حسابان یازدهم
(رشته ریاضی فیزیک)

از مجموعه رشادت

رضا عابدی - مجتبی سعیدی

یکتا

- درس‌نامه
- پرسش‌های تشریحی به همراه پاسخ‌نامه
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای (تالیفی)
- پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای با نکته‌های کلیدی
- سؤالات کنکور سراسری ۹۰ تا ۹۶ داخل و خارج از کشور
- پاسخ پرسش‌های کنکور با نکته‌های کلیدی

بسم
الله
الرحمن
الرحیم

مقدمه

بسیار خرسندیم که کتاب «حسابان یازدهم» از مجموعه رشادت را تقدیم دانش‌آموزان گرامی می‌کنیم. این کتاب در هر فصل به «آموزش» درس به درس مطالب کتاب درسی با ارائه مثال‌های فراوان می‌پردازد؛ سپس برای استفاده دانش‌آموزان و دبیران از این کتاب به عنوان «کتاب کار» تعدادی سؤال تشریحی به همراه پاسخنامه ارائه می‌دهد. در نهایت برای آمادگی دانش‌آموزان در آزمون‌های آزمایشی و «کنکور» تعداد زیادی پرسش چهار گزینه‌ای با تنوع فراوان به همراه پاسخنامه تشریحی و نکات تستی در انتهای هر فصل ارائه می‌کند. سؤالات کنکور سراسری مرتبط با یازدهم سال‌های ۹۰ تا ۹۶ داخل و خارج کشور به همراه پاسخنامه در انتهای کتاب برای آشنایی دانش‌آموزان با سؤالات کنکور گنجانده شده است.

در این جا لازم می‌دانیم از مؤلفان محترم کتاب آقایان مجتبی سعیدی و رضا عابدی که کتاب را زیر نظر دبیر مجموعه جناب آقای مهندس هادی عزیززاده تألیف کرده‌اند تشکر کنیم. هم‌چنین از خانم‌ها مریم ابراهیمی، ستاره عرب و زهرا عابدی، زهرا سعیدی و آقایان محمدصدرا سعیدی، شهریاری، جهانگیری و محمد ملکی که بنابر گزارش مؤلفان در ویرایش کتاب همکاری داشته‌اند سپاسگزاریم.

همچنین از خانم زینب شریفی که زحمت حروفچینی و صفحه‌آرایی کتاب را برعهده داشته است و خانم‌ها معصومه لطفی‌مقدم (گرافیست) و بهاره خدامی (گرافیست) بسیار ممنونیم.

خواهشمند است برای ارتباط با مؤلفین و ارائه انتقادات و پیشنهادها به کانال تلگرام زیر مراجعه نمایید:

@HesabanYekta

انتشارات مبتکران

فصل ۱

جبر و معادله

درس اول

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

دنباله حسابی (یادآوری):

دنباله حسابی تابعی است از اعداد طبیعی (دامنه) به اعداد حقیقی (برد) که در آن هر جمله از اضافه کردن عدد ثابتی (قدر نسبت) به جملهٔ قبلی حاصل می‌شود. به عنوان مثال $-2,1,4,\cdots$ دنباله‌ای حسابی با قدر نسبت $(d=3)$ و جملهٔ اول $a=-2$ است. دنبالهٔ حسابی با جملـهٔ اول a و قـدر نسـبت d بـه فـرم زیـر می‌باشد:

$$\underset{\text{جملهٔ اول}\ (a_1)}{\underset{\downarrow}{a}}\ ,\ \underset{\text{جملهٔ دوم}\ (a_2)}{\underset{\downarrow}{a+d}}\ ,\ \underset{\text{جملهٔ سوم}\ (a_3)}{\underset{\downarrow}{a+2d}}\ ,\cdots$$

بنابراین جملهٔ عمومی دنباله (جملهٔ n اُم) برابر است با: $a_n=a+(n-1)\,d$

که در آن قدر نسبت برابر با تفاضل هر جمله و جملهٔ قبلی آن است. $d=a_n-a_{n-1}$

مثال ۱: در دنبالهٔ $1,3,5,\cdots$ اولین جملهٔ سه رقمی، جملهٔ چندم است؟

پاسخ:

$$a=1,d=2\rightarrow a_n=a+(n-1)d=1+(n-1)\times 2=2n-1$$

$$a_n\geq 100\rightarrow 2n-1\geq 100\rightarrow n\geq \overset{50/5}{\cancel{\frac{101}{2}}}\xrightarrow{n\in N}n\geq 51$$

بنابراین اولین جملهٔ سه رقمی، جملهٔ ۵۱ اُم است.

نکته ۱

اگر c,b,a سه جملهٔ متوالی تصاعد حسابی باشند، جملهٔ وسط (b) را واسطه حسابی بین a و c گویند که: $b-a=c-b\rightarrow b=\frac{a+c}{2}$

مثال ۲: در دنبالهٔ عددی $2x,x+1,x-3,\cdots$، جملهٔ دهم را بیابید.

پاسخ:

$$x+1=\frac{2x+x-3}{2}\rightarrow 2x+2=3x-3\rightarrow x=5$$

جملات دنباله: $10,6,2,\cdots\rightarrow a=10,d=-4$

$$a_n=a+(n-1)d=10+(n-1)\times(-4)=-4n+14$$

$$a_{10}=-4(10)+14=-26$$

نکته ۲

در یک دنبالهٔ حسابی اگر $m+n=p+q$ باشد، آن‌گاه در جملات متناظرشان رابطه $a_m+a_n=a_p+a_q$ برقرار خواهد بود و برعکس.

مثال ۳: در یک دنبالهٔ حسابی $a_5 + a_7 + a_9 = 12$ است، حاصل $a_2 + a_{12}$ را بیابید.

پاسخ: طبق نکتهٔ اخیر:

$$a_5 + a_9 = a_7 + a_7 \rightarrow a_5 + a_9 = 2a_7$$
$$a_5 + a_7 + a_9 = 12 \rightarrow 3a_7 = 12 \rightarrow a_7 = 4$$
$$a_2 + a_{12} = a_7 + a_7 = 2a_7 = 8$$

مثال ۴: اگر جملهٔ پنجم تصاعدی عددی برابر ۱۰ و جمله دهم آن برابر ۵ باشد، اختلاف جملهٔ سی‌ام و جملهٔ بیستم را بیابید.

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l} a_5 = 10 \rightarrow a + 4d = 10 \\ a_{10} = 5 \rightarrow a + 9d = 5 \end{array}\right\} \rightarrow d = -1, a = 14$$

روش دوم: طبق نکته پایین (۳)

$$d = \frac{a_{10} - a_5}{10 - 5} = \frac{5 - 10}{10 - 5} = -1$$

بنابراین:

$$a_{30} - a_{20} = (30 - 20)d = 10d = -10$$

نکته ۳

به جای حل دستگاه دو معادله دو مجهول، می‌توان با داشتن دو جملهٔ a_m و a_n تصاعد، قدر نسبت را از رابطهٔ زیر حساب کرد:

$$\mathbf{a_m - a_n = (m - n)d \rightarrow d = \frac{a_m - a_n}{m - n}}$$

نکته ۴

اگر بین دو عدد a و b، m جمله قرار دهیم که جملات حاصل تشکیل تصاعد عددی دهند، آن‌گاه:

$$\underset{\downarrow}{a} \quad , \underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots}, \quad \underset{\downarrow}{b}$$

جملهٔ اول	m تا جمله	جمله (m+۲) ام

$$\mathbf{a_{m+2} = a + (m + 1)d = b \rightarrow d = \frac{b - a}{m + 1}}$$

مثال ۵: بین دو عدد ۵ و ۱۲۰، ۲۲ جمله چنان درج می‌کنیم که اعداد حاصل تشکیل تصاعد عددی صعودی دهند، جملهٔ هشتم چند است؟

پاسخ:

$$d = \frac{120 - 5}{22 + 1} = 5 \rightarrow \text{دنباله } 5, 10, \dots, 120$$
$$a_n = a + (n - 1)d = 5 + (n - 1) \times 5 = 5n$$
$$a_8 = 5 \times 8 = 40$$

مثال ۶: اگر مجموع سه جمله متوالی تصاعد عددی برابر ۱۵ و حاصلضرب آن‌ها برابر ۸۰ باشد، قدر نسبت تصاعد را بیابید.

پاسخ:

$$\text{جملات}: a - d, a, a + d$$

$$a - d + a + a + d = 15 \rightarrow 3a = 15 \rightarrow a = 5$$
$$(a - d)(a)(a + d) = 80 \rightarrow 5(25 - d^2) = 80 \rightarrow 25 - d^2 = 16 \rightarrow d^2 = 9 \rightarrow d = \pm 3$$

مثال ۷: دو دنبالهٔ حسابی A و B چند جملهٔ مشترک سه رقمی دارند؟

$$A: 1, 4, 7, 10, \dots$$
$$B: 2, 6, 10, 14, \dots$$

پاسخ:

نکته ۵

اگر دنبالهٔ A یک تصاعد حسابی با قدر نسبت d_A و دنبالهٔ B یک تصاعد حسابی با قدر نسبت d_B باشند، آنگاه جملات مشترک این دو دنباله تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با جمله اول اولین جمله مشترک دو دنباله و قدر نسبت ک. م. م دو عدد d_A و d_B می‌دهند.

دنبالهٔ A دارای قدر نسبت ۳، دنبالهٔ B دارای قدر نسبت ۴ و اولین جملهٔ مشترک دو دنباله عدد ۱۰ است. بنابراین جملات مشترک دو دنباله یک دنباله حسابی با جملهٔ اول ۱۰ و قدر نسبت ۱۲ (ک. م. م دو عدد ۳ و ۴) تشکیل می‌دهند:

دنبالهٔ جملات مشترک: $c_n = c + (n-۱)d = ۱۰ + (n-۱) \times ۱۲ \to c_n = ۱۲d - ۲$

برای به دست آوردن تعداد جملات مشترک سه رقمی:

$$۱۰۰ \le ۱۲n - ۲ \le ۹۹۹ \to ۱۰۲ \le ۱۲n \le ۱۰۰۱ \to ۸/۵ \le n \le ۸۳/۴۱ \to ۹ \le n \le ۸۳$$

بنابراین $۷۵ = (۱ + ۹ - ۸۳)$ جملهٔ مشترک سه رقمی وجود دارد.

مجموع جملات دنباله حسابی

در یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدر نسبت d و با تعداد جملات n، مجموع جملات را S_n می‌نامیم که می‌توان نوشت:

$$S_n = a + (a+d) + \cdots + a + (n-۲)d + a + (n-۱)d$$

جملات را برعکس بنویسیم:

$$S_n = a + (n-۱)d + a + (n-۲)d + \cdots + a + d + a$$

جملات متناظر دو سطر را جمع می‌کنیم:

$$۲S_n = \underbrace{۲a + (n-۱)d + ۲a + (n-۱)d + \cdots + ۲a + (n-۱)d + ۲a + (n-۱)d}_{\text{n تا}}$$

$$۲S_n = n(۲a + (n-۱)d)$$

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a + (n-۱)d)$$

نکته ۶

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a + (n-۱)d \to S_n = \frac{n}{۲}(a + a + (n-۱)d)$$

$$\to S_n = \frac{n}{۲}(a + a_n)$$

مثال ۸: **در دنبالهٔ حسابی $۲,۵,۸,\cdots$ مطلوبست:**

الف) مجموع ۲۰ جملهٔ اول

ب) مجموع ۵ جمله دوم

پاسخ:

الف) $a_۱ = ۲, d = ۳ \to S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}(۲(۲) + (۲۰-۱) \times ۳) = ۶۱۰$

ب) $\left.\begin{array}{l} S_{۱۰} = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{۱۰} \\ S_۵ = a_۱ + a_۲ \cdots + a_۵ \end{array}\right\} \to S_{۱۰} - S_۵ = a_۶ + a_۷ + \cdots + a_{۱۰}$

$$\left.\begin{array}{l} S_{۱۰} = \frac{۱۰}{۲}(۲(۲) + ۹ \times ۳) = ۱۵۵ \\ S_۵ = \frac{۵}{۲}(۲(۲) + ۴ \times ۳) = ۴۰ \end{array}\right\} \to S_{۱۰} - S_۵ = ۱۱۵$$

نکته ۷

در هر دنباله حسابی داریم:

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad (S_1 = a_1)$$

مثال ۹: اگر $S_n = 2n^2 - 4n$ مجموع n جمله اول یک تصاعد حسابی باشد، مطلوبست:

الف) جملهٔ پنجم تصاعد **ب)** مجموع جمله نهم و دهم **ج)** جمله عمومی دنباله

پاسخ:

الف)

روش اول:

$$S_1 = a = 2(1)^2 - 4(1) = -2$$

$$S_2 = a + a_2 = 2(2)^2 - 4(2) = 0 \rightarrow a_2 = 2$$

$$d = a_2 - a = 2 - (-2) = 4 \rightarrow a_n = a + (n-1)d = -2 + 4(n-1) = 4n - 6 \rightarrow a_5 = 14$$

روش دوم:

$$a_5 = S_5 - S_4 = \left[2(5)^2 - 4(5)\right] - \left[2(4)^2 - 4(4)\right] = 14$$

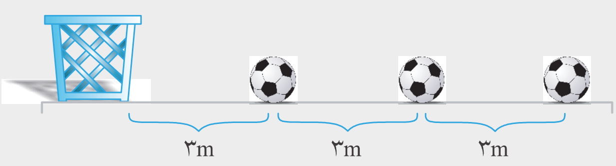
ب)

$$a_9 + a_{10} = S_{10} - S_8 = \left[2(10)^2 - 4(10)\right] - \left[2(8)^2 - 4(8)\right] = 160 - 96 = 64$$

ج)

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - 4n - \left[2(n-1)^2 - 4(n-1)\right] = 4n - 6$$

مثال ۱۰: تعدادی توپ روی یک خط مستقیم و به فاصله $3m$ از هم قرار دارند. دونده‌ای باید از کنار سبد شروع کرده و هر توپ را برداشته و به سبد بیندازد و مجدداً همین عمل را برای توپ بعدی انجام دهد. اگر این دونده مجموعاً ۹۱۸ متر دویده باشد، تعیین کنید او چند توپ در سبد انداخته است؟ *(تمرین کتاب درسی)*



پاسخ: دونده برای برداشتن توپ اول و انداختن آن به داخل سبد، $3 + 3 = 6$ متر را طی می‌کند و برای توپ بعدی باید $2(3+3) = 12$ متر را طی کند و... در نتیجه مسافت طی شده تشکیل تصاعد عددی به صورت زیر می‌دهد:

$$6 + 12 + 18 + \cdots \qquad a = 6, d = 6$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \Rightarrow 918 = \frac{n}{2}(12 + (n-1)6) \Rightarrow 306 = n(n+1) \rightarrow 17 \times 18 = n(n+1) \rightarrow n = 17$$

نکته ۸

مجموع **n** جمله اول مجموعه اعداد طبیعی برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال ۱۱: بر محیط دایره‌ای ۱۵ نقطه متمایز وجود دارد. از هر نقطه به نقطه دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای متمایز را به دست آورید.

پاسخ: از وصل کردن نقطه اول به نقاط دیگر ۱۴ وتر ایجاد می‌شود. با وصل کردن نقطه دوم به نقاط دیگر (به جز نقطه اول) ۱۳ وتر به دست می‌آید که در نتیجه تعداد وترها برابر است با:

$$14 + 13 + 12 + \cdots + 1 = \frac{14(14+1)}{2} = 105$$

نکته ۹

چند دنباله مهم برای محاسبات عددی برای مباحث آینده به صورت زیر می‌باشد:

مجموع اعداد طبیعی ← $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

مجموع اعداد طبیعی زوج ← $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$

مجموع اعداد طبیعی فرد ← $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

مجموع مربعات اعداد طبیعی ← $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

مجموع مکعبات اعداد طبیعی ← $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$

مثال ۱۲: در یک فروشگاه بطری‌های آب معدنی به طریقی چیده شده است که در ردیف اول ۲ بطری، زیر آن ۴ بطری، ردیف بعد ۶ بطری و ... اگر بطری‌ها در ۱۰ ردیف چیده شده باشند، تعداد کل بطری‌ها چه تعداد است؟

پاسخ:

روش اول: $2+4+6+\cdots \to S_{10}=\frac{10}{2}(2(2)+(10-1)2)=110$

روش دوم:

طبق نکته قبل داریم: $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$

در نتیجه: $2+4+6+\cdots+20=10(11)=110$

مثال ۱۳: در دنباله حسابی $5,7,9,\cdots$ حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟

پاسخ:

$$a=5,d=2$$

$$S_n=\frac{n}{2}(2a+(n-1)d)=\frac{n}{2}(10+(n-1)2)=\frac{n}{2}(2n+8)$$

$$=n(n+4)>500$$

$$n^2+4n>500\to(n+2)^2>504\to$$

$$n+2>\sqrt{504}\to n>22/44-2\to n>20/44\xrightarrow{n\in\mathbb{N}}n\geq 21$$

دنبالهٔ هندسی (یادآوری):

دنبالهٔ هندسی تابعی است که از اعداد طبیعی (دامنه) به اعداد حقیقی (برد) که در آن هر جمله حاصلضرب جملهٔ ماقبل در عدد ثابتی (قدر نسبت) است.

نکته ۱۰

برای تعیین قدر نسبت تصاعد هندسی کافی است هر جمله را بر جملهٔ ماقبل تقسیم کنیم $(q=\frac{a_n}{a_{n-1}})$؛ به عنوان مثال دنبالهٔ $-2,4,-8,\cdots$ دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $(q=-2)$ و جملهٔ اول $a=-2$ است.

دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول a و قدر نسبت q به فرم زیر است:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{جملهٔ اول}\\ (a_1)}}{a}\ ,\ \underset{\substack{\downarrow\\ \text{جملهٔ دوم}\\ (a_2)}}{aq},\ \underset{\substack{\downarrow\\ \text{جملهٔ سوم}\\ (a_3)}}{aq^2}$$

بنابراین جملهٔ عمومی دنباله (جملهٔ nام) برابر است با: $a_n=aq^{n-1}$

مثال ۱۴: در یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۳ و قدر نسبت ۲، جملهٔ دهم کدام است؟

پاسخ:

$$a=3, q=2 \to a_n = aq^{n-1} = 3\times 2^{n-1}$$

$$n=10 \to a_{10} = 3\times 2^{10-1} = 1536$$

مثال ۱۵: مجموع سه جملهٔ اول یک تصاعد هندسی برابر ۲۷ و مجموع سه جملهٔ دوم آن برابر ۸ است. قدرنسبت این تصاعد کدام است؟

پاسخ:

$$a+aq+aq^2=27$$

$$aq^3+aq^4+aq^5=8 \to q^3(a+aq+aq^2)=8 \to q^3\times 27=8 \to q^3=\frac{8}{27} \to q=\frac{2}{3}$$

نکته ۱۱

اگر a و b و c سه جملهٔ متوالی تصاعد هندسی باشند، جملهٔ وسط (b) را واسطهٔ هندسی بین a و c گویند که: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \to b^2=ac$

مثال ۱۶: اگر جمله پنجم، هفتم و سیزدهم تصاعدی حسابی، سه جملهٔ متوالی تصاعد هندسی غیرثابت باشند، قدرنسبت تصاعد هندسی را بیابید.

پاسخ:

روش اول:

$$a+4d, a+6d, a+12d \to (a+6d)^2=(a+4d)(a+12d)$$

$$\to a^2+12ad+36d^2=a^2+16ad+48d^2 \to 4ad+12d^2=0 \to \begin{cases} a=-3d \\ d=0 \quad \text{(دنبالهٔ ثابت) غ ق ق} \end{cases}$$

$$a+4d, a+6d, a+12d \xrightarrow{a=-3d} d, 3d, 9d \to q=\frac{3d}{d}=3$$

روش دوم: طبق نکته پایین (۱۲)

چون در مثال اخیر دنباله غیرثابت است:

$$q=\frac{13-7}{7-5}=3$$

نکته ۱۲

اگر a_m و a_n و a_k از دنبالهٔ حسابی، سه جملهٔ متوالی از تصاعد هندسی باشند، قدر نسبت تصاعد هندسی برابر است با:

$$\begin{cases} q=1 \quad \boxed{\text{دنباله هندسی ثابت}} \\ q=\frac{k-n}{n-m} \end{cases}$$

مثال ۱۷: در یک تصاعد هندسی صعودی، حاصلضرب جملهٔ دوم در جملهٔ هشتم ۱۰۰ است. اگر جملهٔ سوم تصاعد برابر ۵ باشد، قدرنسبت تصاعد چند است؟

پاسخ:

$$a_2\times a_8=100 \to aq\times aq^7=100 \to a^2q^8=100 \to aq^4=\pm 10$$

$$a_3=5 \to aq^2=5$$

$$\frac{aq^4}{aq^2}=\frac{\pm 10}{5} \to q^2=2 \to q=\pm\sqrt{2} \xrightarrow[q>1]{\text{دنباله صعودی است}} q=\sqrt{2}$$

مثال ۱۸: اگر جملهٔ نهم تصاعد هندسی غیریکنوا (نه صعودی نه نزولی) برابر ۹ و جملهٔ هفتم آن برابر ۸۱ باشد، قدر نسبت تصاعد کدام است؟

روش اول:

$$\left.\begin{array}{l} a_9 = 9 \to aq^8 = 9 \\ a_7 = 81 \to aq^6 = 81 \end{array}\right\} \to \frac{aq^8}{aq^6} = \frac{9}{81} \to q^2 = \frac{1}{9} \to q = \pm\frac{1}{3} \xrightarrow{\text{دنباله غیریکنواخت}} q = -\frac{1}{3}$$

نکته ۱۳

اگر بین دو عدد a و b، m جمله قرار دهیم که جملات حاصل تشکیل تصاعد هندسی دهند، آن‌گاه:

$$\underset{\text{جملهٔ اول}}{a}, \underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots}_{\text{m تا جمله}}, \underset{\text{جملهٔ (m + 2) ام}}{b}$$

در نتیجه:

$$a_{m+2} = aq^{m+1} = b \to q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

مثال ۱۹: بین دو عدد ۲ و ۱۲۸، پنج جمله چنان درج می‌کنیم که تشکیل تصاعد هندسی دهند. جملهٔ وسط چند است؟

پاسخ:

$$q = \sqrt[6]{\frac{128}{2}} = \sqrt[6]{64} = 2$$

$$a_n = 2\times 2^{n-1} \xrightarrow{\text{جملهٔ وسط:}n=4} a_4 = 2\times 2^{4-1} = 16$$

نکته ۱۴

در دنبالهٔ هندسی اگر $m+n=p+q$ آن‌گاه در جملات متناظرشان رابطه $a_m\times a_n = a_p\times a_q$ برقرار خواهد بود و برعکس.

مثال ۲۰: اگر در تصاعدی هندسی $a_5 = 6$ و $a_7 = 10$ باشد، جملهٔ ششم را بیابید.

پاسخ: طبق نکتهٔ اخیر:

$$a_7\times a_5 = a_6\times a_6 \to 60 = a_6^2 \to a_6 = \pm\sqrt{60}$$

نکته ۱۵

با توجه به نکتهٔ قبل، حاصلضرب n جملهٔ اول تصاعد هندسی (P_n) برابر است با:

$$P_n = (a_1 a_n)^{\frac{n}{2}}$$

مثال ۲۱: اگر جمله هفتم تصاعدی هندسی برابر ۳ باشد، حاصلضرب ۱۳ جمله اول تصاعد را بیابید.

پاسخ:

$$P_{13} = (a_1 a_{13})^{\frac{13}{2}} = (a_7 . a_7)^{\frac{13}{2}} = (a_7)^{13} = 3^{13}$$

مجموع جملات دنباله هندسی

اگر مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی را S_n فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots aq^{n-1} \quad (1)$$

با ضرب طرفین S_n در q داریم:

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n \quad (2)$$

تفریق طرفین معادلات (۱) و (۲):

$$S_n - qS_n = a + aq + aq^{۲} + \cdots + aq^{n-۱} - (aq + aq^{۲} + \cdots + aq^n)$$

$$S_n(۱-q) = a - aq^n \rightarrow S_n(۱-q) = a(۱-q^n)$$

پس مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول a و قدر نسبت q برابر است با:

$$S_n = \frac{a(۱-q^n)}{۱-q}$$

که اگر $|q| < ۱$ و تعداد جملات تصاعد، نامتناهی $(n \rightarrow \infty)$ باشد، آنگاه q^n به سمت صفر میل می‌کند، بنابراین:

$$\text{حد مجموع} = S_\infty = \frac{a}{۱-q}$$

مثال ۲۲: مجموع هشت جملهٔ اول یک تصاعد هندسی، ۱۷ برابر مجموع چهار جملهٔ اول آن است. قدرنسبت تصاعد چه اعدادی می‌تواند باشد؟ $(q \neq ۱)$

پاسخ:

$$S_۸ = ۱۷S_۴ \rightarrow \frac{a(۱-q^۸)}{۱-q} = ۱۷ \times \frac{a(۱-q^۴)}{۱-q} \rightarrow (۱-q^۸) = ۱۷(۱-q^۴)$$

$$\rightarrow (۱-q^۴)(۱+q^۴) = ۱۷(۱-q^۴) \rightarrow ۱+q^۴ = ۱۷ \rightarrow q^۴ = ۱۶ \rightarrow q = \pm ۲$$

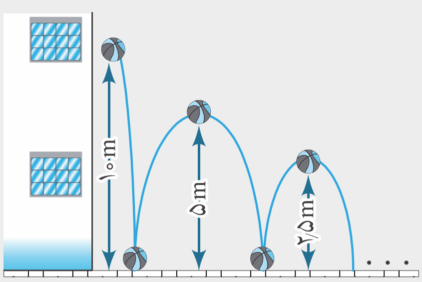
مثال ۲۳: مجموع چند جمله از دنباله‌ای هندسی با جملهٔ اول یک و قدرنسبت ۲ برابر ۵۱۳ است؟

پاسخ:

$$S_n = \frac{a(۱-q^n)}{۱-q} = \frac{۱ \times (۱-۲^n)}{۱-۲} = ۵۱۳ \rightarrow ۲^n = ۵۱۲ \rightarrow n = ۹$$

مثال ۲۴: توپی را از بالای ساختمانی به ارتفاع ۱۰ متر به زمین پرتاب می‌کنیم. اگر توپ پس از هر بار برخورد با زمین به اندازه نصف ارتفاع قبلی بالا بیاید، توپ تا زمان ایستادن چه مسافتی را طی می‌کند؟

پاسخ:



$$\text{مسافت طی شده} = ۱۰ + ۵ + ۵ + ۲/۵ + ۲/۵ + \cdots$$

$$= ۱۰ + ۲\underbrace{(۵ + ۲/۵ + \cdots)} = ۱۰ + ۲ \times \frac{۵}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۳۰$$

دنباله هندسی با

جمله اول $= a = ۵$

قدر نسبت $q = \frac{۱}{۲} \rightarrow |q| < ۱$

تعداد جملات $= \infty$

مثال ۲۵: برای محافظت از تابش مضر اشعه رادیو اکتیویته، لایه‌های محافظی ساخته شده است که شدت تابش پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد مضر حداقل ۹۷ درصد کاهش یابد؟

پاسخ: هر لایه مواد مضر را نصف می‌کند که تشکیل دنباله هندسی با قدرنسبت $\frac{۱}{۲}$ می‌دهد. پس قدرت اشعه عبوری از لایه nام برابر $\frac{۱}{۲^n}$ برابر اشعه اصلی است که:

$$\frac{۱}{۲^n} \leq \frac{۳}{۱۰۰} \rightarrow ۲^n \geq \frac{۱۰۰}{۳} \rightarrow n \geq ۶$$

نکته ۱۶

در هر دنباله هندسی داریم:

$$a_n = S_n - S_{n-۱} \quad (S_۱ = a_۱)$$

مثال ۲۶: در یک دنباله هندسی، مجموع n جمله اول برابر است با: $S_n = ۳^n - ۲$، مطلوبست:

الف) قدرنسبت دنباله **ب)** تفاضل جمله سوم و پنجم

پاسخ:

الف)
$$\left.\begin{array}{l} a = S_۱ = ۳^۱ - ۲ = ۱ \\ S_۲ = a + a_۲ = ۳^۲ - ۲ = ۷ \to a_۲ = ۶ \end{array}\right\} \to q = \frac{a_۲}{a_۱} = ۶$$

ب)
$$\left.\begin{array}{l} a_۵ = S_۵ - S_۴ = ۳^۵ - ۲ - (۳^۴ - ۲) = ۱۶۲ \\ a_۳ = S_۳ - S_۲ = ۳^۳ - ۲ - (۳^۲ - ۲) = ۱۸ \end{array}\right\} \to a_۵ - a_۳ = ۱۴۴$$

مثال ۲۷: در یک تصاعد هندسی نزولی نامحدود، جمله اول برابر با نصف مجموع جملات بعدی است. قدر نسبت تصاعد را بیابید.

پاسخ: چون تعداد جملات نامحدود است و تصاعد نزولی است $(q < ۱)$، پس از رابطه حد مجموع استفاده می‌کنیم:

$$a_۱ = \frac{۱}{۲}(a_۲ + a_۳ + \cdots) \to a_۱ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{a_۲}{۱-q}\right) \to \cancel{a_۱} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\cancel{a_۱}q}{۱-q}\right)$$

$$\to ۲ - ۲q = q \to q = \frac{۲}{۳}$$

مثال ۲۸: اگر حد مجموع جملات تصاعدی هندسی برابر ۴ و حد مجموع مربعات آن جملات برابر ۲۴ باشد، جمله اول تصاعد را تعیین کنید.

پاسخ:

$$a + aq + aq^۲ + \cdots \to S_\infty = \frac{a}{۱-q} = ۴$$

$$a^۲ + a^۲q^۲ + a^۲q^۴ + \cdots \to S_\infty = \frac{a^۲}{۱-q^۲} = ۲۴ \to \frac{a}{۱-q} \times \frac{a}{۱+q} = ۲۴ \to \frac{a}{۱+q} = ۶$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{a}{۱-q} = ۴ \\ \frac{a}{۱+q} = ۶ \end{array}\right. \to ۴ - ۴q = ۶ + ۶q \to q = \frac{-۱}{۵} \to \frac{a}{۱-q} = ۴ \to a = \frac{۲۴}{۵}$$

مثال ۲۹: حاصل $(۱ + x + x^۲ + \cdots + x^۸)(۱ - x + x^۲ - \cdots + x^۸)$ به ازاء $x = \sqrt{۲}$ چند است؟

پاسخ:

$$۱ + x + x^۲ + \cdots + x^۸ \to a = ۱, q = x \to S_۹ = \frac{۱(۱ - x^۹)}{۱-x} = \frac{۱-x^۹}{۱-x}$$

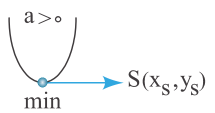
$$۱ - x + x^۲ + \cdots + x^۸ \to a = ۱, q = -x \to S_۹ = \frac{۱(۱-(-x)^۹)}{۱-(-x)} = \frac{۱+x^۹}{۱+x}$$

$$(۱ + x + x^۲ + \cdots + x^۸)(۱ - x + x^۲ - \cdots + x^۸) = \frac{۱-x^۹}{۱-x} \times \frac{۱+x^۹}{۱+x} = \frac{۱-x^{۱۸}}{۱-x^۲} \xrightarrow{x=\sqrt{۲}} ۵۱۱$$

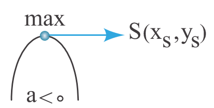
درس دوم
معادلات درجه دوم

یادآوری چند جمله‌ای $f(x) = ax^۲ + bx + c$ به شرط $a \neq ۰$ یک چند جمله‌ای درجه دوم است که $\Delta = b^۲ - ۴ac$ را مبین (دلتا) چند جمله‌ای درجه دوم می‌نامیم و در صفحه مختصات نمودار آن به صورت سهمی می‌باشد که:

۱. اگر $a>0$ باشد، سهمی روبه بالا و دارای مینیمم (min) است.



۲. اگر $a<0$ باشد، سهمی روبه پایین و دارای ماکزیمم (max) است.



نکته ۱۷

برای به دست آوردن مختصات رأس سهمی (max یا min) به روش زیر عمل می‌نماییم:

۱. طول رأس سهمی را می‌یابیم: $x_S=-\frac{b}{2a}$

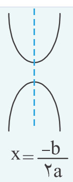
۲. برای تعیین عرض رأس سهمی به دو صورت می‌توان عمل کرد:

الف) $y_S=f(x_S)=f(\frac{-b}{2a})$

ب) $y_S=-\frac{\Delta}{4a}$

نکته ۱۸

محور تقارن سهمی خط قائمی گذرنده از رأس سهمی و به معادله $x=\frac{-b}{2a}$ است.



مراحل رسم سهمی

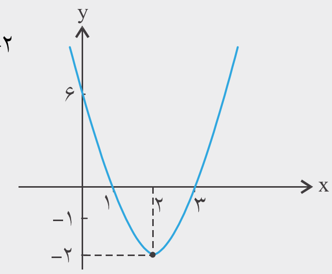
ابتدا مختصات رأس سهمی را تعیین نموده، سپس دو نقطهٔ دلخواه در قبل و بعد طول رأس سهمی (x_S) به عنوان نقطه کمکی مفروض می‌کنیم.

مثال ۳۰: نمودار سهمی مقابل را رسم کنید. $y=2x^2-8x+6$

پاسخ:

$$x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{(-8)}{2(2)}=2 \Rightarrow y_S=2(2)^2-8\times 2+6=-2$$

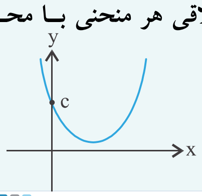
x	۱	۲	۳
$y=f(x)$	۰	۲−	۰



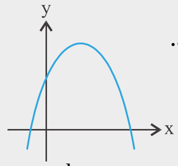
نکته ۱۹

برای تعیین محل تلاقی هر منحنی با محور عرض‌ها کافی است به جای x صفر قرار دهیم و برای تعیین محل تلاقی هر منحنی با محور طول‌ها کافی است به جای y صفر قرار دهیم.

بنابراین محل برخورد چندجمله‌ای $f(x)=ax^2+bx+c$ با محور عرض‌ها، نقطه $f(0)=c$ خواهد بود.



مثال ۳۱: اگر نمودار سهمی $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ به صورت مقابل باشد، در مورد علامت ضرایب بحث کنید.



پاسخ: چون سهمی روبه پایین است پس $a<۰$ است.

رأس سهمی در ناحیه اول مختصات است:

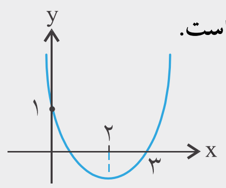
$$x_S=-\frac{b}{۲a}>۰\xrightarrow{a<۰}b>۰$$

تلاقی سهمی با محور عرض‌ها مثبت است پس:

$$f(۰)=c>۰$$

مثال ۳۲: نمودار چندجمله‌ای درجه دوم $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ به صورت روبه‌رو مفروض است.

مطلوبست تعیین حاصل عبارت $a+b+c$.



پاسخ:

روش اول:

$$f(۰)=۱\rightarrow c=۱$$

$$\frac{-b}{۲a}=۲\rightarrow b=-۴a$$

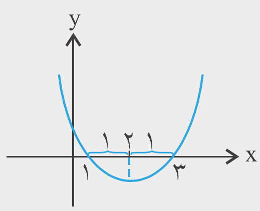
$$f(۳)=۰\rightarrow ۹a+۳b+c=۰\rightarrow ۹a-۱۲a+۱=۰\rightarrow a=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{b=-۴a}b=\frac{-۴}{۳}$$

بنابراین

$$a+b+c=\frac{۱}{۳}-\frac{۴}{۳}+۱=۰$$

روش دوم:

از آنجا که محور تقارن خط $x=۲$ است و صفرهای تابع (ریشه‌ها) نسبت به محور تقارن متقارن هستند، پس ریشه دیگر برابر $x=۱$ است و در نتیجه:



$$f(۱)=۰\rightarrow a+b+c=۰$$

مثال ۳۳: نقطه (۲ و ۱) ماکزیمم تابع $y=۲mx^{۲}+۳nx$ است. دوتایی (m,n) کدام است؟

۱) $(-۱,۰)$ ۲) $(۱,۰)$ ۳) $(-۱,\frac{۴}{۳})$ ۴) $(۱,\frac{۴}{۳})$

پاسخ: گزینه ۳

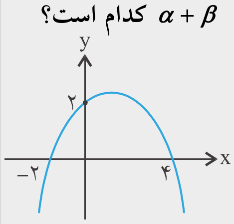
از آنجا که سهمی دارای max است پس روبه پایین است؛ در نتیجه:

$$a<۰\rightarrow ۲m<۰\rightarrow m<۰$$

نقطه ماکزیمم همان رأس سهمی است، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۳n}{۲(۲m)}=۱\rightarrow ۴m+۳n=۰\\ f(۱)=۲\rightarrow ۲m+۳n=۲\end{array}\right\}\rightarrow m=-۱,n=\frac{۴}{۳}$$

مثال ۳۴: نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ به صورت مقابل است و مختصات رأس $A\Big|\begin{array}{l}\alpha\\ \beta\end{array}$ می‌باشد. حاصل $\alpha+\beta$ کدام است؟



۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۱۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱۱}{۴}$

پاسخ: گزینه ۳

روش اول:

$$f(۰)=۲\rightarrow c=۲$$

$$\left.\begin{array}{l}f(-۲)=۰\rightarrow ۴a-۲b+c=۰\rightarrow ۴a-۲b=-۲\\ f(۴)=۰\rightarrow ۱۶a+۴b+c=۰\rightarrow ۱۶a+۴b=-۲\end{array}\right\}\rightarrow a=-\frac{۱}{۴}\text{ و } b=\frac{۱}{۲}$$

مختصات رأس: $(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a})) \to \frac{-b}{2a} = 1 = \alpha$ و $f(1) = \frac{9}{4} = \beta \to \alpha + \beta = \frac{13}{4}$

روش دوم: از آنجا که ریشه‌های معادله درجه دوم (صفرهای معادله) $x = -2$ و $x = 4$ است، پس فرم کلی تابع درجه دوم به صورت $f(x) = a(x+2)(x-4)$ می‌باشد؛ بنابراین:

$$f(0) = 2 \to a(2)(-4) = 2 \to a = \frac{-1}{4}$$

در نتیجه:

$$f(x) = \frac{-1}{4}(x+2)(x-4) = \frac{-1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$$

رأس سهمی وسط صفرهای سهمی است، پس:

$$x_S = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1 = \alpha$$
$$\beta = f(x_S) = f(1) = \frac{9}{4} = \beta$$

مثال ۳۵: اگر نمودار تابع $y = mx^2 - (m^2-1)x + 1$ روی محور عرض‌ها دارای ماکزیمم باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) صفر ۴) سهمی ماکزیمم ندارد

پاسخ: **گزینه ۲** سهمی دارای ماکزیمم است پس: $a = m < 0$

چون نقطه ماکزیمم روی محور عرض‌ها قرار دارد پس $x_S = 0$ می‌باشد:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{(m^2-1)}{2m} = 0 \to m = \pm 1 \xrightarrow{m<0} m = -1$$

مثال ۳۶: به ازای چه مقادیری از m نقطه ماکزیمم تابع $y = mx^2 - (m-1)x + 1$ در ناحیه اول یا چهارم قرار می‌گیرد؟

پاسخ: از آنجا که تابع دارای max است: $m < 0$ (۱)

چون ماکزیمم در ربع اول یا چهارم است، پس $x_S > 0$ می‌باشد:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{m-1}{2m} > 0 \xrightarrow{m<0} m - 1 < 0 \to m < 1 \quad (2)$$
$$(1) \cap (2) \to m < 0$$

مثال ۳۷: اگر خط $y - 1 = mx$ از رأس سهمی $y = -4x - 2x^2$ عبور کند، m را بیابید.

پاسخ:

چون رأس سهمی در معادله خط مذکور صدق می‌کند بنابراین:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{-4} = -1 \to y_S = f(-1) = 4 - 2 = 2$$
$$2 - 1 = -m \to m = -1$$

صفرهای تابع (ریشه‌های تابع)

صفرهای تابع همان جواب‌های معادله $f(x) = 0$ در صورت وجود است که عبارتند از مجموعه مقادیری از x (دامنه f) که به ازای آن‌ها $f(x)$ صفر است.

اگر نمودار $f(x)$ را رسم کنیم، صفرهای f طول نقاط تلاقی نمودار با محور xهاست.

روش‌های تعیین صفرهای معادله درجه دوم

۱. **تجزیه:** در صورت امکان و سهولت، معادله درجه دوم را با استفاده از یکی از اتحادهای زیر به عوامل درجه اول تجزیه کرده و سپس هر یک از عوامل را برابر صفر قرار می‌دهیم:

اتحادهای مهم در تجزیه عبارات جبری:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

مثال ۳۸: معادلات زیر را با روش تجزیه حل کنید:

الف) $x^2 - 4x + 3 = 0$ ب) $2x +^2 5x - 3 = 0$

پاسخ:

الف) $x^2 - 4x + 3 = 0 \to (x-1)(x-3) = 0 \to x_1 = 1, x_2 = 3$

ب) $2x^2 + 5x - 3 = 0 \xrightarrow{\times 2} 4x^2 + 10x - 6 = 0 \to (2x)^2 + 5(2x) - 6 = 0 \to (2x-1)(2x+6) = 0 \to x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -3$

۲- روش مربع کامل: ابتدا ضریب x^2 را از بین می‌بریم، با اضافه کردن مربع نصف ضریب x به طرفین تساوی، اتحاد نوع اول تشکیل می‌دهیم.

مثال ۳۹: معادله $2x^2 - 6x + 4 = 0$ را به روش مربع کامل حل کنید.

پاسخ:

$$2x^2 - 6x + 4 = 0 \to x^2 - 3x + 2 = 0 \to x^2 - 3x = -2 \xrightarrow{+(\frac{-3}{2})^2}$$

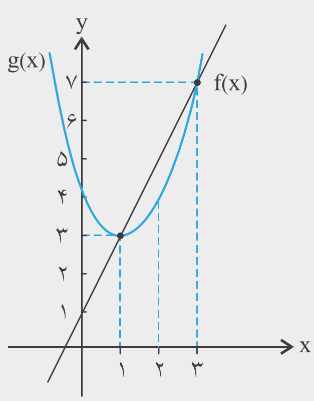
$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = -2 + \frac{9}{4} \to (x - \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4} \to x - \frac{3}{2} = \pm\frac{1}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

۳. روش هندسی:

نکته ۲۰

برای تعیین جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ به روش هندسی کافیست دو منحنی $y = f(x)$ و $y = g(x)$ را در دستگاه مختصات رسم کنیم. تعداد نقاط تلاقی دو نمودار، جواب‌های معادله است.

مثال ۴۰: معادلهٔ $x^2 - 2x + 4 = 2x + 1$ را به روش هندسی حل کنید.



پاسخ: با فرض $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x^2 - 2x + 4$ خواهیم داشت:

$$g(x) = x^2 - 2x + 4 \to \text{راس سهمی}: \begin{cases} x_S = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \\ y_S = g(1) = 3 \end{cases}$$

نقاط کمکی: $\begin{vmatrix} 0 \\ 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix}$

$f(x) = 2x + 1 \to$

x	۱	۳
f(x)	۳	۷

پس معادله دارای دو ریشه $x_2 = 3$ و $x_1 = 1$ می‌باشد.

۴. روش Δ $(\Delta = b^2 - 4ac)$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \to a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = 0 \to a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) = 0$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \to (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \to (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \to x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$