



یازدهم

پایا حسابان

رشته ریاضی

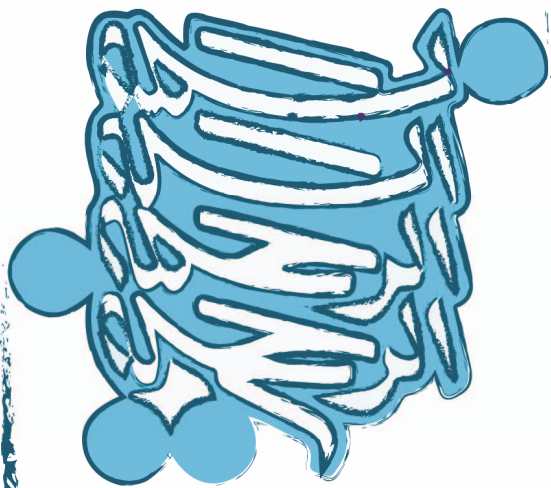
حمیدرضا بیات • سعید بیاتی • مرتضی خمایی ابدی • کیان کریمی خراسانی

✦ درس نامه

✦ پرسش های چهارگزینه ای (تألیفی و کنکور)

✦ پاسخ نامه تشریحی با نکته های کلیدی

✦ برای داوطلبان رشته های برتر دانشگاه های مشهور



دانش‌آموزان گرامی

بسیار خرسندیم که کتاب حسابان یازدهم را در اختیار شما قرار می‌دهیم. این کتاب که از مجموعه کتاب‌های «اقیانوس تست و نکته» به حساب می‌آید، موفقیت تحصیلی شما را تضمین می‌کند. این مجموعه، برای دانش‌آموزانی به رشته تحریر درآمده است که مایلند در بهترین رشته‌های مهندسی یا علوم پایه دانشگاه‌های بنام کشور یا خارج از ایران تحصیل کنند. این کتاب شما را برای شرکت در مسابقات، امتحانات و آزمون‌های ورودی دانشگاه‌ها در درس حسابان آماده می‌کند.

مؤلفان، پس از ارائه درسنامه مختصر، بانک سؤال کاملی را در اختیار شما قرار می‌دهند که شامل پرسش‌های چهارگزینه‌ای کنکور گروه‌های آزمایشی ریاضی و تجربی، مسائل مسابقات معتبر ریاضی (با توجه به استفاده طراحان کنکور از آن‌ها در سال‌های اخیر) و پرسش‌های تألیفی است. این پرسش‌ها براساس فصل‌ها و بخش‌های کتاب درسی طبقه‌بندی شده‌اند.

مطالعه پاسخ‌نامه تشریحی همراه با نکته‌های کلیدی و آموزنده، موفقیت شما را تسهیل خواهد کرد.

در پایان، وظیفه خود می‌دانیم از مؤلفان محترم این کتاب، آقایان: حمیدرضا بیات، سعید بیاتی، مرتضی خمایی ابدی و کیان کریمی خراسانی و دبیر محترم مجموعه، آقای مهندس هادی عزیززاده، که کتاب زیر نظر ایشان تألیف شده است، تشکر کنیم.

همچنین از خانم حمیده نوروزی که زحمت حروفچینی و صفحه‌آرایی، خانم سمانه ایمانفرد که زحمت ترسیم شکل‌ها، و خانم بهاره خدایی که زحمت طراحی جلد را برعهده داشته‌اند، بسیار ممنونیم و برای همه این عزیزان آرزوی موفقیت می‌کنیم.

انتشارات مبتکران

فصل اول: جبر و معادله

درس اول: مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی.....	۸
درس دوم: معادلات درجه دوم.....	۱۶
درس سوم: معادلات گویا و گنگ.....	۳۲
درس چهارم: قدرمطلق و ویژگی های آن.....	۳۸
درس پنجم: آشنایی با هندسه تحلیلی.....	۴۷
پاسخ نامه تشریحی.....	۵۴

فصل دوم: تابع

درس اول: آشنایی بیشتر با تابع.....	۸۲
درس دوم: انواع توابع.....	۸۵
درس سوم: وارون تابع.....	۱۰۶
درس چهارم: اعمال روی توابع.....	۱۱۵
پاسخ نامه تشریحی.....	۱۲۴

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی.....	۱۴۴
درس دوم: تابع لگاریتمی و لگاریتم.....	۱۵۳
درس سوم: ویژگی های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی.....	۱۶۰
پاسخ نامه تشریحی.....	۱۷۰

فصل چهارم: مثلثات

درس اول: رادیان.....	۱۸۲
درس دوم: مقادیر مثلثاتی برای برخی زوایا.....	۱۸۷
درس سوم: توابع مثلثاتی.....	۱۹۴
درس چهارم: اتحادهای مثلثاتی.....	۲۰۱
پاسخ نامه تشریحی.....	۲۱۴

فصل پنجم: حد و پیوستگی

درس اول: مفهوم حد و فرایندهای حدی.....	۲۳۲
درس دوم: حدهای یک طرفه (حد چپ و حد راست).....	۲۳۷
درس سوم: قضایای حد.....	۲۴۲
درس چهارم: محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$).....	۲۴۸
درس پنجم: پیوستگی.....	۲۵۵
پاسخ نامه تشریحی.....	۲۶۲

آزمون ها

آزمون سراسری سال ۹۶.....	۲۷۹
پاسخ نامه تشریحی آزمون سراسری سال ۹۶.....	۲۸۲
آزمون سراسری سال ۹۷.....	۲۸۵
پاسخ نامه تشریحی آزمون سراسری سال ۹۷.....	۲۸۸
آزمون سراسری سال ۹۸.....	۲۹۱
پاسخ نامه تشریحی آزمون سراسری سال ۹۸.....	۲۹۴
آزمون سراسری سال ۹۹.....	۲۹۷
پاسخ نامه تشریحی آزمون سراسری سال ۹۹.....	۳۰۰

فصل اول: جبر و معادله

درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

مجموع جملات دنباله حسابی

در یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d ، مجموع n جمله اول دنباله از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

مثال مجموع بیست جمله اول دنباله حسابی $2, 7, 12, \dots$ را به دست آورید.

پاسخ

$$a_1 = 2, d = 5 \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2} [2(2) + (20-1)5] = 10(4 + 95) = 990$$

تذکره اگر a_1 جمله اول و a_n جمله آخر دنباله حسابی باشد، آنگاه مجموع n جمله اول را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

مثال در یک دنباله حسابی جمله n ام به صورت $a_n = 4n - 3$ است. مجموع ده جمله اول این دنباله را به دست آورید.

پاسخ

$$a_1 = 4(1) - 3 = 1, a_{10} = 4(10) - 3 = 37 \\ \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2} (1 + 37) = 190$$

نکته از روابط محاسبه مجموع n جمله اول دنباله حسابی می‌توان نتیجه گرفت:

۱) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n)

۲) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ (مجموع اعداد طبیعی فرد)

۳) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$ (مجموع اعداد طبیعی زوج)

قانون اندیس‌ها در دنباله حسابی

در دنباله حسابی مجموع جملات متساوی‌فاصله از طرفین برابر است. مثلاً در دنباله $2, 4, 6, 8, 10, 12$ داریم:

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_6 & a_2 & a_5 & a_3 & a_4 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 2+12 & = & 4+10 & = & 6+8 \end{array}$$

به بیان دیگر در دنباله حسابی $a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$ می‌توان گفت:

$$\text{اگر } m+n = p+q \Rightarrow a_m + a_n = a_p + a_q$$

مثال در یک دنباله حسابی که ۵۰ جمله دارد، مجموع سه جمله اول و سه جمله آخر برابر ۲۴۰ است. مجموع تمام جملات دنباله را به دست آورید.

پاسخ

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_{48} + a_{49} + a_{50} = 240 \Rightarrow (a_1 + a_{50}) + (a_2 + a_{49}) + (a_3 + a_{48}) = 240$$

طبق قانون اندیس‌ها، چون $a_1 + a_{50} = a_2 + a_{49} = a_3 + a_{48}$ ، داریم:

$$3(a_1 + a_{50}) = 240 \Rightarrow a_1 + a_{50} = 80 \Rightarrow S_{50} = \frac{50}{2} (a_1 + a_{50}) = \frac{50}{2} (80) = 2000$$

مثال در یک دنباله حسابی متناهی مجموع دو جمله اول برابر ۱۵ و مجموع دو جمله آخر برابر ۳۵ است. اگر مجموع جملات این دنباله برابر ۵۲۵ باشد، این دنباله چند جمله دارد؟

پاسخ

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 15 \\ a_{n-1} + a_n = 35 \end{cases} \Rightarrow (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) = 50 \Rightarrow 2(a_1 + a_n) = 50 \Rightarrow a_1 + a_n = 25$$

$$S_n = 525 \Rightarrow \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = 525 \Rightarrow \frac{n}{2} (25) = 525 \Rightarrow n = 42$$

مثال مجموع تمام اعداد طبیعی بخش پذیر بر ۶ بین دو عدد ۱۰۰ و ۲۰۰ را بیابید.

پاسخ اعداد طبیعی بخش پذیر بر ۶ بین ۱۰۰ و ۲۰۰ دنباله حسابی به صورت زیر تشکیل می دهند:

$$102, 108, \dots, 198$$

$$a_1 = 102, a_n = 198 \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} 198 = 102 + (n-1)6 \Rightarrow n = \frac{198-102}{6} + 1 = 17 \Rightarrow S_{17} = \frac{17}{2}(102+198) = 2550$$

مثال اگر مجموعه اعداد طبیعی زوج را به صورتی دسته بندی کنیم که در آن تعداد اعداد هر دسته برابر با شماره آن دسته باشد، ...، (۸، ۱۰، ۱۲)، (۴، ۶)، (۲) و دنباله a_n مجموع اعداد دسته n م باشد، آنگاه مجموع ده جمله اول دنباله a_n را بیابید.

پاسخ مجموع ۱۰ جمله اول دنباله a_n برابر مجموع جملات ۱۰ دسته اول از اعداد زوج است.

در این دسته تعداد $10 = \frac{(1+10) \cdot 10}{2} = 55$ عدد زوج موجود است، بنابراین جمع ۵۵ عدد زوج را باید بیابیم:

$$S_{55} = \frac{55}{2}(2(2) + (54)(2)) = 3080$$

نکته ۱ مجموع n جمله اول دنباله حسابی، یک عبارت درجه دو بر حسب n است که ضریب n^2 نصف قدرنسبت است و این

عبارت عدد ثابت ندارد، به صورت زیر:

$$S = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n = An^2 + Bn$$

۲ اگر S_n مجموع n جمله اول دنباله حسابی باشد، آنگاه داریم:

$$a_n = S_n - S_{n-1}; (n > 1)$$

مثال در یک دنباله حسابی مجموع n جمله اول از رابطه $S_n = 3n^2 - n$ به دست می آید. قدرنسبت دنباله و جمله هفتم دنباله را بیابید.

پاسخ طبق نکته بالا داریم:

$$\frac{d}{2} = 3 \Rightarrow d = 6$$

$$a_7 = S_7 - S_6 = (3(7)^2 - 7) - (3(6)^2 - 6) = 140 - 102 = 38$$

پرسش های چهارگزینگی

۱. جواب معادله $1+2+3+\dots+n = \frac{5}{9}n^2$ کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

۲. **مرم** تعداد ۱۰ توپ و یک سبد در یک راستا قرار دارند. فاصله نزدیک ترین توپ به سبد ۵ متر است و فاصله توپ ها با یکدیگر ۴ متر است. یک ورزشکار با شروع از سبد، توپ ها را یکی یکی داخل سبد می اندازد. او در نهایت چند متر دویده است؟ (کتاب درسی)

۴۶۰ (۴)

۴۴۰ (۳)

۴۲۰ (۲)

۴۰۰ (۱)

۳. روی محیط دایره ای n نقطه متمایز قرار دارد. هر نقطه را به نقاط دیگر وصل می کنیم. اگر تعداد کل وترها ۲۵۳ تا باشد، n کدام است؟ (کتاب درسی)

۲۴ (۴)

۲۳ (۳)

۲۲ (۲)

۲۱ (۱)

۴. مجموع همه اعداد سه رقمی که باقیمانده تقسیم آن ها بر ۷ برابر با ۳ است، کدام می شود؟ (کتاب درسی)

۷۰۸۲۴ (۴)

۷۰۸۲۳ (۳)

۷۰۸۲۲ (۲)

۷۰۸۲۱ (۱)

۵. مجموع تمام جملات منفی در دنباله حسابی ...، -۷۷، -۸۱، -۸۵، چند است؟

- (۱) -۷۲۶ (۲) -۸۳۶ (۳) -۹۴۶ (۴) -۱۰۵۶

۶. در دنباله حسابی ۵، ...، ۱۱۱، میانگین جملات کدام است؟

- (۱) ۵۶ (۲) ۵۷ (۳) ۵۸ (۴) ۵۹

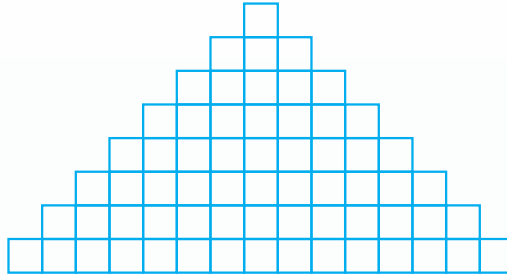
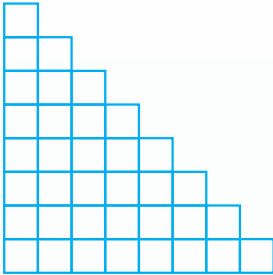
۷. در هر کدام از شکل‌های زیر چند مستطیل 1×2 به شکل  یافت می‌شود؟

(۱) ۲۸ و ۵۶

(۲) ۳۶ و ۵۶

(۳) ۲۸ و ۷۲

(۴) ۳۶ و ۷۲



۸. اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شماره آن دسته باشد. ...، (۷، ۹، ۱۱)، (۳، ۵)، (۱)

(سراسری فارغ از کشور ریاضی - ۹۱)

جمله آخر در دسته بیستم کدام است؟

- (۱) ۴۱۵ (۲) ۴۱۹ (۳) ۴۲۱ (۴) ۴۲۳

۹. بین دو عدد ۲ و ۸ حداقل چند واسطه حسابی درج کنیم تا مجموع جملات ۷۰ شود؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

۱۰. در یک دنباله عددی، مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم

(سراسری ریاضی - ۹۰)

کدام است؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۴ (۳) ۳۶ (۴) ۳۸

۱۱. در یک دنباله حسابی می‌دانیم $a_5 + a_8 + a_{11} + a_{14} = 10$. مقدار S_{18} کدام است؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۹۰ (۳) ۱۳۵ (۴) ۱۸۰

$$\frac{a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{99}}{a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{98}}$$

۱۲. در دنباله حسابی a_n ، حاصل عبارت مقابل کدام است؟

- (۱) $\frac{33}{32}$ (۲) $\frac{33}{16}$ (۳) $\frac{15}{16}$ (۴) $\frac{25}{12}$

۱۳. در یک دنباله حسابی با جمله اول a ، اگر یک واحد به قدر نسبت جملات افزوده شود، آنگاه به مجموع ۲۰ جمله اول چقدر افزوده

خواهد شد؟

- (۱) ۱۶۰ (۲) ۱۷۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۱۹۰

۱۴. حاصل عبارت مقابل کدام است؟ $A = 2^2 - 4^2 + 6^2 - 8^2 + \dots + 198^2 - 196^2 + 194^2 - 192^2 + \dots + 4^2 - 2^2$

- (۱) ۵۰۵۰ (۲) ۱۰۱۰۰ (۳) ۲۰۲۰۰ (۴) ۴۰۴۰۰

$$a_{50}^2 - a_{49}^2 + a_{48}^2 - a_{47}^2 + \dots + a_2^2 - a_1^2 = 600$$

۱۵. در یک دنباله حسابی با قدر نسبت $d = 3$ داریم:

جمله اول این دنباله کدام است؟

- (۱) $-\frac{139}{2}$ (۲) $-\frac{141}{2}$ (۳) $-\frac{143}{2}$ (۴) $-\frac{145}{2}$

۱۶. در بیست جمله اول دنباله حسابی مجموع جملات ردیف فرد ۱۲۰ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۸۰ است. جمله اول

(کتاب درسی)

کدام است؟

- (۱) -۴۰ (۲) -۴۱ (۳) -۴۲ (۴) -۴۳

۱۷. در یک دنباله حسابی، مجموع جملات $(n+1)$ ام تا $(2n)$ ام برابر است با $9n^2 + n$. قدرنسبت دنباله کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۱۸. **مسئله** اگر نسبت مجموع n جمله اول از دو دنباله حسابی $\frac{5n+3}{7n+9}$ باشد، نسبت جملات نهم این دو دنباله، کدام است؟

(سنجش ریاضی - ۹۴)

- (۱) $\frac{1}{11}$ (۲) $\frac{4}{11}$ (۳) $\frac{5}{16}$ (۴) $\frac{11}{16}$

۱۹. **رسواری** در یک دنباله حسابی می‌دانیم $S_{12} = S_{18}$. مجموع ۳۰ جمله اول این دنباله کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۳۰ (۳) ۶۰ (۴) ۹۰۰

۲۰. در یک دنباله حسابی با جمله عمومی a_n ، حاصل $\frac{S_{2n+1}}{a_{n+1}}$ برابر با کدام است؟

- (۱) n (۲) $2n$ (۳) $2n-1$ (۴) $2n+1$

۲۱. مجموع n جمله اول از یک دنباله عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات هفتم تا هجدهم کدام

(سراسری قارج از کشور ریاضی - ۹۰)

است؟

- (۱) ۹ (۲) $\frac{29}{3}$ (۳) $\frac{49}{3}$ (۴) ۱۸

۲۲. دنباله u_n به این صورت تعریف می‌شود:

$$u_1 = 5, u_{n+1} - u_n = 3 + 2n$$

کدام درست است؟

(۱) $u_n = 2n^2 + n + 2$ (۲) $u_n = n^2 - 2n - 2$

(۳) $u_n = 2n^2 - n - 2$ (۴) $u_n = n^2 + 2n + 2$

۲۳. **رسواری** می‌دانیم مجموع مکعب‌های اعداد طبیعی متوالی با شروع از ۱ برابر است با مربع مجموع آن اعداد. مجموع مکعب‌های اعداد

(سراسری ریاضی - ۹۵)

فرد متوالی شروع از ۱ و ختم به ۱۹ کدام است؟

- (۱) ۱۸۱۰۰ (۲) ۱۹۸۰۰ (۳) ۱۹۸۰۰ (۴) ۱۹۹۰۰

۲۴. **رسواری** اندازه‌های زاویه‌های داخلی یک n ضلعی کوژ تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند. اگر قدرنسبت این دنباله 5° و بزرگترین

زاویه آن 160° باشد، آنگاه n برابر است با:

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶

۲۵. **رسواری** جملات اول، سوم و نهم در یک دنباله حسابی، جملات متوالی یک دنباله هندسی هستند. مجموع ۳۰ جمله اول در این

دنباله حسابی چند برابر جمله اول آن است؟

- (۱) ۴۵۰ (۲) ۴۵۵ (۳) ۴۶۰ (۴) ۴۶۵

۲۶. مجموع n جمله اول تصاعدهای حسابی ۸، ۱۲، ... و ۱۷، ۱۸، ... به ترتیب S_n و S'_n اند. به ازای چند مقدار از n ، تساوی

$S_n = S'_n$ برقرار است؟

- (۱) هیچ مقداری از n (۲) یک مقدار از n
(۳) دو مقدار از n (۴) چهار مقدار از n

مجموع جملات دنباله هندسی

در یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت $q \neq 1$ ، مجموع n جمله اول از رابطه مقابل به دست می آید:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

تذکره اگر $q=1$ باشد، آگاه دنباله هندسی به صورت a_1, a_1, a_1, \dots است که مجموع n جمله اول برابر است با:

$$S_n = na_1$$

مثال حاصل عبارت $\frac{1}{3} + 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^9$ را بیابید.

پاسخ عبارت داده شده مجموع ۱۱ جمله اول دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = \frac{1}{3}$ و قدرنسبت $q=2$ است، پس داریم:

$$S_{11} = \frac{1}{3} \times \frac{1-2^{11}}{1-2} = \frac{2^{11}-1}{2} = \frac{2047}{2} = 1023.5$$

مثال در یک دنباله هندسی مجموع هشت جمله اول ده برابر مجموع چهار جمله اول آن است. جمله نهم چند برابر جمله اول است؟

پاسخ

$$\frac{S_8}{S_4} = 10 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^8)}{a_1(1-q^4)} = 10 \Rightarrow \frac{1-q^8}{1-q^4} = 10 \Rightarrow \frac{(1-q^4)(1+q^4)}{1-q^4} = 10 \Rightarrow 1+q^4 = 10 \Rightarrow q^4 = 9 \Rightarrow \frac{a_9}{a_1} = \frac{a_1 q^8}{a_1} = q^8 = (q^4)^2 = 9^2 = 81$$

مثال اعداد $x-3$ و x و 2 به ترتیب از چپ به راست سه جمله اول از یک دنباله هندسی نزولی اند. مجموع هشت جمله اول دنباله را به دست آورید.

پاسخ شرط اینکه سه عدد c و b و a سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند این است که $b^2 = ac$. پس:

$$x, 2, x-3 \Rightarrow 4 = x(x-3) \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = 4$$

به ازای $x = -1$ دنباله به صورت $\dots, -4, -2, -1$ است که نه صعودی و نه نزولی است و قابل قبول نیست. ولی به ازای $x = 4$ دنباله به صورت $\dots, 1, 2, 4$ است که دنباله ای است نزولی و قابل قبول است و داریم:

$$a_1 = 4, q = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_8 = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8}{1 - \frac{1}{2}} = 8 \times \left(1 - \frac{1}{256}\right) = 8 \times \frac{255}{256} = \frac{255}{32}$$

مثال حداقل چند جمله از دنباله هندسی $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$ را جمع کنیم تا حاصل بیشتر از 0.999 گردد؟

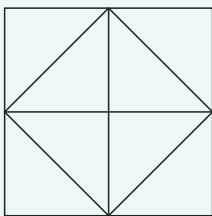
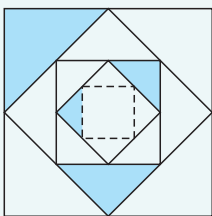
$$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0.999 \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{1000} \Rightarrow 2^n > 1000 \Rightarrow n > 9 \Rightarrow n \geq 10$$

یعنی باید حداقل ۱۰ جمله را جمع کنیم.

مثال حاصل عبارت $\frac{1-x+x^2-\dots-x^{13}}{1-\sqrt{2}}$ را به ازای $x = \sqrt{2}$ بیابید.

پاسخ صورت کسر مجموع ۱۴ جمله یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت $(-x)$ است. پس:

$$A = \frac{1-x+x^2-\dots-x^{13}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1 \times \frac{1-(-x)^{14}}{1-(-x)}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-x^{14}}{1-\sqrt{2}} \xrightarrow{x=\sqrt{2}} A = \frac{1-(\sqrt{2})^{14}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-2^7}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-128}{1-\sqrt{2}} = 127$$



مثال مطابق شکل مقابل مربعی به طول ضلع ۲ سانتی‌متر در نظر بگیرید. وسط‌های اضلاع این مربع را به هم وصل می‌کنیم و یک مثلث از ۴ مثلث ایجاد شده را رنگ می‌زنیم. سپس در مرحله دوم وسط‌های اضلاع مربع جدید داخل مربع اولیه را به هم وصل کرده و یک مثلث از ۴ مثلث ایجاد شده در آن را رنگ می‌زنیم. اگر به همین ترتیب این کار را تکرار کنیم، پس از ۸ مرحله چه سطحی از مربع رنگ شده است؟

پاسخ مطابق شکل مقابل، در هر مرحله درواقع $\frac{1}{8}$ مساحت مربع را رنگ می‌کنیم. در مرحله اول

$a_1 = \frac{1}{8}S$ را رنگ کرده‌ایم. در مرحله دوم مربع جدیدی به مساحت $\frac{1}{4}S$ داخل آن ایجاد کرده‌ایم و

$\frac{1}{8}$ آن را رنگ زده‌ایم. یعنی: $a_2 = \frac{1}{8}(\frac{1}{4}S)$ و به همین ترتیب: $a_3 = (\frac{1}{8})(\frac{1}{4})(\frac{1}{4}S)$ و ...

بدین ترتیب بخش‌های رنگ شده یک دنباله هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{4}$ و جمله اول $a_1 = \frac{1}{8}(2)^2 = \frac{1}{2}$

تشکیل می‌دهند و پس از ۸ مرحله سطح رنگ شده از مربع برابر است با:

$$S_8 = \frac{1}{2} \times \frac{1 - (\frac{1}{4})^8}{1 - \frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{256} = \frac{255}{256} \approx 0,99 \text{ cm}^2$$

یعنی تقریباً ۰/۹۹ سانتی‌متر مربع پس از ۸ مرحله رنگ شده است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

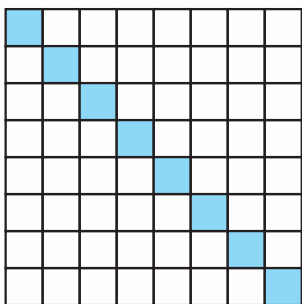
۲۷. در دنباله هندسی $1, 2, 4, \dots$ مجموع چهارده جمله اول چند برابر مجموع هفت جمله اول آن است؟

۱۲۹ (۴)

۱۲۷ (۳)

۶۳ (۲)

۶۵ (۱)



۲۸. **مسئله** با شروع از خانه بالا و چپ، در خانه‌ها گندم می‌گذاریم. در هر خانه دو برابر خانه قبلی گندم قرار دارد (مثلاً در خانه اول سطرهای اول و دوم به ترتیب ۱ و ۲ تا گندم قرار

دارد). مجموع تعداد گندم‌های خانه‌های رنگی کدام است؟ (کتاب درسی)

$\frac{264-1}{28-1}$ (۲)

$\frac{272-1}{29-1}$ (۱)

$\frac{272-1}{28-1}$ (۴)

$\frac{264-1}{29-1}$ (۳)

۲۹. **مسئله** هر لایه محافظتی، شدت تابش مضر مواد رادیواکتیو را نصف می‌کند. حداقل چند لایه نیاز است تا شدت مواد مضر ۹۹

(کتاب درسی)

درصد کاهش یابد؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

۳۰. در یک دنباله هندسی با قدرنسبت $q > 0$ ، جمله اول ۴ برابر جمله سوم است. مجموع شش جمله اول آن چند برابر جمله اول است؟

$\frac{17}{8}$ (۴)

$\frac{23}{16}$ (۳)

$\frac{63}{32}$ (۲)

$\frac{63}{64}$ (۱)

۳۱. در یک دنباله هندسی جملات اول و n ام به ترتیب $\frac{3}{4}$ و ۱۲ و مجموع این n جمله $\frac{93}{4}$ است. قدرنسبت این دنباله هندسی کدام

است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

۳۲. **مسئله** مجموع چند جمله اول از دنباله هندسی $6, -12, 24, \dots$ برابر با ۱۰۲۶ است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

۳۳. بین دو عدد ۲ و $۱۶\sqrt{۲}$ ، شش عدد چنان درجه شده‌اند که هشت عدد حاصل، تصاعد هندسی تشکیل داده‌اند. مجموع این هشت عدد کدام است؟

(۱) $۳۰(۲+\sqrt{۲})$ (۲) $۴۸\sqrt{۲}$ (۳) $۳۰(\sqrt{۲}+۱)$ (۴) $۳۶(\sqrt{۲}+۱)$

۳۴. در یک دنباله حسابی، جمله اول، نهم و چهل و نهم، به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی هستند. نسبت مجموع سه جمله اول به جمله اول در دنباله هندسی کدام است؟

(۱) ۳۳ (۲) ۶۵ (۳) ۳۱ (۴) ۶۲

۳۵. در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، بین جملات رابطه $\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}{a_4} = ۶۴$ برقرار است. مجموع شش جمله اول چند برابر جمله اول است؟

(۱) $\frac{۶۳}{۶۴}$ (۲) $\frac{۶۳}{۳۲}$ (۳) $\frac{۶۳}{۱۲۸}$ (۴) $\frac{۶۳}{۱۶}$

۳۶. در دنباله هندسی a_n می‌دانیم $\frac{a_{۱۰}}{a_۵} = ۴$. مقدار $\frac{S_{۱۰}}{S_۵}$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۳۷. در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول آن ۳ است. مجموع ۶ جمله اول کدام است؟

(۱) $۱۰/۸$ (۲) $۱۱/۲$ (۳) $۱۲/۶$ (۴) $۱۳/۴$

۳۸. در دنباله‌ای هندسی، مجموع ۳ جمله اول ۱۳۶ و مجموع ۶ جمله اول ۱۵۳ است. جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟

(۱) $\frac{۸۱}{۱۶}$ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۳۹. بین دو عدد ۳۲۴ و ۴ سه عدد مثبت چنان درج شده است که پنج عدد حاصل، تشکیل یک دنباله هندسی دهند. مجموع این پنج عدد کدام است؟

(۱) ۴۲۸ (۲) ۴۸۴ (۳) ۴۸۶ (۴) ۴۸۸

۴۰. دنباله هندسی a_n با قدر نسبت $q=۳$ مفروض است. حاصل عبارت مقابل کدام است؟

$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{50}}{a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_{49}}$ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۱. در دنباله هندسی a_n با قدر نسبت ۳، حاصل $\frac{a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{30}}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{30}}$ برابر با چند است؟

(۱) $\frac{۱}{۲۷}$ (۲) $\frac{۱}{۲۰}$ (۳) $\frac{۱}{۱۸}$ (۴) $\frac{۹}{۱۳}$

۴۲. حاصل عبارت $۹ + ۹۹ + ۹۹۹ + \dots + \underbrace{۹۹۹\dots ۹}_{۲۰ \text{ تا}}$ برابر با کدام گزینه است؟

(۱) $\frac{۱۰^{۲۱}-۱۰}{۹} - ۲۰$ (۲) $\frac{۱۰^{۲۰}-۱۰}{۹} - ۲۰$ (۳) $\frac{۱۰^{۲۱}-۱۰}{۹} + ۲۰$ (۴) $\frac{۱۰^{۲۰}-۱۰}{۹} + ۲۰$

۴۳. ساده شده عبارت $A = \frac{(1+x^6)(1-x^6)}{1+x+x^2+\dots+x^{11}}$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) -x (۳) x-۱ (۴) ۱-x

۴۴. حاصل $\frac{1-t^2+t^4-t^6+\dots-t^{14}}{1+t^4+t^8+t^{12}}$ به ازای $t=\sqrt{۷}$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۴ (۳) -۶ (۴) -۸

۴۵. حاصل عبارت $\frac{t^{11}+t^{10}+t^9+\dots+t+1}{t^9+t^6+t^3+1}$ ، به ازای $t = \frac{-1+\sqrt{۵}}{۲}$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

(سراسری ریاضی - ۹۳)

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)\dots(1+a^{2^{n-1}})$$

۶۳ (۴)

۶۵ (۳)

$$1 + (1+3) + (1+3+3^2) + \dots + (1+3+3^2+\dots+3^{n-1})$$

$$\frac{3^{n+1} - 3 - 4n}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{3^{n+1} - 3 - 2n}{2} \quad (۳)$$

$$A = \frac{1^0}{1^1} + \frac{9}{2^2} + \frac{8}{3^3} + \frac{7}{4^4} + \dots + \frac{1}{10^10}$$

$$10 - \frac{1}{10} \quad (۴)$$

$$9 - \frac{1}{10} \quad (۳)$$

۴۶. مربع در معادله مقابل مقدار n کدام است؟
 ۳۱ (۲) ۳۳ (۱)

۴۷. رُسوار حاصل عبارت مقابل بر حسب n کدام است؟
 $\frac{3^{n+1} - 3 - 4n}{4}$ (۲) $\frac{3^{n+1} - 3 - 2n}{4}$ (۱)

۴۸. رُسوار حاصل عبارت مقابل با کدام گزینه برابر است؟
 $10 + \frac{1}{10}$ (۲) $9 + \frac{1}{10}$ (۱)

۴۹. رُسوار دنباله هندسی a_n مفروض است. حاصل $\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{10}^2}{a_1(a_1 + a_2 + \dots + a_{10})}$ با کدام برابر است؟

$$\frac{a_{11} + a_{12}}{a_1 + a_2} \quad (۴)$$

$$\frac{a_1 + a_{11}}{a_1 + a_2} \quad (۳)$$

$$\frac{a_9 + a_{10}}{a_1 + a_2} \quad (۲)$$

$$\frac{a_1 + a_{10}}{a_1 + a_2} \quad (۱)$$

۵۰. رُسوار دنباله هندسی a_n با قدر نسبت q مفروض است. حاصل عبارت مقابل کدام است؟
 $\frac{S_4}{S_1} + \frac{S_4}{S_2} + \frac{S_6}{S_3} + \frac{S_8}{S_4} + \frac{S_{10}}{S_5} + \frac{S_{12}}{S_6}$

$$\frac{q - q^6}{1 - q} - 6 \quad (۴)$$

$$\frac{q + q^6}{1 + q} - 6 \quad (۳)$$

$$6 + \frac{q - q^6}{1 - q} \quad (۲)$$

$$6 + \frac{q + q^6}{1 + q} \quad (۱)$$

درس دوم: معادلات درجه دوم

روابط بین ضرایب در ریشه‌های معادله درجه دوم

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله عبارت است از:

$$\alpha + \beta = S = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha \cdot \beta = P = \frac{c}{a}$$

مثلاً در معادله $2x^2 + 5x - 3 = 0$ داریم:

$$S = -\frac{5}{2}$$

$$P = -\frac{3}{2}$$

مثال اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 5x - 1 = 0$ باشند، مقدار عددی عبارات زیر را به دست آورید.

الف $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

ب $\alpha^2 + \beta^2$

ج $\alpha^3 + \beta^3$

د $|\alpha - \beta|$

پاسخ ابتدا S و P را به دست می‌آوریم:

$$S = -\frac{5}{1} = -5 ; P = -\frac{1}{1} = -1$$

سپس باید هر عبارت را بر حسب S و P ، به صورت زیر بنویسیم:

الف $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{-5}{-1} = 5$

ب $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = (-5)^2 - 2(-1) = 25 + 2 = 27$

ج $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3PS = (-5)^3 - 3(-1)(-5) = -125 - 15 = -140$

د $A = |\alpha - \beta|$ طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم $\Rightarrow A^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \Rightarrow$

$$A^2 = S^2 - 4P = (-5)^2 - 4(-1) = 25 + 4 = 29 \Rightarrow A = |\alpha - \beta| = \sqrt{29}$$

مثال در معادله درجه دوم $2x^2 + kx + 9 = 0$ یک ریشه دو برابر ریشه دیگر است. مجموع دو ریشه مثبت کدام است؟

پاسخ اگر α و β ریشه‌های معادله فوق باشند، طبق فرض داریم:

$$\alpha = 2\beta \rightarrow \alpha^2 = 2\alpha\beta \xrightarrow{\alpha\beta=P=\frac{9}{2}} \alpha^2 = 2\left(\frac{9}{2}\right) = 9 \Rightarrow \alpha = \pm 3 \Rightarrow \alpha = +3 \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع دو ریشه مثبت} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

مثال اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 2x - 2 = 0$ باشند، حاصل عبارت $(\alpha^3 + 2\alpha^2 - \beta)(\beta^3 + 2\beta^2 - \alpha)$ را به دست آورید.

پاسخ چون α و β ریشه‌های معادله‌اند پس در معادله صدق می‌کنند. یعنی:

$$\alpha^2 + 2\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha = 2 \xrightarrow{\text{طرفین معادله را در } \alpha \text{ ضرب می‌کنیم}} \alpha^3 + 2\alpha^2 = 2\alpha$$

و

$$\beta^2 + 2\beta - 2 = 0 \Rightarrow \beta^2 + 2\beta = 2 \xrightarrow{\text{طرفین معادله را در } \beta \text{ ضرب می‌کنیم}} \beta^3 + 2\beta^2 = 2\beta$$

$$\Rightarrow (\alpha^3 + 2\alpha^2 - \beta)(\beta^3 + 2\beta^2 - \alpha) = (2\alpha - \beta)(2\beta - \alpha) = 4\alpha\beta - 2\alpha^2 - 2\beta^2 + \alpha\beta = 5\alpha\beta - 2(\alpha^2 + \beta^2) = 5P - 2(S^2 - 2P)$$

$$S = -\frac{b}{a} = -2$$

$$= 5(-2) - 2(4 + 4) = -10 - 16 = -26$$

$$P = \frac{c}{a} = -2$$

۵۱. در معادله $x^2 + px + q = 0$ ، که در آن p و q عددهای مثبت‌اند، اگر تفاضل ریشه‌ها ۱ باشد، آنگاه p برابر است با:

- (۱) $\sqrt{4q+1}$ (۲) $q-1$ (۳) $\sqrt{4q-1}$ (۴) $q+1$

۵۲. **مریم** اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - mx + 8 = 0$ باشند و اعداد $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ تشکیل یک دنباله حسابی بدهند، آنگاه مقدار m کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۰ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۳. **مریم** α و β ریشه‌های $2x^2 + px + 8 = 0$ هستند. $\sqrt{\alpha}$ و $\sqrt{\beta}$ ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + q = 0$ هستند. حاصل $p + q$ کدام است؟

- (۱) -۱۸ (۲) -۲۰ (۳) -۲۲ (۴) -۲۴

۵۴. **مریم** ریشه‌های معادله $x^2 + mx - 4 = 0$ اعدادی صحیح هستند. مقدار m کدام نمی‌تواند باشد؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۰ (۴) -۲

۵۵. به ازای کدام مقدار m ، نسبت ریشه‌های معادله $2x^2 - 10x + m = 0$ برابر ۴ است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) -۴ (۴) -۸

۵۶. در معادله $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشه دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟ (سراسری قاج از کشور ریاضی - ۹۱)

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۵۷. α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ هستند و رابطه $\alpha + \beta = \alpha^2\beta^2$ برقرار است. کدام گزینه درست است؟

- (۱) $b^2 + ac = 0$ (۲) $c + ab = 0$ (۳) $c^2 - ab = 0$ (۴) $c^2 + ab = 0$

۵۸. α و β ریشه‌های معادله $(m+2)x^2 + 2nx + 9m + 3n = 0$ هستند. به ازای کدام مقدار n ، اعداد α ، β و ۳ تشکیل دنباله هندسی می‌دهند؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۵۹. اگر $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ ریشه‌های معادله $2x^2 - (m+4)x + m = 0$ باشند، آنگاه حاصل $\tan\alpha + \cot\alpha$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۰. α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 4x + 7 = 0$ هستند. حاصل $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{2}{7}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۶۱. **مریم** معادله $2x^2 - (m+1)x + m = 0$ با ریشه‌های α و β مفروض است. اگر $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 5$ ، آنگاه مقدار m کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) ۴ (۳) -۶ (۴) ۷

۶۲. **مریم** به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $2x^2 - mx + m - 1 = 0$ برابر ۴ است؟ (سنجش ریاضی - ۹۳)

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۶ (۴) -۶

۶۳. اگر α و β جواب‌های معادله $x^2 - 7x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{7}$ (۲) ۷ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) ۳

۶۴. معادله $x^2 + 4x - 1 = 0$ با ریشه‌های α و β مفروض است. حاصل $\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ کدام است؟

- (۱) ۲۴۰ (۲) ۳۲۰ (۳) ۳۶۰ (۴) ۴۲۰

۶۵. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2 + 3\beta$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) -۱۴ (۴) ۱۴

۶۶. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + 4x - 7 = 0$ باشند، آنگاه مقدار $x_1^2 + 5x_1 + x_2$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۶۷. اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^2 + 2x - 7 = 0$ باشند، حاصل $\sqrt{x_1^2(7 - 2x_2)}$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴)

(سنجش ریاضی - ۹۴)

۶۸. **رِسور** اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 2x - 4 = 0$ باشد، حاصل $\alpha^3 - 2\beta^2 + 4\beta$ کدام است؟

- ۰ (۱) -۸ (۲) ۱۶ (۳) -۳۲ (۴)

۶۹. **رِسور** اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 3x - 9 = 0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha^2}{(\beta + 3)^2}$ کدام است؟

- $\frac{1}{4}$ (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴)

۷۰. ریشه‌های معادله $x^2 + bx + c = 0$ از دو برابر ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 6 = 0$ یک واحد بیشتر است. $b + c$ کدام است؟

- ۹ (۱) -۱۶ (۲) -۲۵ (۳) -۳۶ (۴)

۷۱. اگر α و β ریشه‌های معادله $x(5x + 3) = 2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله $4x^2 - kx + 25 = 0$

(سراسری ریاضی - ۹۰)

به صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2} \right\}$ است؟

- ۲۷ (۱) ۲۸ (۲) ۲۹ (۳) ۳۱ (۴)

نوشتن معادله درجه ۲ با داشتن S و P

☐ اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دومی باشند، در این صورت با تشکیل $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha \cdot \beta$ می‌توانیم این معادله درجه دوم را به صورت زیر بنویسیم:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

مثال معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $(2 - \sqrt{5})^3$ و $(2 + \sqrt{5})^3$ باشد.

$$S = (2 - \sqrt{5})^3 + (2 + \sqrt{5})^3 = 8 - 12\sqrt{5} + 30 - 5\sqrt{5} + 8 + 12\sqrt{5} + 30 + 5\sqrt{5} = 76$$

$$P = (2 - \sqrt{5})^3 \cdot (2 + \sqrt{5})^3 = ((2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5}))^3 = (4 - 5)^3 = -1$$

پس معادله درجه دوم خواسته شده عبارت است از:

$$x^2 - 76x - 1 = 0$$

مثال معادله درجه دومی با ضرایب گویا بنویسید که یکی از ریشه‌های آن $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ باشد.

پاسخ راه حل اول:

$$x = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} = |1 + \sqrt{3}| = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow x - 1 = \sqrt{3} \Rightarrow (x - 1)^2 = 3 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\alpha = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} = |1 + \sqrt{3}| = 1 + \sqrt{3}$$

راه حل دوم: اگر یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم با ضرایب گویا $m + \sqrt{n}$ باشد، حتماً ریشه دیگر $m - \sqrt{n}$ است. پس در این سؤال ریشه دیگر یعنی β برابر $1 - \sqrt{3}$ است و داریم:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 1 + \sqrt{3} \\ \beta &= 1 - \sqrt{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S = 2, P = (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) = 1 - 3 = -2$$

پس معادله درجه دوم عبارت است از:

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

تشکیل معادله درجه دوم جدید

هرگاه معادله درجه دومی داشته باشیم و معادله درجه دوم دیگری بخواهیم که ریشه‌هایش رابطه‌ای با ریشه‌های معادله اول داشته باشد، باید با تشکیل S و P معادله جدید بر حسب S و P معادله اول، معادله دوم خواسته شده را از فرمول $x^2 - Sx + P = 0$ بنویسیم.

مثال معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش ۹ برابر ریشه‌های معادله $x^2 - x - 3 = 0$ باشد.

پاسخ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - x - 3 = 0$ باشد و α' و β' ریشه‌های معادله مورد نظر باشد داریم:

$$\alpha' = 9\alpha \Rightarrow \begin{cases} S' = \alpha' + \beta' = 9\alpha + 9\beta = 9(\alpha + \beta) \xrightarrow{\alpha + \beta = S = 1} 9(1) = 9 \\ P' = \alpha' \cdot \beta' = 9\alpha \cdot 9\beta = 81(\alpha\beta) \xrightarrow{\alpha\beta = P = -3} 81(-3) = -243 \end{cases}$$

با توجه به اینکه $S' = 9$ و $P' = -243$ ، معادله جدید به صورت $x^2 - 9x - 243 = 0$ است.

مثال معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش مجذور ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشد.

پاسخ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ و α' و β' ریشه‌های معادله مورد نظر باشد، داریم:

$$\alpha' = \alpha^2 \Rightarrow \begin{cases} S' = \alpha' + \beta' = \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P \xrightarrow[S=4]{P=1} 16 - 2 = 14 \\ P' = \alpha' \cdot \beta' = \alpha^2 \cdot \beta^2 = (\alpha \cdot \beta)^2 = P^2 = (1)^2 = 1 \end{cases}$$

با داشتن $S' = 14$ و $P' = 1$ ، معادله درجه دوم جدید به صورت $x^2 - 14x + 1 = 0$ است.

پیش‌سازهای ارزشیابی

۷۲. **مرم** مستطیلی به محیط ۳۰ و مساحت ۵۴ مفروض است. نسبت طول به عرض این مستطیل کدام است؟ (کتاب درسی)

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) ۳

۷۳. می‌دانیم α ، ۱۶ و β تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند. همچنین α ، ۱۰ و β تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند. α و β ریشه‌های کدام معادله هستند؟

- (۱) $x^2 - 16x + 10 = 0$ (۲) $x^2 - 32x + 10 = 0$ (۳) $x^2 - 16x + 100 = 0$ (۴) $x^2 - 32x + 100 = 0$

۷۴. **مرم** اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x = 1$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله $8x^2 + kx - 1 = 0$ به صورت $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$ است؟ (سراسری قارج از کشور ریاضی - ۹۰)

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۹

۷۵. **مرم** $2 - \sqrt{5}$ و $2 + \sqrt{5}$ ریشه‌های کدام یک از معادله‌های درجه دوم زیر هستند؟ (کتاب درسی)

- (۱) $x^2 + 4x + 1 = 0$ (۲) $x^2 - 4x + 1 = 0$ (۳) $x^2 + 4x - 1 = 0$ (۴) $x^2 - 4x - 1 = 0$

۷۶. **رئوسار** $(3 - \sqrt{5})^3$ و $(3 + \sqrt{5})^3$ ریشه‌های کدام یک از معادله‌های درجه دوم زیر هستند؟

- (۱) $x^2 - 216x + 72 = 0$ (۲) $x^2 - 144x + 64 = 0$ (۳) $x^2 - 72x + 216 = 0$ (۴) $x^2 - 64x + 144 = 0$

۷۷. ریشه‌های کدام معادله از مربع ریشه‌های معادله $x^2 + 3x + 1 = 0$ یک واحد بیشتر است؟ (سبش ریاضی - ۹۳)

- (۱) $x^2 - 9x + 9 = 0$ (۲) $x^2 + 9x + 9 = 0$ (۳) $x^2 - 5x - 5 = 0$ (۴) $x^2 + 5x - 5 = 0$

۷۸. **مرم** اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 6x + 2 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به صورت $\left\{ \alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha} \right\}$ است؟

- (۱) $2x^2 - 18x + 9 = 0$ (۲) $2x^2 - 18x - 9 = 0$ (۳) $2x^2 + 18x + 9 = 0$ (۴) $2x^2 + 18x - 9 = 0$

۷۹. اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1 \right\}$ است؟

(سراسری ریاضی - ۹۲)

(۱) $4x^2 - 5x + 1 = 0$ (۲) $4x^2 - 3x + 1 = 0$ (۳) $4x^2 - 5x - 1 = 0$ (۴) $4x^2 - 3x - 1 = 0$

۸۰. ریشه‌های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ دو واحد بیشتر از ریشه‌های معادله $x^2 - 5x - 1 = 0$ است. حاصل $a + b$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۸۱. جواب‌های معادله $2x^2 + 5x + 1 = 0$ معکوس جواب‌های معادله $ax^2 + bx + 4 = 0$ است. حاصل ab کدام است؟

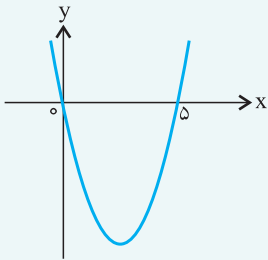
(۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۲۰ (۴) ۴۰

صفرهای تابع درجه ۲

برای تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، جواب‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع می‌گویند. اگر نمودار تابع درجه ۲ که یک سهمی است را رسم کنیم، صفرهای تابع طول‌های نقاط تلاقی نمودار با محور x ها است.

مثال صفرهای تابع $f(x) = x^2 - 5x$ را به دست آورید.

پاسخ

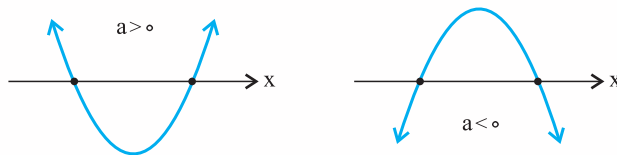


$$x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 5$$

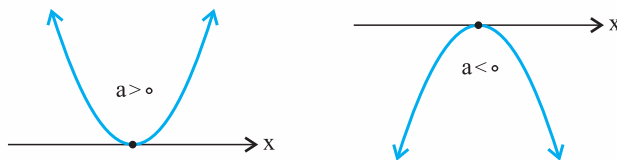
تعیین تعداد صفرهای تابع درجه ۲ به کمک علامت Δ

در تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ داریم:

اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله $f(x) = 0$ دو ریشه دارد و سهمی محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند.



اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله $f(x) = 0$ ریشه مضاعف دارد و سهمی در یک نقطه بر محور x ها مماس است.



اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله $f(x) = 0$ ریشه ندارد و سهمی محور x ها را قطع نمی‌کند.

