به نام پروردگار مهربان

مهروماه

رشتهٔ ریاضی

کنکور جدید

به همراه سؤالات کنکور ۹۷

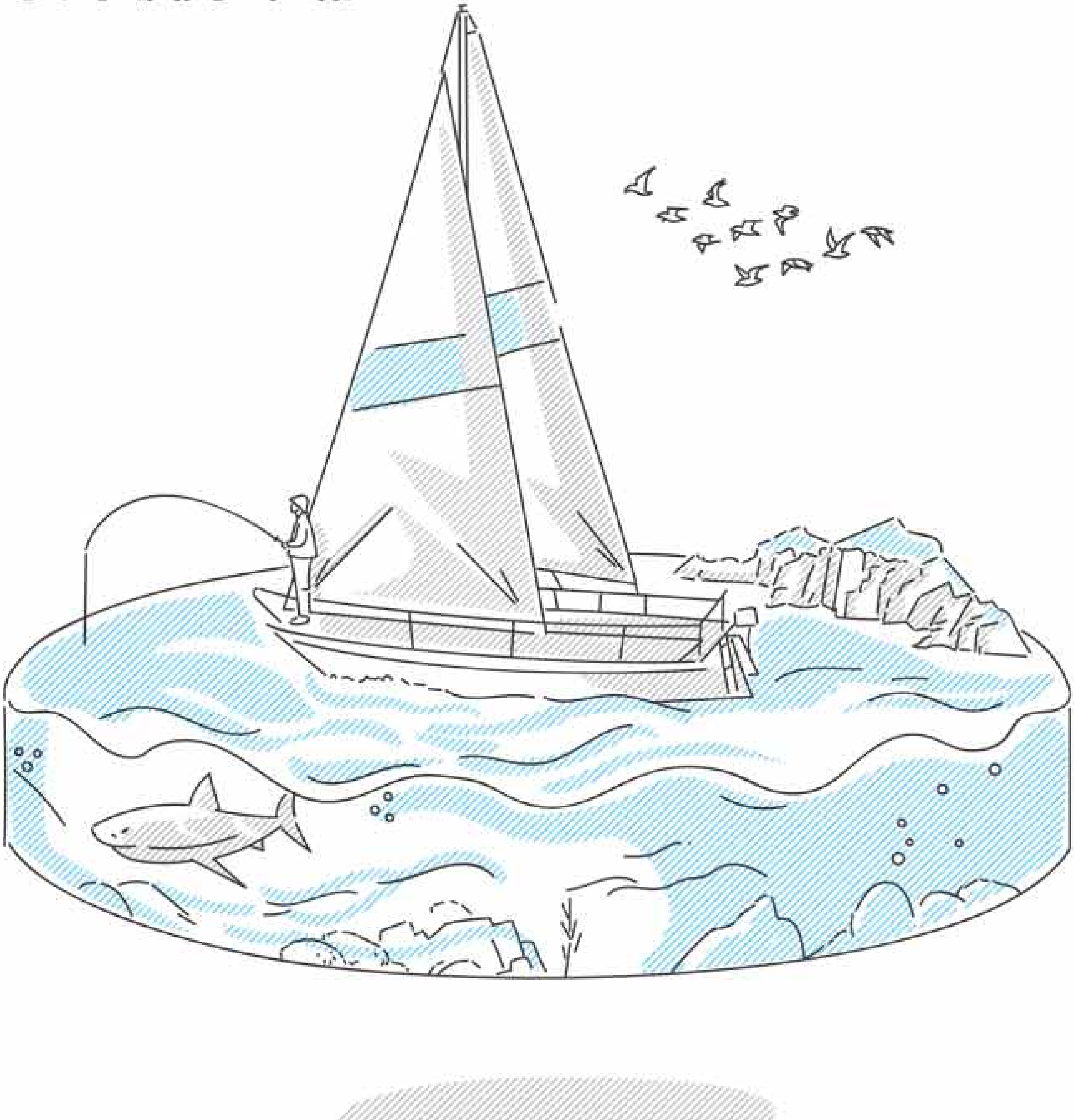
حسابان ۲

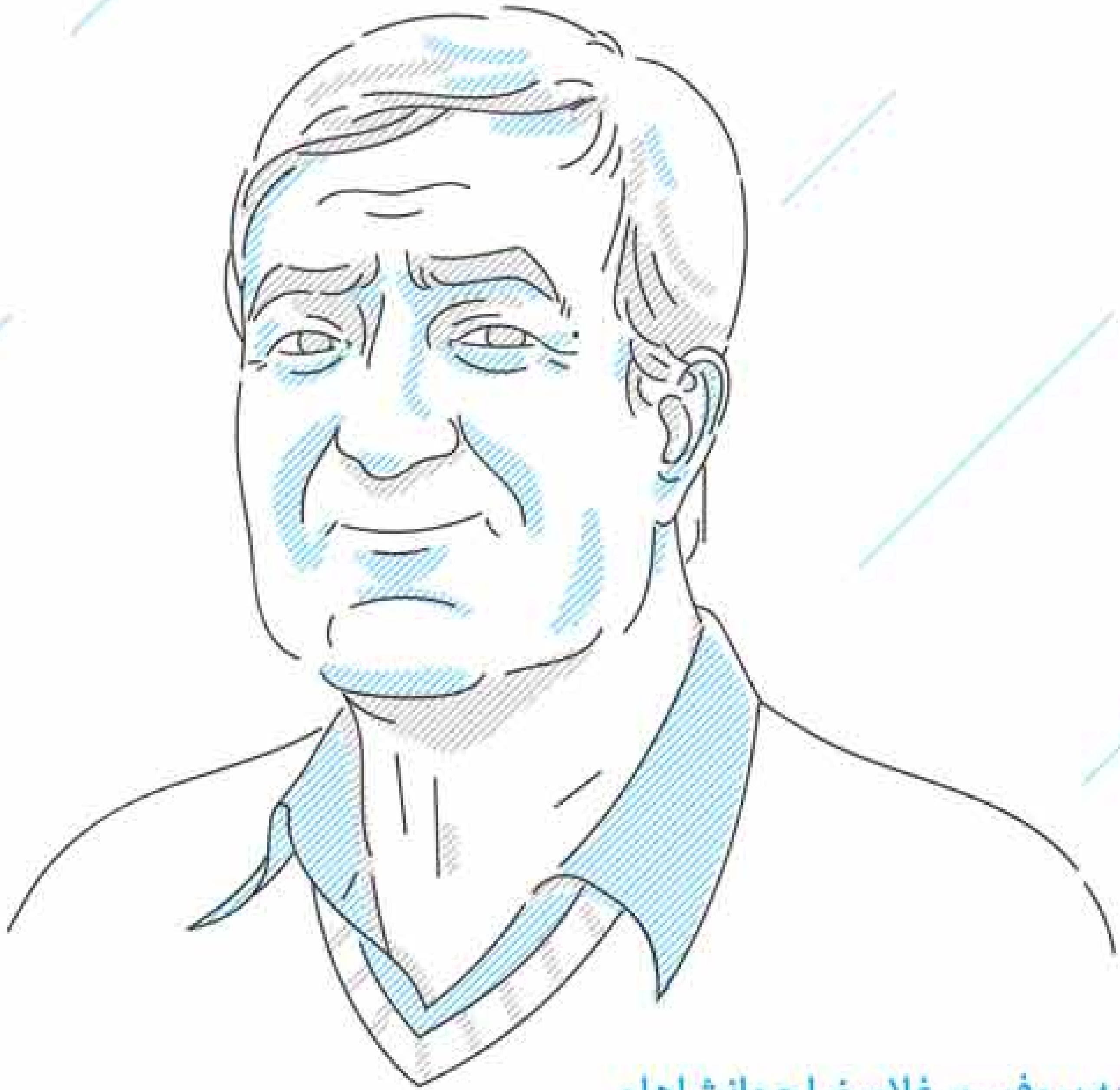
حسابان ۲ پایهٔ دوازدهم

▪ عباس اشرفی ▪ وهاب تقی‌زاده

▪ علیرضا ندافزاده ▪ شروین سیاح‌نیا

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی





تقدیم به پروفسور غلامرضا جهانشاهلو

پروفسـور غلامرضا جهانشـاهلو در روز ۲۷ اسـفند سال ۱۳۲۲ در روسـتای سـمقاور از توابع کمیجان در استان اراک چشـم بـه دنیا گشـود. وی مدرک ششـم ابتدایی خـود را در سـال ۱۳۳۴ گرفت و چون هیچ دبیرسـتانی تا فاصلهٔ صد کیلومتری سـمقاور وجود نداشـت به ناچار ترک تحصیل کرد و به مدت سه سال به همراه پدرش به کار کشـاورزی پرداخت. در سـال ۱۳۴۳ به عنوان فارغ‌التحصیل ممتاز از دبیرسـتانی در شهر اراک دیپلم ریاضی خود را اخذ نمود. سـپس برای تحصیل در مقطع کارشناسـی رشـتهٔ ریاضی فیزیک به دانشگاه فردوسی مشهد رفت و پس از اخذ مدرک کارشناسـی در مؤسسـهٔ ریاضیات که توسـط «پروفسور مصاحب» تأسیس شده بود، پذیرفته شـد. مؤسسـهٔ ریاضیات اولین مرکز دانشگاهی در ایران اسـت که به منظور تربیت مدرسین دانشگاه تأسـیس شـده بود استاد جهانشاهلو دورهٔ ۲۷ ماههٔ بسیار سنگین مؤسسـهٔ ریاضیات را در تابستان ۱۳۴۸ به پایان رسـانده و به عنوان فارغ‌التحصیل ممتاز در دانشسـرای عالی (دانشـگاه خوارزمی کنونی) استخدام شد و به شـغل مقدس معلمی در دانشـگاه مشغول شد. ایشـان در سـال ۱۳۵۱ برای ادامهٔ تحصیل عازم انگلستان شـد، ابتدا مدرک کارشناسـی ارشـد دیگری در رشـتهٔ تحقیق در عملیات از دانشـگاه سـاوت‌همپتون دریافت نمود، سـپس برای دورهٔ دکتری در زمینهٔ الگوریتم‌های مدل‌های تحقیق در عملیات به دانشـگاه برونل رفت و در اردیبهشـت سال ۱۳۵۵ از رسـالهٔ خود دفاع کرد و به ایران بازگشت. وی در سال ۱۳۷۶ به مرتبهٔ استاد تمامی ارتقاء یافت و تا آخر عمر مفیدش به تدریس در مقاطع کارشناسی ارشد و دکتری و تألیف مقاله و کتاب پرداخت؛ ماحصـل زندگـی وی چاپ بیسـت و دو جلد کتاب و چاپ بیـش از ۲۶۰ مقاله در مجلات معتبـر بین‌المللی و نیز راهنمایی بیش از ۱۱۰ دانشـجوی دکتری و بیش از ۳۰۰ دانشـجوی کارشناسـی ارشـد و بیش از هزار دبیر ریاضی اسـت. او با مقام «پدر علم تحلیل پوششـی داده‌های ایران» همچون پدری دلسـوز در تمام عرصه‌های زندگی و کار دانشجویان خویش را همراهی می‌کرد و تأثیر ایشان تا ابد در پیشرفت علم تحقیق در عملیات باقی خواهد ماند و روشـنگر راه کسـانی است که او را سرمشق و الگوی خود در زندگی و کار خود قرار می‌دهند. ایشان در روز ۱۶ فروردین سال ۱۳۹۶ دار فانی را وداع گفتند.

مقدمه

بالاخره کنکوری شدی!

این کتاب مهم‌ترین کتاب رشتهٔ ریاضی مهروماه، بانک تست حسابان ۲ مربوط به سال دوازدهمه!

به همین دلیل خیلی !!! براش وقت گذاشتیم.

تا کتاب درسی اومد من و سه استاد همکارم، شبانه‌روزی وقت گذاشتیم تا این کتاب داغ، داغ و تنوری به دستت برسه! باور کنید برنامه‌های زندگی هر چهار نفرمون به هم ریخت آقای تقی‌زاده برنامهٔ سفر کاریش رو با کلی زحمت جابه‌جا کرد، آقای نداف‌زاده کل برنامه‌های تابستونش رو کنسل کرد، آقای سیاح‌نیا کار ضبط برنامه‌های آموزشی خودش رو کنار گذاشت و من در مهر و ماه تحت شرایط امنیتی قرنطینه شدم! تا تألیف این کتاب خوب و زود پیش بره.

سعی کردیم درسنامه‌هامون کاملاً جدید و پرمحتوا باشه و مطالبی رو که توی کتاب بانک تست ریاضیات پایه (دهم و یازدهم) آوردیم تکرار نکنیم و الکی کتاب رو حجیم نکنیم.

روی مبحث‌هایی مثل چند جمله‌ای‌های درجه سه، نمودار تانژانت، دورهٔ تناوب مثلثاتی، تعریف یکنوایی، تحلیل مشتق از روی نمودار تابع و ... که به روش جدیدی مطرح شدن یا توی کتاب درسی برجسته شدن خیلی بیشتر وقت گذاشتیم و کلی تست درآوردیم. چون تو کنکور تستی ازشون نیومده بود.

تو سه فصل آخر هم کمی سعی کردیم نوع درسنامه‌هامون به متون دانشگاهی نزدیک‌تر باشه، آخه به سلامتی سال دیگه این موقع دانشجویی!

خلاصه روی بند، بند جمله‌ها و تست‌های کتاب وقت گذاشتیم. شاید باورتون نشه ولی برای درک مفاهیم کتاب کلی جلسه با مؤلف‌های محترم کتاب درسی داشتیم خلاصه قدر این کتاب رو بدونید.

حالا بذار بگم ما در درس شیرین ریاضی براتون چیکار کردیم.

هر فصل رو به سه قسمت تقسیم کردیم:

قسمت اول: درسنامه

- توی این قسمت یه درسنامهٔ مفصل آوردیم که تمام مباحث رو مو به مو بهت یاد میده که پر از مثال‌ها و تست‌های آموزشی دوست داشتنیه؛ خلاصه این قسمت گُل کتابه.

توی حل تست‌های آموزشی یه روش تکنیکی برات آوردیم که مطمئنم جایی ندیدی!

مُهم یه جاهایی که مهم بوده و باید حفظ باشی رو برات مهر مهم زدیم تا بیشتر وقت بذاری.

هر جا دیدیم بیشتر بچه‌ها راه‌حل رو اشتباه میرن برات هشدار گذاشتیم.

اون جاهایی هم که دیدیم درس سنگین شده و فقط به درد بچه‌های قوی می‌خوره یک‌گام فراتر گذاشتیم.

از همه مهم‌تر!!! یه راه‌حل‌هایی رو استفاده کردیم که اصلاً نیاز به فرمول نداره، اسمش رو گذاشتیم فرمول ممنوع، این دیگه آخرشه، بدون این‌که تست رو حل کنی، جواب رو پیدا می‌کنی.

نکته، دقت کنید و تذکر هم که جای خودشون رو دارن.

قسمت دوم: پرسش‌های چهارگزینه‌ای

■ یه سری تست که توسط باتجربه‌ترین معلم‌ها و مؤلف‌ها دست‌چین شدن که هر کدوم از این مؤلف‌ها، یه وزنه‌ای هستن تو ریاضی!

استاد نداف‌زاده مدرس دبیرستان‌های علامه حلی تهران و استاد تقی‌زاده مدرس دبیرستان ماندگار البرز تهران؛ استاد سیاح‌نیا که علی‌رغم جوان بودن تجربه‌های بسیار درخشانی در تولید محتوای آموزشی مثل آفبا، دیسون و ... دارن. وقت گرفتن ازشون خیلی سخت بود ولی خوشبختانه جور شد.

راستی یه سری از تست‌های کنکور سراسری هم که پای ثابت این بخش هستن رو برات تو این قسمت آوردیم.

تا یادم نرفته بگم، تک‌تک تمرین‌ها، فعالیت‌ها، مثال‌ها و ... کتاب رو خوندیم و به تست تبدیلشون کردیم تا چیزی از دستمون در نره!

یه سری هم تست‌هایی اومده به نام برای ۱۰۰٪ واسه اونایی که می‌خوان ۱۰۰٪ بزنن و برای همه لازم نیست.

و در آخر ۱ و یا ۲ آزمون گذاشتیم تا ببینیم چند مرده حلاجی

قسمت سوم: پاسخنامهٔ تشریحی

■ خیلی از تست‌ها رو با دو روش و حتی بعضی جاها تا سه روش هم حل کردیم که مطمئنم تا حالا این روش‌ها و مسائل یک‌جا توی هیچ کتاب دیگه‌ای به‌کار نرفتن.

به همهٔ همکارها توصیه کردم تا اون‌جا که میشه فارسی‌نویسی کنن چون همهٔ اساتید ریاضی دوست دارن فقط از علائم ریاضی در حل مسائل استفاده کنن و شاید این‌طوری کسی که داره پاسخ رو می‌خونه چیزی متوجه نشه.

تو پاسخ‌هامون استراتژی حل داریم تا بفهمی مرحله به مرحله چیکار داریم می‌کنیم و در آخر هر چیزی که مهم بوده رو با راهبرد مشخص کردیم تا بیشتر به این قسمت‌ها اهمیت بدی.

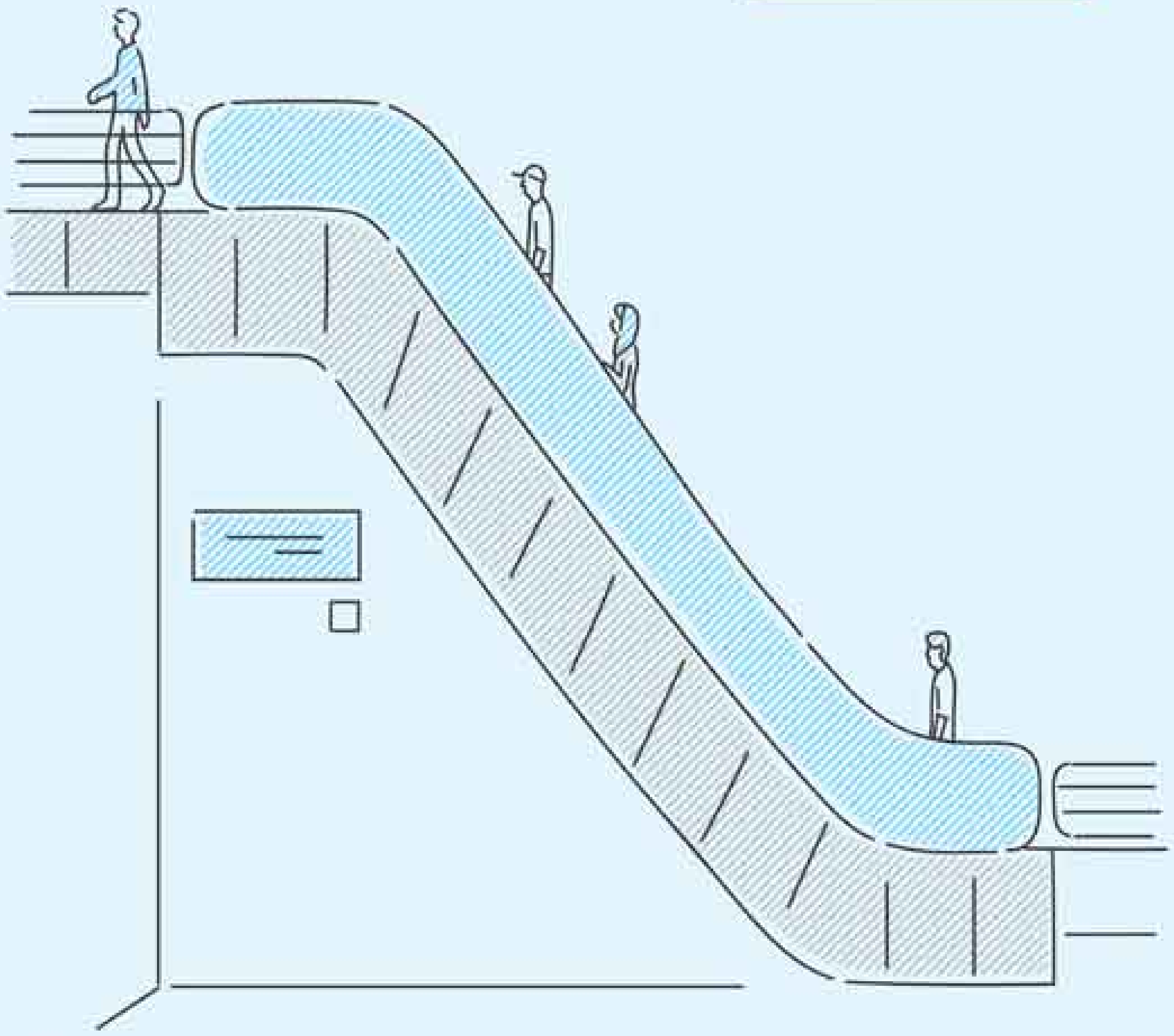
توی تهیهٔ این کتاب خیلی‌ها تأثیرگذار بودن، از جمله:

- آقای احمد اختیاری مدیر انتشارات که واقعاً مثل یک کاپیتان، کشتی بزرگ مهروماه رو هدایت می‌کنن.
- استاد محمدحسین انوشه مدیر شورای تألیف که راهنمایی‌ها و مشاوره‌هاشون بسیار مفید بود.
- سرکار خانم حجازیان و آقایان رامین احمدیان، محمد اسدالهی، علیرضا بحری، سیدمحسن جلال‌زاده، علی‌حق‌شناس، امین خانی، امیر سمیعیان، مسعود عظیمی، بهنام قدردوست، حسن محمدی، احمد میربلند و احمد میری از مشاوران به‌نام و کاربلد عرصهٔ کنکور که خیلی قوی در شیوهٔ ارائهٔ مطلب راهنماییمون کردن.
- از خانم سنور حریری مسئول ویراستاری، خانم‌ها دنیا سلیمی و ندا دهقانی و آقایان حامد شفیعی و احسان لعل که اگه نبودن چاپ کتاب شاید تا سه سال دیگه هم طول می‌کشید.
- از گروه هنری خلاق و دوست‌داشتنی انتشارات خانم الهام اسلامی و آقایان حسین شیرمحمدی، حسام طلایی و محسن فرهادی که با طراحی‌های زیباشون روح تازه‌ای به کتاب بخشیدند.
- از آقای امیر انوشه مدیر سایت، خانم فرزانه قنبری مدیر روابط عمومی، خانم الهام پیلوایه مدیر فنی و خانم مریم تاجداری صفحه‌آرای کتاب خیلی ممنونم.
- از رسام محترم مرتضی ضیایی و حروفچین‌های محترم آقای امیر ماهر و خانم ربابه موسوی کمال تشکر رو دارم.

عباس اشرفی

فهرست

فصل ۱



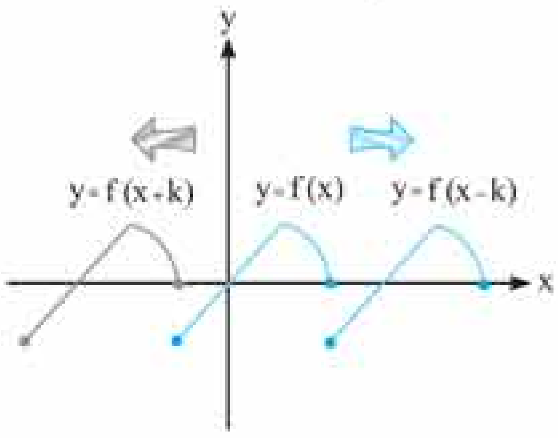
تابع

در این فصل تتمهٔ تابع مانند انقباض‌های افقی و عمودی، چندجمله‌ای‌ها، رسم نمودار تابع درجهٔ سه و بخش‌پذیری گنجانده شده است.
معمولاً در بودجه‌بندی کنکورهای قدیم فقط از قسمت بخش‌پذیری و باقی‌مانده تست طرح شده است.
آموزش رسم تابع درجهٔ سه به شیوهٔ جدیدی در کتاب درسی جدیدالتألیف آورده شده است و مؤلفان ما سعی نموده‌اند با تست‌سازی مناسب آن را پوشش دهند.

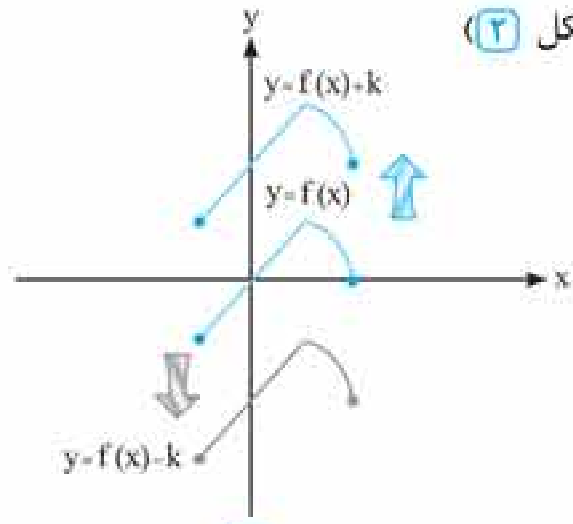
تبدیل نمودار تابع

انتقال‌های عمودی و افقی

در سال‌های گذشته آموختید که برای رسم نمودارهای $y=f(x+k)$ و $y=f(x-k)$ با شرط $k>0$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ باید نمودار را به ترتیب k واحد به سمت چپ و k واحد به سمت راست انتقال دهیم. (شکل ۱)
همچنین برای رسم نمودارهای $y=f(x)+k$ و $y=f(x)-k$ با شرط $k>0$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ باید نمودار را به ترتیب k واحد به بالا و k واحد به پایین انتقال دهیم. (شکل ۲)

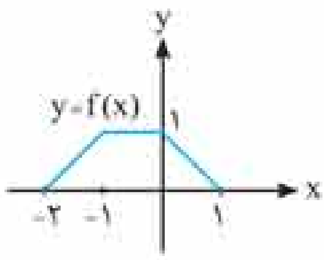


۱

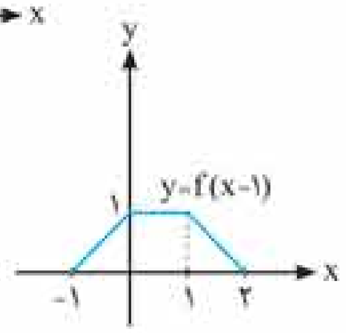


۲

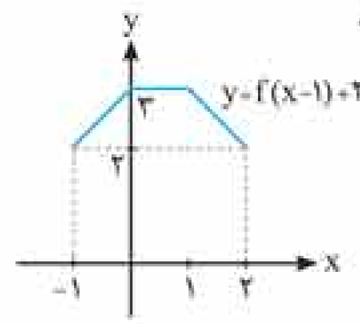
مثال: اگر نمودار $y=f(x)$ به‌صورت مقابل باشد، نمودار $y=f(x-1)+2$ را رسم کنید.



پاسخ: برای رسم نمودار تابع $y=f(x-1)$، نمودار تابع $f(x)$ را یک واحد به راست منتقل می‌کنیم، سپس نمودار به‌دست آمده را دو واحد به بالا انتقال می‌دهیم.



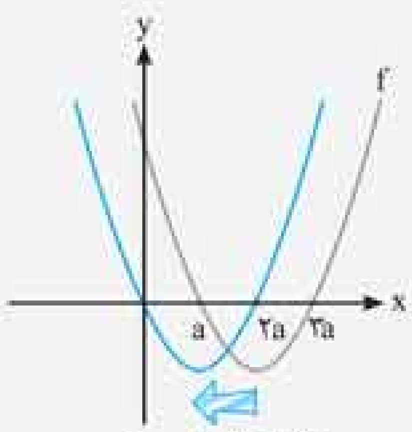
$\Rightarrow$



تست: نمودار تابع درجه دوم $f(x)=x^2-4ax+3a^2$ را به اندازهٔ k واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم. حداکثر مقدار k کدام باشد تا نمودار از ربع سوم عبور نکند؟ $(a,k>0)$

۱) $\frac{a}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}a$ ۳) a ۴) $\frac{5}{4}a$

پاسخ: گزینه ۳ روش اول $f(x)=x^2-4ax+3a^2=x^2-(a+3a)x+a\times 3a=(x-a)(x-3a)$
نمودار سهمی را رسم می‌کنیم که دهانهٔ آن روبه‌بالاست و صفرهای (ریشه‌های) آن $x=a$ و $x=3a$ است.
برای آن‌که نمودار از ربع سوم عبور نکند، منحنی تا حدی می‌تواند به چپ منتقل شود که نقطهٔ $x=a$ روی تابع $f(x)$ به مبدأ منتقل شود، یعنی:



به اندازهٔ a به سمت چپ منتقل شده است.

روش دوم ضابطهٔ تابعی که k واحد به سمت چپ انتقال‌یافته به صورت زیر است:

$$f(x+k)=(x+k)^2-4a(x+k)+3a^2 \Rightarrow f(x+k)=x^2+2kx+k^2-4ax-4ak+3a^2$$
$$\Rightarrow f(x+k)=x^2+(2k-4a)x+k^2-4ak+3a^2$$

برای آن‌که نمودار یک سهمی از ربع سوم عبور نکند باید یکی از حالت‌های زیر اتفاق بیافتد:

۱) $\Delta<0$ و $0<$ ضریب x^2 ۲) $\Delta\geq 0$ و عرض از مبدأ و طول رأس سهمی نامنفی باشند.

پس دلتای مربوط به معادله را محاسبه می‌کنیم: $f(x+k)=x^2+(2k-4a)x+k^2-4ak+3a^2$

$$\Delta=(2k-4a)^2-4(1)(k^2-4ak+3a^2)=4k^2+16a^2-16ak-4k^2+16ak-12a^2=4a^2>0$$

پس با توجه به حالت (۲) باید عرض از مبدأ و طول رأس سهمی نامنفی باشد.

$$k^2 - 4ak + 3a^2 \geq 0 \Rightarrow (k-3a)(k-a) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} k \leq a \\ k \geq 3a \end{cases}$$: عرض از مبدأ

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(2k-4a)}{2} = -k + 2a > 0 \Rightarrow k < 2a$$: طول رأس سهمی

اشتراک جواب‌های به‌دست آمده برابر $k \leq a$ است، یعنی حداکثر k برابر a است.

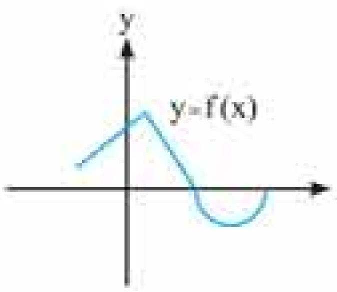
انبساط و انقباض عمودی

برای رسم نمودار $y = kf(x)$، کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در k ضرب کنیم.

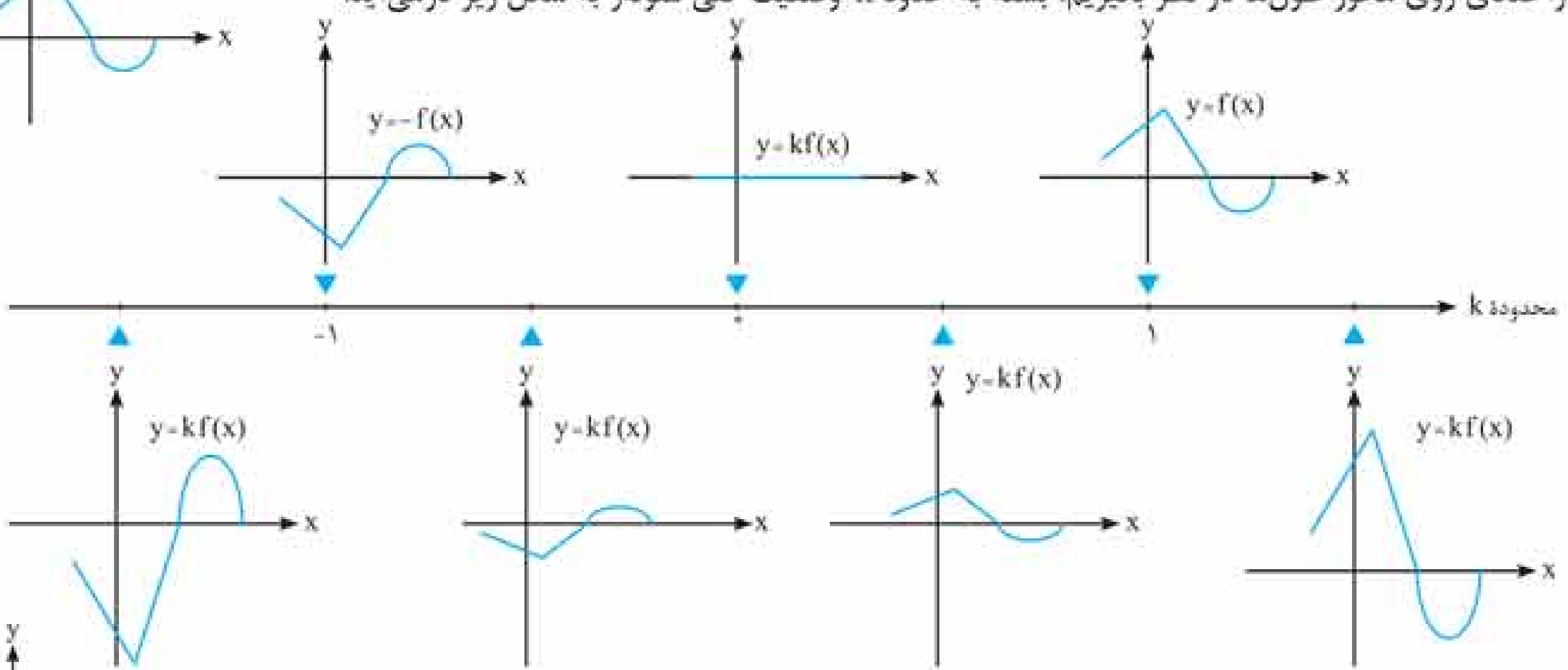
- اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از **انبساط عمودی** نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود.
- اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از **انقباض عمودی** نمودار $y = f(x)$ به دست می‌آید.
- اگر k عددی **منفی** باشد، ابتدا نمودار تابع را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم، سپس با محاسبهٔ مقدار $|k|$، اگر $|k| > 1$ باشد، نمودار دچار انبساط عمودی و اگر $0 < |k| < 1$ باشد، نمودار دچار انقباض عمودی می‌شود.

در حالت $k = -1$ نمودار فقط نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌شود.

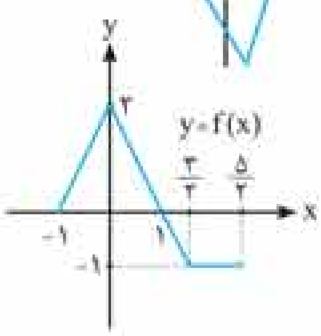
فرض کنید نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت مقابل باشد.



اگر k را عددی روی محور طول‌ها در نظر بگیریم، بسته به حدود k وضعیت کلی نمودار به شکل زیر درمی‌آید:



مثال: با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$، نمودار تابع $y = -\frac{1}{2}f(x)$ را رسم کنید.



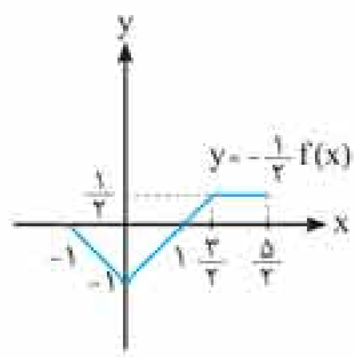
پاسخ: نقطه‌های مهم تابع را می‌نویسیم و عرض‌های نقاط آن را در $-\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم:

x	$f(x)$
-1	0
0	2
1	0
$\frac{3}{2}$	-1
$\frac{5}{2}$	-1

$\Rightarrow$

x	$-\frac{1}{2}f(x)$
-1	0
0	-1
1	0
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$

به کمک نقطه‌های به‌دست آمده نمودار را رسم می‌کنیم →



دامنهٔ تابع $y = kf(x)$ همان دامنهٔ تابع $f(x)$ است ولی برد تابع $y = kf(x)$، k برابر برد تابع $f(x)$ است. $(k \neq 0, 1)$

تست: اگر برد تابع $y = f(x)$ بازهٔ $(-2, 3]$ باشد، برد تابع $y = -2f(x) + 1$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

پاسخ: (گزینه۳) برد تابع $f(x)$ بازهٔ $(-2, 3]$ است:

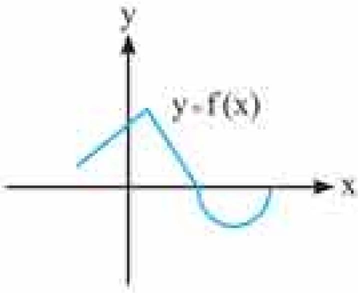
$$-2 < f(x) \leq 3 \xrightarrow{\times(-2)} 4 > -2f(x) \geq -6 \xrightarrow{+1} 5 > -2f(x) + 1 \geq -5$$

پس برد تابع $y = -2f(x) + 1$ بازهٔ $[-5, 5)$ است و در این بازه ۱۰ عدد صحیح وجود دارد.

انبساط و انقباض افقی

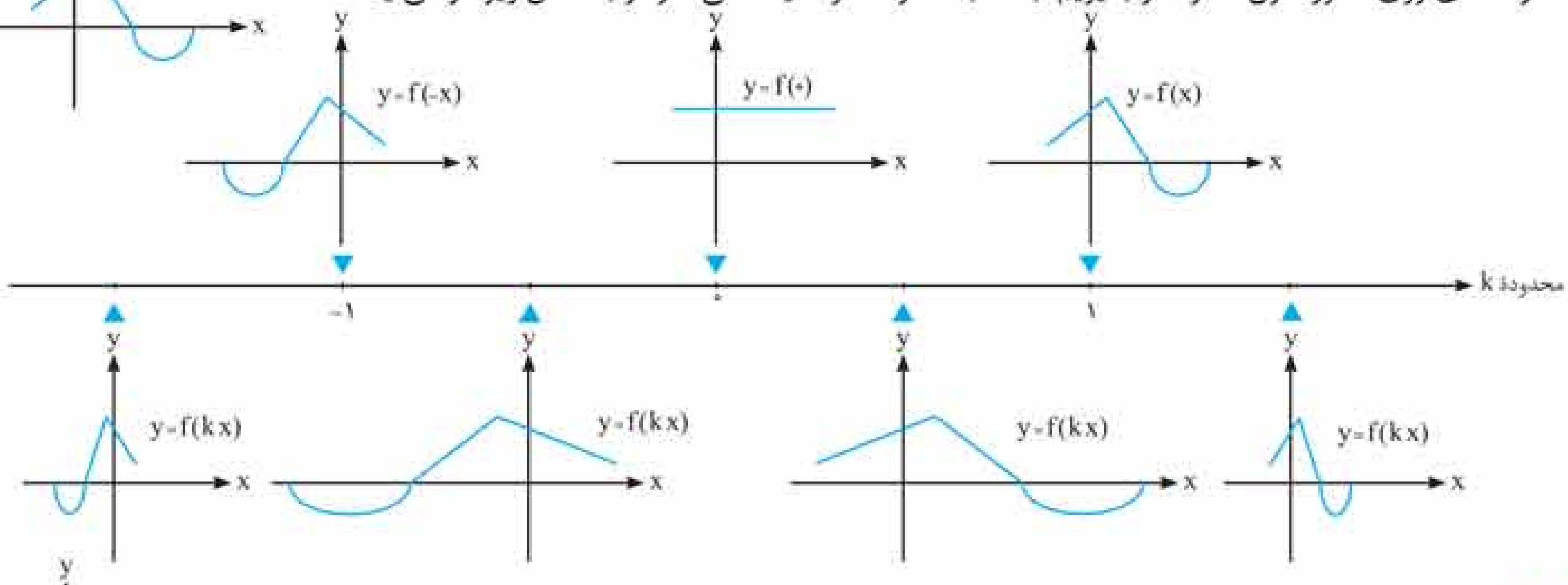
برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{k}(k\neq ۰)$ ضرب کنیم.

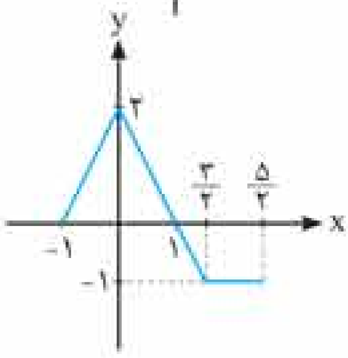
- اگر $k>۱$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از **انقباض افقی** نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به‌دست می‌آید.
- اگر $۰<k<۱$ باشد، این نمودار از **انبساط افقی** نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود.
- اگر k عددی **منفی** باشد، ابتدا نمودار تابع را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم، سپس با محاسبهٔ مقدار $|k|$، اگر $|k|>۱$ باشد، نمودار در راستای محور xها منقبض و اگر $۰<|k|<۱$ باشد، نمودار در راستای محور xها منبسط می‌شود.



فرض کنید نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل باشد.

اگر k را عددی روی محور طول‌ها در نظر بگیریم، بسته به حدود k وضعیت کلی نمودار به شکل زیر در می‌آید.





مثال: با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار تابع $y=f(-\frac{x}{۲})$ را رسم کنید.

پاسخ: نقطه‌های مهم تابع را می‌نویسیم و طول‌های آن‌ها را در $\frac{۱}{-\frac{۱}{۲}}$ ضرب می‌کنیم:

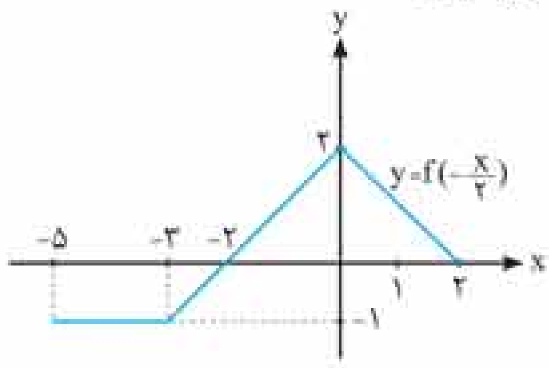
(در واقع در -۲ ضرب می‌کنیم.)

x	$f(x)$
-۱	۰
۰	۲
۱	۰
$\frac{۳}{۲}$	-۱
$\frac{۵}{۲}$	-۱

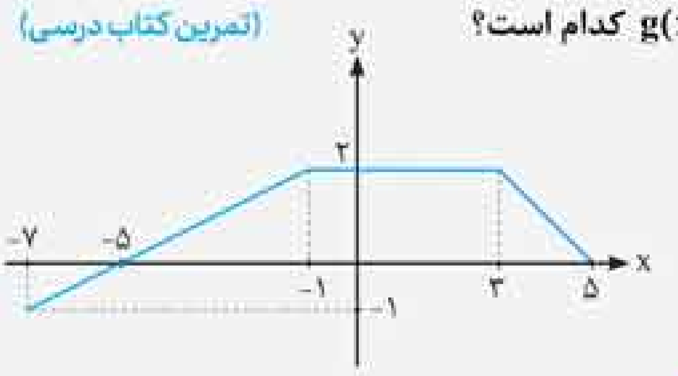
$\Rightarrow$

x	$f(-\frac{x}{۲})$
۲	۰
۰	۲
-۲	۰
-۳	-۱
-۵	-۱

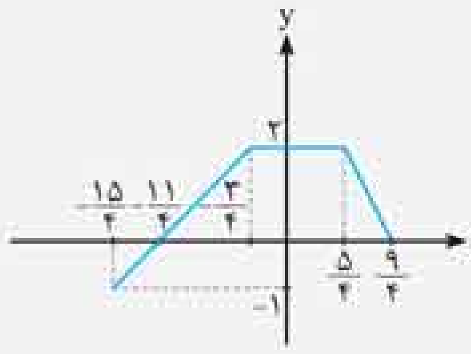
به کمک نقطه‌های به‌دست آمده نمودار را رسم می‌کنیم. $\longrightarrow$



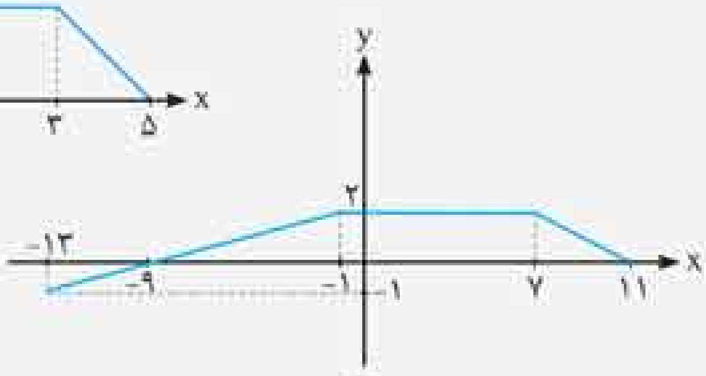
تست: اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت شکل زیر باشد، نمودار تابع $g(x)=f(۲x+۱)$ کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)



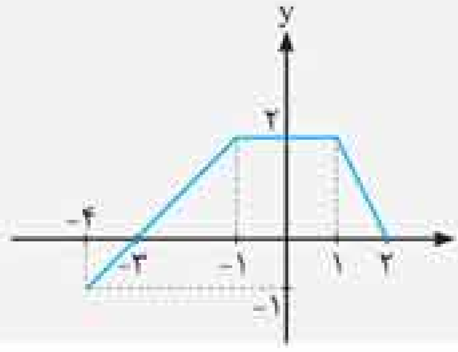
۱)



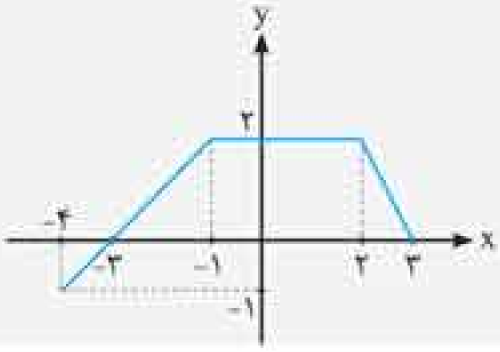
۲)



۳)



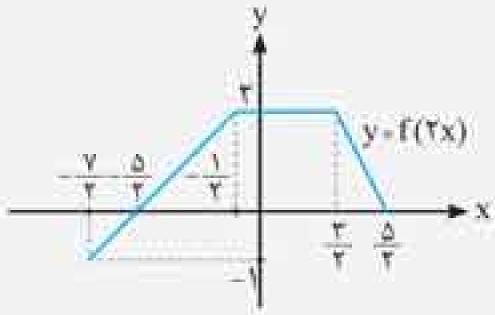
۴)



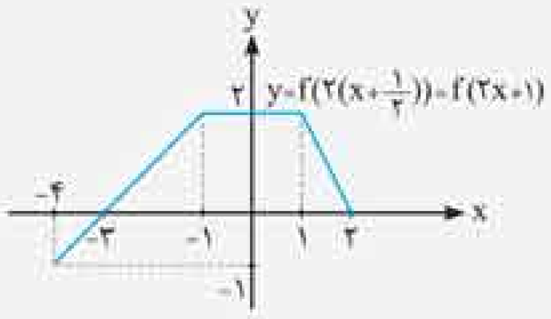
پاسخ: گزینه۳ **روش اول** در این روش از ضریب x فاکتور می‌گیریم:

$$g(x)=f(2x+1)=f(2(x+\frac{1}{2}))$$

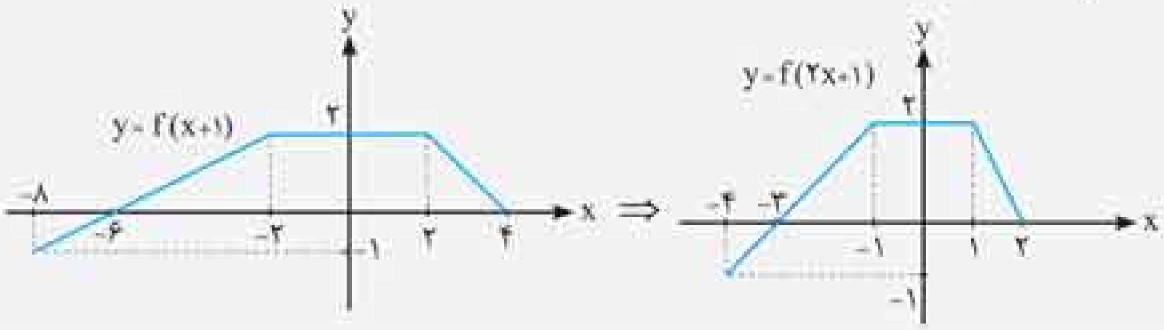
برای رسم نمودار $g(x)$ از روی نمودار تابع $f(x)$ ابتدا طول نقاط نمودار تابع $f(x)$ را در $\frac{1}{2}$ ضرب (یا بر ۲ تقسیم) می‌کنیم تا نمودار $f(2x)$ ایجاد شود.



حال نمودار به‌دست آمده را به اندازهٔ $\frac{1}{2}$ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم.

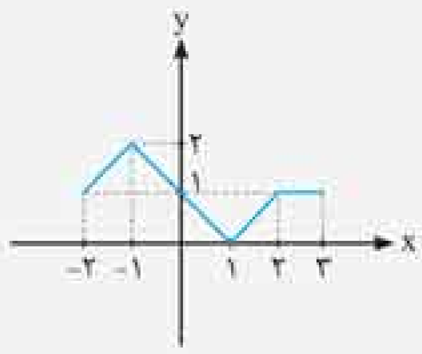


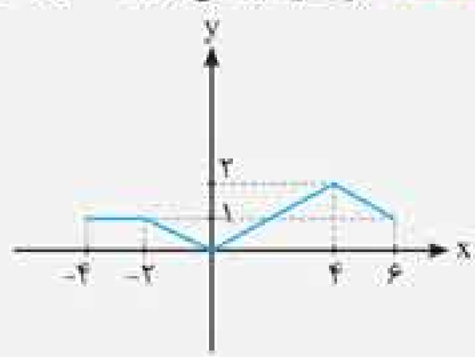
روش دوم برای رسم نمودار تابع $g(x)=f(2x+1)$ ابتدا نمودار $f(x)$ را یک واحد به چپ انتقال می‌دهیم، سپس طول نقاط نمودار را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم.

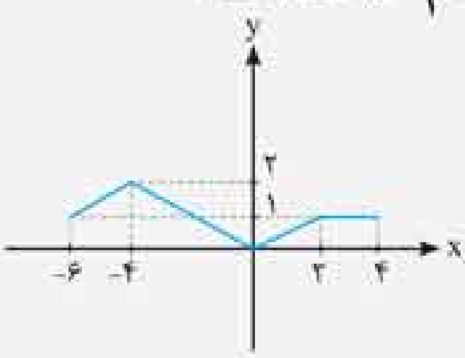


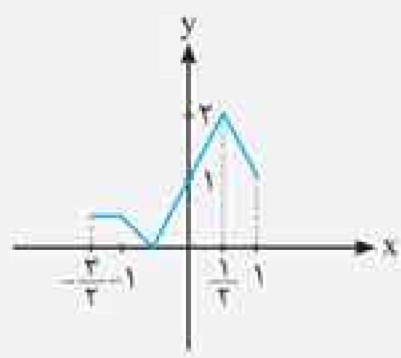
برای رسم نمودار تابع $y=f(ax+b)$ با شرط $b>0$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار را به اندازه b واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم، سپس طول‌های آن را در $\frac{1}{a}$ ضرب می‌کنیم. اگر $b<0$ باشد ابتدا نمودار را به اندازهٔ $|b|$ به راست انتقال می‌دهیم، سپس طول‌های آن را در $\frac{1}{a}$ ضرب می‌کنیم. $(a\neq 0)$

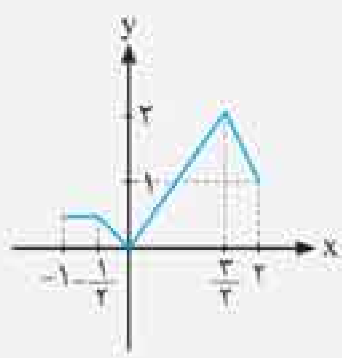
تست: اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل باشد، نمودار $f(-\frac{x}{2}+1)$ کدام است؟



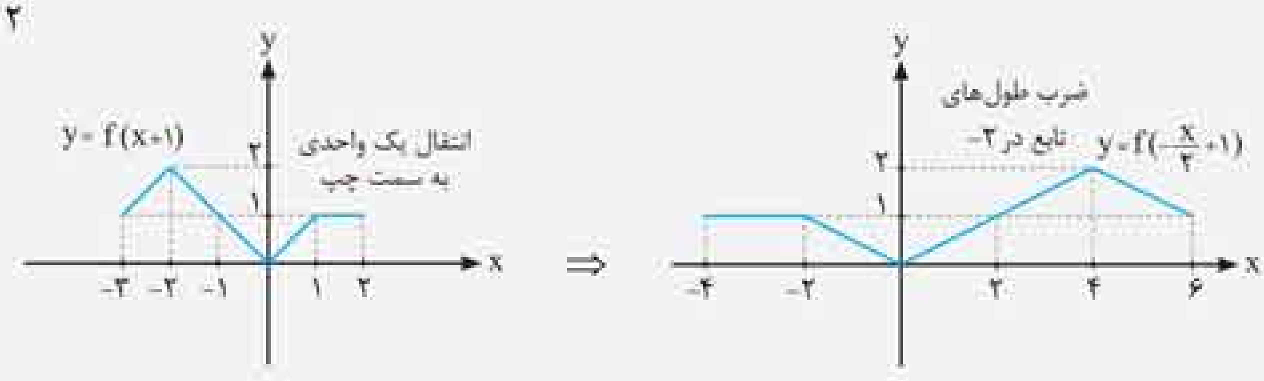
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: گزینه ۱ نمودار تابع $f(x)$ را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم، سپس همهٔ طول‌های آن را در $-2=\frac{1}{-\frac{1}{2}}$ ضرب می‌کنیم.



تست: در مورد رسم نمودار تابع $g(x)=f(\frac{۲x-۴}{۵})$ از روی نمودار $y=f(x)$ کدام گزینه نادرست است؟

۱) نمودار تابع $f(x)$ را به اندازهٔ $\frac{۴}{۵}$ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و طول‌های آن را در $\frac{۵}{۲}$ ضرب می‌کنیم.

۲) ابتدا نمودار تابع $f(\frac{۲}{۵}x)$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را ۲ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم.

۳) اگر $A(x_۰,y_۰)$ یک نقطه از نمودار تابع f باشد، نقطهٔ متناظر آن روی نمودار تابع g برابر $A'(\frac{۵x_۰+۴}{۲},y_۰)$ است.

۴) نمودار تابع $f(x)$ را به اندازهٔ ۲ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم، سپس همهٔ طول‌های نمودار را در $\frac{۵}{۲}$ ضرب می‌کنیم.

پاسخ: گزینه ۴ برای رسم نمودار تابع $g(x)=f(\frac{۲x-۴}{۵})$ آن را به‌صورت $g(x)=f(\frac{۲x}{۵}-\frac{۴}{۵})$ می‌نویسیم. برای رسم $g(x)$، نمودار تابع f را به اندازهٔ $\frac{۴}{۵}$ به راست انتقال می‌دهیم و طول‌های آن را در $\frac{۵}{۲}$ ضرب می‌کنیم.

همین‌طور می‌توان تابع $g(x)$ را به‌صورت $g(x)=f(\frac{۲}{۵}(x-۲))$ نوشت، سپس نمودار $y=f(\frac{۲}{۵}x)$ را رسم نمود و آن را ۲ واحد به سمت راست انتقال داد.

برای یافتن نقطهٔ نظیر A به مختصات $(x_۰,y_۰)$ بر روی تابع g نیز داریم:

$$\frac{۲x-۴}{۵}=x_۰ \Rightarrow ۲x-۴=۵x_۰ \Rightarrow ۲x=۵x_۰+۴ \Rightarrow x=\frac{۵x_۰+۴}{۲}$$

درنتیجه نقطهٔ نظیر $A(x_۰,y_۰)$ در تابع g به‌صورت $A'(\frac{۵x_۰+۴}{۲},y_۰)$ است.

برای رسم تابع $g(x)=f(\frac{۲}{۵}(x-۲))$ از روی نمودار $y=f(x)$ **نمی‌توان** ابتدا نمودار تابع $y=f(x-۲)$ را رسم نمود، سپس طول‌های آن را در $\frac{۵}{۲}$ ضرب کرد.

یافتن دامنه $f(u)$ تابع برحسب دامنه تابع $f(x)$

برای یافتن دامنهٔ تابع $y=f(u)$ (که در آن u تابعی از x است.) از روی دامنهٔ تابع $y=f(x)$، باید x را به‌گونه‌ای بیابیم که u در بازهٔ دامنهٔ $y=f(x)$ قرار گیرد. برای نمونه اگر دامنهٔ تابع $y=f(x)$ بازهٔ $(-۲,۳]$ باشد، برای یافتن دامنهٔ تابع $y=f(-x+۲)$ داریم:

$$-۲<-x+۲\le ۳ \xrightarrow{-۲} -۴<-x\le ۱ \xrightarrow{\times(-۱)} ۴>x\ge -۱$$

تست: اگر دامنهٔ تابع $y=f(x)$ بازهٔ $[-۱,۳)$ باشد، دامنهٔ تابع $y=۲f([x])$ کدام است؟

۱) $-۱\le x<۳$ ۲) $-۲\le x<۳$ ۳) $-۱\le x<۴$ ۴) $-۱<x<۳$

پاسخ: گزینه ۱ برای یافتن دامنهٔ تابع $y=۲f([x])$ باید x هایی را بیابیم که به‌ازای آن‌ها جزء صحیح x دربازهٔ $[-۱,۳)$ قرار بگیرد:

$$-۱\le[x]<۳ \Rightarrow \begin{cases}[x]=-۱ & \Rightarrow & -۱\le x<۰\\ [x]=۰ & \Rightarrow & ۰\le x<۱\\ [x]=۱ & \Rightarrow & ۱\le x<۲\\ [x]=۲ & \Rightarrow & ۲\le x<۳\end{cases} \xrightarrow{\cup} -۱\le x<۳$$

دامنهٔ تابع $y=۲f([x])$ تصادفاً با دامنهٔ $y=f(x)$ برابر و بازهٔ $[-۱,۳)$ است.

اگر دامنه و برد تابع $y=f(x)$ به‌ترتیب $[۱,۳]$ و $(-۱,۲]$ باشند، اشتراک دامنه و برد تابع $g(x)=۳f(۱-۲x)-۱$ کدام است؟

۱) $(-۴,۵]$ ۲) $[-۱,۰]$ ۳) $(۰,۱]$ ۴) $(-۵,۴]$

پاسخ: گزینه ۲ برای یافتن دامنهٔ $g(x)$ باید $۱-۲x$ را دربازهٔ $[۱,۳]$ قرار دهیم و x را تنها کنیم:

$$۱\le ۱-۲x\le ۳ \xrightarrow{-۱} ۰\le -۲x\le ۲ \xrightarrow{\div(-۲)} ۰\ge x\ge -۱$$

دامنهٔ تابع $g(x)$ بازهٔ $[-۱,۰]$ است.

برای یافتن برد تابع $g(x)$ باید برد تابع $f(x)$ را ۳ برابر و یک واحد از آن کم کنیم.

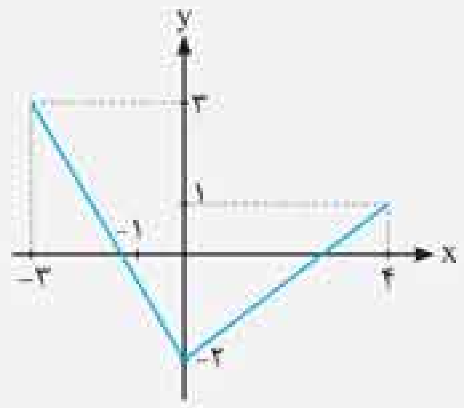
۱ برد تابع‌های $f(x)$ و $f(ax+b)$ برابر هستند. ۲ دامنهٔ تابع‌های $f(x)$ و $f(x)+d$ برابر هستند.

$$-۱<f(x)\le ۲ \Rightarrow -۱<f(۱-۲x)\le ۲ \xrightarrow{\times ۳} -۳<۳f(۱-۲x)\le ۶ \xrightarrow{-۱} -۴<۳f(۱-۲x)-۱\le ۵$$

برد تابع $g(x)$ بازهٔ $(-۴,۵]$ است.

اشتراک دامنه و برد تابع $g(x)$ بازهٔ $[-۱,۰]$ است.

تست: اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل باشد، برد تابع $g(x)=f(x^۲)$ کدام است؟



۱) $[-۲,۳]$
۲) $[-۲,۱]$
۳) $[۰,۹]$
۴) $[۰,۴]$

پاسخ: (گزینه۲) ابتدا دامنهٔ تابع $g(x)$ را می‌یابیم. دامنهٔ $f(x)$ بازهٔ $[-۳,۴]$ است.

$$\underbrace{-۳\le x^۲}_{\text{بدیهی}}\le ۴\Rightarrow x^۲\le ۴\Rightarrow -۲\le x\le ۲$$

به‌ازای xهای عضو دامنهٔ $g(x)$، مقادیر داخل پرانتز $f(x^۲)$ همواره مثبت است. با توجه به نمودار تابع، برد تابع f به‌ازای مقادیر مثبت، بازهٔ $[-۲,۱]$ است، یعنی: $-۲\le f(\text{نامنفی})\le ۱$

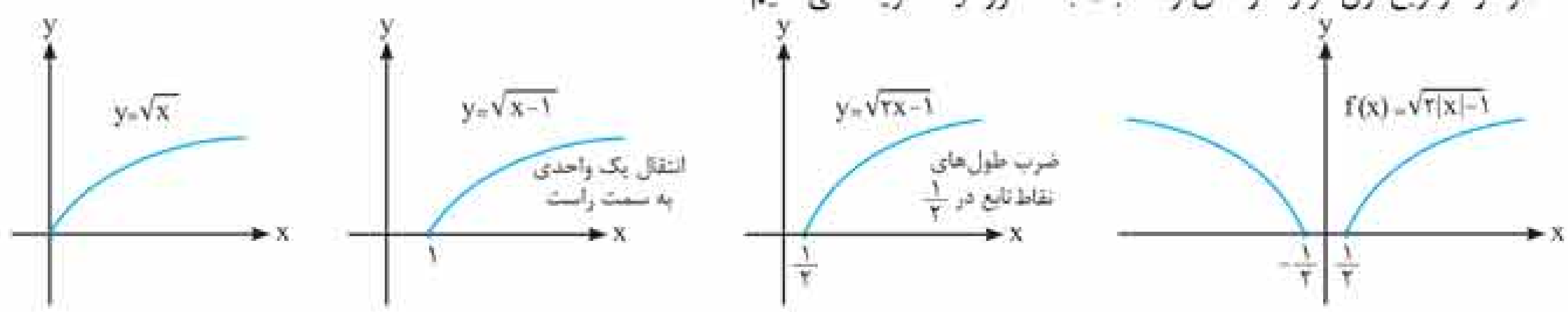
بنابراین برد تابع $g(x)$ برابر بازهٔ $[-۲,۱]$ است.

رسم تابع $y=f(a|x|+b)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$

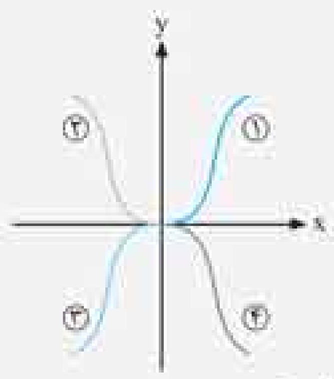
برای رسم نمودار تابع $y=f(a|x|+b)$، ابتدا نمودار تابع $y=f(ax+b)$ را به روش‌های گفته‌شده رسم می‌کنیم، سپس قسمت‌هایی از نمودار را که در ربع‌های دوم و سوم (xهای منفی) قرار دارند حذف می‌کنیم و قسمت‌های باقی‌مانده در ربع‌های اول و چهارم (xهای مثبت) را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. نمودار حاصل متعلق به تابع $y=f(a|x|+b)$ است.

مثال: نمودار تابع $f(x)=\sqrt{۲|x|-۱}$ را از روی نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم کنید.

پاسخ: نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم و سپس طول‌های آن را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم و پس از آن با توجه به این که نمودار در ربع اول قرار دارد آن را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.



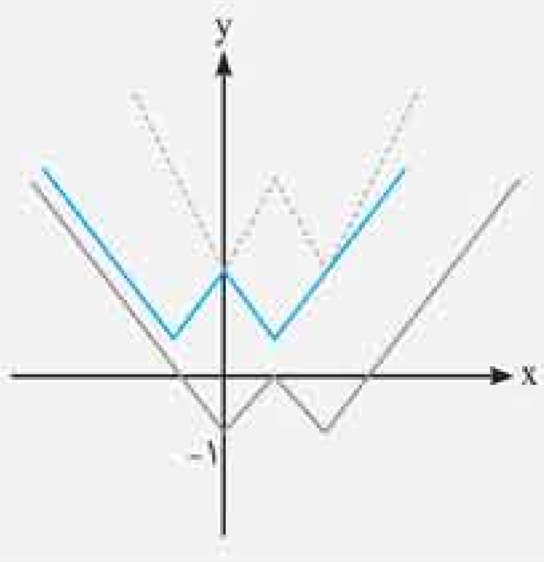
تست: اگر در شکل مقابل نمودار شمارهٔ ۱ مربوط به تابع $y=f(x)$ باشد، نمودارهای شمارهٔ ۲، ۳ و ۴ به ترتیب از راست به چپ در کدام گزینه به‌درستی آمده‌اند؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)



۱) $-f(x),f(-x),-f(-x)$
۲) $f(-x),-f(-x),-f(x)$
۳) $-f(x),-f(-x),f(-x)$
۴) $-f(-x),-f(x),f(-x)$

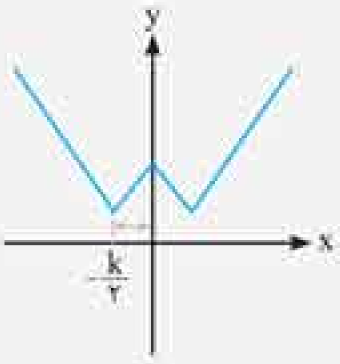
پاسخ: (گزینه۳) نمودار شمارهٔ ۲ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور عرض‌هاست و ضابطهٔ آن $y=f(-x)$ است.
نمودار شمارهٔ ۳ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور طول‌ها و عرض‌هاست و ضابطهٔ آن $y=-f(-x)$ است.
نمودار شمارهٔ ۴ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور طول‌هاست و ضابطهٔ آن $y=-f(x)$ است.

اگر نمودارهای $f(x)-k$، $kf(x)$ و $f(x+\frac{k}{۲})$ به شکل‌های زیر باشند، k کدام است؟



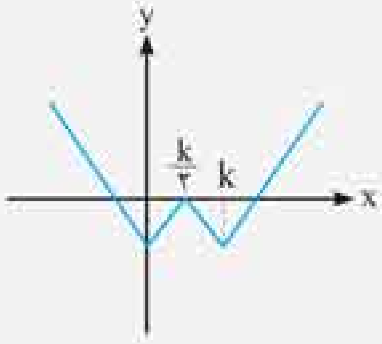
۱) ۱
۲) ۲
۳) -۱
۴) -۲

پاسخ: گزینه ۲ از آن‌جایی که همهٔ نمودارها هم‌جهت هستند و قطعاً یکی از آن‌ها متعلق به تابع $kf(x)$ است، می‌توان نتیجه گرفت k عددی مثبت است. اگر $k<0$ بود باید یکی از نمودارها به شکل  در می‌آمد.



با توجه به مثبت بودن k، نمودار تابع $y=f(x)-k$ شکل پایینی، نمودار $y=f(x+\frac{k}{2})$ شکل وسطی و نمودار $y=kf(x)$ شکل بالایی است.

با توجه به این شرایط در نمودار وسطی، فاصلهٔ طولی رأس تا محور عرض‌ها $\frac{k}{2}$ است.



اگر این فاصله را $\frac{k}{2}$ در نظر بگیریم در شکل پایینی نقاط زیر برحسب k پیدا می‌شوند، بنابراین در تابع $y=f(x)-k$ به‌ازای $x=\frac{k}{2}$ تابع برابر صفر است، یعنی:

$$f(\frac{k}{2})-k=0 \Rightarrow f(\frac{k}{2})=k$$

نمودار تابع‌های $y=kf(x)$ و $y=f(x+\frac{k}{2})$ در $x=0$ متقاطع‌اند، پس:

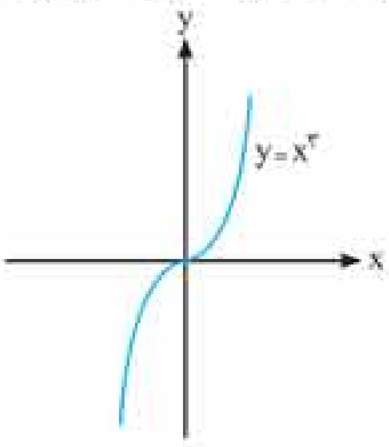
$$k=kf(0) \xrightarrow{\div k} 1=f(0)$$

در نهایت با توجه به این‌که در شکل پایینی مقدار تابع در $x=0$ برابر -1 است، داریم:

$$y=f(x)-k \xrightarrow{(0,-1)} -1=f(0)-k \xrightarrow{f(0)=1} -1=1-k \Rightarrow k=2$$

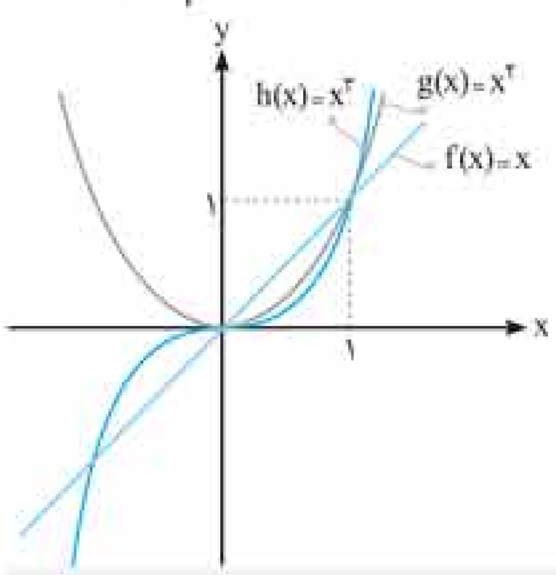
تابع چندجمله‌ای از درجه n و تابع درجه سوم

اگر n یک عدد صحیح نامنفی و $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ و a_n اعداد حقیقی باشند که $a_n \neq 0$، آن‌گاه تابع $f(x)$ را که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌نامیم: $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$



به‌طور مثال تابع $f(x)=5$، $f(x)=3x-1$، $f(x)=x^2-x+5$، $f(x)=3x^3-x$ و $f(x)=x^2(1-x)^2$ به‌ترتیب توابعی چندجمله‌ای از درجهٔ صفر، یک، دو، سه و چهار هستند.

مشهورترین تابع چندجمله‌ای از درجهٔ ۳، تابع $y=x^3$ است. نمودار این تابع به شکل روبه‌رو است. (نمودار این تابع در بین دانش‌آموزان به تابع لُر مشهور است چرا که اگر به نمودار آن نگاه کنید مانند این است که نوشته‌اید لُر)



با رسم سه تابع $f(x)=x$، $g(x)=x^2$ و $h(x)=x^3$ در یک دستگاه محورهای مختصات می‌توان فهمید:

رابطهٔ بین سه تابع $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ در بازه‌های مختلف به‌صورت زیر است:

اگر $x\in(0,1) \Rightarrow x^3<x^2<x$

اگر $x\in(1,+\infty) \Rightarrow x^3>x^2>x$

اگر $x\in(-1,0) \Rightarrow x^2>x^3>x$

اگر $x\in(-\infty,-1) \Rightarrow x^2>x>x^3$

تست: نمودار تابع $f(x)=-x^3+6x^2-12x+10$ از کدام ناحیه محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

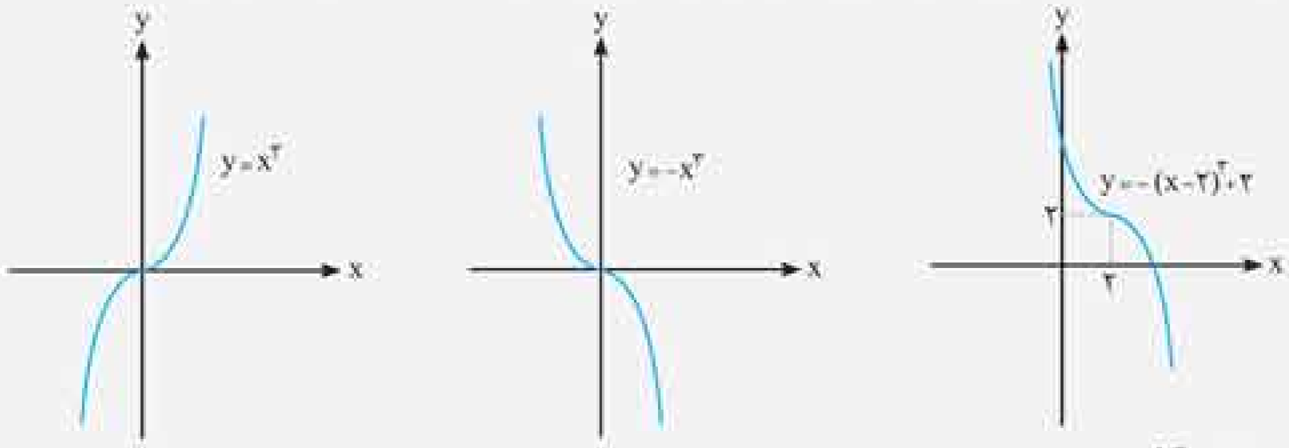
۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ: گزینه ۳ ضابطهٔ تابع را به کمک اتحاد مکعب دوجمله‌ای ساده می‌کنیم:

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

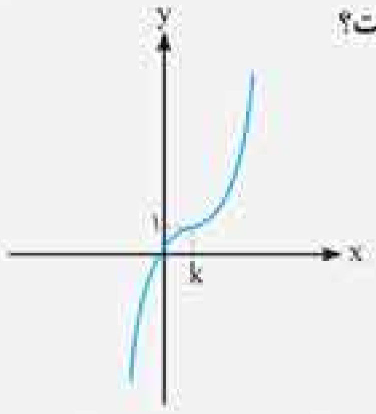
$$f(x)=-x^3+6x^2-12x+10=-x^3+6x^2-12x+8+2=-(x^3-6x^2+12x-8)+2=-(x-2)^3+2$$

نمودار تابع $y=x^3$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم، سپس نمودار را ۲ واحد به سمت راست و ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



نمودار تابع از ربع سوم نمی‌گذرد.

تست: نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ به‌صورت مقابل است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟



۱) صفر
۲) ۶
۳) ۶-
۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱ ضابطهٔ تابع $f(x)$ (با توجه به نمودار) برابر است با:

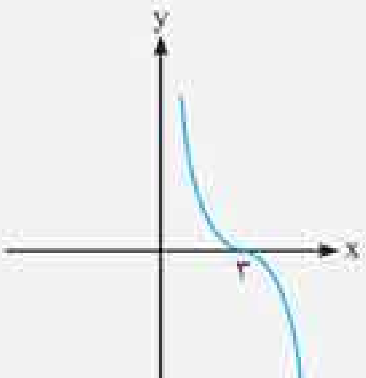
$$f(x)=(x-k)^3+1 \Rightarrow f(x)=x^3-3kx^2+3k^2x-k^3+1$$

تابع از مبدأ گذشته است، بنابراین نقطهٔ $(0,0)$ در آن صدق می‌کند: $0=(0)^3-3k(0)^2+3k^2(0)-k^3+1 \Rightarrow k^3=1 \Rightarrow k=1$

ضابطهٔ تابع پس از جای‌گذاری عدد ۱ به‌جای k برابر است با: $f(x)=x^3-3kx^2+3k^2x-k^3+1 \xrightarrow{k=1} f(x)=x^3-3x^2+3x$

پس $a=-3$، $b=3$ و $c=0$، بنابراین داریم: $a+b+c=-3+3+0=0$

نمودار تابع $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$ به شکل مقابل است. مقدار b کدام است؟



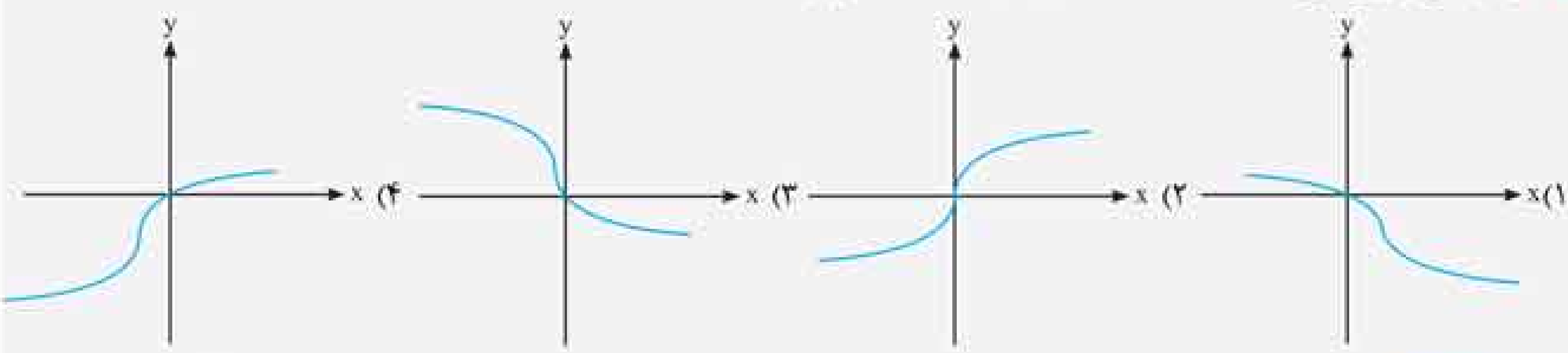
۱) ۹
۲) ۹-
۳) ۲۷
۴) ۲۷-

پاسخ: گزینه ۴ با توجه به نمودار، ضابطهٔ تابع برابر $f(x)=-(x-3)^3$ است، بنابراین داریم:

$$f(x)=-(x^3-9x^2+27x-27)=-x^3+9x^2-27x+27$$

پس مقدار b برابر ۲۷- است.

نمودار تابع وارون تابع $f(x)=-x^3-3x^2-3x$ به کدام شکل زیر است؟



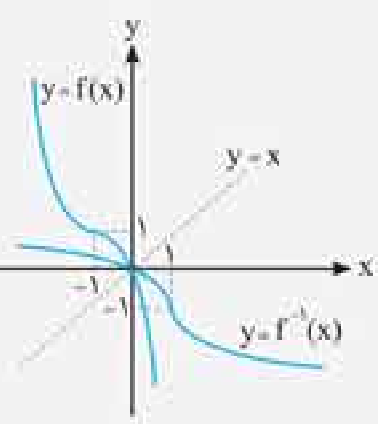
پاسخ: گزینه ۱ تابع $f(x)=-x^3-3x^2-3x$ را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=-(x^3+3x^2+3x)=-(x^3+3x^2+3x+1-1)=-(x+1)^3+1$$

نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:

برای یافتن نمودار تابع وارون $y=f(x)$ قرینهٔ آن را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم رسم می‌کنیم:

برای درک بهتر، ضابطهٔ تابع وارون را نیز می‌یابیم:



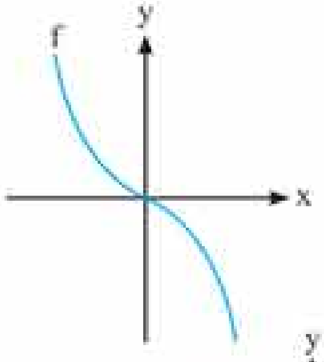
$$y=-(x+1)^3+1 \Rightarrow (x+1)^3=1-y \Rightarrow x+1=\sqrt[3]{1-y} \Rightarrow x=\sqrt[3]{1-y}-1$$

$$y=\sqrt[3]{1-x}-1 \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{1-x}-1$$

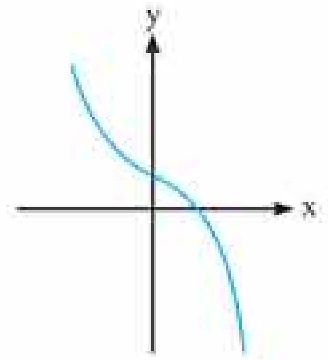
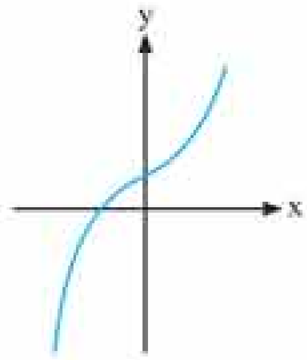
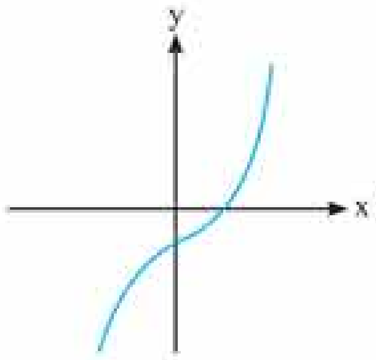
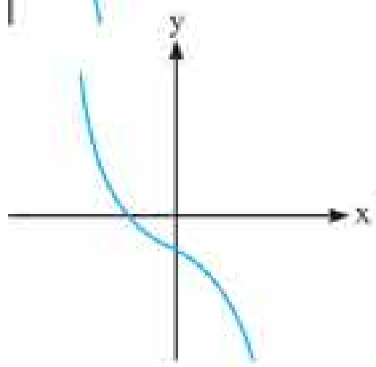
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

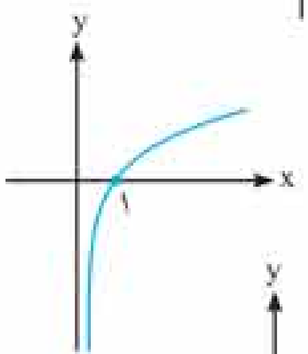
۵

تبدیل نمودار توابع

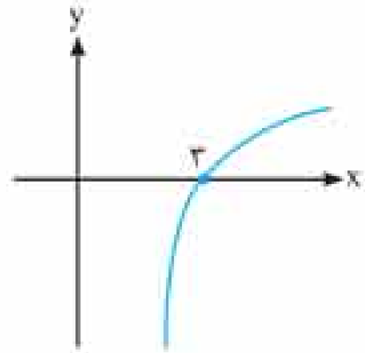
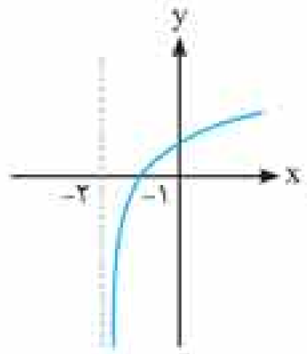
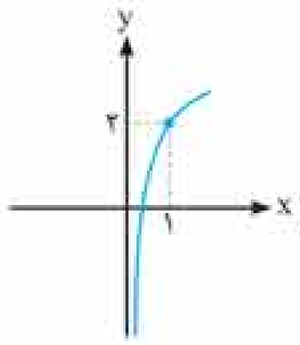
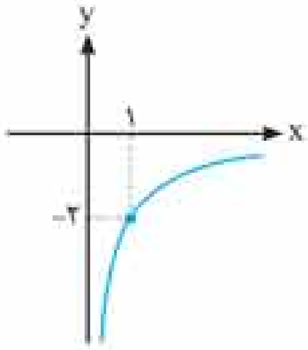


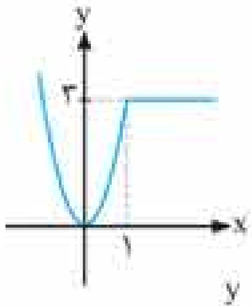
۱. اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $f(x)+k$ با شرط $k<0$ به چه شکلی است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

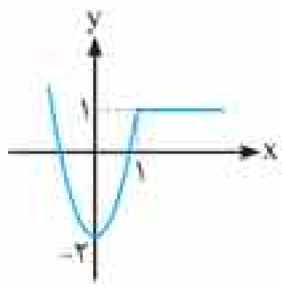
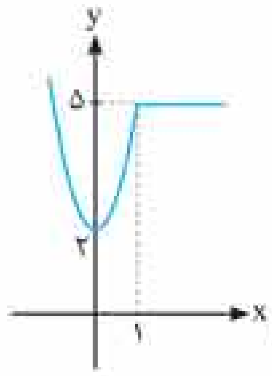
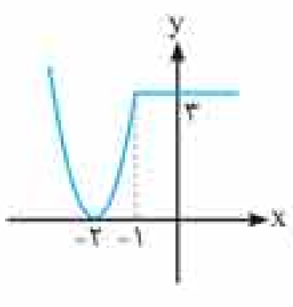
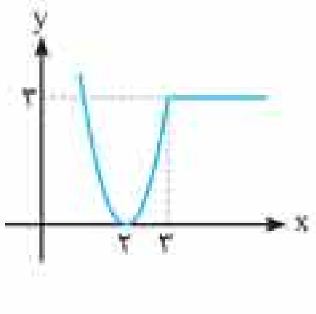


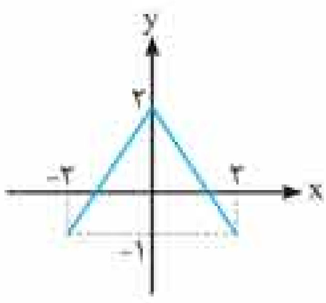
۲. نمودار تابع $y=\log x$ به فرم روبه‌رو است. نمودار تابع $y=\log(x+2)$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

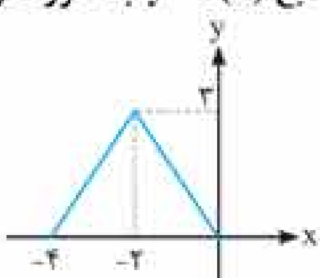
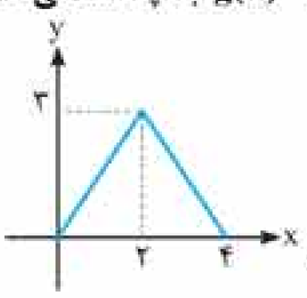
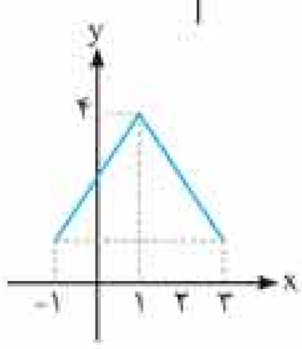
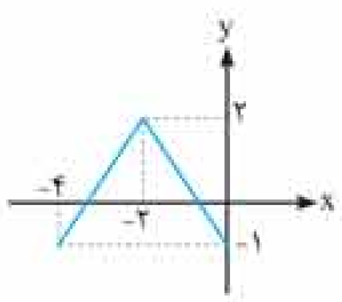


۳. نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $f(x-2)$ کدام است؟

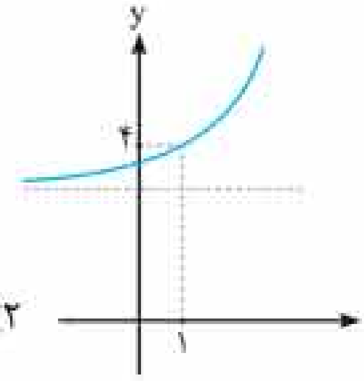
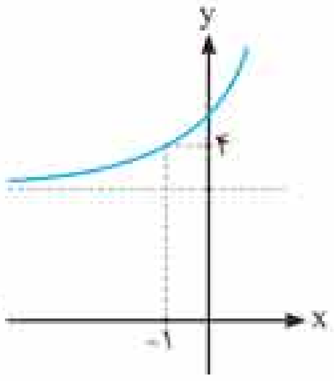
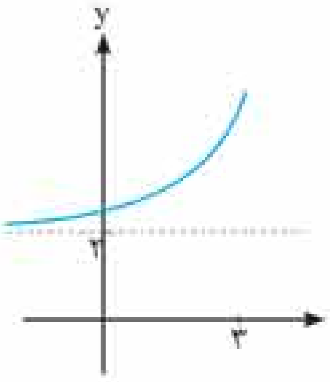
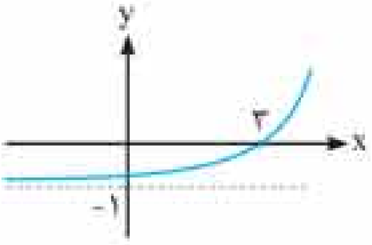
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 



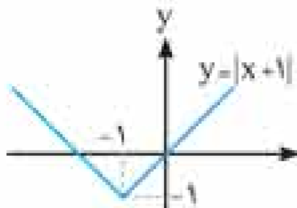
۴. نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت روبه‌رو است. نمودار تابع $g(x)=f(x+2)+1$ به چه شکلی خواهد بود؟

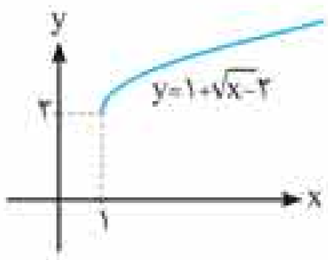
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

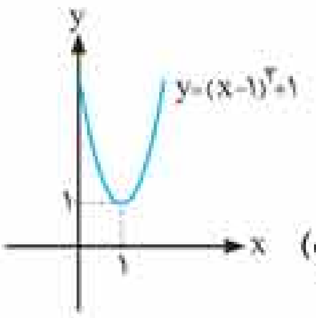
۵. ضابطهٔ تابع $f(x)=3^x$ مفروض است. نمودار تابع $g(x)=f(x-1)+3$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۶. چند تا از نمودارهای زیر درست رسم شده‌اند؟

الف) 

ب) 

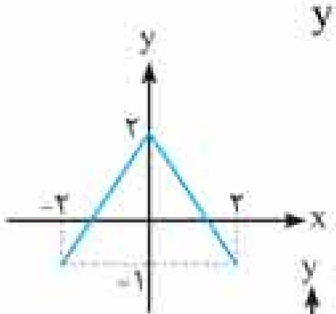
پ) 

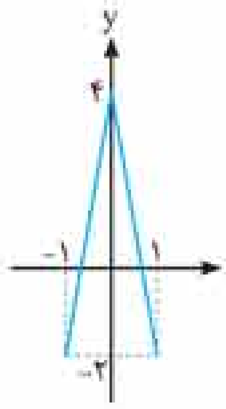
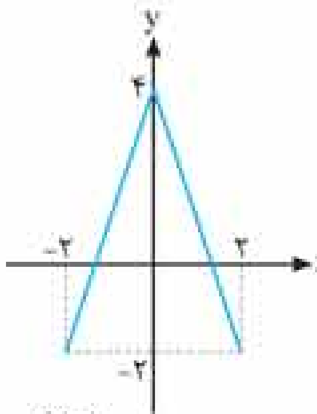
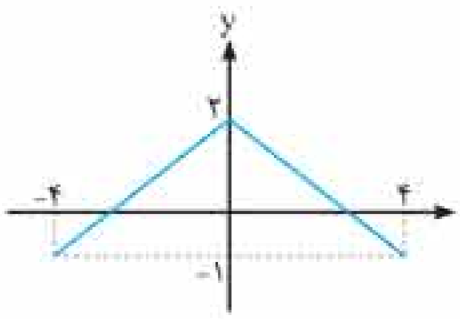
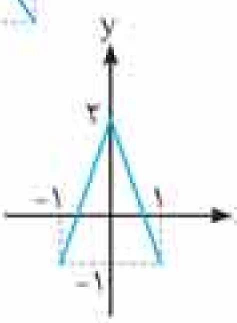
۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۷. نمودار تابع $y=\cos(x-\frac{\pi}{2})$ بر نمودار کدام‌یک از توابع زیر منطبق است؟

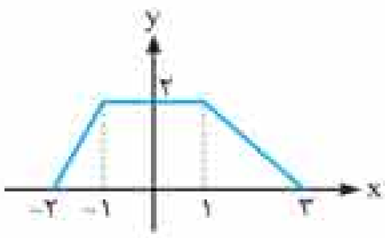
۱) $y=\sin(x+\frac{\pi}{2})$ ۲) $y=\sin x$ ۳) $y=\sin(x-\pi)$ ۴) $y=\sin(x+\pi)$

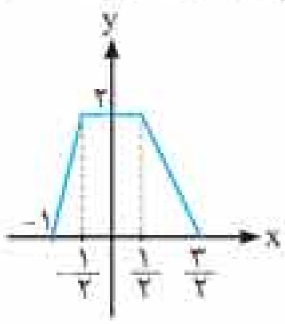
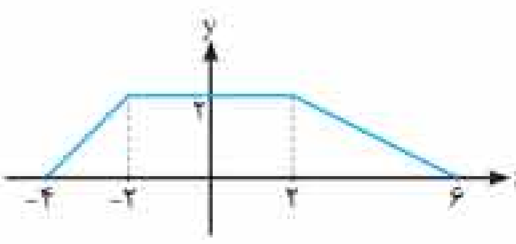
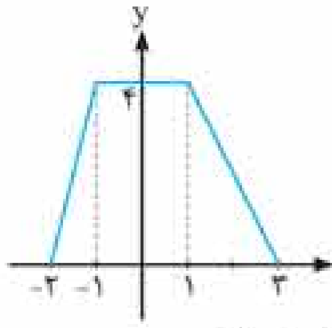
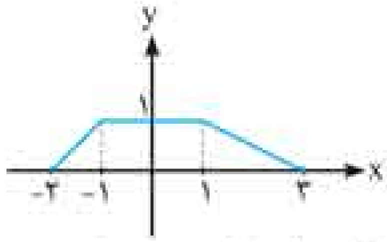
۸. نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $g(x)=2f(x)$ کدام است؟



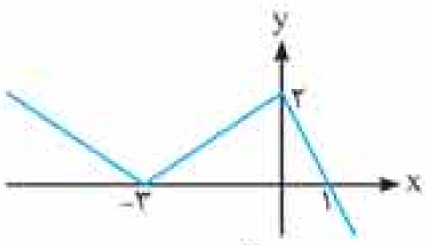
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

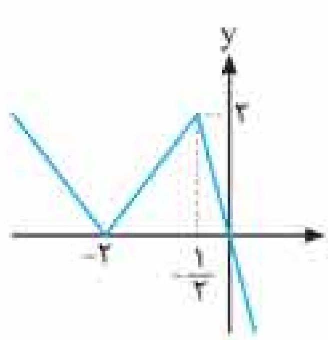
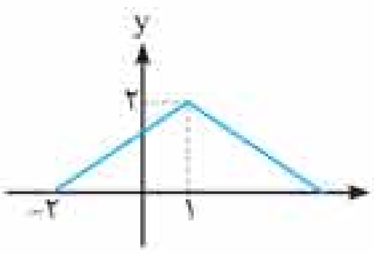
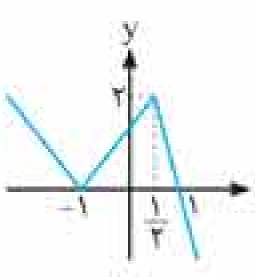
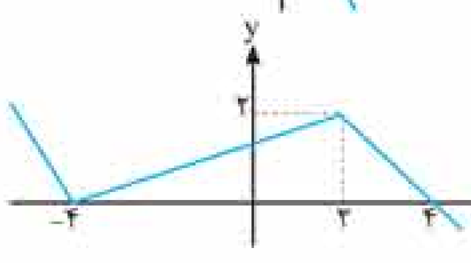
۹. نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $g(x)=\frac{f(x)}{2}$ به چه شکلی است؟



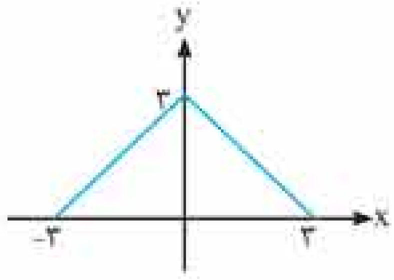
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

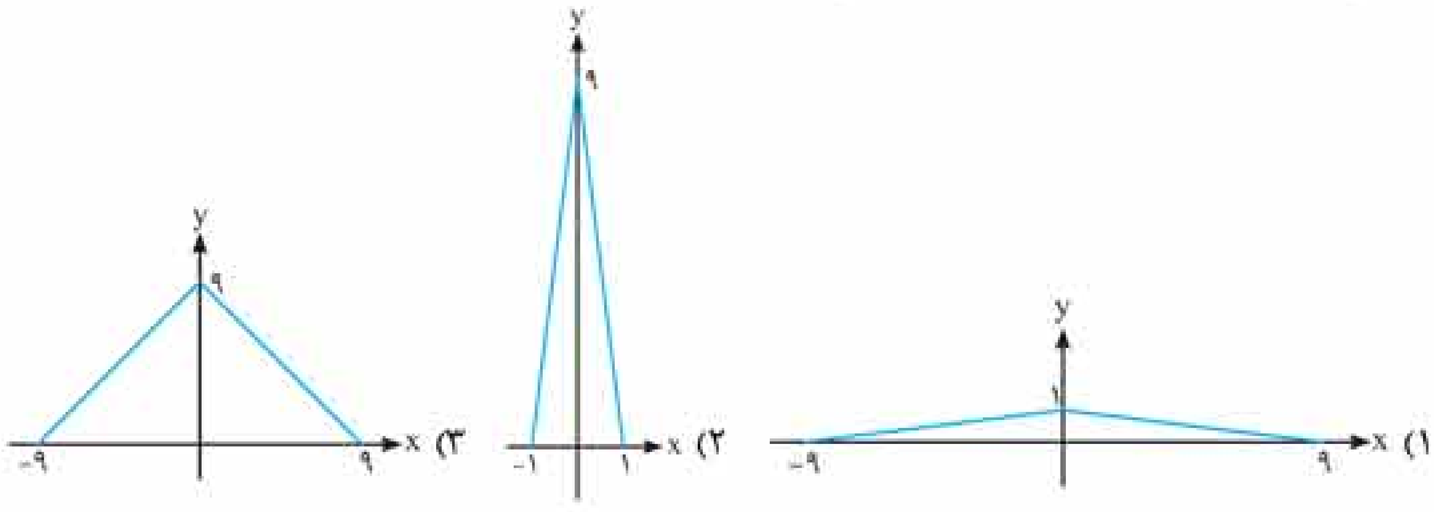
۱۰. نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت روبه‌رو است. کدام گزینه نمودار تابع $g(x)=f(2x-1)$ را نشان می‌دهد؟

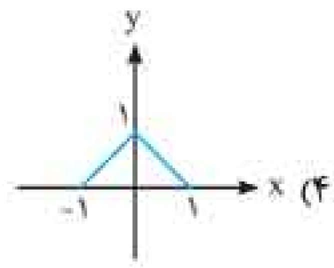


۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

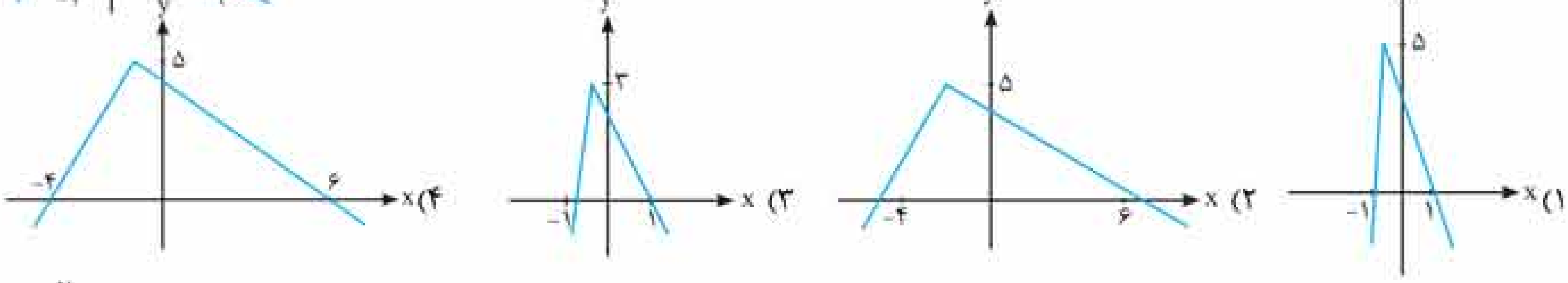
۱۱. نمودار تابع $h(x)$ به فرم روبه‌رو است. نمودار تابع $g(x)=3h(3x)$ به کدام صورت است؟



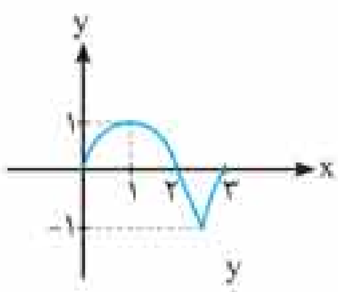


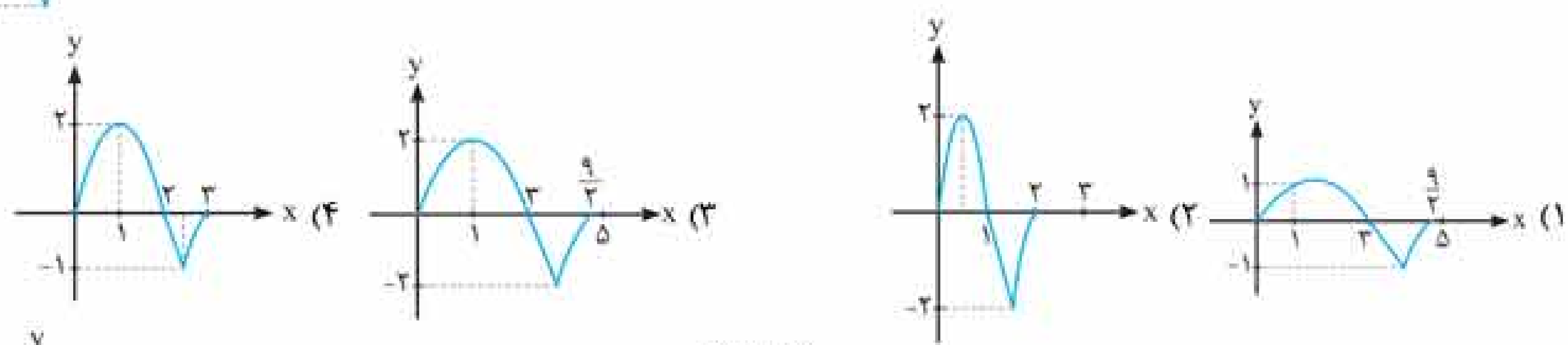


۱۲. در شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)$ رسم شده است. کدام گزینه می‌تواند نمودار تابع $g(x)=2f(\frac{x}{2})+1$ باشد؟

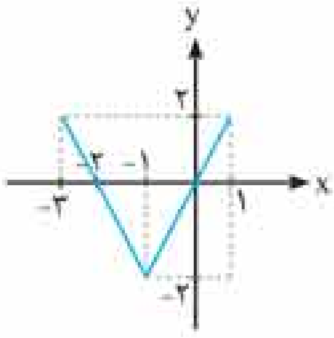


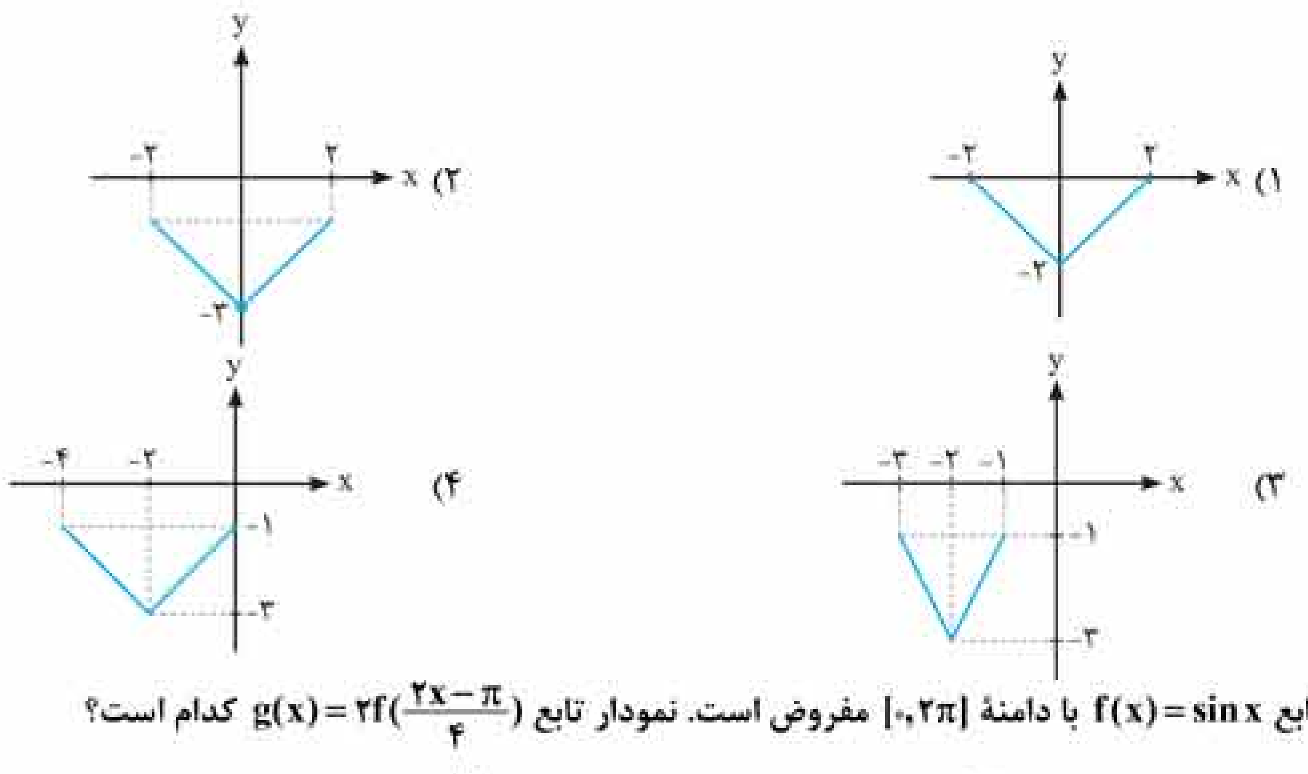
۱۳. نمودار تابع $f(x)$ به فرم روبه‌رو است. نمودار تابع $g(x)=2f(\frac{2}{3}x)$ کدام است؟



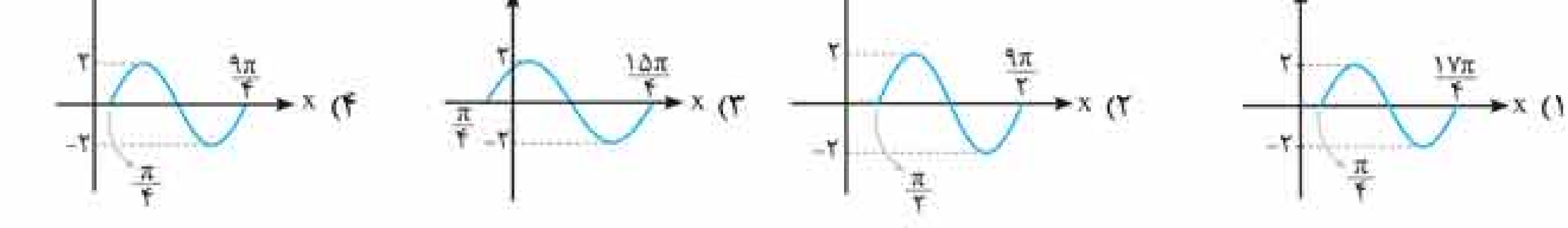


۱۴. شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)$ است. کدام گزینه نمودار تابع $g(x)=\frac{f(x+1)}{2}-2$ را نشان می‌دهد؟

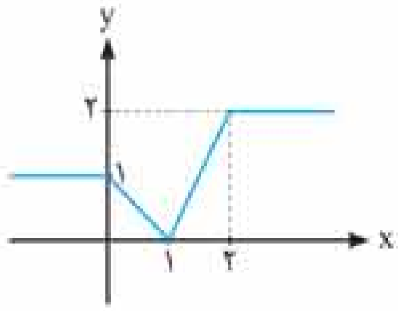


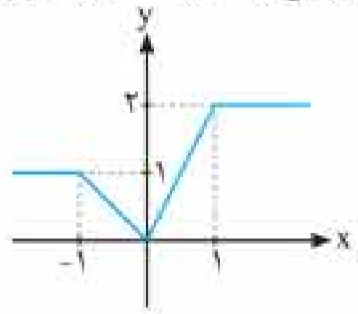


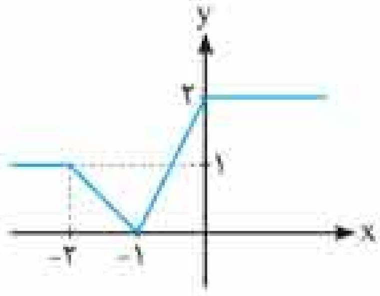
۱۵. تابع $f(x)=\sin x$ با دامنهٔ $[0,2\pi]$ مفروض است. نمودار تابع $g(x)=2f(\frac{2x-\pi}{4})$ کدام است؟

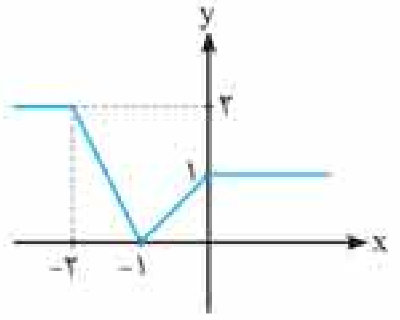


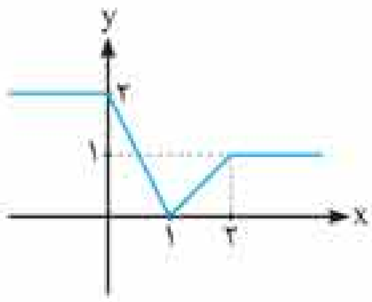
۳۵. نمودار تابع $y=f(x-1)$ به فرم روبه‌رو است. نمودار تابع $y=f(1-x)$ کدام است؟



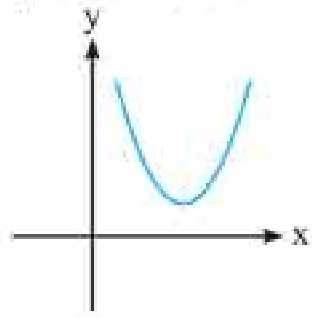
۱) 

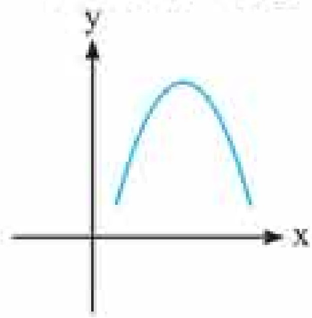
۲) 

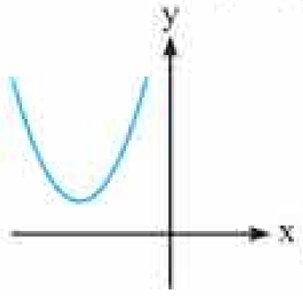
۳) 

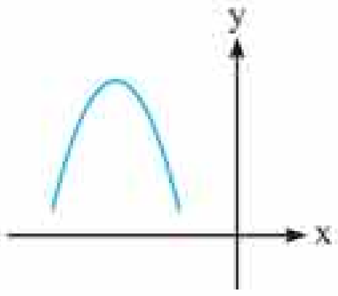
۴) 

۳۶. اگر $f(2-2x)=(2x-1)^2$ باشد، قسمتی از نمودار $g(x)=3-f(x-1)$ کدام است؟

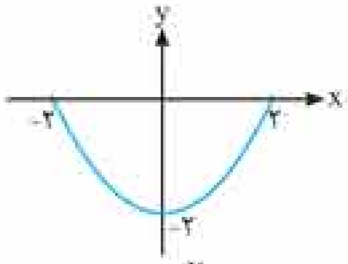
۱) 

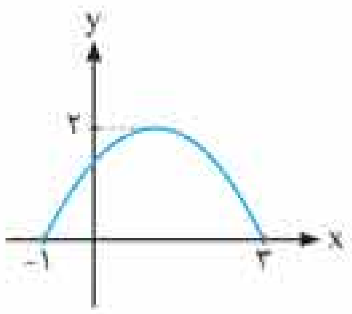
۲) 

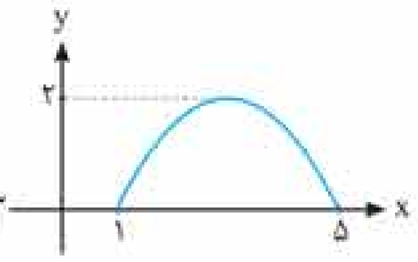
۳) 

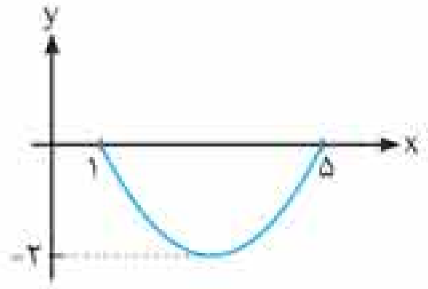
۴) 

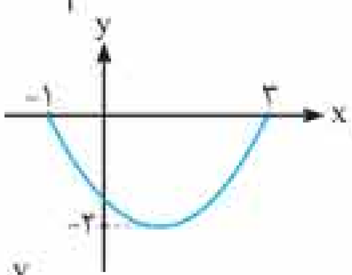
۳۷. شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x-2)$ را نشان می‌دهد. نمودار تابع $y=f(-x+1)$ کدام است؟



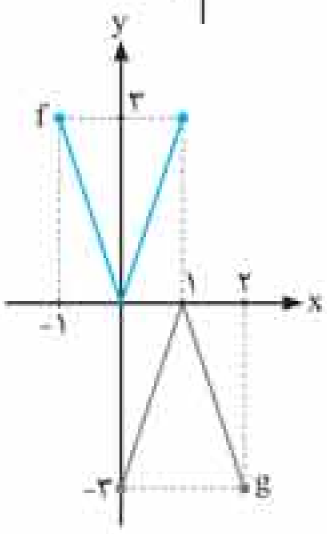
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳۸. در شکل مقابل، نمودار دو تابع $f(x)$ و $g(x)=af(bx+c)$ داده شده است. حاصل $a+b-c$ کدام می‌تواند باشد؟



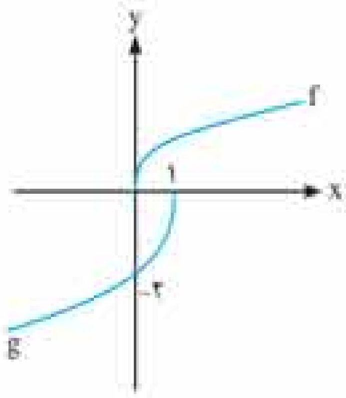
۱) -1

۲) صفر

۳) 1

۴) 2

۳۹. نمودار تابع g طی مراحلی از روی نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ رسم شده است. ضابطهٔ تابع g کدام است؟



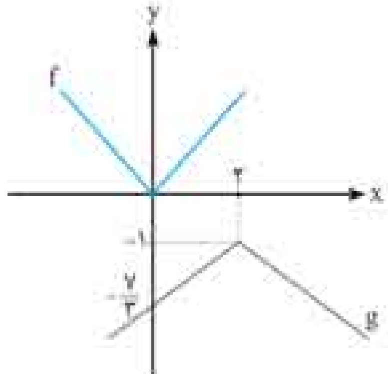
۱) $-2f(x)$

۲) $-2f(-x+1)$

۳) $-2f(-x)$

۴) $-2f(-x-1)$

۴۰. نمودار تابع g از روی نمودار تابع $y=|x|$ رسم شده است. $g(5)$ کدام است؟



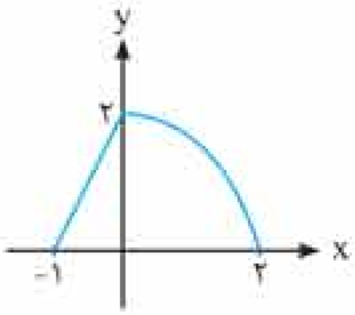
۱) -4

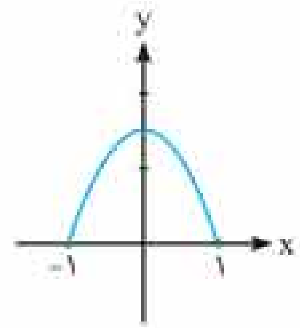
۲) $-\frac{5}{2}$

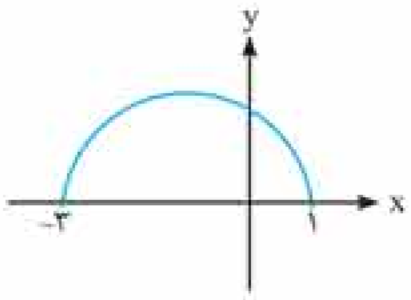
۳) $-\frac{7}{3}$

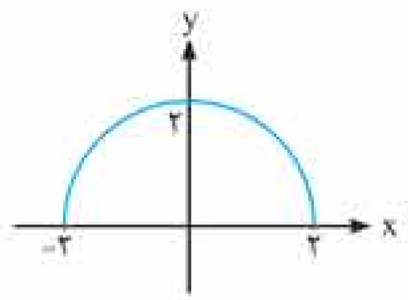
۴) -3

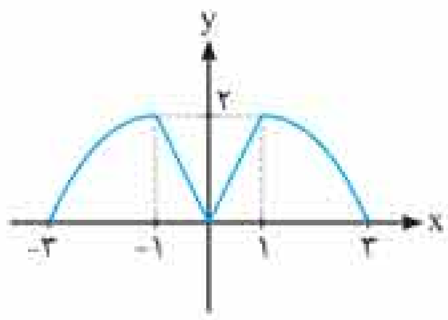
۶۹. شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ است. نمودار تابع $y=f(|x+1|)$ کدام است؟



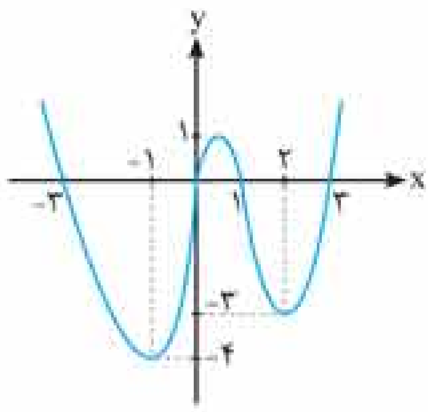
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۷۰. نمودار تابع f به شکل روبه‌رو رسم شده است. کم‌ترین مقدار تابع $h(x)=3f(|2x|)-3$ کدام است؟

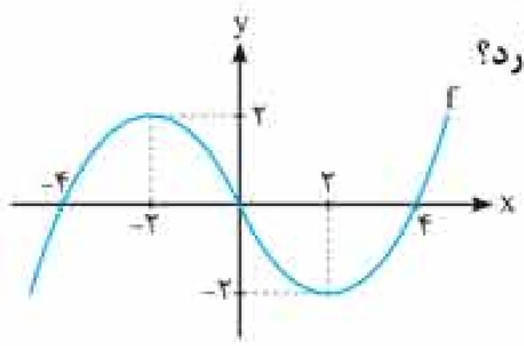


۱) صفر
۲) -9
۳) -12
۴) -15

۷۱. نمودار تابع $g(x)=|f(x)-2|$ از روی نمودار $f(x)=|x|$ رسم شده است. اگر $g(x)$ در تقاطع با خط $y=k$، ۴ نقطهٔ تقاطع داشته باشد؛ k در کدام بازه قرار می‌گیرد؟

۱) $[0,2]$ ۲) $(0,2)$ ۳) $[-2,2]$ ۴) $(-2,2)$

۷۲. نمودار تابع $g(x)=||f(x)|-2|$ از روی نمودار تابع f رسم شده است. معادلهٔ $g(x)=\frac{2}{3}$ چند جواب دارد؟



۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۱۲

۷۳. نمودار تابع $g(x)=|f(|x|)|$ از روی نمودار تابع $f(x)=x^2-2x$ رسم شده است. اگر $g(x)$ در تقاطع با خط $y=a$ دقیقاً ۴ نقطهٔ برخورد داشته باشد، آن‌گاه a کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۷۴. در کدام بازه از مقادیر x، نمودار تابع $f(x)=5-|x-1|$ بالاتر از نمودار $g(x)=|2x|$ قرار دارد؟ (ریاضی خارج ۹۳)

۱) $(-\frac{4}{3},1)$ ۲) $(-\frac{2}{3},1)$ ۳) $(-\frac{4}{3},2)$ ۴) $(-\frac{2}{3},2)$

تابع درجه ۳

۷۵. چند مورد از عبارات زیر دربارهٔ تابع $y=x^3+6x^2+12x-1$ صحیح است؟

الف) برد این تابع بازهٔ $[-1,+\infty)$ است.
ب) وارون‌پذیر است.
پ) نمودار این عبارت نسبت به خط $x=-2$ متقارن است.
ت) با افزایش مقدار x، مقدار y نیز افزایش می‌یابد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

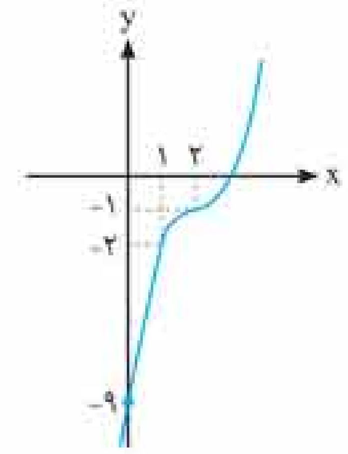
۷۶. اگر $f_1(x)=x$، $f_2(x)=x^2$ و $f_3(x)=x^3$ باشند، آن‌گاه در کدام بازه رابطهٔ $f_1(x)>f_2(x)>f_3(x)$ برقرار است؟

۱) $[0,1]$ ۲) $[-1,1]$ ۳) $[-1,0]$ ۴) $(0,1)$

۷۷. سه تابع $f(x)=x+a$، $g(x)=f^2(x)$ و $h(x)=f^3(x)$ مفروض‌اند و در بازهٔ $[3,4]$ داریم: $f(x)\ge g(x)\ge h(x)$. a کدام است؟

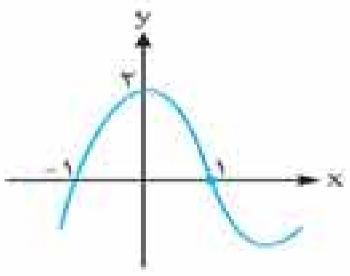
۱) ۳ ۲) -3 ۳) ۴ ۴) -4

۷۸. شکل روبه‌رو بخشی از نمودار تابع $y=x^3+ax^2+bx+c$ را نشان می‌دهد. حاصل $a+b+c$ کدام است؟



۱) -9
۲) -6
۳) -3
۴) صفر

۷۹. نمودار تابع $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ به صورت روبه‌رو است. مقدار b کدام است؟



۱) 4
۲) 2
۳) -2
۴) -4

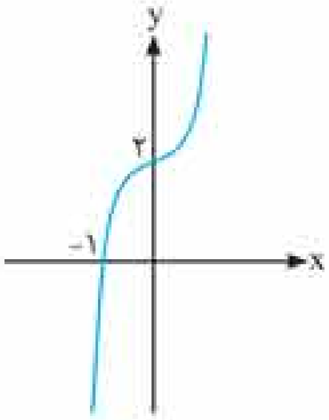
۸۰. نمودار تابع $y=x^3+3x^2+3x+a$ نسبت به نقطهٔ $(-1,-5)$ متقارن است. a کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) -4 ۴) 4

۸۱. منحنی تابع $y=x^3+3x^2+3x+1$ و خط $y=ax+b$ یکدیگر را فقط در نقطهٔ $x=0$ قطع می‌کنند. a در کدام بازه قرار دارد؟

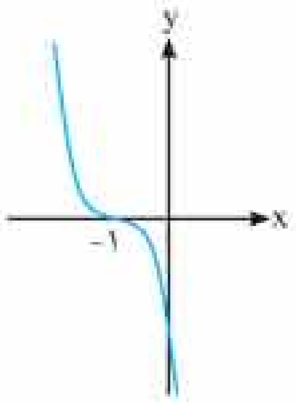
۱) $(2,+\infty)$ ۲) $(-\infty,\frac{3}{4})$ ۳) $(-\infty,2)$ ۴) $(\frac{3}{4},+\infty)$

۸۲. اگر نمودار تابع $f(x)=x^3+ax+b$ به‌صورت مقابل باشد، $a+b$ کدام است؟



۱) 1
۲) 2
۳) 3
۴) 4

۸۳. اگر نمودار تابع $f(x)=-3x^3+ax^2+bx+c$ به‌صورت مقابل باشد، a کدام است؟

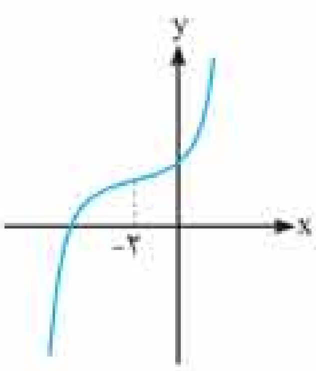


۱) 6
۲) 9
۳) -6
۴) -9

۸۴. حدود k کدام باشد تا نمودار تابع $f(x)=-x^3+x^2-\frac{x}{3}+k$ از ربع اول عبور نکند؟

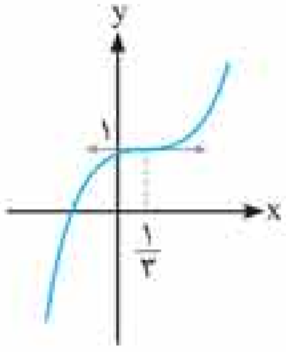
۱) $k\leq 0$ ۲) $k<1$ ۳) $k\geq 0$ ۴) $k>1$

۸۵. اگر $f(x)=x^3+6x^2+10x+8$، $g(x)=ax+b$ و نمودار تابع $y=(f+g)(x)$ به‌صورت زیر باشد، a کدام است؟



۱) -1
۲) -2
۳) 1
۴) 2

۸۶. نمودار تابع $f(x)=(x+a)(x^2+bx+c)$ به‌صورت مقابل است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟



۱) $\frac{4}{9}$
۲) $\frac{8}{9}$
۳) 1
۴) $\frac{10}{9}$

۱۲۲. به‌ازای کدام مقادیر a، تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & ; \ x\le 1 \\ -x+3a & ; \ x\ge 2 \end{cases}$ نزولی است؟

۱) $a>\frac{1}{3}$ ۲) $a\ge \frac{1}{3}$ ۳) $a<\frac{1}{3}$ ۴) $a\le \frac{1}{3}$

۱۲۳. تابع $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x} & ; \ x\ge 0 \\ -\sqrt{ax} & ; \ x<0 \end{cases}$ یک تابع اکیداً صعودی است. a کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -3 ۴) هیچ مقداری برای a وجود ندارد.

۱۲۴. تابع $f(x)=\begin{cases} 2x-x^2 & ; \ x<1 \\ \sqrt{x-1}+a & ; \ x\ge 1 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ صعودی اکید است. a چه مقادیری دارد؟

۱) $a\ge 1$ ۲) $a<1$ ۳) $a\ge 0$ ۴) $a<-1$

۱۲۵. تابع $f(x)=|2x-2|+kx$ اکیداً صعودی است. حدود مقادیر k کدام است؟

۱) $k>2$ ۲) $k<-2$ ۳) $-2<k<2$ ۴) $k<2$

۱۲۶. اگر تابع با ضابطه $f(x)=x^2+(m-3)x+2$ روی بازه $(2,+\infty)$ صعودی اکید و روی بازه $(-\infty,2)$ نزولی اکید باشد. آن‌گاه m کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

۱۲۷. حدود a برای آن‌که تابع $y=(a-2)x^2-x$ در فاصله $[1,+\infty)$ صعودی باشد، کدام است؟

۱) $a\ge \frac{5}{2}$ ۲) $2<a\le \frac{5}{2}$ ۳) $a<\frac{5}{2}$ ۴) $a>2$

۱۲۸. اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=(m-3)x^2+2(m^2-3)x+5$ روی بازه $(-\infty,1)$ اکیداً صعودی و روی بازه $(1,+\infty)$ اکیداً نزولی باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر m کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -3

۱۲۹. دو تابع $f(x)=\frac{-3kx+1}{x^3-x}$ و $h(x)=\frac{3kx^3-1}{x^3-x}$ مفروض‌اند. اگر تابع f در بازه $[a,b]$ اکیداً نزولی باشد، تابع h در بازه $[a,b]$ چه وضعیتی خواهد داشت؟ $(k\ne 0)$

۱) اکیداً نزولی ۲) اکیداً صعودی

۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی

۱۳۰. اگر f و g هر دو صعودی اکید باشند، کدام تابع در $D_f\cap D_g$ الزاماً صعودی اکید است؟

۱) $f-g$ ۲) fg ۳) $f+g$ ۴) f^2

۱۳۱. دو تابع f و g با دامنه‌های یکسان به‌ترتیب صعودی و نزولی‌اند. توابع $f-g$ و $\frac{f}{g}$ به‌ترتیب چگونه‌اند؟

۱) صعودی ـ نزولی ۲) نزولی ـ صعودی

۳) صعودی ـ نمی‌توان تعیین کرد ۴) نزولی ـ نمی‌توان تعیین کرد

۱۳۲. اگر f نزولی اکید و g صعودی اکید با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشند، چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) fog نزولی اکید است. ب) gof صعودی اکید است.

پ) fof نزولی اکید است. ت) gog صعودی اکید است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۳. اگر تابع f صعودی اکید باشد، کدام‌یک از توابع زیر اکیداً صعودی است؟

۱) $y=|x|+f(x)$ ۲) $y=xf(x)$ ۳) $y=x+f(x)$ ۴) $y=|x|f(x)$

۱۳۴. دو تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=x-\sqrt{x}$ از نظر یکنوایی چگونه‌اند؟

۱) f صعودی و g نزولی است. ۲) f نزولی و g صعودی است.

۳) f صعودی اما g یکنوا نمی‌باشد. ۴) f و g هر دو یکنوا نیستند.

۱۳۵. اگر g تابعی نزولی اکید باشد، تابع $f(x)=g(x^3+1)-1$ به شرط تعریف شدن چگونه است؟

۱) نزولی اکید است. ۲) صعودی اکید است.

۳) اگر $x\ge 1$ صعودی اکید است. ۴) $x\ge 0$ نزولی اکید و $x<0$ صعودی اکید است.

۱۳۶. در مورد تغییرات $f(x)=\cos\frac{\pi}{x^2+2}$ کدام درست است؟

۱) روی $\mathbb{R}$ صعودی اکید است.

۲) در $[0,+\infty)$ صعودی اکید و در $(-\infty,0)$ نزولی اکید است.

۳) در $[0,+\infty)$ نزولی اکید و در $(-\infty,0)$ صعودی اکید است.

۴) روی $\mathbb{R}$ نزولی اکید است.

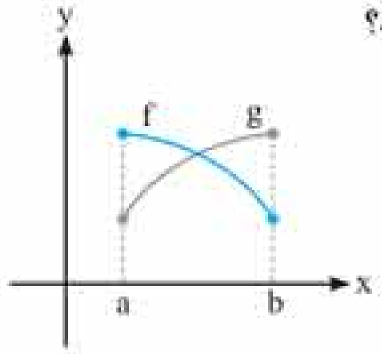
۱۳۷. اگر $f(x)=2^{-x}$ و $g=\{(5,6),(4,5),(2,1),(3,a)\}$ باشند، حداکثر مقدار a برای این‌که تابع fog نزولی باشد، کدام است؟ $(a\in\mathbb{N})$

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۳۸. تابع $f(x)=\log_2(x^2-4x-5)$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

۱) $(-\infty,2)$ ۲) $(5,+\infty)$ ۳) $(-\infty,-1)$ ۴) $(-1,+\infty)$

۱۳۹. نمودارهای دو تابع f و g در فاصله $[a,b]$ رسم شده است. تابع $\frac{f}{g}$ در این فاصله از نظر یکنوایی چه وضعی دارد؟



۱) نزولی
۲) صعودی
۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی
۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

۱۴۰. تابع f صعودی و از مبداء مختصات می‌گذرد. دامنه تعریف g با ضابطهٔ $g(x)=\sqrt{xf(x)}$ کدام مجموعه است؟

۱) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ge 0\}$ ۲) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>0\}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) دامنه f

۱۴۱. تابع f روی $[-1,3]$ تعریف شده و $f(1)=0$ و در بازه $[-1,1]$ صعودی اکید و در بازه $[1,3]$ نزولی اکید است. دامنه تابع با ضابطهٔ $g(x)=\sqrt{[x]f(x)}$ کدام است؟

۱) $[1,3]$ ۲) $[-1,1]\cup[2,3]$ ۳) $[0,1]$ ۴) $[-1,1]$

۱۴۲. تابع f با دامنهٔ $[-2,3]$ نزولی اکید است. اگر $f(1)=0$ باشد، دامنه تابع با ضابطهٔ $g(x)=\sqrt{\frac{(x-2)f(x)}{(x-1)}}$ کدام است؟

۱) $[-2,2]$ ۲) $[-2,1)$ ۳) $[-2,2]-\{1\}$ ۴) $(1,3]$

۱۴۳. برد تابع $y=x^3+3x-3x^2$ در بازه $[-1,3]$، کدام بازه است؟

۱) $[-1,63]$ ۲) $[-7,9]$ ۳) $[-1,27]$ ۴) $[-7,63]$

۱۴۴. برد تابع $f(x)=\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{5-x}}$، با فرض این‌که $D_f=[1,4]$، کدام بازه است؟

۱) $[-\frac{1}{2},\sqrt{3}-1]$ ۲) $[-\frac{1}{2},\sqrt{3}+1]$ ۳) $[\frac{1}{2},\sqrt{3}+1]$ ۴) $[\frac{1}{2},\sqrt{3}-1]$

۱۴۵. تابع $f(x)=\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}$ با دامنه $[-2,5]$ مفروض است. برد این تابع شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۴۶. تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-2x-3$ با دامنهٔ $\{x\,|\,|x-1|<2\}$ همواره چگونه است؟ (ریاضی ۹۱)

۱) منفی ۲) مثبت ۳) صعودی ۴) نزولی

بخش‌پذیری و تقسیم

۱۴۷. باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=x^3-3x^2+4x-5$ بر $2x-4$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) -4

۱۴۸. اگر باقی‌ماندهٔ $f(x)$ بر $3x-1$ برابر R باشد، باقی‌ماندهٔ $f(x)$ بر $x-\frac{1}{3}$ کدام است؟

۱) $R+\frac{1}{2}$ ۲) $3R$ ۳) $\frac{R}{3}$ ۴) R

۱۴۹. باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $x^4-ax^3+x^2+2ax+1$ بر $x+1$ برابر ۴ است. a کدام است؟

۱) -4 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۴

۱۵۰. باقی‌ماندهٔ تقسیم $x^2-2x-27$ بر $x-a$ برابر ۸ است. مقدار مثبت a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

۱۵۱. به ازای چه مقدار a عبارت x^3+ax^2+x+4 بر $x-1$ بخش‌پذیر است؟

۱) -3 ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) -6

۱۵۲. چه عددی به چندجمله‌ای $3x^3-5x^2+2x$ اضافه کنیم تا حاصل بر $x-2$ بخش‌پذیر شود؟

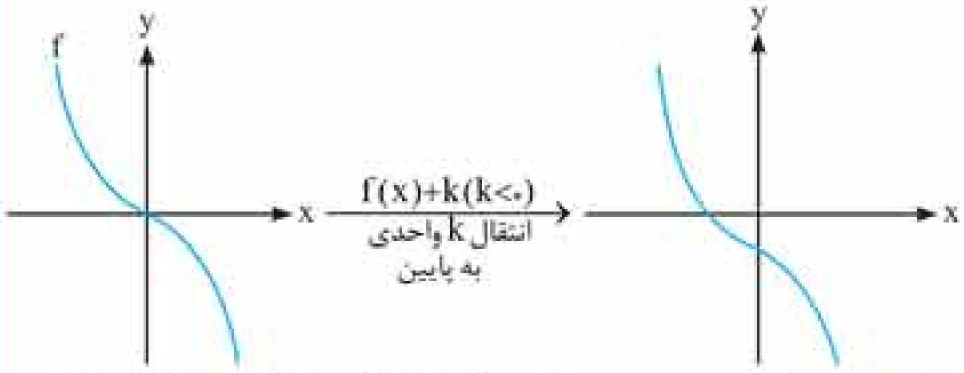
۱) -8 ۲) -6 ۳) -4 ۴) ۲

۱۵۳. اگر چندجمله‌ای x^3+x^2+ax-1 بر $x+a$ بخش‌پذیر باشد، a کدام است؟

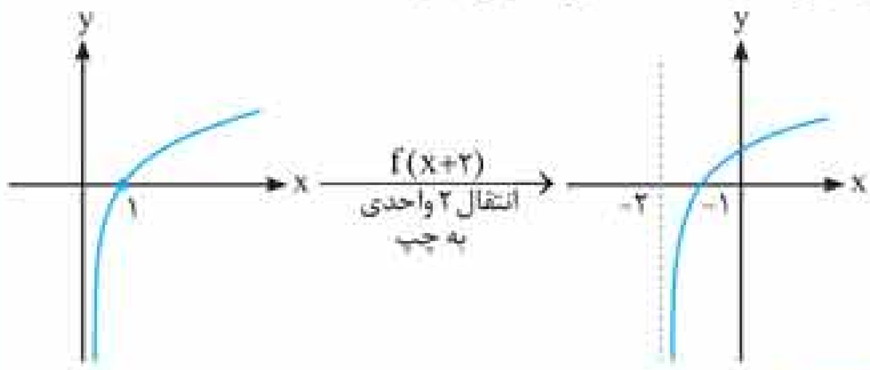
۱) -1 ۲) ۱ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $-\sqrt{2}$

پاسخ‌های تشریحی

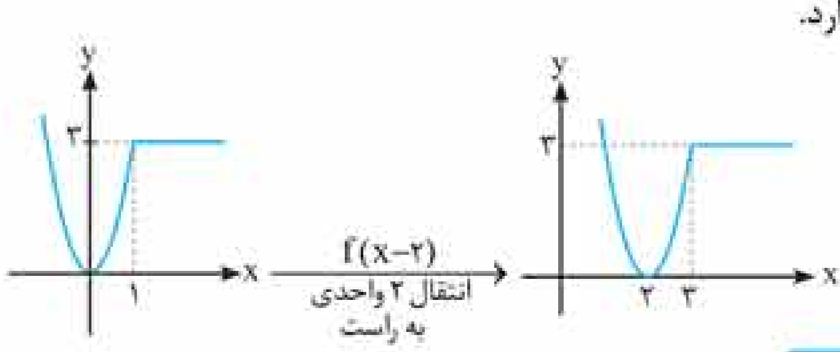
۱. **گزینه ۴** برای رسم نمودار تابع $f(x)+k$ با شرط $k<0$، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم و به سمت پایین انتقال دهیم. لازم به ذکر است که دامنهٔ تابع $f(x)+k$ با دامنهٔ تابع $f(x)$ هیچ تفاوتی ندارد و انتقال در راستای قائم، فقط می‌تواند روی برد تابع جدید اثر بگذارد.



۲. **گزینه ۲** با فرض این که $f(x)=\log(x)$ و $g(x)=\log(x+2)$ می‌توان دریافت: $g(x)=f(x+2)$. برای رسم نمودار تابع $f(x+2)$ از روی نمودار تابع $f(x)$، کافی است نمودار تابع f را ۲ واحد در جهت افقی و به سمت چپ منتقل کنیم. لازم به ذکر است تمام دامنهٔ $f(x+2)$ از ابتدا تا انتها به ۲ واحد چپ‌تر منتقل می‌شوند ولی برد این تابع با برد $f(x)$ هیچ تفاوتی ندارد.



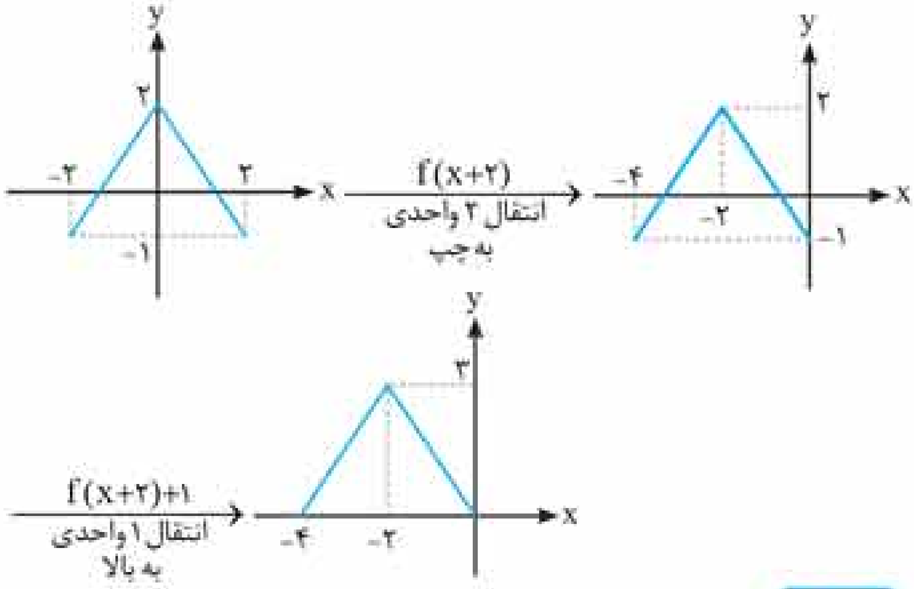
۳. **گزینه ۴** برای رسم نمودار تابع $f(x-2)$ از روی نمودار تابع $f(x)$، کافی است نمودار تابع f را ۲ واحد در جهت افقی و به سمت راست انتقال دهیم. لازم به ذکر است تمام دامنهٔ $f(x-2)$ از ابتدا تا انتها به ۲ واحد راست‌تر از دامنهٔ $f(x)$ منتقل می‌شوند، اما برد $f(x-2)$ با برد $f(x)$ هیچ فرقی ندارد.



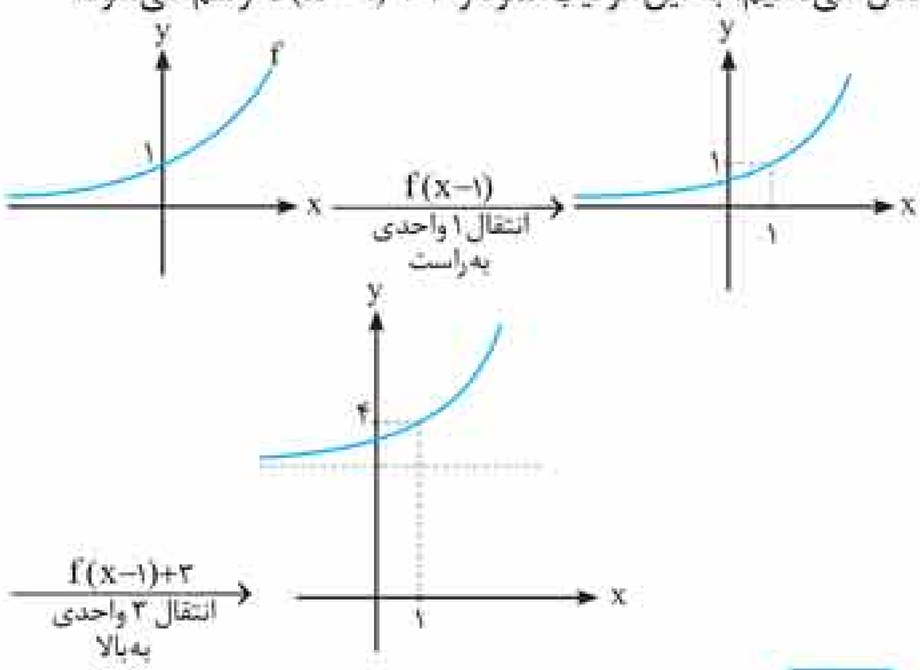
۴. **گزینه ۱**

راهبرد: برای رسم نمودارهای ترکیبی (شامل انتقال افقی و عمودی و ...)، ابتدا تکلیف داخل پرانتز جلوی f را روشن می‌کنیم و سپس سراغ اجزای بیرون پرانتز می‌رویم.

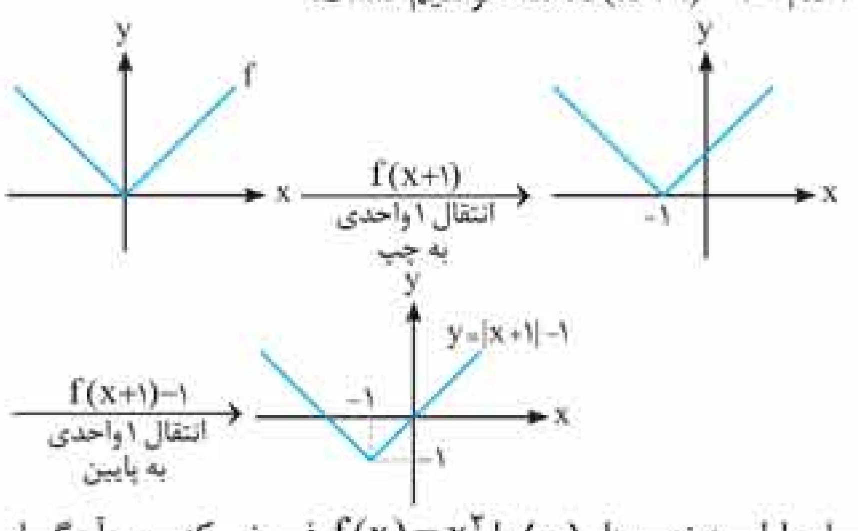
برای رسم نمودار $f(x+2)+1$ ابتدا نمودار $f(x+2)$ را رسم می‌کنیم که به همین منظور باید نمودار تابع f را در جهت افقی و به اندازهٔ ۲ واحد به چپ منتقل کنیم. سپس نمودار حاصل را یک واحد در راستای قائم و به سمت بالا انتقال می‌دهیم. به این ترتیب نمودار $f(x+2)+1$ رسم می‌شود.



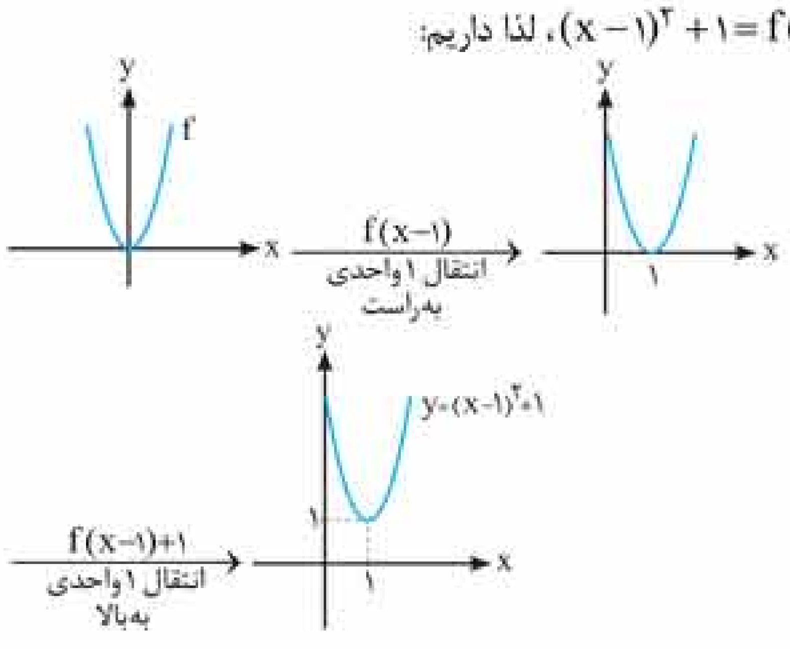
۵. **گزینه ۱** برای رسم نمودار $f(x-1)+3$ از روی نمودار $f(x)$، ابتدا نمودار $f(x-1)$ را رسم می‌کنیم که به همین منظور باید نمودار تابع f را در جهت افقی و به اندازهٔ ۱ واحد به سمت راست منتقل کنیم. سپس نمودار حاصل را ۳ واحد در راستای قائم و به سمت بالا انتقال می‌دهیم. به این ترتیب نمودار $f(x-1)+3$ رسم می‌شود.



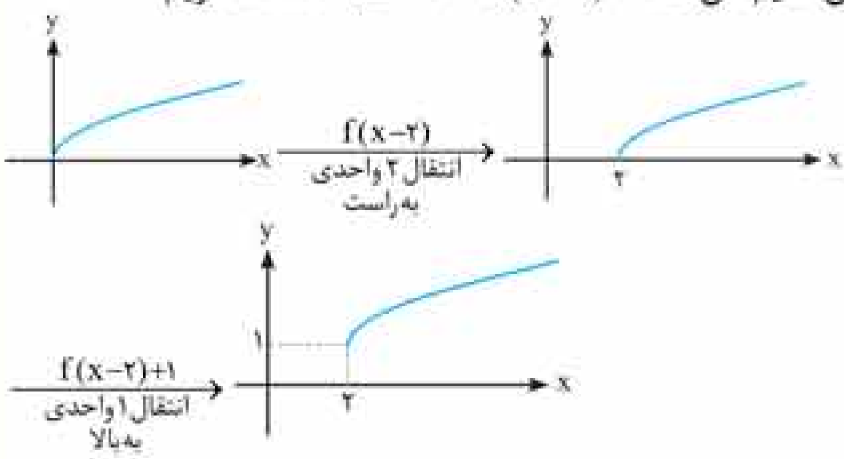
۶. **گزینه ۳** نمودارهای **(الف)** و **(پ)** درست رسم شده‌اند. اگر تابع اولیه نمودار **(الف)** را $f(x)=|x|$ فرض کنیم، آن‌گاه $f(x+1)-1=|x+1|-1$، لذا خواهیم داشت:



اگر تابع اولیه نمودار **(پ)** را $f(x)=x^2$ فرض کنیم، آن‌گاه $f(x-1)+1=(x-1)^2+1$، لذا داریم:



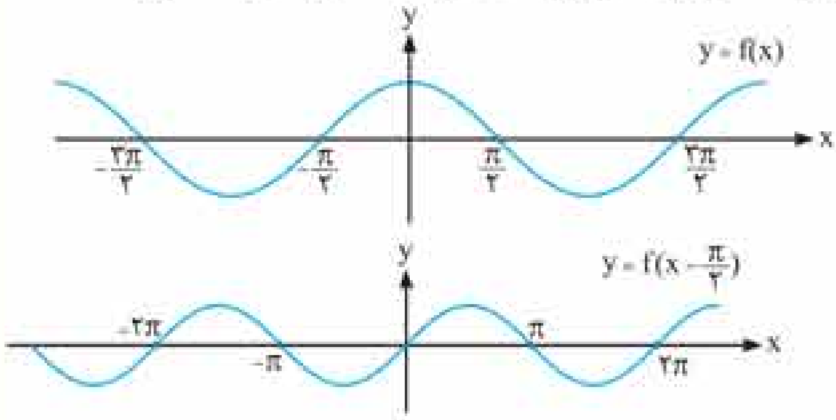
و اما در مورد نمودار صحیح (ب)، اگر تابع اولیه نمودار را $f(x)=\sqrt{x}$ فرض کنیم، آن‌گاه $f(x-۲)+۱=\sqrt{x-۲}+۱$، لذا داریم:



۷. گزینه ۲ با فرض این که $f(x)=\cos x$ باشد، خواهیم داشت:

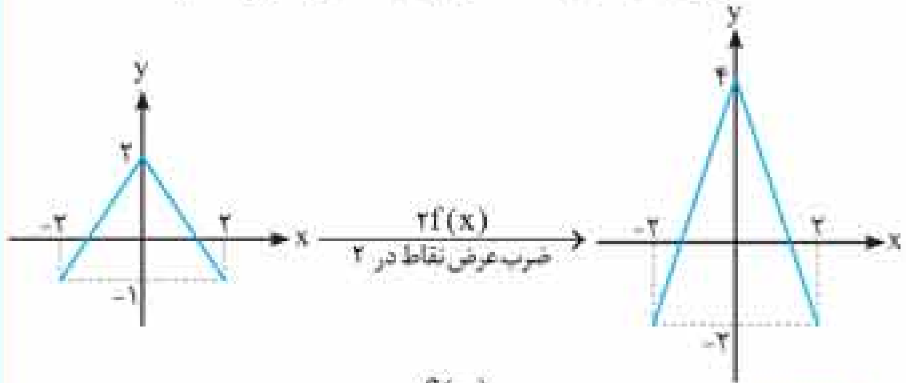
$$\cos(x-\frac{\pi}{۲})=f(x-\frac{\pi}{۲})$$

برای رسم نمودار تابع $f(x-\frac{\pi}{۲})$ از روی نمودار $f(x)$، کافی است نمودار f را $\frac{\pi}{۲}$ واحد در جهت افقی و به سمت راست انتقال دهیم. لذا داریم:

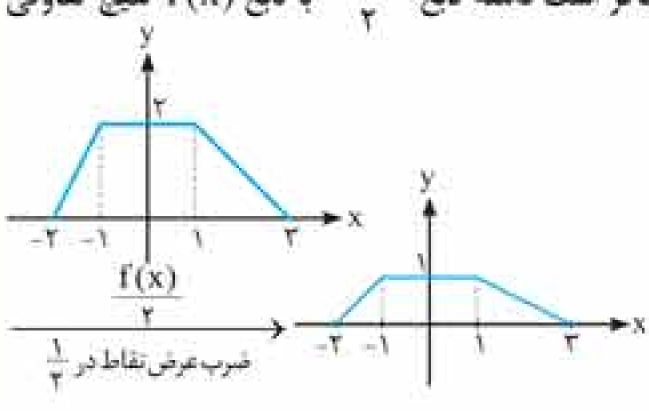


همان‌طور که دیده می‌شود نمودار $f(x-\frac{\pi}{۲})$ بر نمودار تابع $y=\sin x$ منطبق است.

۸. گزینه ۲ برای رسم نمودار تابع $۲f(x)$ از روی نمودار تابع $f(x)$ کافی است عرض نقاط نمودار $f(x)$ را در ۲ ضرب کنیم. یعنی عملاً برد تابع را دو برابر می‌کنیم که در این حالت انبساط عمودی رخ می‌دهد. لازم به ذکر است که دامنهٔ تابع $۲f(x)$ با دامنهٔ تابع $f(x)$ هیچ فرقی ندارد.



۹. گزینه ۴ برای رسم نمودار تابع $\frac{f(x)}{۲}$ از روی نمودار $f(x)$، کافی است عرض نقاط نمودار تابع f را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب کنیم. که در این حالت انقباض عمودی رخ می‌دهد. لازم به ذکر است دامنهٔ تابع $\frac{f(x)}{۲}$ با تابع $f(x)$ هیچ تفاوتی نخواهد داشت.



۱۰. گزینه ۳

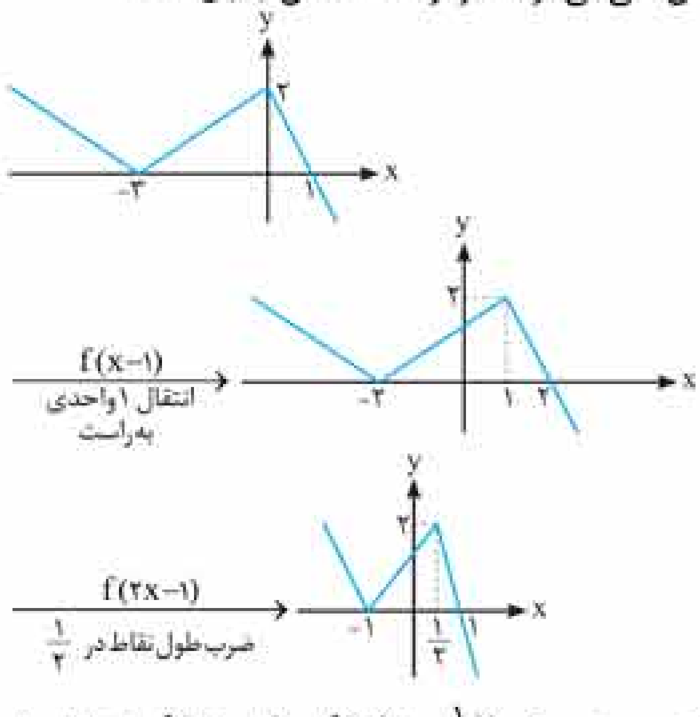
تذکر:

۱ در رسم نمودارهای به فرم $kf(ax+b)+c$ از روی نمودار $f(x)$ ابتدا سراغ درون پرانتز مقابل f می‌رویم و سپس به اجزای خارج پرانتز می‌پردازیم.

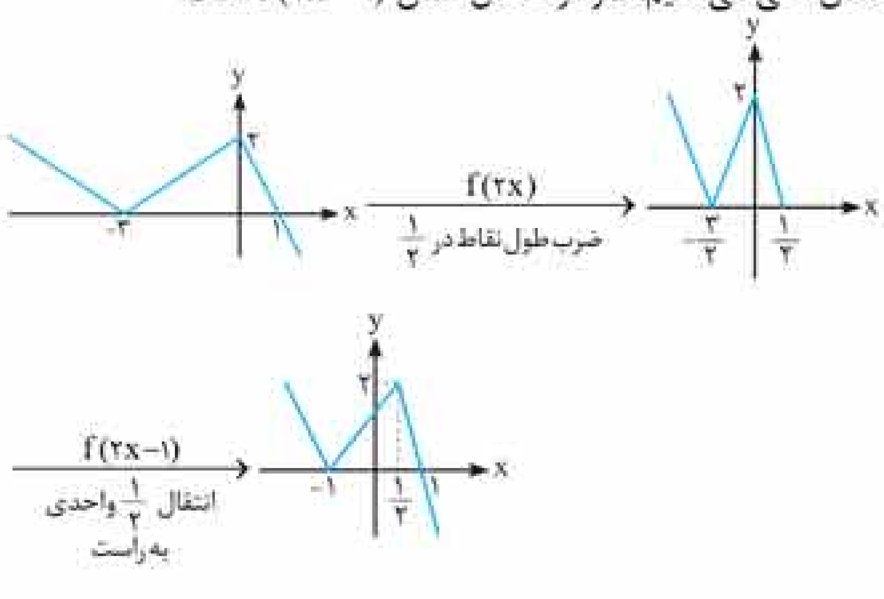
۲ در رسم نمودارهای به فرم $f(ax+b)$ از روی نمودار $f(x)$ در صورتی که $|a|>۱$ نمودار دچار فشردگی (انقباض) افقی می‌شود و در حقیقت دامنهٔ تابع در $\frac{۱}{a}$ ضرب می‌شود نه در a.

دام آموزشی: بسیاری از دانش‌آموزان برای رسم $f(ax+b)$ از روی نمودار $f(x)$ ابتدا طول همهٔ نقاط f را در $\frac{۱}{a}$ ضرب کرده (انبساط را انقباض را اعمال می‌کنند)، سپس به اندازهٔ b واحد انتقال افقی را اعمال می‌کنند که این کار غلط است. ابتدا باید انتقال افقی b واحدی اعمال شده و سپس طول همهٔ نقاط نمودار حاصل در $\frac{۱}{a}$ ضرب شود.

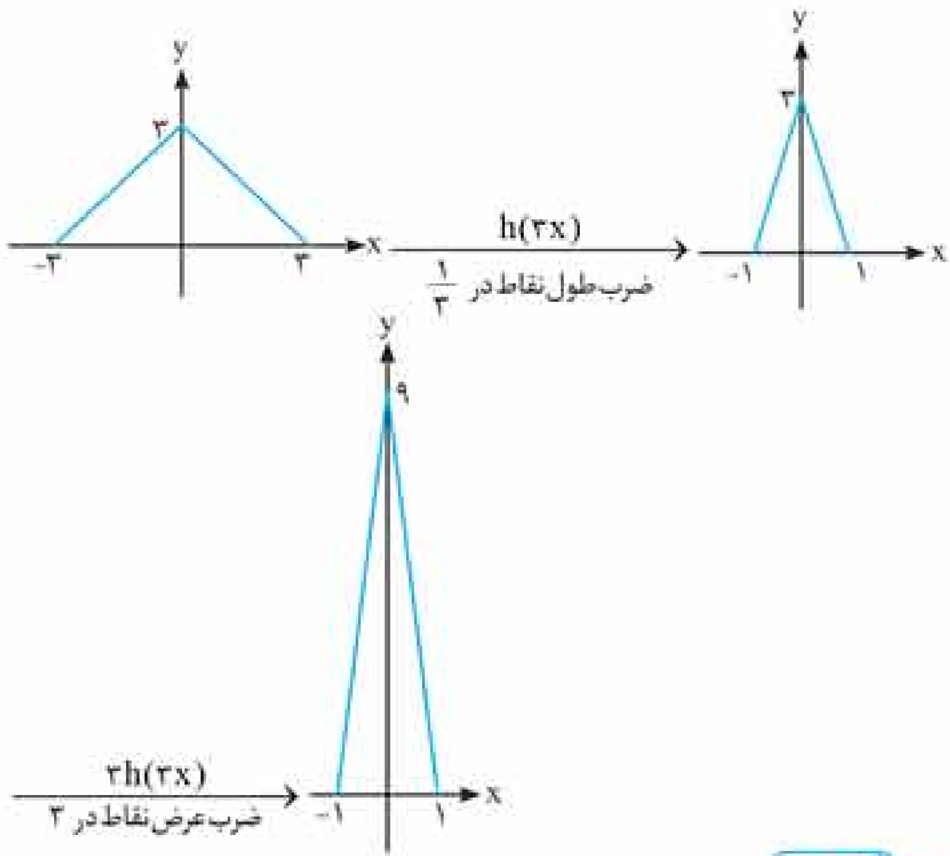
روش اول برای رسم نمودار $g(x)=f(۲x-۱)$ از روی نمودار $f(x)$، ابتدا نمودار $f(x)$ را ۱ واحد در جهت مثبت محور xها انتقال افقی می‌دهیم $f(x-۱)$. سپس طول همهٔ نقاط نمودار حاصل را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم (نمودار دچار انقباض افقی می‌شود.) نمودار حاصله همان $g(x)$ است.



روش دوم با توجه به این که $f(۲x-۱)=f(۲(x-\frac{۱}{۲}))$، ابتدا نمودار $f(۲x)$ را رسم کرده و سپس نمودار حاصل را $\frac{۱}{۲}$ واحد به سمت راست انتقال افقی می‌دهیم. نمودار حاصل همان $f(۲x-۱)$ است:



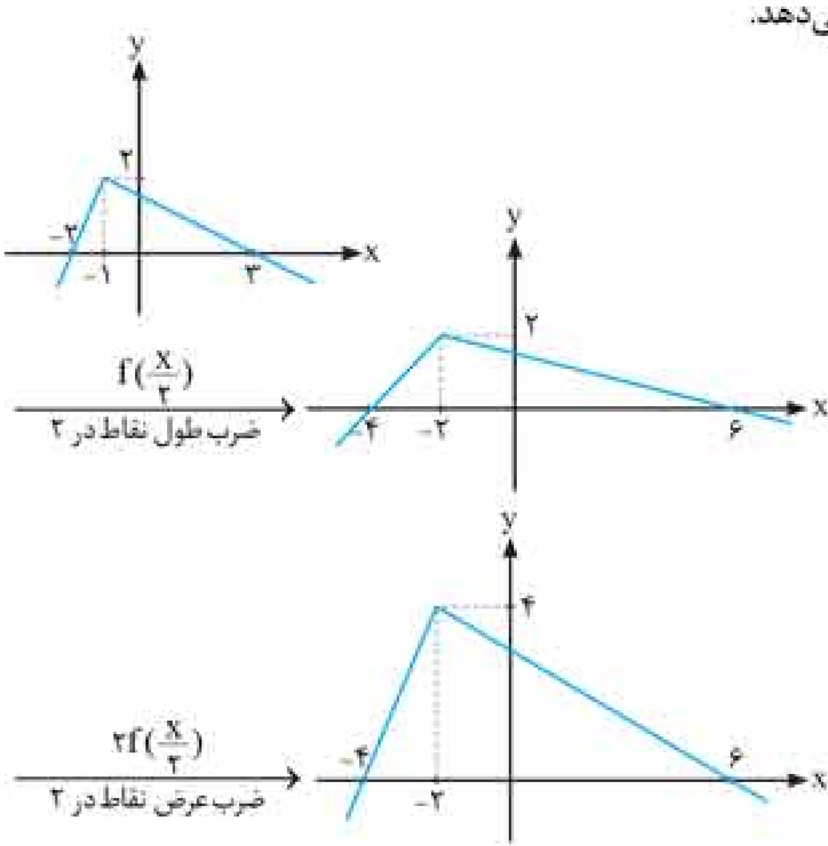
۱۱. گزینه ۲ برای رسم نمودار $3h(3x)$ از روی نمودار $h(x)$ ابتدا نمودار $h(3x)$ را رسم می‌کنیم که به همین منظور می‌بایست طول همهٔ نقاط نمودار را در $\frac{1}{3}$ ضرب کنیم. سپس عرض نقاط به‌دست‌آمده از نمودار جدید را در ۳ ضرب می‌کنیم تا $3h(3x)$ پدید آید.

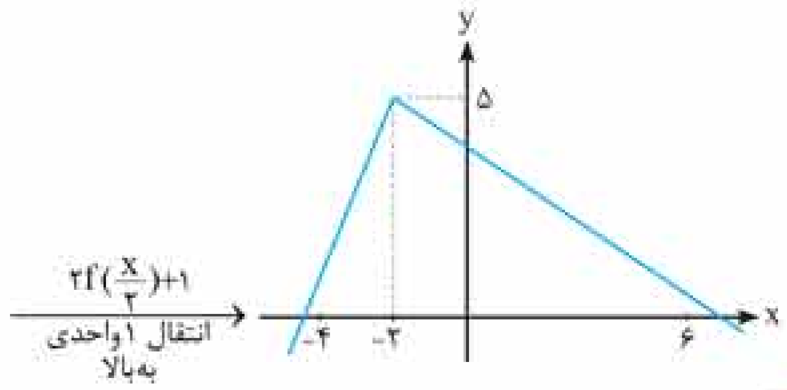


۱۲. گزینه ۲

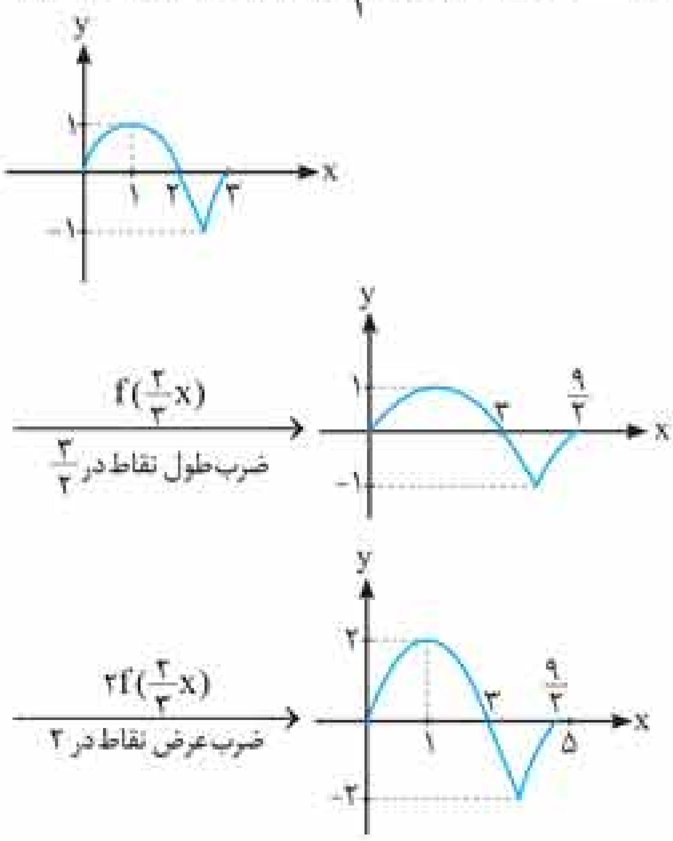
تذکر: در رسم نمودارهای به فرم $f(ax+b)$ از روی نمودار $f(x)$ در صورتی که $|a|<1$ نمودار دچار کشیدگی (انبساط) افقی می‌شود و در حقیقت دامنهٔ تابع در $\frac{1}{a}$ ضرب می‌شود نه در a.

برای رسم نمودار $g(x)$، ابتدا باید $f(\frac{x}{2})$ را رسم کنیم. به همین منظور طول همهٔ نقاط نمودار f را در ۲ ضرب می‌کنیم (نمودار دچار انبساط افقی می‌شود). در گام بعدی، سراغ اجزای خارج پرانتز می‌رویم. همیشه ضرب بر جمع تقدم دارد. لذا در قدم بعدی باید نمودار $2f(\frac{x}{2})$ را رسم کنیم. به همین جهت عرض همهٔ نقاط نمودار $f(\frac{x}{2})$ را در ۲ ضرب می‌کنیم (نمودار دچار انبساط عمودی می‌شود) و در نهایت کل نمودار $2f(\frac{x}{2})$ را یک واحد در راستای قائم و به سمت بالا منتقل می‌کنیم. نمودار حاصل، $g(x)$ را نمایش می‌دهد.

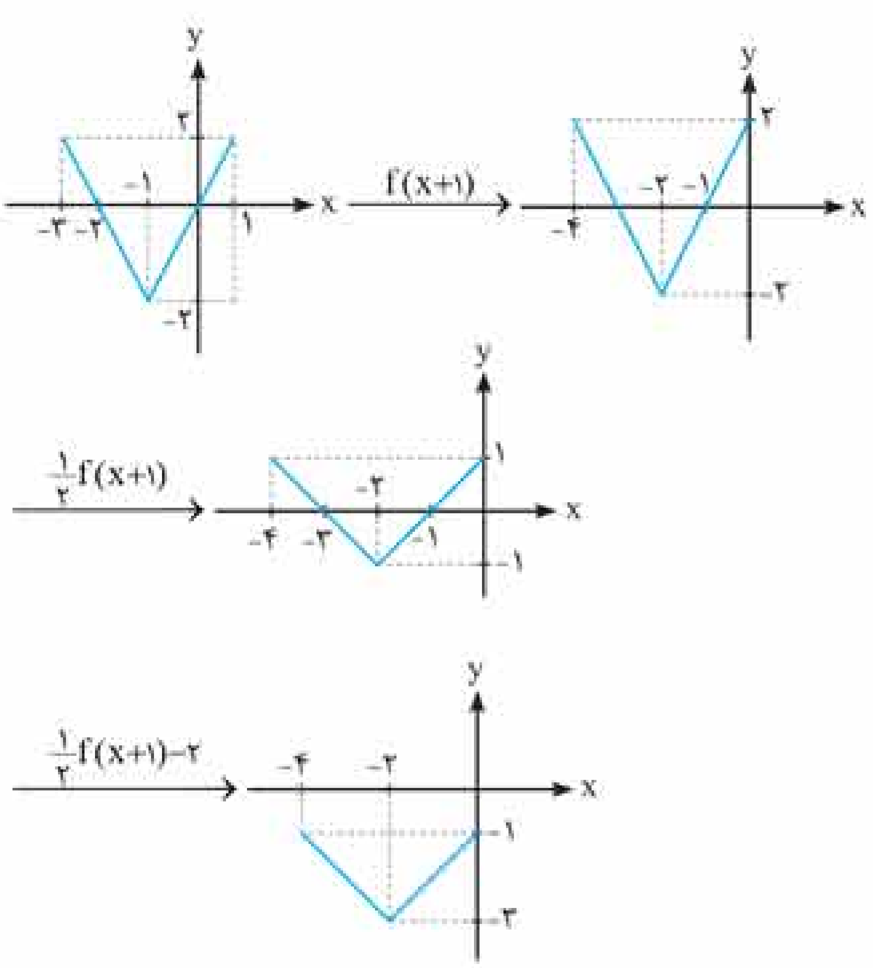


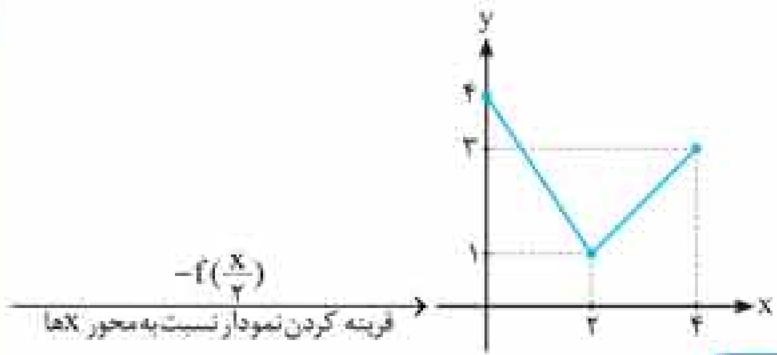


۱۳. گزینه ۳ برای رسم نمودار $g(x)$، ابتدا طول همهٔ نقاط نمودار f را در $\frac{3}{2}$ ضرب می‌کنیم. عرض همهٔ نقاط نمودار $f(\frac{2}{3}x)$ را در ۲ ضرب می‌کنیم.



۱۴. گزینه ۴ برای رسم نمودار $g(x)$، ابتدا باید $f(x+1)$ را رسم کنیم. به همین منظور نمودار f را در جهت افقی و به سمت چپ یک واحد انتقال می‌دهیم. در گام بعدی سراغ اجزای خارج پرانتز می‌رویم. همیشه ضرب بر جمع تقدم دارد و باید نمودار $\frac{1}{2}f(x+1)$ را رسم کنیم. به همین جهت عرض همهٔ نقاط نمودار $f(x+1)$ را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم (نمودار دچار انقباض عمودی می‌شود) و در نهایت کل نمودار $\frac{1}{2}f(x+1)$ را ۲ واحد و به سمت پایین منتقل می‌کنیم. نمودار حاصل، $g(x)$ را نمایش می‌دهد.

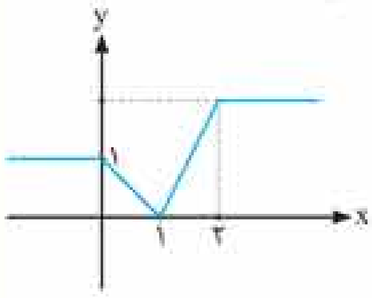


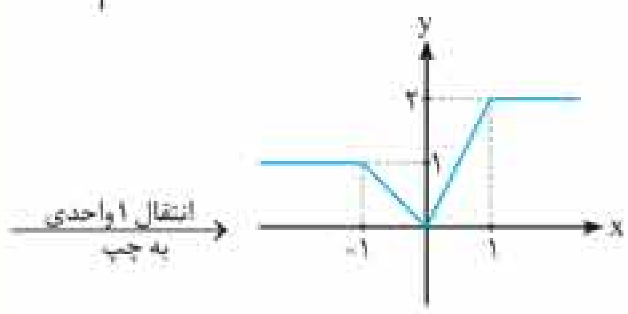


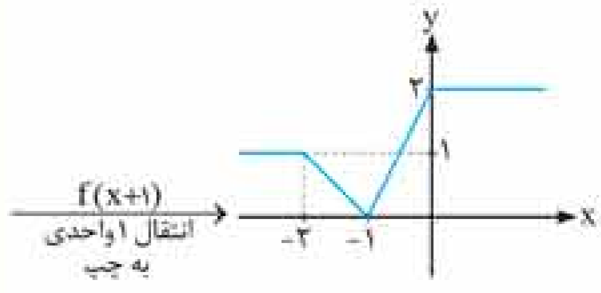
۳۵. گزینه ۴

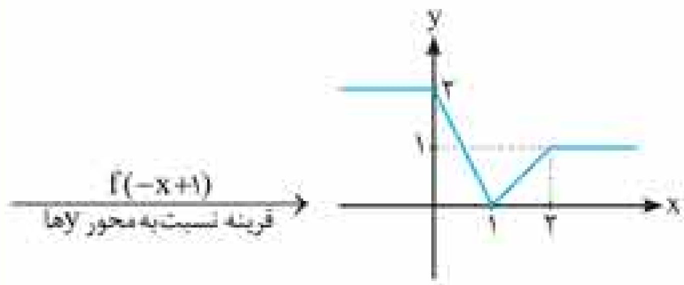
دام آموزشی: با توجه به این که $f(1-x)=f(-(x-1))$، بسیاری از دانش‌آموزان با قرینه کردن نمودار $f(x-1)$ نسبت به محور yها به نمودار $f(1-x)$ دست یافته‌اند و گزینهٔ «۳» را انتخاب می‌کنند. باید بدانید که در عملیات‌های رسم نمودار هر کاری که داریم فقط و فقط با خود x است نه با $(x-1)$ یا ...

برای رسم نمودار $f(1-x)$، ابتدا باید با استفاده از نمودار $f(x-1)$ به نمودار $f(x)$ دست یابیم. به همین جهت کافی است نمودار $f(x-1)$ را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم تا $f(x)$ به‌دست آید. حال که $f(x)$ را داریم، $f(-x+1)$ را رسم می‌کنیم:









۳۶. گزینه ۲ ابتدا با استفاده از ضابطهٔ $f(2-2x)$، ضابطهٔ $f(x)$ را به‌دست آورده و سپس ضابطهٔ $f(x-1)-3$ را می‌نویسیم تا بفهمیم شکل نمودار به چه صورتی است:

$$f(2-2x)=(2x-1)^2$$

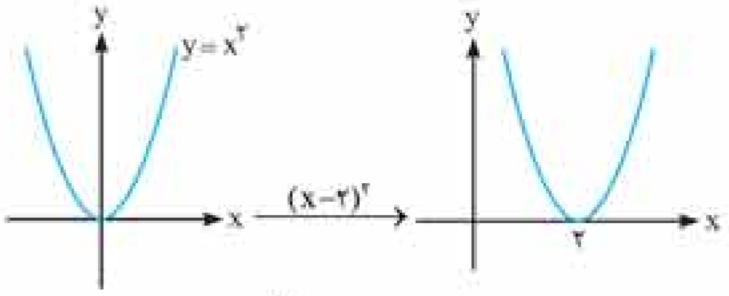
$$\xrightarrow{2-2x=z \Rightarrow x=\frac{2-z}{2}} f(z)=(2(\frac{2-z}{2})-1)^2 \Rightarrow f(z)=(1-z)^2$$

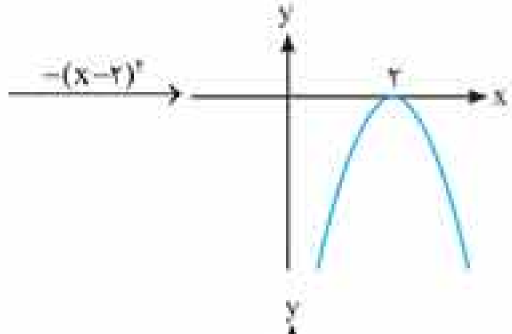
$$\Rightarrow f(x)=(1-x)^2$$

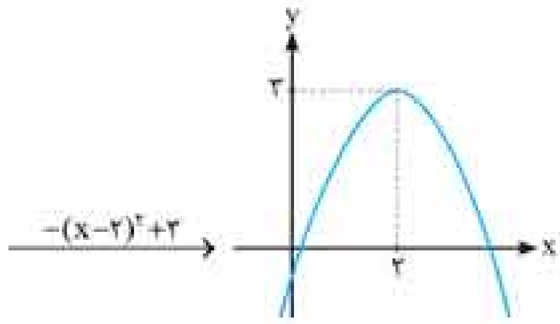
$$g(x)=3-f(x-1)=3-(1-(x-1))^2=3-(2-x)^2$$

$$\Rightarrow g(x)=-(x-2)^2+3$$

حال نمودار $g(x)$ را از روی نمودار $y=x^2$ رسم می‌کنیم:

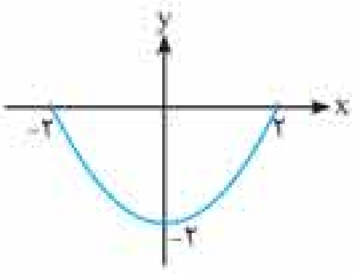


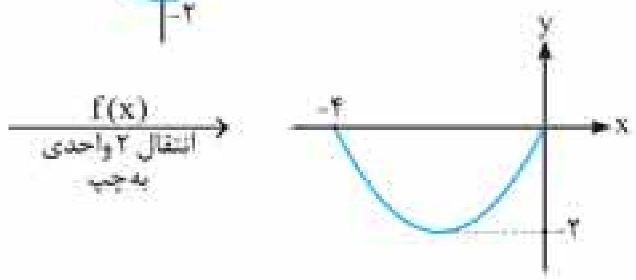


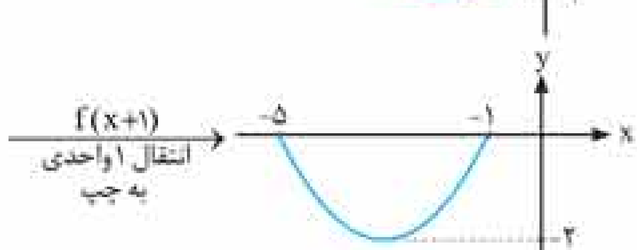


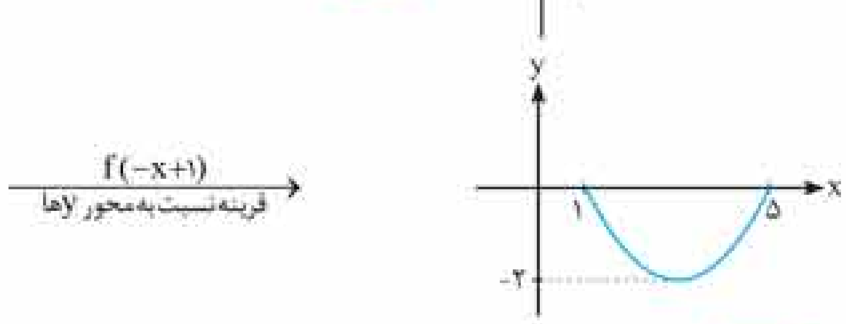
همان‌طور که واضح است گزینهٔ «۲» پاسخ صحیح مسئله است.

۳۷. گزینه ۳ ابتدا باید از نمودار داده‌شده به نمودار $f(x)$ رسید و سپس نمودار مطلوب را رسم کرد. به همین جهت کافی است تابع $f(x-2)$ را ۲ واحد به سمت چپ انتقال دهیم تا نمودار $f(x)$ پدید آید (دقیقاً معکوس کاری که برای رسیدن از $f(x)$ به $f(x-2)$ انجام می‌دادیم). حال که نمودار $f(x)$ را داریم، ابتدا آن را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم سپس نمودار حاصل را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم تا $f(-x+1)$ ظاهر گردد.









۳۸. گزینه ۳ **روش اول** برای حل این‌گونه مسائل باید هر دو نمودار را از نظر انتقال‌های افقی و عمودی و انبساط‌ها و انقباض‌های افقی و عمودی بررسی کرد.

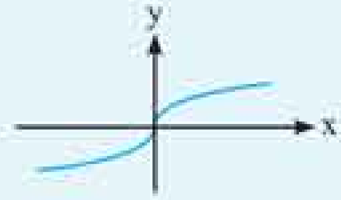
همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، نمودار دچار هیچ فشردگی یا کشیدگی نشده است. بنابراین می‌توان دریافت که:

۹۶. گزینه ۲ **روش اول** ابتدا ضابطهٔ تابع معکوس $y=-x^3-1$ را نوشته، سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$y=-x^3-1 \Rightarrow y+1=-x^3 \Rightarrow x=-\sqrt[3]{y+1} \Rightarrow y=-\sqrt[3]{x+1}$$

برای رسم نمودار $y=-\sqrt[3]{x+1}$، کافی است نمودار $y=\sqrt[3]{x}$ را یک واحد به سمت چپ انتقال افقی داده و سپس نسبت به محور xها قرینه کنیم. نمودار حاصل همان نمودار تابع معکوس $y=-x^3-1$ است.

نکته: به طور کلی نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x}$ به شکل زیر است:

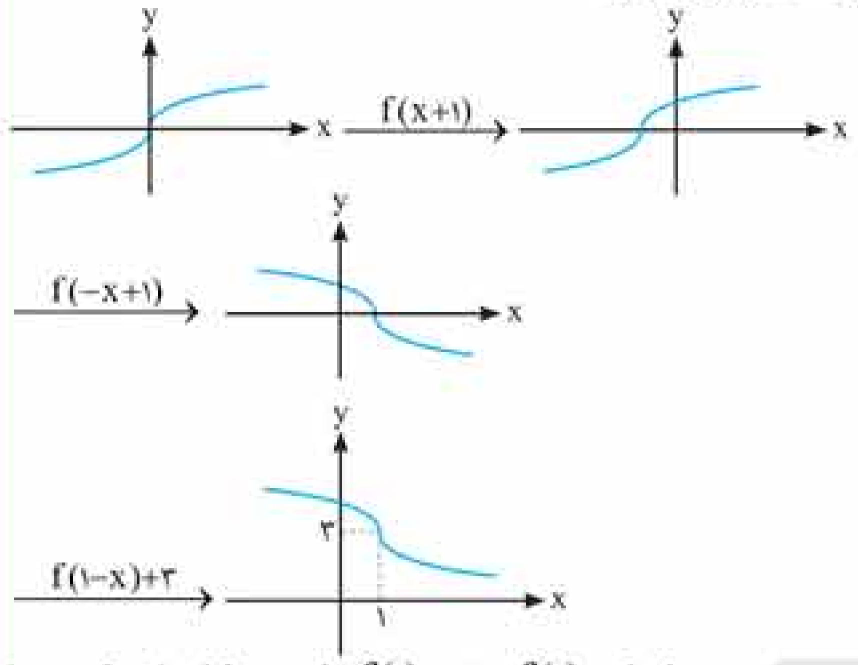


روش دوم

$$f(-1)=0 \Rightarrow f^{-1}(0)=-1$$
$$f(0)=-1 \Rightarrow f^{-1}(-1)=0$$

این دو نقطه را در شکل‌ها امتحان می‌کنیم که فقط در گزینه «۲» صدق می‌کنند.

۹۷. گزینه ۴ **روش اول** با فرض $f(x)=\sqrt[3]{x}$ به عنوان تابع اولیه باید نمودار $f(1-x)+3$ را رسم کنیم. به همین منظور ابتدا نمودار f را یک واحد به سمت چپ انتقال افقی داده $f(x+1)$ و سپس نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم $(f(-x+1))$ و در نهایت سه واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.



روش دوم دو نقطه $f(0)=4$ و $f(1)=3$ را در شکل‌های گزینه‌ها امتحان می‌کنیم که فقط در گزینه (۴) صدق می‌کنند.

۹۸. گزینه ۱ نوشتن ضابطهٔ معکوس این تابع سخت است. نیازی هم به آن نداریم. کافی است جای طول و عرض نقاط گزینه‌ها را عوض کرده و در ضابطهٔ تابع $f(x)$ قرار دهیم (زیرا اگر $(y,x)\in f^{-1}$ آن‌گاه $(x,y)\in f$). اگر نقاط $(-2,-9)$، $(3,1)$، $(0,3)$ و $(-2,11)$ را در ضابطهٔ $f(x)=x^3+x+1$ قرار دهیم، خواهیم دید که تنها نقطهٔ $(-2,-9)$ در ضابطه صدق می‌کند، بنابراین معکوس این تابع از نقطهٔ $(-9,-2)$ می‌گذرد.

۹۹. گزینه ۴ اگر تابع معکوس y از نقطهٔ $(4,2)$ بگذرد، آن‌گاه خود y از $(2,4)$ می‌گذرد، بنابراین $(2,4)$ را در ضابطهٔ $y=x^3+ax-4$ قرار می‌دهیم:

$$y=x^3+ax-4 \xrightarrow{(2,4)} 4=(2)^3+2a-4 \Rightarrow 2a=0 \Rightarrow a=0$$

۱۰۰. گزینه ۳ ضابطهٔ معکوس تابع را می‌نویسیم و از برابری $f(x)=f^{-1}(x)$ تعداد نقاط برخورد را پیدا می‌کنیم:

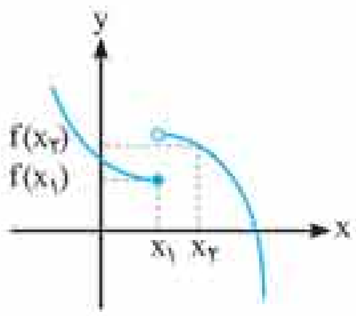
$$y=-(x+2)^3-2 \Rightarrow y+2=-(x+2)^3 \Rightarrow x+2=-\sqrt[3]{y+2}$$
$$\Rightarrow x=-\sqrt[3]{y+2}-2 \Rightarrow y=-\sqrt[3]{x+2}-2$$
$$f(x)=f^{-1}(x) \Rightarrow -(x+2)^3-2=-\sqrt[3]{x+2}-2$$
$$\Rightarrow (x+2)^3=\sqrt[3]{x+2} \Rightarrow (x+2)^9=(x+2)$$
$$\Rightarrow (x+2)=0 \text{ یا } (x+2)^8=1 \Rightarrow x+2=0 \text{ یا } x+2=\pm 1$$
$$\Rightarrow x=-2 \text{ یا } x=-1 \text{ یا } x=-3$$

دقت کنید: محل برخورد تابع با وارونش ممکن است روی نیمساز ربع اول و سوم قرار نداشته باشد.

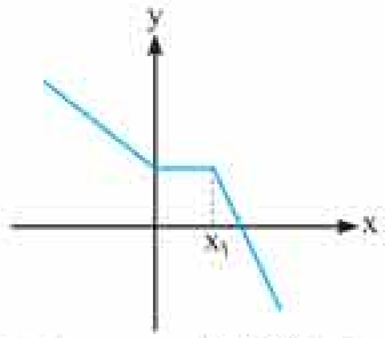
بنابراین این دو تابع در سه نقطه متقاطع‌اند.

۱۰۱. گزینه ۳ تابع اکیداً نزولی تابعی است که هرچه مقدار x آن افزایش یابد، مقدار $f(x)$ آن کاهش یابد. یا به زبان ریاضی: $x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)<f(x_1)$. طبق تعریف، شکل‌ها را بررسی می‌کنیم.

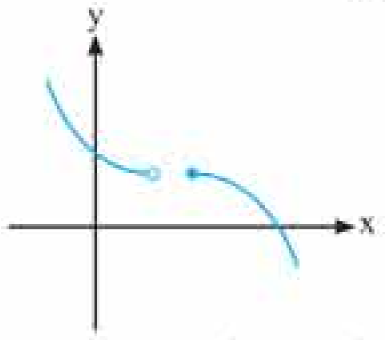
گزینهٔ «۱»: همان‌طور که در شکل می‌بینیم: $x_2>x_1$ اما $f(x_2)>f(x_1)$، بنابراین این تابع اکیداً نزولی نیست.



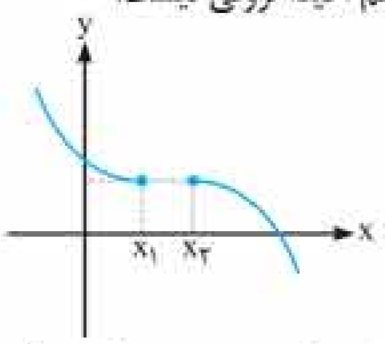
گزینهٔ «۲»: این تابع در بازه $[0,x_1]$ مقدار ثابتی را پذیرفته است. به همین دلیل این تابع نیز نزولی اکید نیست.



گزینهٔ «۳»: در تمامی نقاط این نمودار کاهش مقدار $f(x)$ از چپ به راست دیده می‌شود. پس این تابع اکیداً نزولی است.



گزینهٔ «۴»: در دو نقطه x_1 و x_2 داریم: $f(x_1)=f(x_2)$ که این با تعریف تابع اکیداً نزولی مغایرت دارد، پس این تابع هم اکیداً نزولی نیست.



۱۰۲. گزینه ۳ تابع اکیداً صعودی تابعی است که هرچه مقدار x آن افزایش یابد، مقدار y یا همان $f(x)$ آن نیز افزایش یابد. یا به زبان ریاضی $x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$. یعنی نقاط با عرض یکسان نباید در

۱۳۰. گزینه۳

راهبرد: اگر توابع f و g اکیداً صعودی باشند، $f+g$ نیز اکیداً صعودی خواهد بود و اگر f و g اکیداً نزولی باشند، $f+g$ نیز اکیداً نزولی خواهد بود. اما در مورد توابع $f-g$ ، $f\times g$ و f^2 حکم کلی وجود ندارد.

با توجه به نکته فوق، تابع $f+g$ در $D_f \cap D_g$ اکیداً صعودی است.

فرمول ممنوع: به کمک مثال نقض گزینه‌های «۱»، «۲» و «۴» را رد می‌کنیم. فرض کنیم $f(x)=g(x)=x$ (هر دو اکیداً صعودی‌اند) باشد، در این صورت داریم:

گزینهٔ «۱»: $(f-g)(x)=0$ ⊗ هم صعودی و هم نزولی

گزینهٔ «۲»: $(fg)(x)=x^2$ ⊗ نه صعودی و نه نزولی

گزینهٔ «۴»: $(f^2)(x)=x^2$ ⊗ نه صعودی و نه نزولی

۱۳۱. گزینه۳

اگر تابع g نزولی باشد، آن‌گاه $-g$ حتماً صعودی خواهد بود (زیرا نسبت به محور xها قرینه می‌شود). بنابراین تابع $f+(-g)=f-g$ جمع دو تابع صعودی است، پس صعودی خواهد بود. اما در مورد تابع $\frac{f}{g}$ نمی‌توان حکم کلی صادر کرد.

۱۳۲. گزینه۲

نکته: اگر دو تابع f و g هر دو صعودی اکید و یا نزولی اکید باشند، آن‌گاه fog و gof صعودی اکید خواهند بود، یعنی:

$$\begin{cases} x_2 > x_1 \xrightarrow[\text{نزولی}]{g} g(x_2) < g(x_1) \\ \qquad \xrightarrow[\text{نزولی}]{f} f(g(x_2)) > f(g(x_1)) \\ \qquad \Rightarrow fog(x_2) > fog(x_1) \\ x_2 > x_1 \xrightarrow[\text{صعودی}]{g} g(x_2) > g(x_1) \\ \qquad \xrightarrow[\text{صعودی}]{f} f(g(x_2)) > f(g(x_1)) \\ \qquad \Rightarrow fog(x_2) > fog(x_1) \end{cases}$$

اگر یکی از f و g صعودی اکید و دیگری نزولی اکید باشد، fog و gof هر دو نزولی اکید خواهند بود، یعنی:

$$\begin{cases} x_2 > x_1 \xrightarrow[\text{نزولی}]{g} g(x_2) < g(x_1) \\ \qquad \xrightarrow[\text{صعودی}]{f} f(g(x_2)) < f(g(x_1)) \\ \qquad \Rightarrow fog(x_2) < fog(x_1) \\ x_2 > x_1 \xrightarrow[\text{صعودی}]{g} g(x_2) > g(x_1) \\ \qquad \xrightarrow[\text{نزولی}]{f} f(g(x_2)) < f(g(x_1)) \\ \qquad \Rightarrow fog(x_2) < fog(x_1) \end{cases}$$

با توجه به نکته فوق، توابع fog و gof نزولی اکید و تابع‌های fof و gog صعودی اکید خواهند بود، پس فقط موارد **(الف)** و **(ت)** صحیح‌اند.

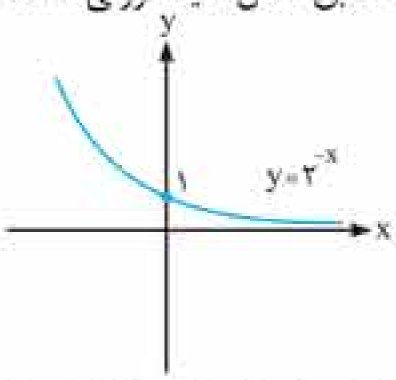
۱۳۳. گزینه۳ توابع $y=x$ و $y=f(x)$ هر دو اکیداً صعودی هستند و جمع دو تابع اکیداً صعودی نیز اکیداً صعودی خواهد بود، بنابراین گزینه «۳» صحیح است.

۱۳۴. گزینه۳ هر دو تابع $y=x$ و $y=\sqrt{x}$ در دامنه خود اکیداً صعودی‌اند، بنابراین $f(x)=x+\sqrt{x}$ نیز اکیداً صعودی خواهد بود. اما تابع $g(x)$ یکنوا نیست، چون $g(x)=(\sqrt{x}-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$ که اگر $0 \le x \le \frac{1}{4}$ باشد، g نزولی و به‌ازای $x > \frac{1}{4}$ صعودی اکید خواهد بود.

۱۳۵. گزینه۱ تابع $y=x^4+1$ اکیداً صعودی و تابع g اکیداً نزولی است، بنابراین $g(x^4+1)$ ترکیب یک تابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی خواهد بود، پس اکیداً نزولی می‌باشد. انتقال یک واحدی نیز تأثیری در یکنوایی $g(x^4+1)$ نداشته و در نتیجه $f(x)$ اکیداً نزولی است.

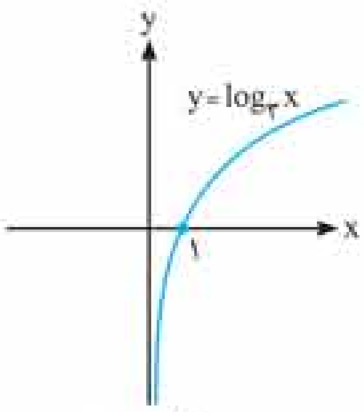
۱۳۶. گزینه۲ تابع $y=\frac{\pi}{x^2+2}$ در بازه $[0,+\infty)$ اکیداً نزولی است، زیرا با افزایش مقدار x مقدار y کاهش می‌یابد و همواره $0 < \frac{\pi}{x^2+2} \le \frac{\pi}{2}$ است که تابع $\cos x$ در بازه $(0,\frac{\pi}{2}]$ اکیداً نزولی است. بنابراین $f(x)=\cos\frac{\pi}{x^2+2}$ در بازه $[0,+\infty)$ ترکیب دو تابع اکیداً نزولی می‌باشد و در نتیجه اکیداً صعودی خواهد بود. در بازه $(-\infty,0)$ تابع $y=\frac{\pi}{x^2+2}$ صعودی اکید است ولی تابع $\cos x$ در بازه $(0,\frac{\pi}{2})$ باز هم اکیداً نزولی است، بنابراین $f(x)=\cos\frac{\pi}{x^2+2}$ در بازه $(-\infty,0)$ ترکیب یک تابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی می‌باشد و در نتیجه اکیداً نزولی خواهد بود.

۱۳۷. گزینه۱ تابع fog نزولی است، پس یکی از توابع باید صعودی و دیگری باید نزولی باشد. تابع $f(x)=2^{-x}$ مطابق شکل اکیداً نزولی است.



پس تابع g باید صعودی باشد. با توجه به این‌که $4>3>2$، لذا $f(2) \le f(3) \le f(4)$. یعنی $1 \le a \le 5$، بنابراین حداکثر مقدار طبیعی a برابر با ۵ است.

۱۳۸. گزینه۳ برای آن که ترکیب دو تابع اکیداً نزولی شود، باید یکی از آن‌ها اکیداً صعودی و دیگری اکیداً نزولی باشد. تابع $y=\log_2 x$ در کل دامنه‌اش اکیداً صعودی می‌باشد.



بنابراین $y=x^2-4x-5$ باید نزولی باشد. برابر $y=(x-2)^2-9$ که نمودار یک سهمی روبه بالا با رأس $(2,-9)$ است در واقع این تابع در بازه $(-\infty,+2]$ اکیداً نزولی است.

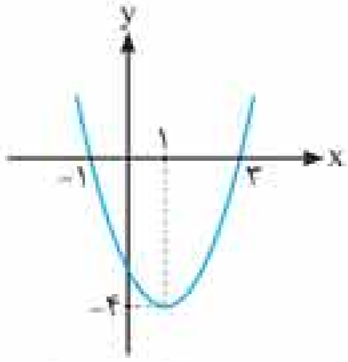
حل مسئله هنوز تمام نشده است. باید بررسی کنیم که به‌ازای چه xهایی از بازه $(-\infty,2]$ جلوی لگاریتم مثبت می‌شود، بنابراین داریم:

پس تابع اکیداً نزولی است و داریم:

$$f(5)\le f(x)\le f(-2)\Rightarrow \sqrt{11}-\sqrt{7}\le f(x)\le 2$$
$$\Rightarrow 0/6\le f(x)\le 2$$

که در این بازه تنها دو عدد طبیعی ۱ و ۲ یافت می‌شود.

۱۴۶. گزینهٔ ۱ با توجه به این‌که $x^2-2x-3=(x-1)^2-4$ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



دامنه $|x-1|<2$ است، یعنی $-2<x-1<2$ و در نتیجه $-1<x<3$، یعنی دقیقاً بین نقاط برخورد تابع با محور xها. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود نمودار در این بازه، نه صعودی و نه نزولی است اما مقدار آن همواره منفی است. لذا گزینهٔ «۱» صحیح است.

۱۴۷. گزینهٔ ۱

تذکر: باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $ax+b$ برابر با $f(-\frac{b}{a})$ است.

برای به‌دست آوردن باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $2x-4$، کافی است $f(2)$ را حساب کنیم: (ریشهٔ $2x-4$، برابر با ۲ است.)

$$f(2)=2^3-3(2)^2+4(2)-5=8-12+8-5=-1$$

۱۴۸. گزینهٔ ۴

نکته: باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $ax+b$ و $x+\frac{b}{a}$ یکسان است.

ریشهٔ هر دو عبارت $3x-1$ و $x-\frac{1}{3}$ یکسان و برابر با $\frac{1}{3}$ است، یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر هر دو عبارت $3x-1$ و $x-\frac{1}{3}$، همان $f(\frac{1}{3})$ یا R است، پس گزینهٔ «۴» صحیح است.

۱۴۹. گزینهٔ ۲ برای محاسبهٔ باقی‌مانده باید ریشهٔ مقسوم‌علیه را به‌دست آوریم و آن را در f قرار دهیم. یعنی در ضابطهٔ $f(x)$، به جای x، -1 بگذاریم و در نهایت حاصل را برابر با ۴ قرار دهیم و a را حساب می‌کنیم:

$$f(-1)=4\Rightarrow (-1)^4-a(-1)^3+(-1)^2+2a(-1)+1=4$$
$$\Rightarrow 1+a+1-2a+1=4\Rightarrow 3-a=4\Rightarrow a=-1$$

۱۵۰. گزینهٔ ۴ ریشهٔ مقسوم‌علیه $(x-a)$ را به‌دست می‌آوریم و آن را در $f(x)=x^2-2x-27$ قرار می‌دهیم. حاصل باید برابر ۸ شود:

$$x-a=0\Rightarrow x=a$$
$$f(a)=8\Rightarrow a^2-2a-27=8\Rightarrow a^2-2a-35=0$$
$$\Rightarrow (a-7)(a+5)=0\Rightarrow a=7,-5\xrightarrow{a>0}a=7$$

۱۵۱. گزینهٔ ۴

راهبرد: برای آن که چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ بخش‌پذیر باشد، کافی است داشته باشیم: $f(-\frac{b}{a})=0$.

حاصل چندجمله‌ای به ازای $x=1$ باید صفر شود، پس به‌جای x، ۱ می‌گذاریم و حاصل را مساوی صفر قرار داده و a را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=x^3+ax^2+x+4\xrightarrow{f(1)=0}1^3+a(1)^2+1+4=0$$
$$\Rightarrow 1+a+1+4=0\Rightarrow a=-6$$

۱۵۲. گزینهٔ ۱ فرض کنیم مقداری که به چندجمله‌ای $3x^3-5x^2+2x$ اضافه می‌شود تا بر $x-2$ بخش‌پذیر شود، برابر با a باشد. یعنی چندجمله‌ای جدید ما $f(x)=3x^3-5x^2+2x+a$ است که بر $x-2$ بخش‌پذیر است. بنابراین کافی است رابطهٔ $f(2)=0$ را تشکیل دهیم تا مقدار a به‌دست آید:

$$f(2)=0\Rightarrow 3(2)^3-5(2)^2+2(2)+a=0\Rightarrow 24-20+4+a=0$$
$$\Rightarrow a=-8$$

۱۵۳. گزینهٔ ۱ حاصل چندجمله‌ای به ازای $x=-a$ باید صفر شود، یعنی به جای x، $-a$ گذاشته و حاصل را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$f(x)=x^3+x^2+ax-1$$
$$\xrightarrow{f(-a)=0}(-a)^3+(-a)^2+a(-a)-1=0$$
$$\Rightarrow -a^3+a^2-a^2-1=0\Rightarrow a^3=-1\Rightarrow a=-1$$

۱۵۴. گزینهٔ ۲ برای فهم بهتر $f(x^2-1)$ را تابع جدیدی مانند $g(x)$ در نظر گرفته و ضابطهٔ تابع $g(x)=f(x^2-1)$ را به دست می‌آوریم:

$$g(x)=f(x^2-1)=(x^2-1)+k$$

برای آن که $g(x)$ بر $x-2$ بخش‌پذیر باشد، باید داشته باشیم: $g(2)=0$، یعنی در ضابطهٔ g به جای x، ۲ می‌گذاریم و حاصل را برابر صفر قرار می‌دهیم تا مقدار k به دست آید:

$$g(2)=0\Rightarrow 2^2-1+k=0\Rightarrow 3+k=0\Rightarrow k=-3$$

۱۵۵. گزینهٔ ۱ باید حاصل چندجمله‌ای به ازای ریشهٔ مقسوم‌علیه یعنی -2 صفر شود، یعنی به جای x، -2 می‌گذاریم و عبارت را بررسی می‌کنیم:

$$f(x)=ax^3+5x^2+bx-20$$
$$\xrightarrow{f(-2)=0}a(-2)^3+5(-2)^2+b(-2)-20=0$$
$$\Rightarrow -8a+20-2b-20=0\Rightarrow 8a+2b=0\Rightarrow 4a+b=0$$

بنابراین شرط لازم و کافی برای بخش‌پذیری $f(x)$ بر $x+2$، این است که: $4a+b=0$.

۱۵۶. گزینهٔ ۱ مقدار چندجمله‌ای به ازای $x=\alpha+\beta$ برابر با صفر است. با جای‌گذاری $\alpha+\beta$ به جای x داریم:

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)+k$$
$$\xrightarrow{f(\alpha+\beta)=0}((\alpha+\beta)-\alpha)((\alpha+\beta)-\beta)+k=0$$
$$\Rightarrow \beta\alpha+k=0\Rightarrow k=-\alpha\beta$$

۱۵۷. گزینهٔ ۱ تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم تا مشخص شود که مقدار f به‌ازای ریشهٔ کدام گزینه صفر می‌شود.

گزینهٔ «۱»: حاصل چندجمله‌ای x^3+5x^2+x-10 به ازای $x=-2$ برابر است با: $(-2)^3+5(-2)^2+(-2)-10=0$ بنابراین گزینهٔ «۱» درست است.

گزینهٔ «۲»: مقدار $f(6)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(6)=6^3+5(6)^2+6-10=392$$

پس این گزینه نادرست است.

گزینهٔ «۳»: مقدار $f(-6)$ را حساب می‌کنیم:

$f(-6)=(-6)^3+5(-6)^2+(-6)-10=-52$. پس این گزینه نیز نادرست است.

گزینهٔ «۴»: مقدار $f(-3)$ را حساب می‌کنیم:

$f(-3)=(-3)^3+5(-3)^2+(-3)-10=5$. پس این گزینه هم نادرست است.

۱۵۸. گزینه ۳

راهبرد: هر چندجمله‌ای که مجموع ضرایب تمامی جملات آن برابر با صفر باشد بر $(x-1)$ بخش‌پذیر است و هر چندجمله‌ای که مجموع ضرایب جملات با درجه فرد آن برابر با مجموع ضرایب جملات با درجه زوج آن باشد بر $(x+1)$ بخش‌پذیر است. (توجه داشته باشید که عدد ثابت در هر چندجمله‌ای ضریب x^0 محسوب می‌شود و در حقیقت ضریب جمله‌ای با درجه زوج است.)

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌های «۱» و «۲»: با توجه به این که مجموع ضرایب جملات این چندجمله‌ای برابر صفر است، پس بر $(x-1)$ بخش‌پذیر است و چون مجموع ضرایب جملات درجه فرد با مجموع ضرایب جملات درجه زوج برابر است، پس بر $x+1$ نیز بخش‌پذیر است. (اگر از راهبرد استفاده نکنیم می‌توانیم $f(1)$ و $f(-1)$ را حساب کنیم.)

گزینه «۳»: مقدار $f(3)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(3)=3^3+2(3)^2-3-2=40$$

پس این عبارت بر $x-3$ بخش‌پذیر نیست.

گزینه «۴»: مقدار $f(-2)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(-2)=(-2)^3+2(-2)^2-(-2)-2=0$$

پس این عبارت بر $x+2$ بخش‌پذیر است.
لذا گزینهٔ «۳» درست است.

۱۵۹. گزینه ۲

با توجه به فرض مسئله، روابط $f(1)=0$ و $f(-2)=33$ برای چندجمله‌ای گزینهٔ صحیح می‌بایست صدق کنند، بنابراین همهٔ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینه «۱»:

$$f(1)=1^2-5(1)+4=0,\ f(-2)=(-2)^2-5(-2)+4=18$$

پس این گزینه نادرست است.

گزینه «۲»:

$$f(1)=1^2-10(1)+9=0,\ f(-2)=(-2)^2-10(-2)+9=33$$

این گزینه درست است.

گزینه «۳»:

$$f(1)=1^2-4(1)+3=0,\ f(-2)=(-2)^2-4(-2)+3=15$$

پس این گزینه نیز نادرست است.

گزینه «۴»:

$$f(1)=1^2-9(1)+8=0,\ f(-2)=(-2)^2-9(-2)+8=30$$

پس این گزینه هم نادرست است.

۱۶۰. گزینه ۴ با توجه به این که $f(-1)=2$، با جای‌گذاری -1 در $f(x)$ مقدار m را به‌دست آورده و سپس باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای بر $x-1$ یا همان $f(1)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(-1)=2 \Rightarrow 2(-1)^4+m(-1)+2=2 \Rightarrow -m=-2 \Rightarrow m=2$$
$$\Rightarrow f(x)=2x^4+2x+2$$

باقی‌مانده بر $x-1$: $f(1)=2(1)^4+2(1)+2=6$

۱۶۱. گزینه ۳ با استفاده از اطلاعات مسئله می‌توان گفت: $f(-2)=0$ و $f(1)=3$. با جای‌گذاری -2 و 1 در چندجمله‌ای، مقادیر m و n را به‌دست آورده و سپس باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای بر $x-3$ یا همان $f(3)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(-2)=0 \Rightarrow (-2)^3+m(-2)+n=0 \Rightarrow -2m+n=8 \quad \boxed{1}$$
$$f(1)=3 \Rightarrow 1^3+m(1)+n=3 \Rightarrow m+n=2 \quad \boxed{2}$$
$$\xrightarrow{\boxed{1}-\boxed{2}} -3m=6 \Rightarrow m=-2$$
$$\Rightarrow n=4 \Rightarrow f(x)=x^3-2x+4$$

باقی‌مانده بر $x-3$: $f(3)=3^3-2(3)+4=25$

۱۶۲. گزینه ۳ با توجه به این که $f(1)=1$، $f(2)=4$ و $f(3)=9$، با جای‌گذاری مقادیر ۱، ۲ و ۳ در ضابطهٔ $f(x)$، a، b و c را به دست آورده و سپس باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای بر $x+1$ یا همان $f(-1)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(1)=1 \Rightarrow 1^3+a(1)^2+b(1)+c=1 \Rightarrow a+b+c=0 \quad \boxed{1}$$
$$f(2)=4 \Rightarrow 2^3+a(2)^2+b(2)+c=4 \Rightarrow 4a+2b+c=-4 \quad \boxed{2}$$
$$f(3)=9 \Rightarrow 3^3+a(3)^2+b(3)+c=9$$
$$\Rightarrow 9a+3b+c=-18 \quad \boxed{3}$$
$$\xrightarrow{\boxed{1},\boxed{2},\boxed{3}} a=-5, b=11, c=-6$$
$$\Rightarrow f(x)=x^3-5x^2+11x-6$$

باقی‌مانده بر $x+1$: $f(-1)=(-1)^3-5(-1)^2+11(-1)-6=-23$

۱۶۳. گزینه ۲ برای بخش‌پذیر $f(x)$ بر $x\cos\alpha-\sin\alpha$ کافی است داشته باشیم: $f(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})=0$ یا $f(\tan\alpha)=0$.

بنابراین با جای‌گذاری $x=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ داریم: $f(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})=0$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^3\cos^3\alpha-m\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\sin 2\alpha+\sin^3\alpha=0$$
$$\xrightarrow{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha} \sin^3\alpha-2m\sin^2\alpha+\sin^3\alpha=0$$
$$\Rightarrow 2\sin^3\alpha-2m\sin^2\alpha=0 \Rightarrow \sin^3\alpha=m\sin^2\alpha$$
$$\Rightarrow m=\sin\alpha$$

۱۶۴. گزینه ۲ با توجه به این که $x^2-4=(x-2)(x+2)$، می‌توان گفت که $f(x)$ هم بر $x-2$ و هم بر $x+2$ بخش‌پذیر است. بنابراین: $f(2)=f(-2)=0$. حال با جای‌گذاری $x=2$ و $x=-2$ مقادیر a و b را به‌دست می‌آوریم:

$$f(2)=0 \Rightarrow 2^4+4a(2)^2+2b(2)+1=0$$
$$\Rightarrow 16+16a+4b+1=0 \Rightarrow 16a+4b=-17 \quad \boxed{1}$$
$$f(-2)=0 \Rightarrow (-2)^4+4a(-2)^2+2b(-2)+1=0$$
$$\Rightarrow 16+16a-4b+1=0 \Rightarrow 16a-4b=-17 \quad \boxed{2}$$
$$\xrightarrow[\text{داریم}]{\text{با توجه به } \boxed{1},\boxed{2}} b=0, a=-\frac{17}{16} \Rightarrow a+b=-\frac{17}{16}$$

۱۶۵. گزینه ۴ می‌دانیم: $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$، بنابراین $f(x)$ هم بر $x-1$ و هم بر $x-2$ بخش‌پذیر است و داریم: $f(1)=f(2)=0$. حال با جای‌گذاری $x=1$ و $x=2$ در ضابطهٔ f، مقادیر a و b را محاسبه می‌کنیم:

$$f(1)=0 \Rightarrow 1^4-a(1)^3+5(1)^2-9(1)+b=0 \Rightarrow b-a-3=0 \quad \boxed{1}$$
$$f(2)=0 \Rightarrow 2^4-a(2)^3+5(2)^2-9(2)+b=0$$
$$\Rightarrow b-8a+18=0 \quad \boxed{2}$$
$$\xrightarrow{\boxed{1},\boxed{2}} a=3, b=6 \Rightarrow a+b=9$$

۱۶۶. گزینه ۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ برابر با R یعنی $f(a)=R$ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x+a$ برابر است با: $f(-a)$. با استفاده از فرضیات مسئله $f(-a)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)+f(-x)=2f(x) \Rightarrow f(x)=f(-x)$$
$$\xrightarrow{x=a} f(-a)=f(a) \Rightarrow f(-a)=R$$

$$=\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}=t^2-t+1\Rightarrow A=(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$$

$$\xrightarrow{t=\frac{1+\sqrt{17}}{2}}A=(\frac{1+\sqrt{17}}{2}-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}=\frac{17}{4}+\frac{3}{4}=5$$

روش دوم (با دنباله هندسی)

اگر توجه کنید می‌بینید که صورت کسر دنباله هندسی با جمله اول $a=1$ و قدر نسبت $q=-t$ می‌باشد و ۹ جمله دارد و مخرج کسر دنباله هندسی با جمله اول $a=1$ و قدر نسبت $q=-t^3$ می‌باشد و ۳ جمله دارد.

از سال گذشته به یاد داریم که مجموع دنباله هندسی از رابطه روبرو پیروی می‌کند:

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{\frac{1(1-(-t)^9)}{1+t}}{\frac{1(1-(-t^3)^3)}{1+t^3}}=\frac{1+t^3}{1+t}=t^2-t+1$$

$$=(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\xrightarrow{t=\frac{1+\sqrt{17}}{2}}5$$

۲۰۷. گزینه ۴ برای آن که f بر $x+2$ بخش‌پذیر باشد، داریم: $f(-2)=0$

بنابراین با جای‌گذاری $x=-2$، مقدار $f(x)$ برابر با صفر است و می‌توان a را به دست آورد:

$$f(-2)=0\Rightarrow(-2)^4+a(-2)^3-8(-2)=0\Rightarrow 16-8a+16=0$$

$$\Rightarrow 8a=32\Rightarrow a=4$$

برای حل معادلهٔ $f(x)=0$ خواهیم داشت:

$$f(x)=x^4+4x^3-8x=0$$

$$\xrightarrow[\text{عبارت را بر } x+2 \text{ تقسیم می‌کنیم}]{\text{به کمک تقسیم چندجمله‌ای‌ها}}x(x+2)(x^2+2x-4)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=-2\\x^2+2x-4=0\end{cases}$$

$$x^2+2x-4=0\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{2}=\sqrt{5}-1,-\sqrt{5}-1$$

بنابراین کوچک‌ترین ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=0$، $-\sqrt{5}-1$ است.

۲۰۸. گزینه ۴

باقی‌ماندهٔ تقسیم x^4+ax^2-bx+4 بر $(x-1)^2=x^2-2x+1$ برابر با صفر است. با صفر قراردادن مقسوم‌علیه داریم: $x^2\equiv 2x-1$. لذا خواهیم داشت:

$$x^4+ax^2-bx+4\equiv(2x-1)^2+a(2x-1)-bx+4$$

$$\equiv 4x^2-4x+1+2ax-a-bx+4$$

$$\xrightarrow{x^2\equiv 2x-1}4(2x-1)-4x+1+2ax-a-bx+4$$

$$\equiv(2a-b+4)x+(1-a)$$

$$\xrightarrow{R(x)=0}(2a-b+4)x+(1-a)=0$$

$$\Rightarrow 2a-b+4=0,1-a=0\Rightarrow a=1,b=6$$

۲۰۹. گزینه ۲ ابتدا عبارت را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=ax^3+4x^2-14x+10-a$$

$$=a(x^3-1)+4x^2-14x+10$$

$$=a(x-1)(x^2+x+1)+(x-1)(4x-10)$$

$$=(x-1)(ax^2+(a+4)x+a-10)$$

از دل $f(x)$ یک $(x-1)$ بیرون کشیدیم. حال برای آن که $f(x)$ بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر باشد.

باید پرانتز دوم یا همان $g(x)=ax^2+(a+4)x+a-10$ نیز بر $x-1$ بخش‌پذیر شود یعنی رابطهٔ $g(1)=0$ باید برقرار باشد:

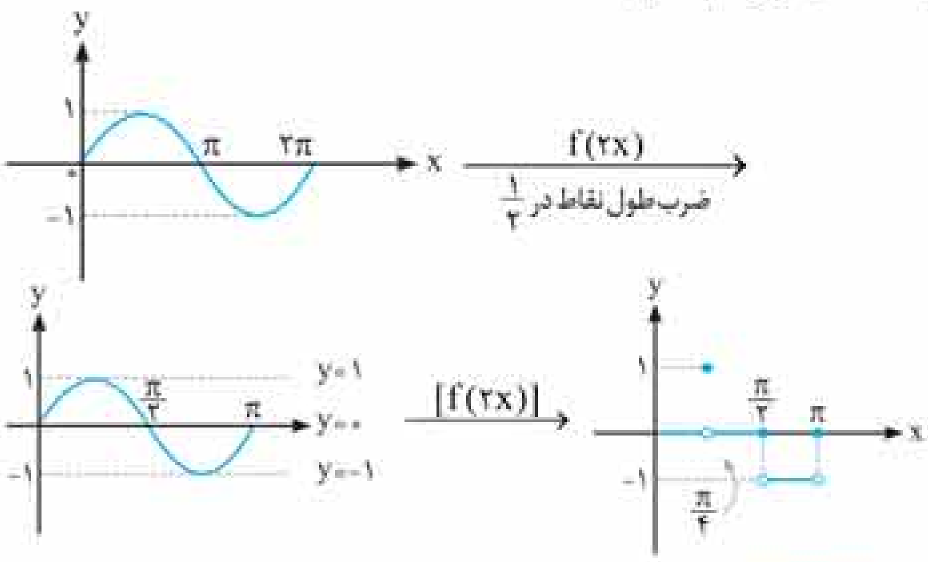
$$g(1)=0\Rightarrow a(1)^2+(a+4)(1)+a-10=0$$

$$\Rightarrow 3a-6=0\Rightarrow a=2$$

۲۱۰. گزینه ۳

نکته: برای رسم نمودار $y=[f(x)]$، ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم کرده، سپس خطوط افقی $y=n(n\in\mathbb{Z})$ را که نمودار f را قطع می‌کنند رسم می‌کنیم. پس از آن هر بخشی از نمودار f را که بین دو خط $y=n$ و $y=n+1$ قرار داده روی خط $y=n$ تصویر می‌کنیم.

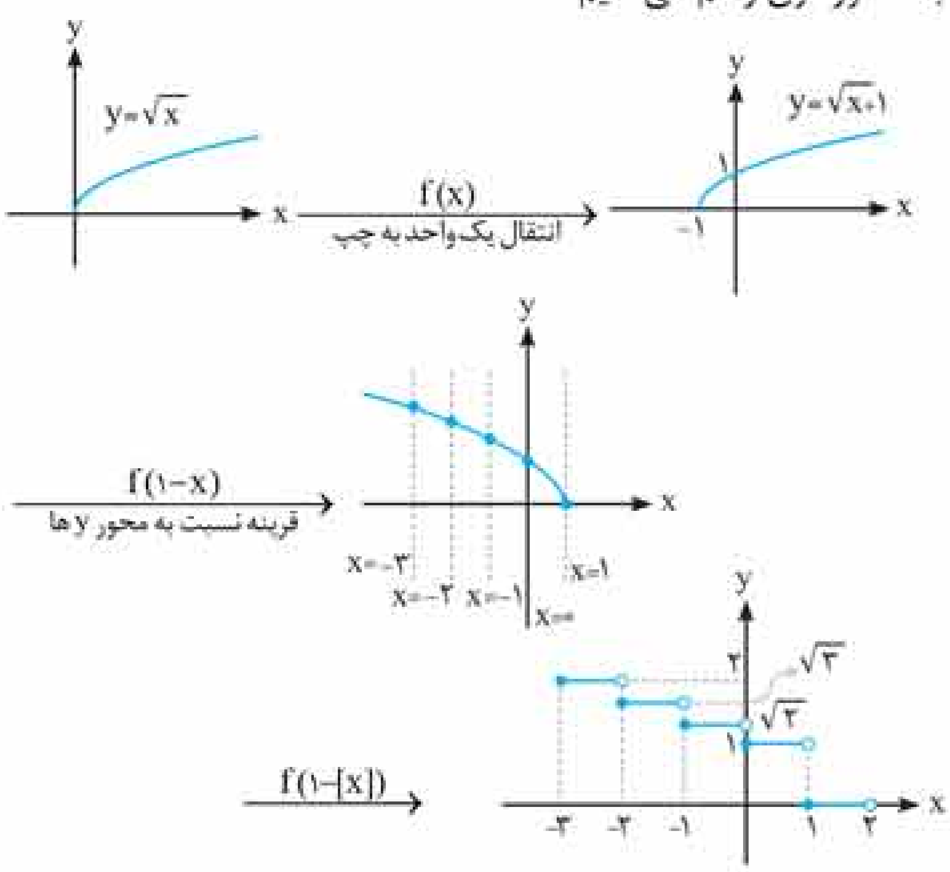
باید نمودار $y=\sin 2x$ را رسم کرده و سپس با استفاده از روش فوق $[\sin 2x]$ را رسم کنیم.



۲۱۱. گزینه ۴ روش اول

نکته: برای رسم نمودار $y=f([x])$، ابتدا $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس خطوط عمودی $x=n(n\in\mathbb{Z})$ را که نمودار تابع $y=f(x)$ را قطع می‌کنند رسم می‌کنیم، سپس در نقطه تلاقی این خطوط عمودی با نمودار پاره‌خطی افقی به طول ۱ به سمت راست رسم می‌کنیم.

ابتدا نمودار $y=\sqrt{1-x}$ را رسم کرده و سپس نمودار $\sqrt{1-[x]}$ مطابق با دستور فوق رسم می‌کنیم:



روش دوم با توجه به ضابطه تابع دامنه آن به‌صورت زیر است:

$D_f:(-\infty,2)$

$1\le x<2\Rightarrow [x]=1\Rightarrow y=0$

$0\le x<1\Rightarrow [x]=0\Rightarrow y=1$

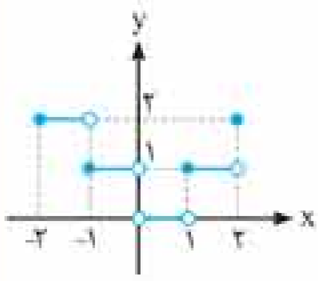
$-1\le x<0\Rightarrow [x]=-1\Rightarrow y=\sqrt{2}$

$-2\le x<-1\Rightarrow [x]=-2\Rightarrow y=\sqrt{3}$

$-3\le x<-2\Rightarrow [x]=-3\Rightarrow y=2$

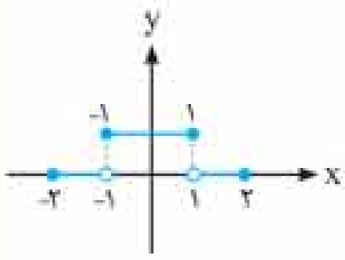
که این شرایط فقط در گزینه «۴» موجود است.

۲۱۲. گزینه ۲ با توجه به این‌که $\frac{x}{|x|}=\begin{cases}1\ ;\ x>0\\ -1\ ;\ x<0\end{cases}$، در بازه $(0,2]$ نمودار $f(x)=[x]$ و دربازه $[-2,0)$ نمودار $f(x)=-[x]$ را رسم می‌کنیم. (لازم به ذکر است نمودار نقطهٔ $x=0$ تعریف نشده است) برای رسم $f(x)=-[x]$ کافی است نمودار $y=[x]$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.



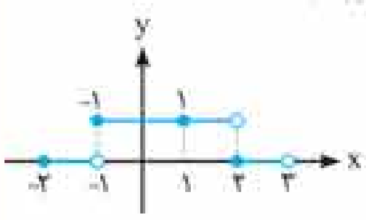
۲۱۳. گزینه ۴ تک‌تک گزینه‌ها را رسم می‌کنیم تا به گزینهٔ صحیح برسیم:

گزینه «۱»: $y=[f(x)]$، به غیر از بازهٔ $[-1,1]$ بقیه نمودار روی محور xها تصویر می‌شود، پس این گزینه صحیح نیست.

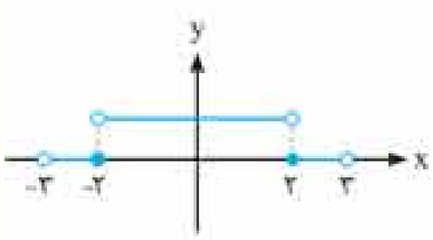


گزینه «۲»: $y=[f(|x|)]$، چون نمودار نسبت به محور yها متقارن است، پس $f(x)=f(-x)$. لذا این نمودار با نمودار قبل فرقی ندارد.

گزینه «۳»: $y=f([x])$ خطوط $x=n(x\in\mathbb{Z})$ را رسم کرده و از نقاط تقاطع یک واحد به سمت راست می‌رویم.



گزینه «۴»: کافیست نمودار گزینه قبل را رسم کرده و قسمت‌های چپ در yها را حذف و به جای آن، قسمت‌های سمت راست محور yها را قرینه کنیم.



همان‌طور که دیده می‌شود $g(x)$ بخشی از نمودار $f([|x|])$ است.

۲۱۴. گزینه ۳ فرض کنیم: $y=g(x)$ و x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$y=g(x)\Rightarrow y=\frac{f(3x)}{2}\Rightarrow 2y=f(3x)\Rightarrow 3x=f^{-1}(2y)$$

$$\Rightarrow x=\frac{f^{-1}(2y)}{3}$$

با توجه به این‌که $y=g(x)$، پس $x=g^{-1}(y)$ پس:

$$g^{-1}(y)=\frac{f^{-1}(2y)}{3}\Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{f^{-1}(2x)}{3}$$

۲۱۵. گزینه ۱ روش اول

فرض کنید: $x^3+ax+1=(x^2-3x+b)(x+\frac{1}{b})$

$$\Rightarrow x^3+ax+1=x^3+(\frac{1}{b}-3)x^2+(b-\frac{3}{b})x+1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{b}-3=0\Rightarrow b=\frac{1}{3}\\ b-\frac{3}{b}=a\Rightarrow\frac{1}{3}-9=a\Rightarrow a=-\frac{26}{3}\end{cases}\Rightarrow a+2b=-8$$

روش دوم کافیست مقسوم علیه را برابر صفر قرار داده عبارت $x^2\equiv 3x-b$ را به‌دست آوریم. حال این عبارت را به‌جای x^2 در مقسوم جای‌گذاری می‌کنیم: $x^3+ax+1=x(x^2)+ax+1$

$$=x(3x-b)+ax+1=(a-b)x+3x^2+1$$

$$=(a-b)x+3(3x-b)+1$$

$$=(a-b+9)x-3b+1=0\Rightarrow\begin{cases}a-b+9=0\\ -3b+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{-26}{3}\\ b=\frac{1}{3}\end{cases}$$

$$a+2b=\frac{-26}{3}+\frac{2}{3}=-8$$

۲۱۶. گزینه ۲ ترکیب دو تابع زمانی اکیداً نزولی است که یکی از آن‌ها اکیداً صعودی و دیگری اکیداً نزولی باشد. با توجه به این‌که $f(x)=-x^3+2$ اکیداً نزولی است، می‌توان گفت که $g(x)$ باید اکیداً صعودی باشد.

۲۱۷. گزینه ۲ روش اول

با توجه به این‌که: $x^3-3x^2+3x=(x-1)^3+1$، داریم:

$$y=(x-1)^3+1\Rightarrow y-1=(x-1)^3\Rightarrow\sqrt[3]{y-1}=x-1$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[3]{y-1}+1\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}+1$$

روش دوم

فرمول ممنوع: به کمک مقداردهی گزینه‌های نادرست را رد می‌کنیم:

نقطهٔ $(0,0)$ در خود تابع صدق می‌کند، بنابراین در وارون آن نیز باید صدق کند، پس گزینه‌های «۱» و «۴» رد می‌شوند:

$f(0)=0\Rightarrow f^{-1}(0)=0$

نقطهٔ $(1,1)$ در خود تابع صدق می‌کند، بنابراین در وارون آن نیز باید صدق کند، پس گزینه «۳» رد می‌شود:

$f(1)=1\Rightarrow f^{-1}(1)=1$

بنابراین گزینه «۲» درست است.