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+...+\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+\binom{n}{n}y^n$

اولاً چون $A^2=\bar{O}$ ، به‌ازای هرعدد طبیعی $n\geq 2$ ، $A^n=\bar{O}$. حال طبق یادآوری فوق، داریم:

$$(A+I)^n=\binom{n}{0}\underset{\bar{O}}{\underset{\downarrow}{A^n}}+\binom{n}{1}\underset{\bar{O}}{\underset{\downarrow}{A^{n-1}}}+...+\binom{n}{n-2}\underset{\bar{O}}{\underset{\downarrow}{A^2}}+\binom{n}{n-1}A+I=nA+I$$

روش دوم: اولاً چون $A^2=\bar{O}$ ، توان‌های بالاتر ماتریس A هم برابر ماتریس صفرند. حال به‌ازای $n=3$ ، داریم:

$$(A+I)^3=A^3+3A^2+3A+I\overset{A^3=A^2=\bar{O}}{=\!=\!=\!=\!=}3A+I$$

پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) رد می‌شوند و گزینهٔ (۴) صحیح است.

۴۱ **۴** **روش اول:**

یادآوری: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$

چون $A^2=A$ ، به‌ازای هرعدد طبیعی n ، $A^n=A$ و در نتیجه:

$$(A+I)^n=\binom{n}{0}A^n+\binom{n}{1}A^{n-1}+...+\binom{n}{n-1}A+I\overset{A^2=A}{=\!=\!=\!=}\binom{n}{0}A+\binom{n}{1}A+...+\binom{n}{n-1}A+I$$

$$=\underbrace{\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n-1}\right)}_{2^n-1}A+I=(2^n-1)A+I$$

روش دوم: با فرض $n=2$ ، داریم:

$$(A+I)^2=\underset{A}{\underbrace{A^2}}+2A+I=3A+I=(2^2-1)A+I$$

پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) رد می‌شوند و گزینهٔ (۴) صحیح است.

۴۲ **۴**

تذکر: برای یافتن توان‌های بزرگ یک ماتریس، ابتدا توان‌های کوچک آن را یافته و سپس به کمک آن‌ها، توان‌های بزرگ ماتریس را محاسبه کرده یا حدس می‌زنیم.

ابتدا ماتریس A^2 و سپس ماتریس A^4 را می‌یابیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}\Rightarrow A^4=A^2A^2=\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ ۳ = مجموع درایه‌های قطر اصلی

۴۳ **۲** با توجه به فرض، داریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I\qquad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l}A^7=(A^2)^3A\overset{(*)}{=\!=}I^3A=A\\ A^4=(A^2)^2\overset{(*)}{=\!=}I^2=I\end{array}\right\}\Rightarrow A^7-A^4=A-I=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\3&-3\end{bmatrix}$$