

به نام پروردگار مهربان

هفدهم

ریاضی

دهم

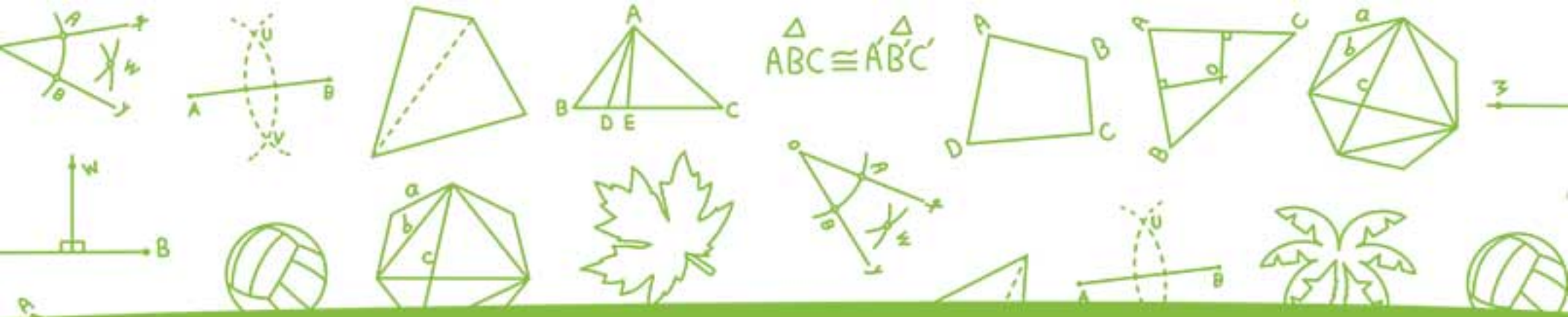
آموزش به سبک لقمه

احسان لعل

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی



مهروماه



فصل اول

ترسیم‌های

هندسی و استدلال



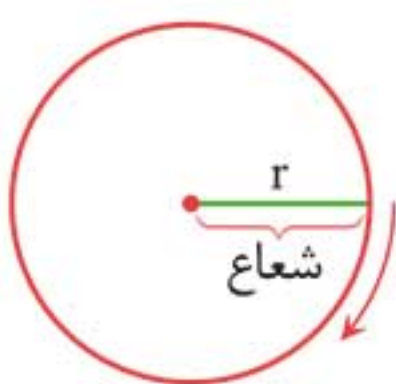
وعدۀ ۱

دایره



◀ **دایره:** مجموعه نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت (به نام مرکز) به فاصله‌ای ثابت (که به این فاصله ثابت شعاع گویند) قرار داشته باشند.

روش رسم دایره



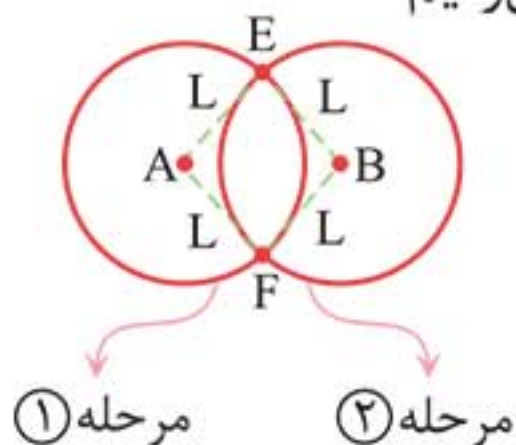
برای رسم دایره به مرکز نقطه ثابت O و به شعاع r کافی است نوک پرگار را روی نقطه O قرار داده و دهانه آن را به اندازه r باز کنیم سپس از یک نقطه شروع کرده و پس از یک دور کامل به نقطه ابتدایی برسیم به شکل حاصل یک دایره گویند.

◀ **در حالتی که دو نقطه ثابت داشته باشیم:** دو نقطه ثابت A و B در صفحه مفروض‌اند، نقاطی که از هر دو نقطه A و B به فاصله

یکسان (مانند L که $L > \frac{AB}{2}$) باشند به روش زیر رسم می‌شود:

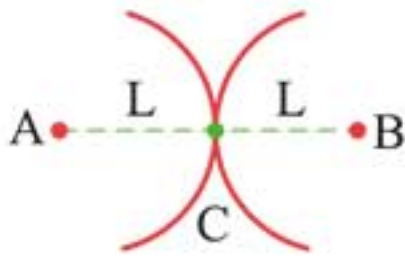
۱ به مرکز نقطه A و به شعاع L کمانی می‌زنیم.

۲ به مرکز نقطه B و به شعاع L کمانی می‌زنیم.

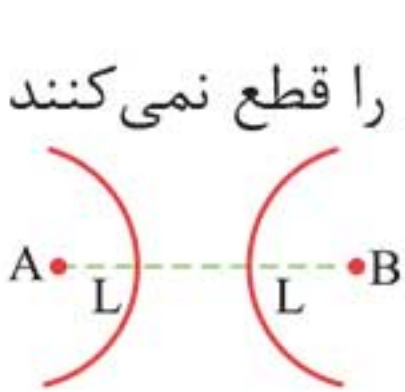


۳ این دو کمان یکدیگر را در دو نقطه E و F قطع می‌کنند که فاصله هر کدام تا A و B برابر L است. بنابراین E و F نقاط مطلوب هستند.

حالت‌های خاص



حالت اول: اگر $L = \frac{AB}{2}$ باشد، محل برخورد دو کمان در یک نقطه است که وسط پاره‌خط AB قرار دارد و مسئله تنها یک جواب دارد.



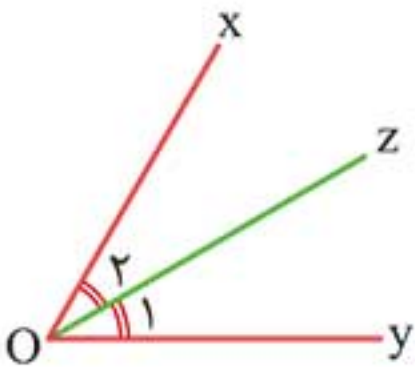
حالت دوم: اگر $L < \frac{AB}{2}$ باشد، دو کمان یکدیگر را قطع نمی‌کنند و مسئله جواب ندارد.

وعدۀ ۲

نیمساز



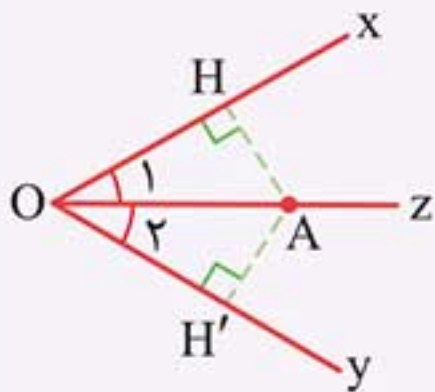
◀ **نیمساز:** نیم‌خطی است که ابتدای آن روی رأس زاویه قرار دارد و زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.



$$Oz \Leftrightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

📌 **اثبات کنید:** هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن

زاویه به یک فاصله است.



نقطه فرضی A را روی نیمساز Oz در نظر بگیرید.

از A خطی عمود بر Ox و خطی عمود بر Oy رسم می‌کنیم:

فرض Oz نیمساز: $AH = AH'$ حکم



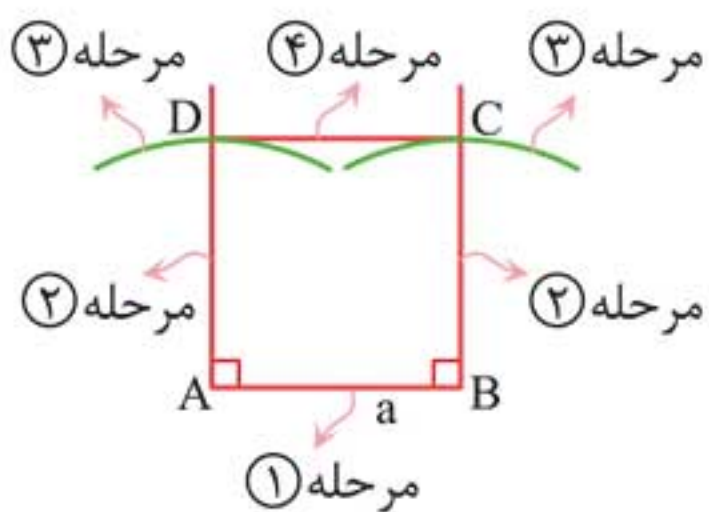
◀ **مربع:** چهارضلعی است که چهار ضلع آن برابرند و حداقل یک زاویه آن قائمه است.

رسم مربع به ضلع مشخص (ضلع a)

۱ پاره خط AB را به طول a رسم می کنیم.

۲ در نقطه A عمودی بر پاره خط AB و هم چنین در نقطه B عمودی

بر پاره AB رسم می کنیم.



۳ به مرکزهای A و B و شعاع a دو کمان می زنیم تا دو خط

عمود بر AB را در دو نقطه مانند C و D قطع کنند.

۴ از C به D وصل می کنیم، $ABCD$ یک مربع است زیرا چهار ضلع آن

برابر و حداقل یک زاویه قائمه دارد.

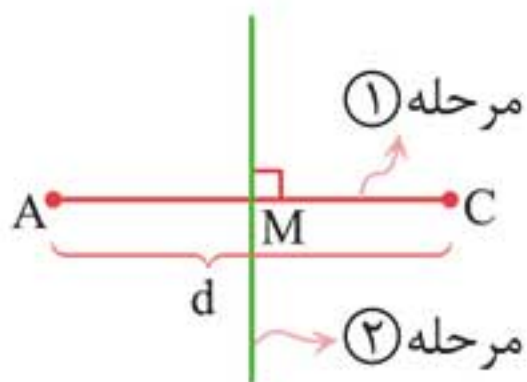
رسم مربع به قطر d

📏 **یادآوری:** مربع چهارضلعی است که قطرهایش عمودمنصف

یکدیگرند و دو قطر با هم برابرند.

فرض کنید می خواهیم مربعی به قطر d رسم کنیم برای این منظور

به روش زیر عمل می کنیم:

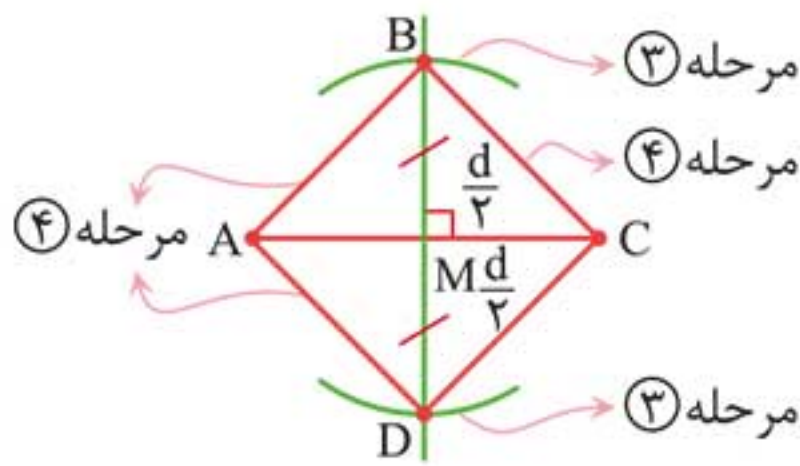


۱ پاره خط AC را به طول d رسم می کنیم.

۲ عمودمنصف پاره خط AC را رسم می کنیم.

۳ به مرکز نقطه وسط پاره خط AC (M) و به شعاع $\frac{d}{2}$ کمانی می‌زنیم تا عمود منصف رسم شده را در دو نقطه B و D قطع کند.

۴ از A به B و D و هم‌چنین از C به B و D وصل می‌کنیم چهار ضلعی $ABCD$ یک مربع است، زیرا قطرهایش عمود منصف یکدیگرند و قطرهای مساوی یکدیگرند.



وعدۀ ۷

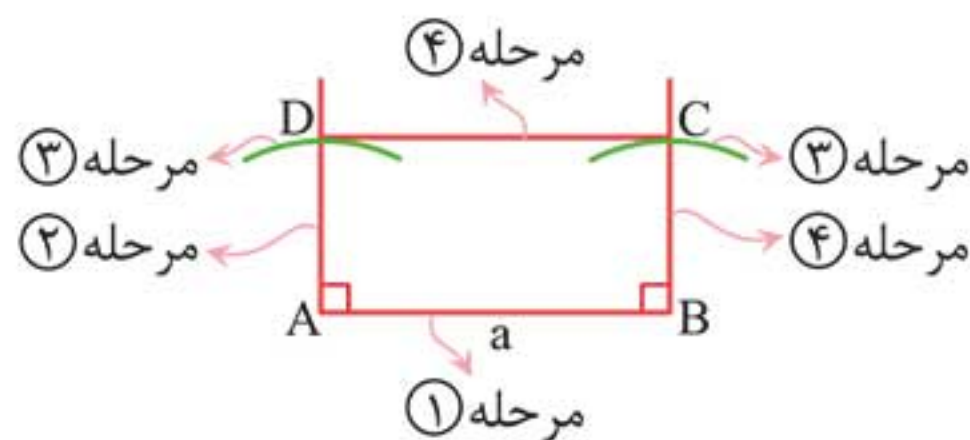
مستطیل



◀ **مستطیل:** چهار ضلعی است که هر چهار زاویه آن قائمه باشند.

رسم مستطیل با اضلاع مشخص (اضلاع a و b)

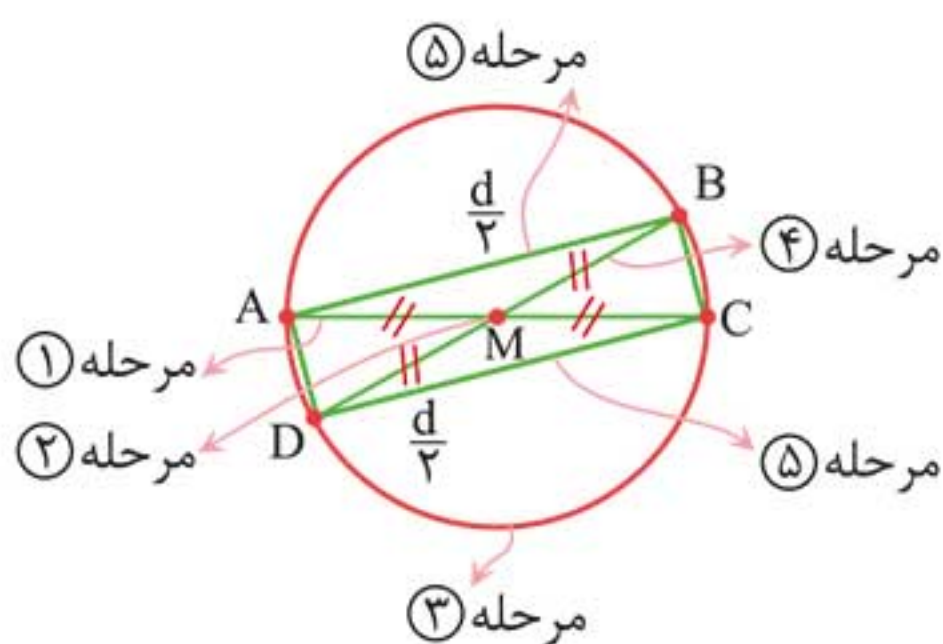
- ۱ پاره خط AB را به طول a رسم می‌کنیم.
- ۲ در نقطه A عمودی بر پاره خط AB و هم‌چنین در نقطه B عمودی بر این پاره خط رسم می‌کنیم.
- ۳ به مراکز A و B و به شعاع b دو کمان می‌زنیم تا دو عمود رسم شده را در دو نقطه C و D قطع کنند.
- ۴ از C به D وصل می‌کنیم چهار ضلعی $ABCD$ یک مستطیل است.



رسم مستطیل به قطر مشخص (قطر d)

یادآوری: مستطیل چهارضلعی است که قطرهایش برابرند و یکدیگر را نصف می‌کنند.

- ۱ پاره‌خط AC به طول d را رسم می‌کنیم.
- ۲ وسط پاره‌خط AC را (به کمک رسم عمودمنصف) می‌یابیم نقطه M می‌نامیم.
- ۳ به مرکز M و به شعاع $\frac{d}{2}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم.
- ۴ یک قطر دلخواه به جز قطر AC از این دایره را رسم می‌کنیم، نقاط تقاطع قطر با دایره را B و D می‌نامیم.
- ۵ از A به B و D و هم‌چنین از C به B و D وصل می‌کنیم.



چاشنی: با توجه به این که قطر BD از مستطیل $ABCD$ می‌تواند هر قطر دلخواهی به جز AC باشد پس مسئله بی‌شمار جواب دارد.

رسم مستطیل با قطر و یک ضلع مشخص (ضلع a و قطر d)

- ۱ پاره‌خط AC به طول d را رسم می‌کنیم.
- ۲ وسط پاره‌خط AC را (به کمک رسم عمودمنصف) می‌یابیم و نقطه M می‌نامیم.

قضیه تالس و کاربردهای آن

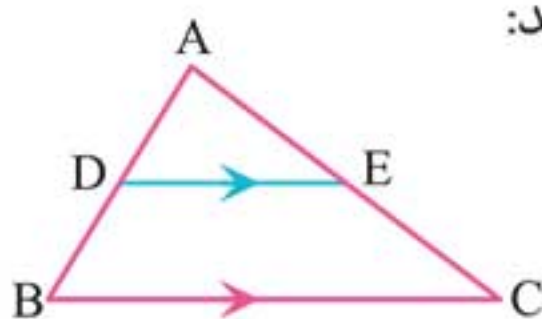
درس ۲

وعدۀ ۴

قضیه تالس



اگر خطی موازی با یک ضلع مثلث، دو ضلع دیگر را قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره خط متناسب تشکیل می‌دهد:

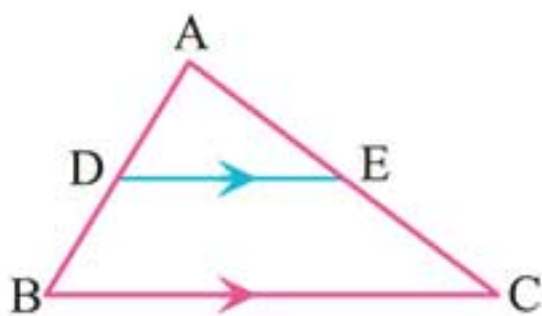


$$DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

به تناسب بالا، تناسب جزء به جزء می‌گوییم.

تعمیم قضیه تالس

اگر خطی دو ضلع مثلث را قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازه ضلع‌های آن با اندازه ضلع‌های مثلث اصلی متناسب است.

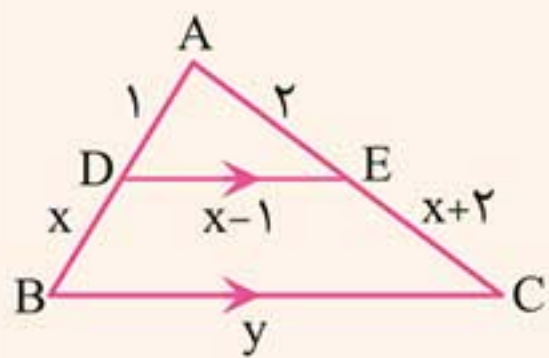


$$DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

به تناسب بالا، تناسب جزء به کل می‌گوییم.

مثال: در شکل زیر اگر دو پاره خط DE و BC موازی باشند،

مقدار x و y را بیابید.



پاسخ با توجه به موازی بودن دو خط DE و BC نسبت جزء به کل را در مثلث می نویسیم:

$$\frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+4} = \frac{x-1}{y} \xrightarrow{\text{I}} x+4 = 2(x+1)$$

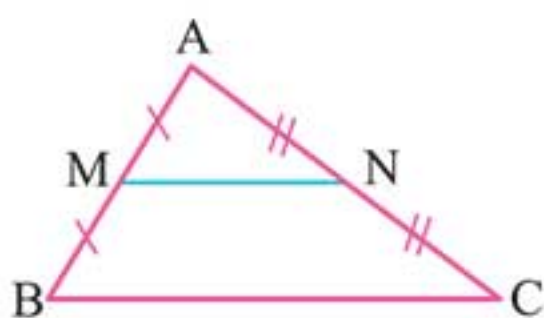
$$\Rightarrow x+4 = 2x+2 \Rightarrow x=2$$

$$\frac{2}{x+4} = \frac{x-1}{y} \xrightarrow{x=2} \frac{2}{6} = \frac{1}{y} \Rightarrow y=3$$

عکس قضیه تالس

اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و بر روی آن دو ضلع چهار پاره خط متناسب پدید آورد، آن گاه موازی با ضلع سوم مثلث است.

حالت خاص قضیه تالس



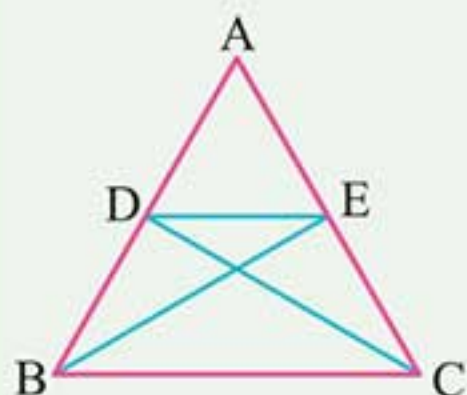
پاره خطی که وسط دو ضلع مثلث را به هم وصل می کند، موازی با ضلع سوم و مساوی با نصف اندازه آن ضلع است.

$$\begin{cases} AM = MB \\ AN = NC \end{cases} \Rightarrow (MN \parallel BC, MN = \frac{1}{2} BC)$$

اثبات کنید: قضیه تالس را اثبات نمایید.

مثلث ABC را در نظر بگیرید که درون آن پاره خط DE موازی ضلع BC رسم شده است از D به C و از E به B وصل می کنیم.

در این حالت خط DE موازی BC و مثلث‌های DAE و DEC در رأس D مشترک‌اند، بنابراین ارتفاع وارد بر قاعده این دو مثلث از رأس D مساوی هم بوده و می‌توان گفت:



$$\frac{S_{\triangle DAE}}{S_{\triangle DEC}} = \frac{AE}{EC} \quad 1$$

هم‌چنین مثلث‌های DAE و DEB در رأس E مشترک هستند پس:

$$\frac{S_{\triangle DAE}}{S_{\triangle DEB}} = \frac{AD}{DB} \quad 2$$

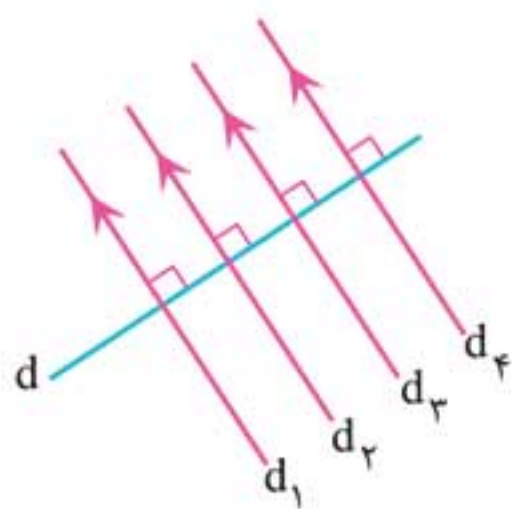
چون مثلث‌های DEC و DEB هم‌مساحت هستند لذا از 1 و 2

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$$

می‌توان نتیجه گرفت:

وعده 5

قضیه خطوط موازی و مورب

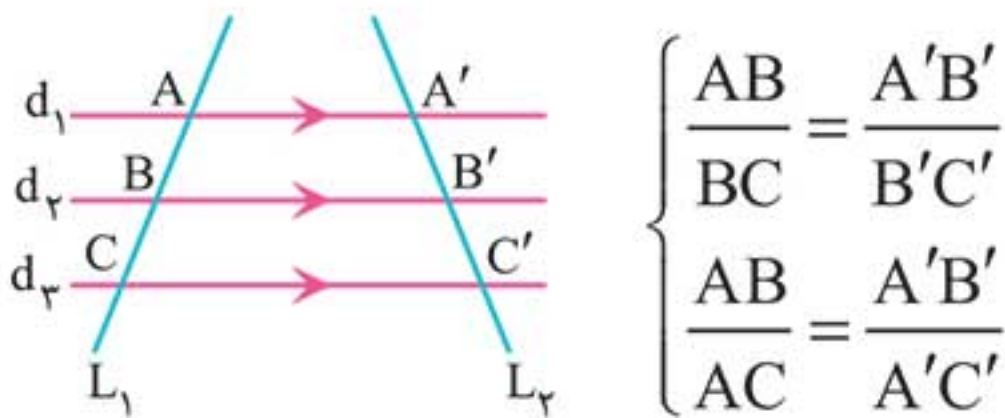


در صفحه هر گاه چند خط بر یک خط عمود باشند آن گاه با هم موازی هستند، برعکس هر گاه از چند خط موازی یکی بر یک خط عمود باشد، آن گاه تمام خط‌های دیگر نیز بر آن خط عمود هستند.

$$\begin{cases} d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \\ d \perp d_1 \end{cases} \Rightarrow d \perp d_2, d \perp d_3, d \perp d_4$$

قضیه اساسی خطوط موازی و مورب

هرگاه دو خط دلخواه L_1 و L_2 بیش از دو خط موازی را قطع کنند بر روی این دو خط پاره‌خط‌های متناسب ایجاد می‌کنند. به عنوان نمونه در شکل زیر d_1 ، d_2 و d_3 موازی و خطوط L_1 و L_2 مورب‌اند.



قضیه تالس در دوزنقه

اگر خطی موازی با دو قاعده دوزنقه، ساق‌های آن را قطع نماید، بر روی ساق‌ها چهار پاره‌خط متناسب پدید می‌آورد و برعکس.

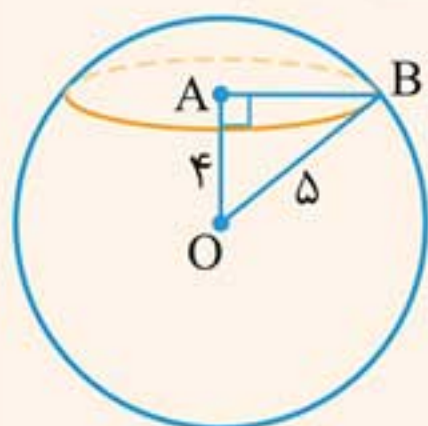


به تناسب بالا، تناسب جزء به جزء گویند. تناسب جزء به کل به صورت زیر است:

$$MN \parallel AB \parallel DC \Leftrightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC}$$

مثال: صفحه P کره‌ای به مرکز O و شعاع 5 سانتی‌متر را قطع کرده است. اگر فاصله O از صفحه 4 سانتی‌متر باشد، مساحت این سطح مقطع را بیابید.

پاسخ: این صفحه کره را در فاصله 4 سانتی‌متری قطع می‌کند، می‌دانیم مقطع حاصل یک دایره است. مطابق شکل داریم:



$$\begin{cases} OA = 4 \text{ cm} \\ OB = 5 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\triangle OAB \text{ قائم‌الزاویه} \Rightarrow AB^2 + OA^2 = OB^2 \Rightarrow AB = 3 \text{ cm}$$

مساحت دایره با شعاع 3 cm برابر است با:

$$S = \pi r^2 = \pi(3)^2 = 9\pi$$

وعدۀ ۱۰

دوران حول محور

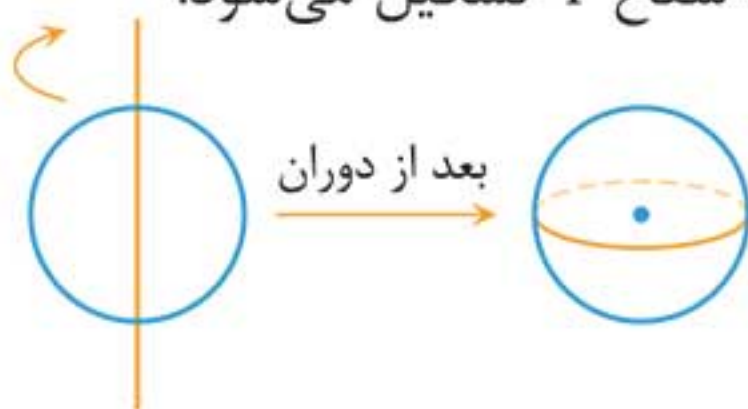


از دوران دادن شکل‌های مختلف هندسی، حول یک محور می‌توان جسم‌های متفاوتی را تصور کرد.

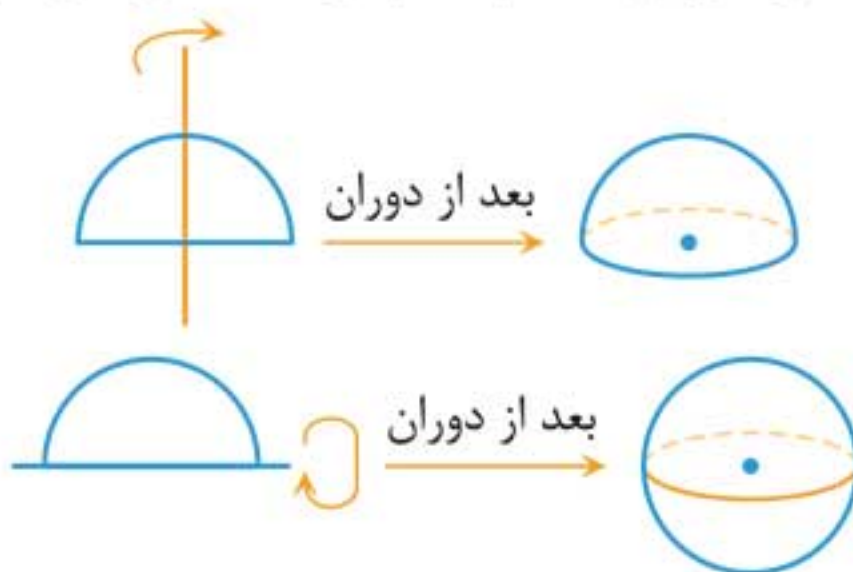
۱ اگر دو پاره خط بر هم عمود باشند و یکی را حول دیگری دوران دهیم، یک دایره تشکیل می شود.



۲ اگر دایره ای به شعاع r را حول یکی از قطرهای آن دوران دهیم، یک کره به شعاع r تشکیل می شود.



۳ اگر نیم دایره ای را حول قطر دوران دهیم، کره و اگر حول شعاع عمود بر قطر دوران دهیم، نیم کره تشکیل می شود.



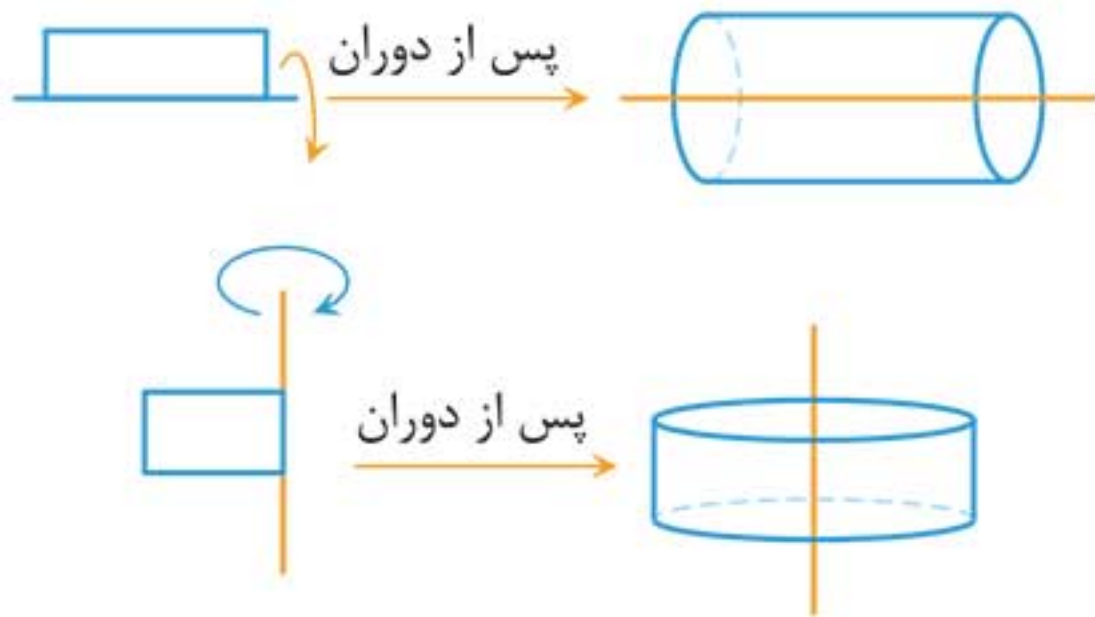
۴ اگر ربع یک دایره را حول شعاع مشخص شده دوران دهیم، یک نیم کره تشکیل می شود.



۵ اگر یکی از دو خط موازی را حول دیگری دوران دهیم، یک استوانه تشکیل می‌گردد.



۶ اگر یک مستطیل را حول طول یا عرض آن دوران دهیم، استوانه تشکیل می‌شود.



۷ اگر یکی از دو پاره‌خط متقاطع را حول دیگری دوران دهیم، دو مخروط تشکیل می‌شود.



پیوست ۱

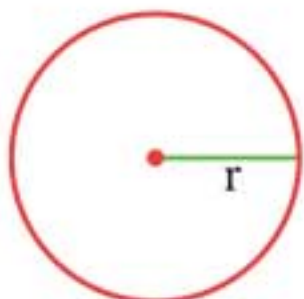
فرمول نامہ



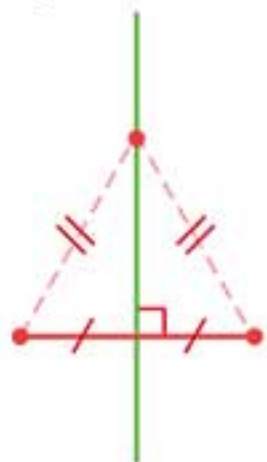
ترسیم‌های هندسی و استدلال

فصل ۱

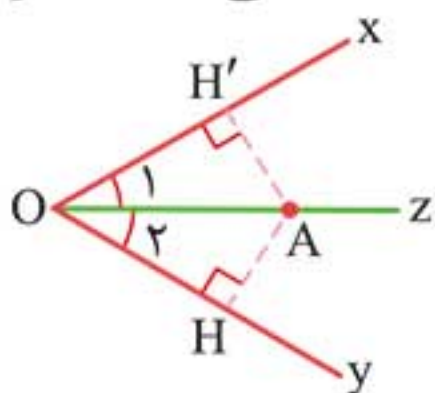
◀ **دایره:** مجموعه نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت (مرکز) به یک فاصله‌ای ثابت (شعاع) قرار دارند.



◀ **عمودمنصف یک پاره‌خط:** خطی که بر یک پاره‌خط عمود باشد و آن را نصف کند. هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و برعکس.



◀ **نیمساز یک زاویه:** نیم‌خطی که زاویه را نصف می‌کند هر نقطه‌ای که روی نیمساز قرار داشته باشد، از دو ضلع آن به یک فاصله است و برعکس.



◀ **شرط وجود مثلث:** سه پاره‌خط a ، b و c می‌توانند اضلاع یک مثلث باشند، هرگاه:

$$\begin{cases} |b - a| < a < b + c \\ |a - c| < b < a + c \\ |a - b| < c < a + b \end{cases}$$

$$\text{۷} \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

$$\text{۸} \quad \frac{a}{d-a} = \frac{c}{d-c}$$

$$\text{۹} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

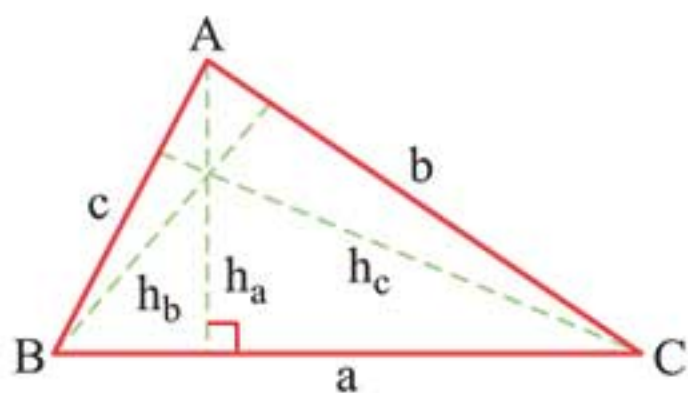
تعمیم ویژگی ۹:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{ka_1 + ka_2 + \dots}{kb_1 + kb_2 + \dots}$$

◀ **واسطه هندسی:** عدد b واسطه هندسی a و c است. اگر و تنها اگر:

$$b^2 = a \cdot c$$

◀ کاربرد نسبت و تناسب در مساحت مثلث‌ها:

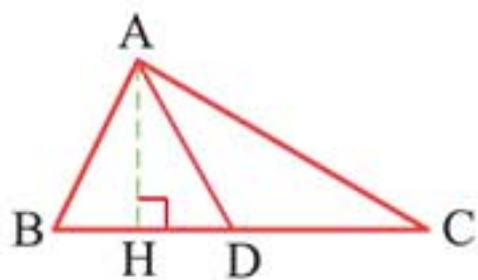


$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

۱ در هر مثلث:

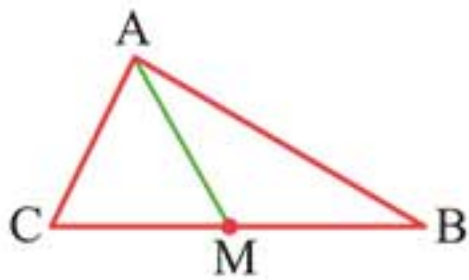
کوتاه‌ترین ارتفاع (نیمساز، میانه) آن است که بر بزرگ‌ترین ضلع وارد می‌شود و بزرگ‌ترین ارتفاع (میانه، نیمساز) آن است که بر کوچک‌ترین ضلع وارد می‌شود.

۲ در شکل زیر می‌توان گفت:



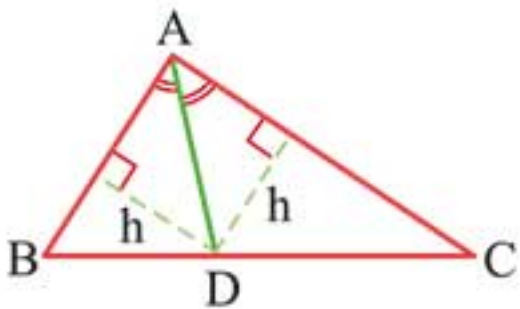
$$AH \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{BD}{DC}$$

۳ میانه هر مثلث آن را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند.

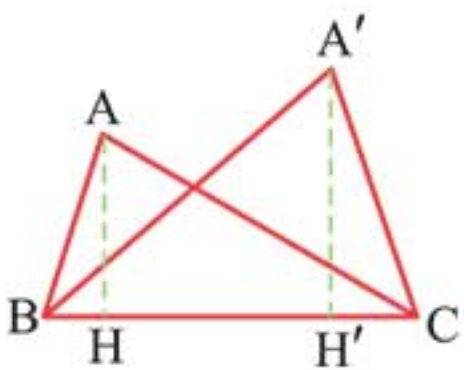


$$AM \Rightarrow S_{AMC} = S_{AMB}$$

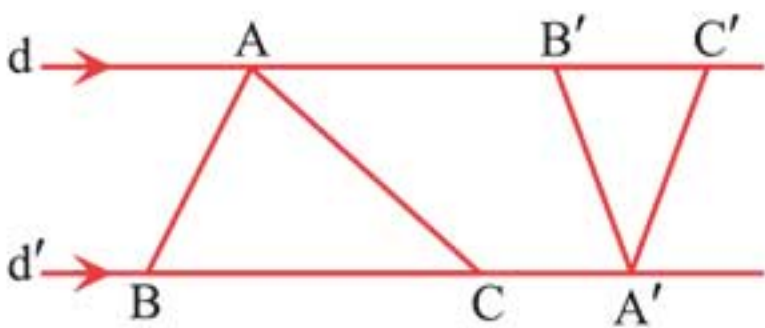
۴ با رسم نیمساز AD داریم:



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{AB}{AC}$$

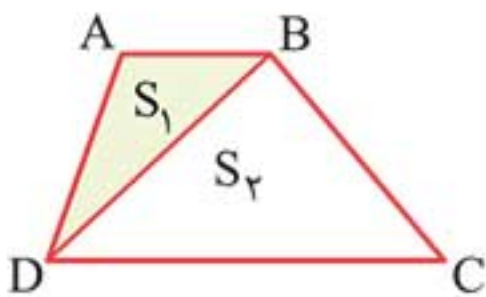


$$BC \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{AH}{A'H'}$$



$$d \parallel d' \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{BC}{B'C'}$$

۷ در هر دوزنقه:



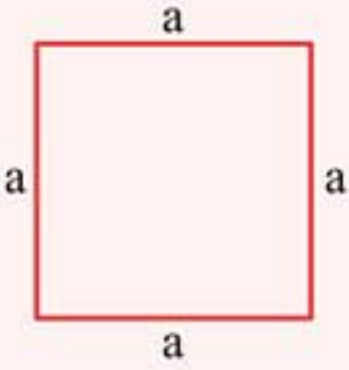
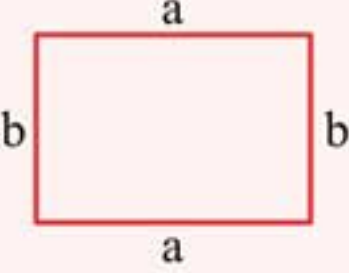
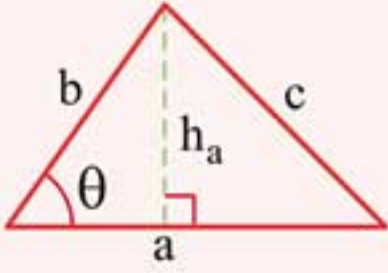
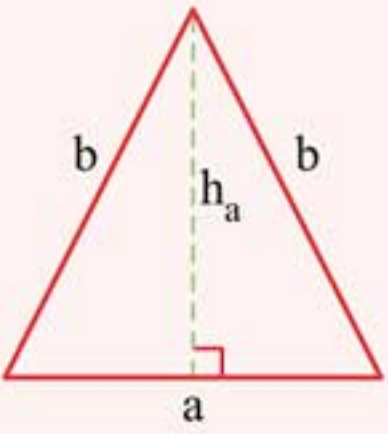
$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{AB}{DC}$$

پیوست ۲

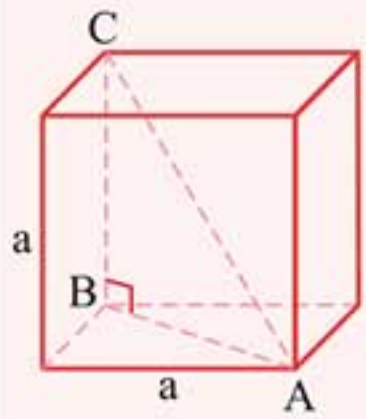
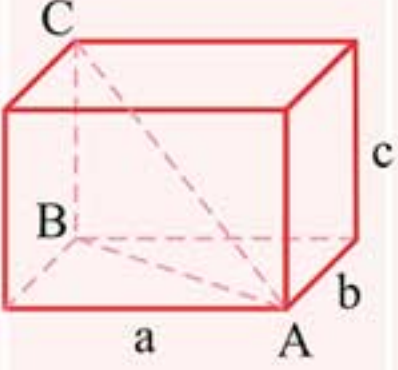
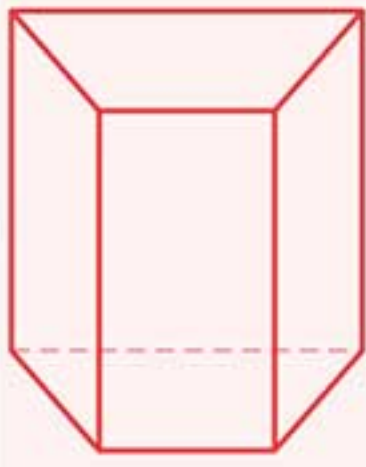
حفظیات



الف شکل‌های دو بُعدی: اگر مساحت آن‌ها را با S و محیط آن‌ها را با P نمایش دهیم داریم:

نام شکل	شکل	محیط $P =$ و مساحت $S =$
مربع		$P = 4a$ $S = a \times a = a^2$
مستطیل		$P = 2(a + b)$ $S = a \cdot b$
مثلث		$P = a + b + c$ $S = \frac{a \cdot h_a}{2}$ $S = \frac{a \cdot b \cdot \sin \theta}{2}$
مثلث متساوی الساقین		$P = a + 2b$ $S = \frac{a \cdot h_a}{2}$

ب شکل‌های سه‌بعدی: اگر مساحت آن‌ها را با S و حجم آن‌ها را با V نمایش دهیم داریم:

روابط	شکل	نام شکل
$AB = a\sqrt{2}$ قطر وجه $AC = a\sqrt{3}$ قطر مکعب $S = 4a^2$ جانبی $S = 6a^2$ کل $V = a^3$		مکعب
$AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ قطر وجه $AC = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ قطر مکعب مستطیل $S = 2(ab + ac + bc)$ کل $V = a \cdot b \cdot c$		مکعب مستطیل
ارتفاع \times مساحت قاعده $V =$ ارتفاع \times محیط قاعده $=$ جانبی S $S = S_{\text{جانبی}} + 2S_{\text{قاعده}}$ کل		منشور (شکل روبه‌رو به عنوان نمونه)