به نام پروردگار مهربان

هندسه کنکور

دهم | یازدهم | دوازدهم

حامد شفیعی

لقمه طلایی

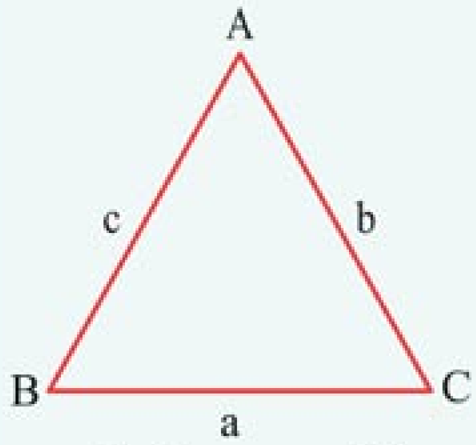
مهروماه

فهرست

فصل اول

ترسیم‌های هندسی

چاشنی: یک مثلث با طول اضلاع a ، b و c در صورتی قابل رسم است که:



$$\begin{cases} b+c>a \\ a+c>b \\ a+b>c \end{cases}$$

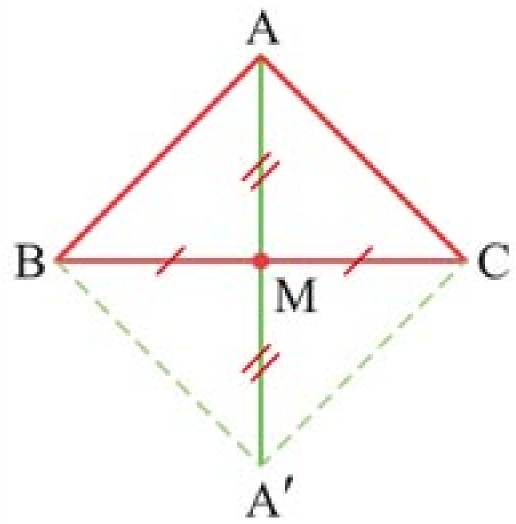
توجه کنید که این سه رابطه را می‌توان به صورت کلی زیر بیان کرد:

$|b-c|<a<b+c$

تست: **در رسم مثلث ABC با معلوم بودن دو ضلع $b=7$ و $c=5$ و میانهٔ $m_a=4$ با خط‌کش و پرگار کدام نتیجه حاصل می‌شود؟**

۱) غیرقابل رسم ۲) جواب منحصربه‌فرد

۳) دو جواب متمایز ۴) فاقد جواب

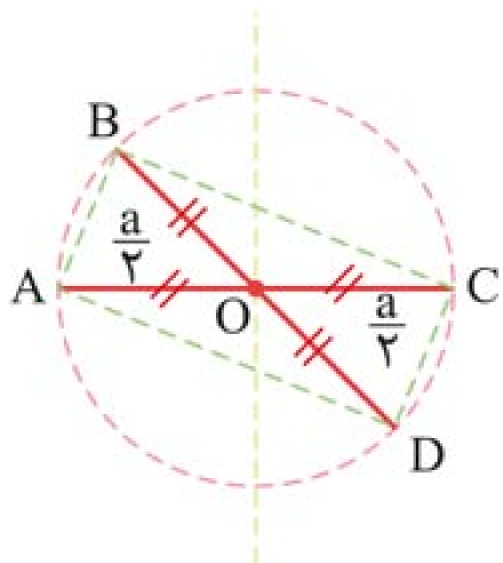


پاسخ ابتدا در مثلث ABC میانهٔ AM را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ A' امتداد می‌دهیم، شکل حاصل یک متوازی‌الاضلاع است (زیرا قطرهای آن همدیگر را نصف می‌کنند.) حال در مثلث ACA' طول ضلع‌های $A'C$ برابر ضلع AB یعنی ۵ است. پس طول اضلاع مثلث $A'CA$ برابر ۵، ۷ و ۸ است که در شرط وجود مثلث صدق می‌کند ($|۸-۷|<۵<۸+۷$). حال به رسم مثلث ABC می‌پردازیم. ابتدا مثلث $A'CA$ را به اضلاع ۵، ۷ و ۸ رسم کرده سپس با رسم عمودمنصف $A'A$، نقطهٔ M وسط آن را مشخص می‌کنیم. حال به مرکز M و شعاع MC دایره‌ای رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع MC را در B قطع کند. پس مثلث ABC به‌طور منحصربه‌فرد رسم می‌شود.

وعدهٔ ۲

رسم چهارضلعی‌های مهم

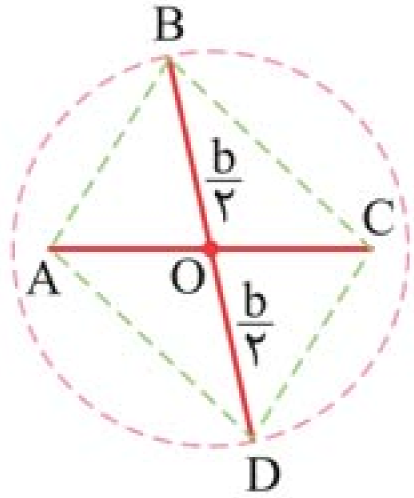
الف رسم مستطیل با طول قطر معلوم



مستطیل چهارضلعی است که قطرهایش با هم برابر و منصف هم باشند. برای رسم مستطیل با طول قطر a، ابتدا پاره‌خط AC به‌طول a را رسم می‌کنیم، سپس با رسم عمودمنصف AC نقطهٔ O (وسط پاره‌خط AC) را پیدا کرده و دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\frac{a}{۲}$ رسم می‌کنیم. یک قطر از این دایره را رسم کرده تا دایره را در نقاط C و D قطع کند.

نکته: با تغییر قطر CD مستطیل موردنظر نیز تغییر می‌کند یعنی بی‌شمار مستطیل می‌توان رسم کرد.

ب رسم متوازی‌الاضلاع با طول قطرهای معلوم



برای رسم متوازی‌الاضلاع که طول قطرهای آن a و b است $(b \leq a)$، ابتدا پاره‌خط AC به طول b رسم می‌کنیم. حال به مرکز O (وسط پاره‌خط AC) و شعاع $\frac{a}{۲}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم.

هر قطر دلخواه از این دایره، دو رأس دیگر متوازی‌الاضلاع است. (در چهارضلعی $ABCD$، قطرها همدیگر را نصف می‌کنند، پس $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است. هم‌چنین مسئله بی‌شمار جواب دارد.)

وعدهٔ ۳

استدلال

تعریف: به روش‌های نتیجه‌گیری، **استدلال** گفته می‌شود. از جمله استدلال‌های مهم عبارت‌اند از:

۱ استدلال استقرایی
۲ استدلال استنتاجی
۳ برهان خلف
۴ استدلال با مثال نقض

۱. استدلال استقرایی: با مشاهدات محدود و بررسی چند حالت از یک موضوع، یک نتیجهٔ کلی دربارهٔ آن موضوع گرفته می‌شود. (از جزء به کل رسیدن).

۲. استدلال استنتاجی: براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی است که درستی آن‌ها را قبلاً پذیرفته‌ایم.

تعریف: **گزاره** یک جملهٔ خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد (درست یا نادرست بودن آن ممکن است بر ما معلوم نباشد.) گزاره دو نوع است:

الف **گزارهٔ ساده:** فقط یک خبر را اعلام می‌کند.

ب **گزارهٔ مرکب:** بیش از یک خبر را اعلام می‌کند.

چاشنی: به گزاره‌ای که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره باشد، **نقیض گزاره** می‌گویند، برای نمونه:

گزاره: یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن ۳۶۰° نیست.

- **نقیض گزاره:** چنین نیست که یک چهارضلعی وجود داشته باشد که مجموع زوایای داخلی‌اش ۳۶۰° نیست» یا «هر چهارضلعی مجموع زوایای داخلی‌اش ۳۶۰° است.»

فصل دوم

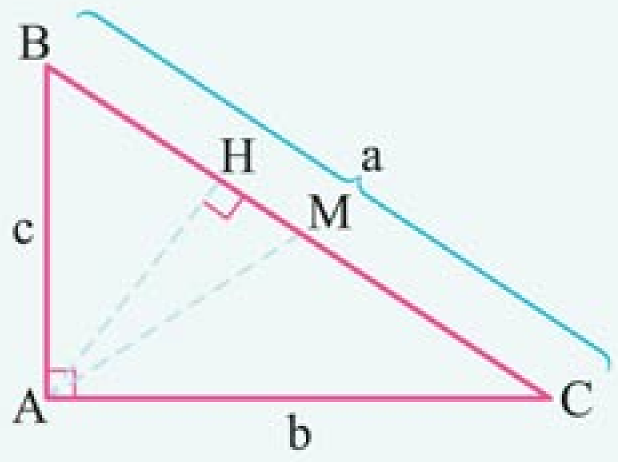
قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن

وعدهٔ ۴

روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه

یادآوری: یک مثلث قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگر مربع اندازهٔ وتر با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر برابر باشد.

چاشنی: (روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه)



۱ $AB^۲ = BC \times BH$

۲ $AC^۲ = BC \times CH$

۳ $AB^۲ + AC^۲ = BC^۲$

۴ $AH^۲ = BH \times CH$

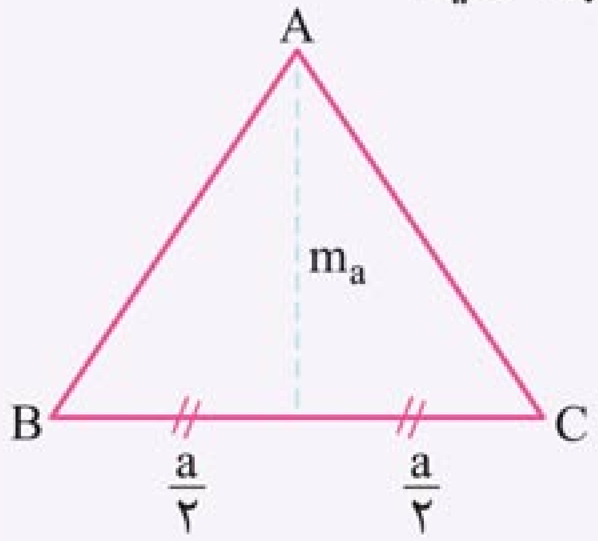
۵ $AH \times BC = AB \times AC$

۶ $AM = \frac{a}{۲}$

۷ $b^۲ - c^۲ = ۲a \times HM$

نکته: طول میانهٔ رسم‌شده از رأس هر مثلث با اندازه زاویهٔ آن رأس نسبت عکس دارد. به حالات زیر توجه کنید:

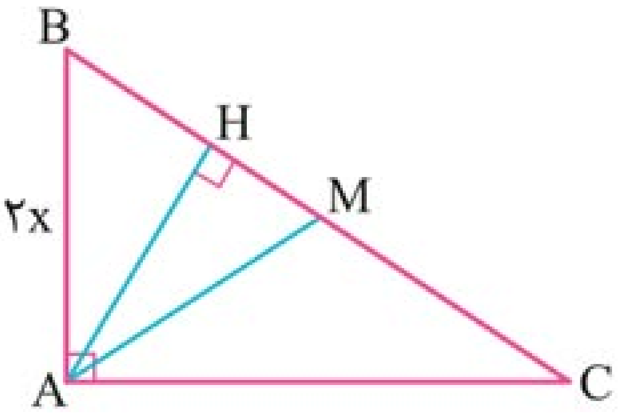
الف $\widehat{A} < ۹۰^\circ \Leftrightarrow m_a > \frac{a}{۲}$



تست: در مثلث ABC ، $AC=\frac{\sqrt{12}}{2}AB$ و $\widehat{A}=90^\circ$ و ارتفاع AH و میانهٔ AM رسم شده‌اند، مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث AMH است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ گزینهٔ «۳»



در هر دو مثلث ABC و AMH ، AH ارتفاع است، پس:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{AMH}}}=\frac{BC}{MH}$$

پس کافی است BC و MH را بیابیم. فرض کنید $AB=2x$ ، پس $AC=\frac{\sqrt{12}}{2}\times 2x=\sqrt{12}x$ ، پس داریم:

$$BC^2=AB^2+AC^2=(2x)^2+(\sqrt{12}x)^2$$

$$=4x^2+12x^2=16x^2\Rightarrow BC=4x \quad ①$$

حال طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$AB^2=BH\times BC\Rightarrow 4x^2=BH\times(4x)\Rightarrow BH=x \quad ②$$

فصل سوم

چندضلعی‌ها

وعدهٔ ۴

لوزی

تعریف: چهارضلعی که هر چهار ضلع آن هم‌اندازه باشد، **لوزی** می‌گویند.

چاشنی: (ویژگی‌های لوزی)

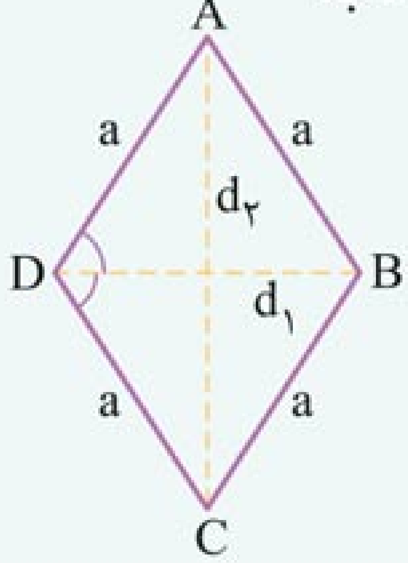
۱ لوزی متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع مجاور آن هم‌اندازه‌اند.

۲ لوزی تمام ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع را دارد.

۳ لوزی متوازی‌الاضلاعی است که قطرهای آن بر هم عمودند.

۴ لوزی متوازی‌الاضلاعی است که در آن حداقل یک قطر روی نیمساز یک زاویهٔ آن باشد.

۵ مساحت لوزی برابر است با:



$$\begin{cases} S = a^2 \sin\alpha \\ S = \frac{1}{2} d_1 \times d_2 \end{cases}$$

تذکر: اگر دو قطر یک چهارضلعی بر هم عمود یا عمودمنصف یکدیگر باشند، نمی‌توان نتیجه گرفت که آن چهارضلعی لوزی است.

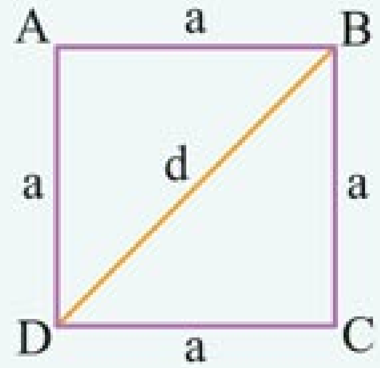
چاشنی: (ویژگی‌های مربع)

۱ مربع، لوزی است که یک زاویهٔ قائمه دارد.

۲ مربع مستطیلی است که دو ضلع مجاور آن با هم برابر باشند.

۳ مربع تمام ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع را دارد.

۴ مساحت مربع برابر است با:



$$\begin{cases} S = \dfrac{d^{۲}}{۲} \quad , d = a\sqrt{۲} \\ S = a^{۲} \end{cases}$$

تست: در شکل زیر بر روی دو ضلع مقابل مربع، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است، قطر بزرگ‌تر لوزی حاصل، چند برابر ضلع مربع اصلی است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) $۲ - \sqrt{۳}$

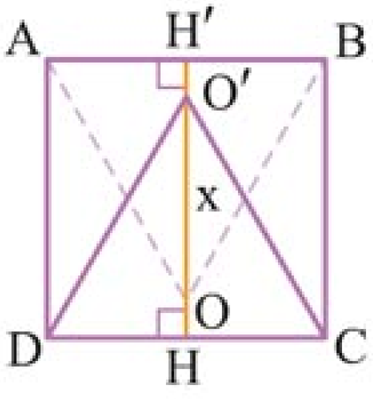
۲) $\dfrac{۱}{۳}$

۳) $\dfrac{۱}{۲}$

۴) $\sqrt{۳} - ۱$

پاسخ گزینهٔ «۴»

دو مثلث ABO و $CO'D$ مثلث‌های متساوی‌الاضلاع‌اند، پس:



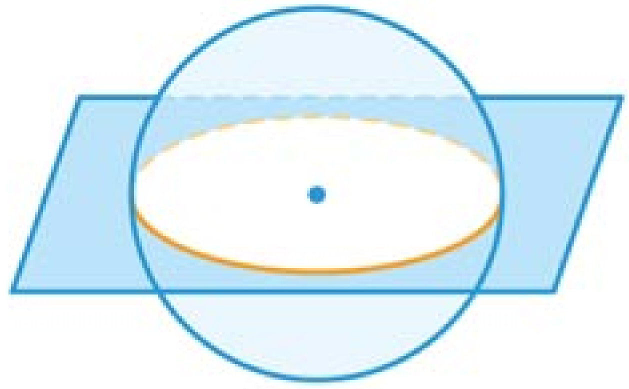
$$\overset{\triangle}{ABO} \cong CO'D$$
$$\Rightarrow OH' = O'H$$
$$\Rightarrow O'H' = OH$$

از طرفی می‌دانیم که ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع $\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}$ طول ضلع است، پس $OH' = O'H = \dfrac{\sqrt{۳}}{۲}AB$. حال فرض کنید $OO' = x$ و $O'H' = OH = y$، پس داریم:

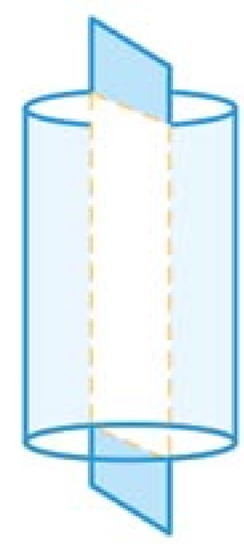
فصل چهارم

تجسم فضایی

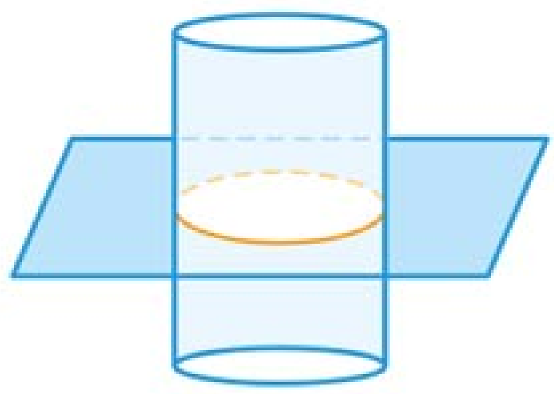
۱ برش کره: سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره، یک **دایره** است:



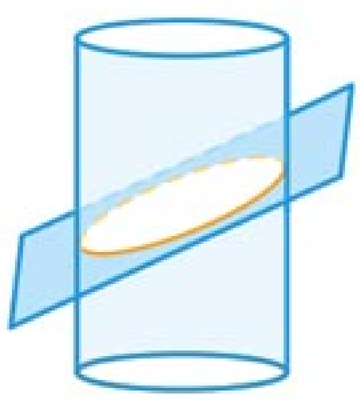
۲ برش استوانه: سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک استوانه، سه حالت زیر را دارد:



مستطیل (برش عمودی)



دایره (برش افقی)



بیضی (برش مایل)

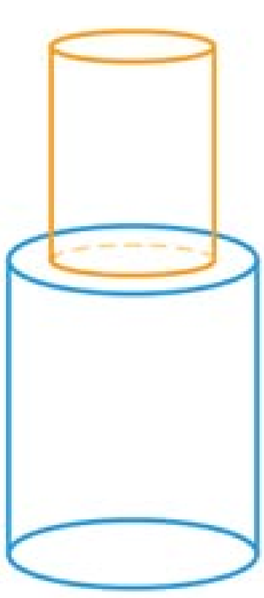
تست: دو استوانهٔ توپر به ارتفاع‌های ۶ و ۸ روی هم قرار گرفته‌اند. اگر شعاع قاعده‌ها به ترتیب ۲ و ۳ باشد سطح حاصل از برش عمودی و گذرا از مرکز دایرهٔ سطح مقطع چقدر است؟

۱) ۶۸

۲) ۷۴

۳) ۷۲

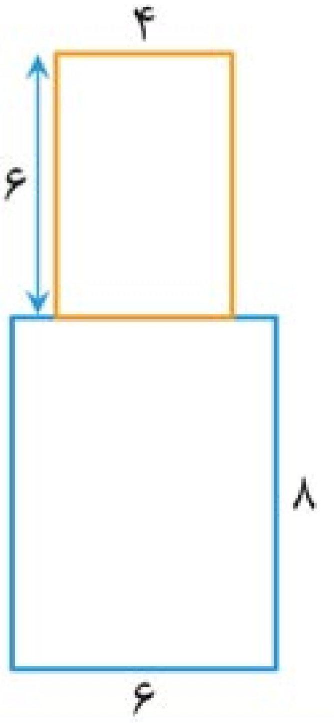
۴) ۶۶



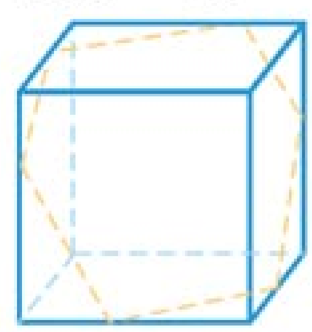
پاسخ **گزینهٔ «۳»**

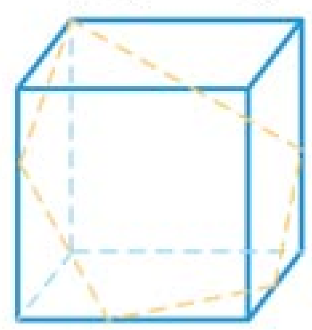
سطح مقطع حاصل، دو مستطیل می‌باشند که روی هم قرار گرفته‌اند:

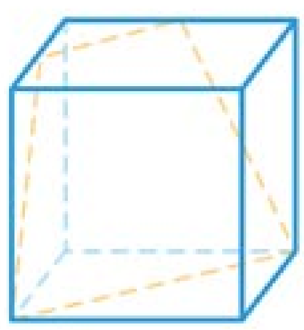
$$S = S_{۱} + S_{۲} = ۶\times ۸ + ۶\times ۴$$
$$= ۴۸ + ۲۴ = ۷۲$$

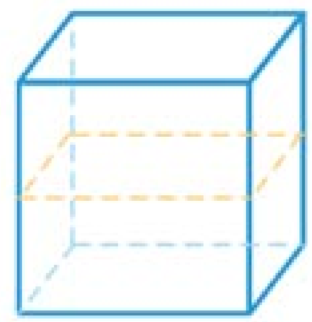


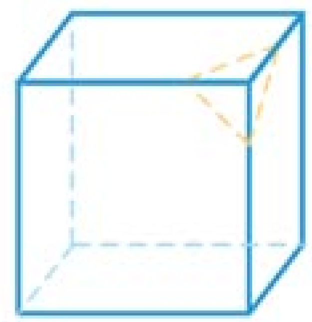
۳ برش مکعب: سطح مقطع یک مکعب می‌تواند مربع، مستطیل، مثلث، ذوزنقه، پنج‌ضلعی یا شش‌ضلعی باشد.

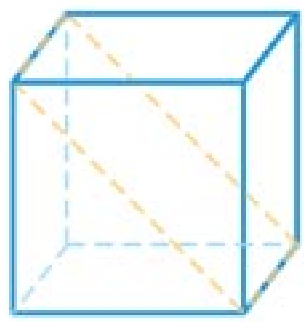

شش ضلعی (برش مایل)


پنج ضلعی (برش مایل)


ذوزنقه (برش مایل)


مربع یا مستطیل
(برش افقی)


مثلث (برش مایل)


مربع یا مستطیل
(برش مایل)

تست: در یک مکعب به طول یال ۴ واحد، بر انتهای سه یال گذرا بر یک رأس، صفحه‌ای می‌گذرد. مساحت مقطع این صفحه با مکعب کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) ۸   ۲) $۴\sqrt{۶}$ ۳) ۱۲   ۴) $۸\sqrt{۳}$

فصل پنجم

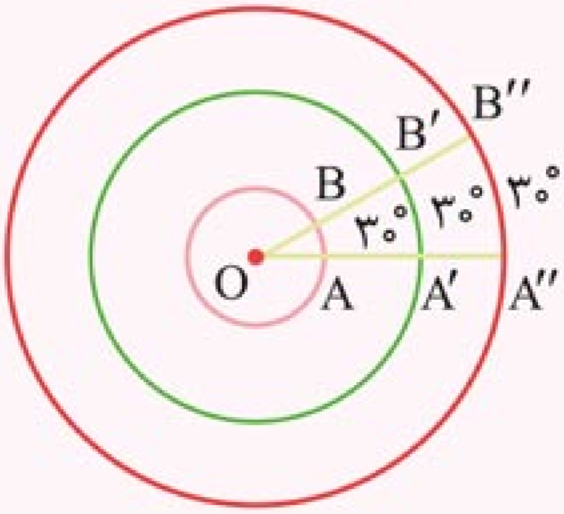
دایره

وعدهٔ ۲

زوایای مرکزی، محاطی و ظلی

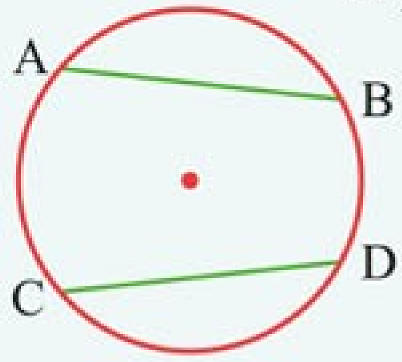
تعریف: زاویه **مرکزی**، زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع باشد.

تذکر: اندازهٔ کمان، همان اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به آن کمان تعریف می‌شود و واحد آن درجه است، هم‌چنین کمان‌های دایره‌های مختلف می‌توانند اندازهٔ برابر ولی طول نابرابر داشته باشند، به شکل زیر توجه کنید:



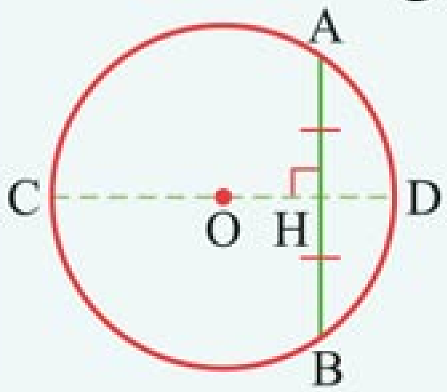
چاشنی: (نتایج زاویه مرکزی)

۱ کمان‌های روبه‌رو به وترهای مساوی، با هم برابرند و برعکس وترهای روبه‌رو به کمان‌های مساوی نیز با هم برابرند.



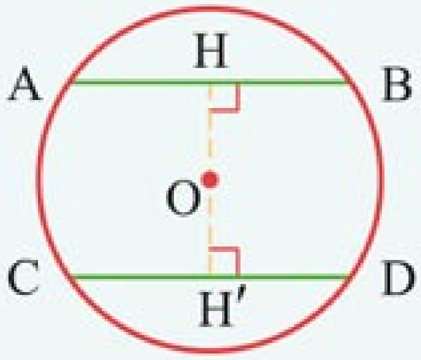
$$AB = CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

۲ گر قطر CD بر وتر AB عمود باشد، آنگاه قطر CD، وتر AB (و کمان AB) را نصف می‌کند و بر عکس.



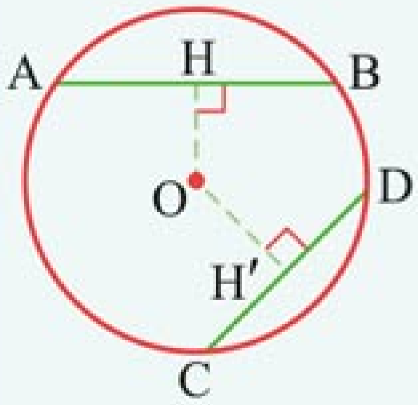
$$AH = HB \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$$

۳ در هر دایره، وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله هستند و برعکس.



$$AB = CD \Leftrightarrow OH = OH'$$

۴ در هر دایره از دو وتر نابرابر، وتری بزرگ‌تر است که به مرکز دایره نزدیک‌تر باشد و برعکس.

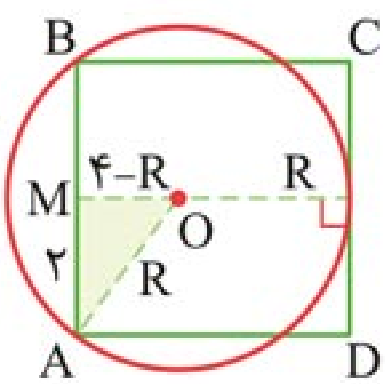


$$AB > CD \Leftrightarrow OH < OH'$$

تست: مربع ABCD به ضلع ۴ واحد مفروض است. شعاع دایرهٔ گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)

۱) ۲/۲۵ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

پاسخ گزینه «۳»



با توجه به این که قطر عمود بر وتر، وتر و کمان نظیر آن را نصف می‌کند، داریم: $AM = ۲$

حال طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث رنگی، داریم:

$$R^{۲} = ۲^{۲} + (۴ - R)^{۲}$$

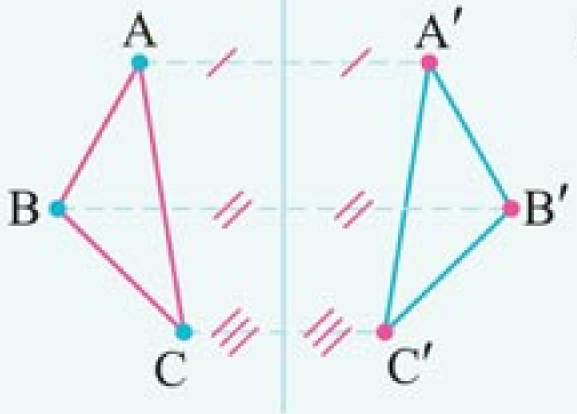
$$\Rightarrow \cancel{R^{۲}} = ۴ + ۱۶ + \cancel{R^{۲}} - ۸R$$

$$\Rightarrow ۸R = ۲۰ \Rightarrow R = \frac{۲۰}{۸} = ۲/۵$$

فصل ششم

تبدیل‌های هندسی و کاربردها

۳ بازتاب جهت اشکال را حفظ نمی‌کند.



۴ در حالـت کلی، بازتاب شـیب خـط را حفظ نمی‌کنـد، به جز در سه مورد زیر:

الف خط با محور بازتاب موازی است.

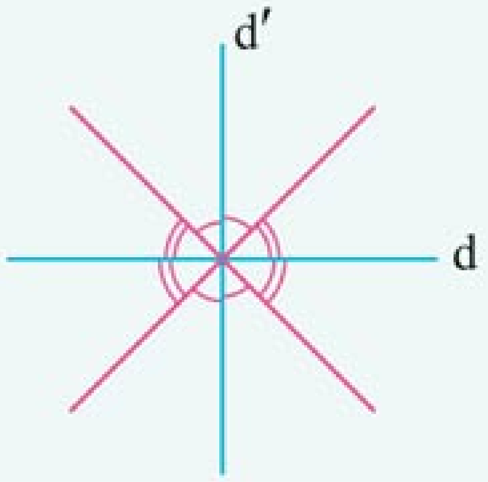
ب خط بر محور بازتاب عمود است.

پ خط بر محور بازتاب منطبق است.

۵ در بازتـاب، تبدیـل یافتـه شـکل، بـا خـود آن شـکل هم‌نهشـت است. (به دلیل طولپا بودن بازتاب)

۶ هـر دو خـط موازی همـواره بازتاب یکدیگرند، که محـور بازتاب، خطی موازی به آن دو خط و به یک فاصله از آن‌ها است.

۷ هـر دو خـط متقاطـع، همـواره بازتاب یکدیگرند، که محور بازتاب نیمسـازی‌های زاویه‌هـای بیـن دو خط متقاطع می‌باشـند (دو محور بازتاب دارد):

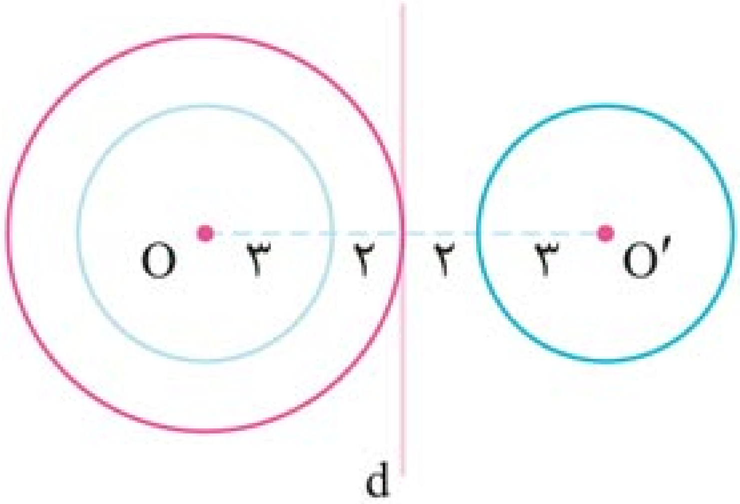


تست: دو دایرهٔ هم مرکز به شعاع‌های ۳ و ۵ مفروض‌اند. خط d بر دایرهٔ بزرگ‌تر مماس است. بازتاب دایرهٔ کوچکتر را نسبت به خط d به دست می‌آوریم. طول مماس مشترک داخلی دایره جدید با دایرهٔ بزرگ‌تر کدام است؟

۱) $\sqrt{۳۵}$ ۲) ۶ ۳) $\sqrt{۳۷}$ ۴) ۸

پاسخ **گزینه «۲»**

ابتدا شکل مسئله را رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل داریم:

$$OO' = ۱۰$$

پس:

$$TT' = \sqrt{(OO')^{۲} - (R + R')^{۲}} = \sqrt{۱۰^{۲} - (۵ + ۳)^{۲}}$$

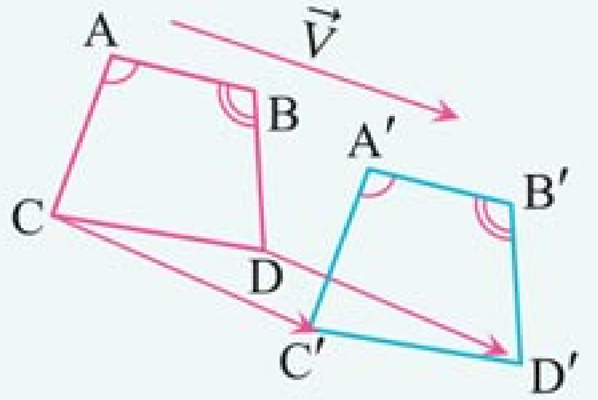
$$= \sqrt{۱۰۰ - ۶۴} = \sqrt{۳۶} = ۶$$

وعدهٔ ۳
انتقال

تعریف: انتقال T تحت بردار $\vec{V}$ تبدیلی از صفحه است که در آن تصویر هر نقطهٔ A، نقطه‌ای مانند A' در همان صفحه است که $\overrightarrow{AA'} = \vec{V}$.

چاشنی: (ویژگی‌های انتقال)

۱. انتقال، تبدیل طولپا است.
۲. انتقال، شیب خط و جهت شکل را حفظ می‌کند.
۳. انتقال، اندازه زاویه‌ها را حفظ می‌کند.
۴. انتقال در حالت کلی نقطهٔ ثابت تبدیل ندارد.



چاشنی: (معرفی چند ماتریس خاص)

۱ **ماتریس مربعی:** ماتریسی که در آن $m = n$ است و آن را از مرتبهٔ $n(n \times n)$ می‌نامیم. هر ماتریس مربعی سه بخشی جدا از هم دارد:

قطر اصلی: اگر $i = j$ باشد درایه روی قطر اصلی قرار دارد.

مثلث پایینی: اگر $i > j$ باشد، درایه در مثلث پایین قرار دارد.

مثلث بالایی: اگر $i < j$ باشد، درایه در مثلث بالایی قرار دارد.

۲ **ماتریس سطری:** ماتریسی است که فقط یک سطر دارد:

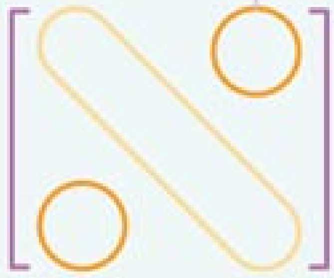
$$A = [a_{۱۱} \quad a_{۱۲} \quad \cdots \quad a_{۱n}]_{۱\times n}$$

۳ **ماتریس ستونی:** ماتریسی است که فقط یک ستون دارد:

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۱۲} \\ \vdots \\ a_{m۱} \end{bmatrix}_{m\times ۱}$$

۴ **ماتریس قطری:** ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌هایی که روی قطر اصلی نیستند، صفر می‌باشند (درایه‌های واقع در قطر می‌توانند صفر باشند یا نباشند).

یعنی تمام درایه‌ها صفر هستند.



۵ **ماتریس اسکالر:** ماتریس قطری است که تمام درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر باشند: $(A = rI_n \ , \ r \in \mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} r & & \\ & r \ddots & \\ & & r \end{bmatrix}_{n\times n}$$

۶ **ماتریس صفر:** ماتریسی که همهٔ درایه‌های آن صفر باشند و آن را با نماد $\overline{O}$ نشان می‌دهیم.

ماتریس و کاربردها

فصل نهم

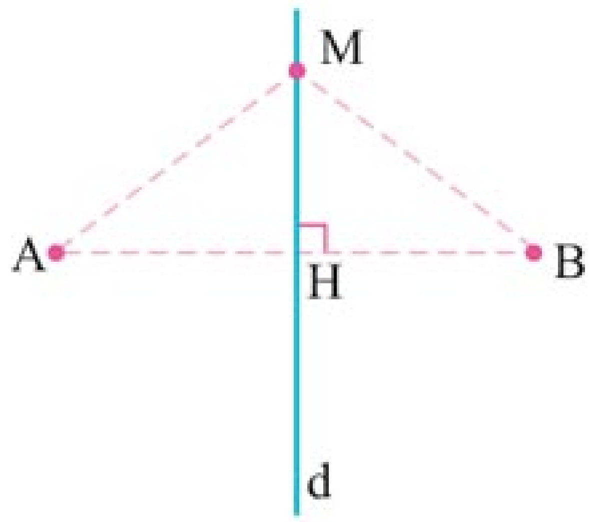
آشنایی با مقاطع مخروطی

وعدهٔ ۱

مکان هندسی

تعریف: مکان هندسی، مجموعهٔ نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همهٔ آن‌ها یک ویژگی مشترک داشته باشند و هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه است.

مکان‌های هندسی مهم زیر را به خاطر بسپارید:

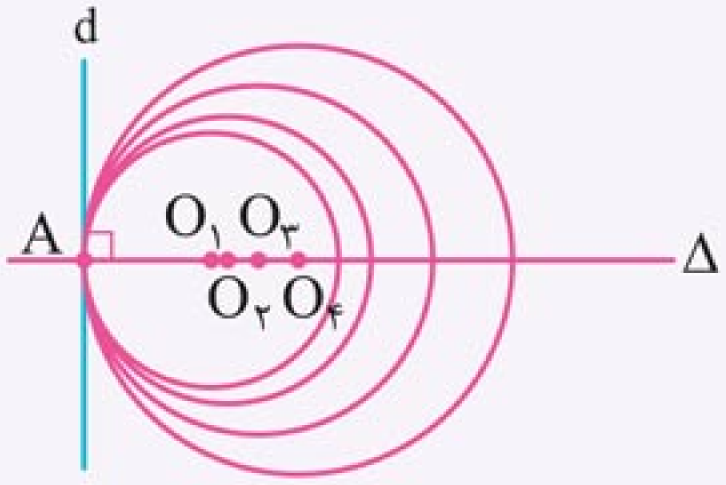


الف مکان هندسی نقاطی که از دو نقطهٔ ثابت A و B در صفحه به یک فاصله‌اند، **عمودمنصف** AB است:

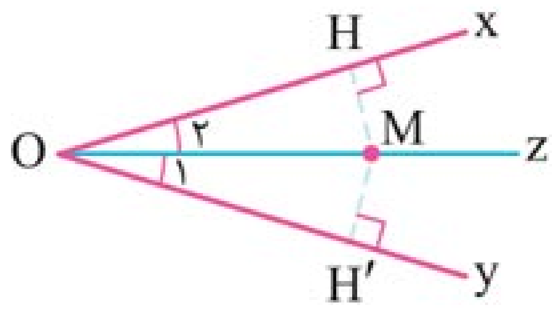
هم‌چنین هر نقطه روی عمود منصف مانند M از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است:

$$\forall M \in d\,,\,(d \perp AB\,,\,HA = HB) \Leftrightarrow MA = MB$$

نکته: مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که در نقطهٔ ثابت A بر خط ثابت d در صفحه مماس‌اند، یک خط راست است که در A بر خط d عمود می‌باشد.



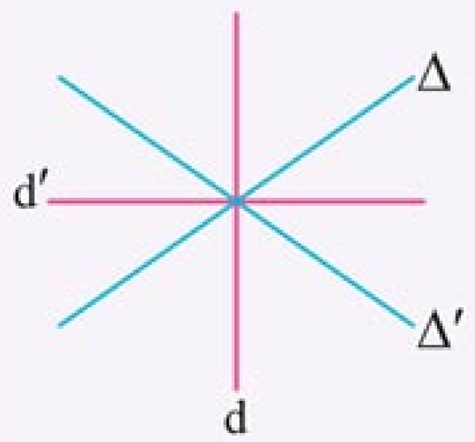
$$\Delta \cap d = A\,,\,\Delta \perp d$$



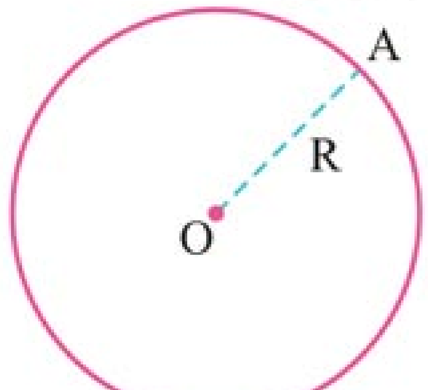
ب مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند، **نیمساز** آن زاویه است:

$$\forall M \in Oz\,;\,O_1 = O_2 \Leftrightarrow MH = MH'$$

نکته: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط **متقاطع** d و d' به یک فاصله‌اند، نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط متقاطع است:
(دو خط Δ و Δ'، مکان هندسی مورد نظر است و $\Delta \perp \Delta'$.)



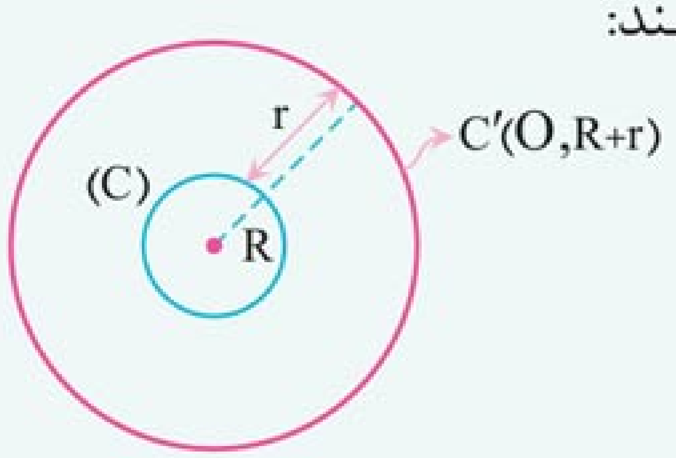
پ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ ثابت O و به فاصلهٔ ثابت R قرار دارند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع R است:



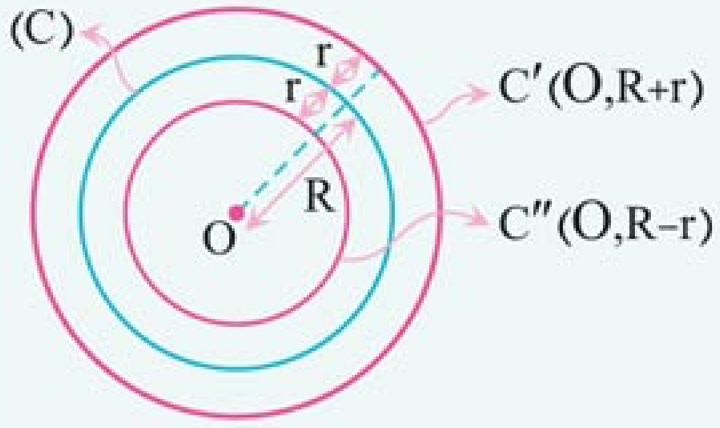
$$A \in C(O, R) \Leftrightarrow OA = R$$

چاشنی: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقاط روی دایرهٔ $C(O, R)$ به فاصلهٔ r می‌باشند:

الف اگر $r \geq R$ باشد، یک دایرهٔ هم مرکز با دایرهٔ C و به شعاع $R + r$ است:



ب اگر $r < R$ باشد، دو دایرهٔ هم مرکز با دایرهٔ C و به شعاع $R + r$ و $R - r$ می‌باشند:



فصل دهم

بردارها

وعدهٔ ۱

معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

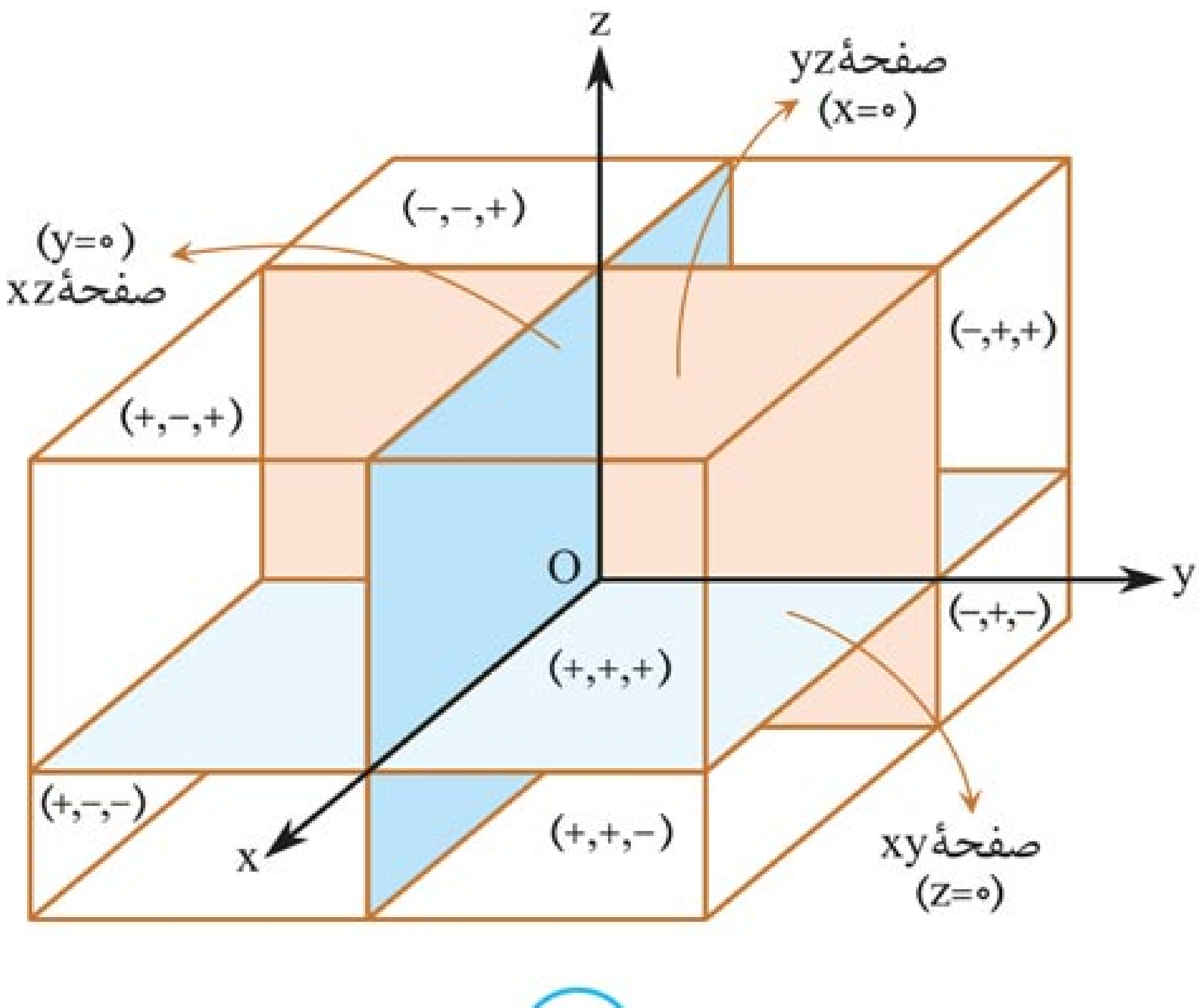
یادآوری: مجموعهٔ $\{(x , y) | x , y \in \mathbb{R}\}$ شامل تمام نقاط صفحه است و آن را با نماد $\mathbb{R}^2$ نمایش می‌دهند، یعنی:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x , y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

هم‌چنین فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $A(x_1 , y_1)$ و $B(x_2 , y_2)$ برابر است با:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

تعریف: یک دستگاه مختصات متشکل از سه محور دوبه‌دو عمود بر هم که در نقطه‌ای مانند O متقاطع‌اند، دستگاه مختصات سه بعدی است که فضای $\mathbb{R}^3$ نامیده می‌شود. $\mathbb{R}^3 = \{(x, y ,z) | x , y ,z \in \mathbb{R}\}$



نکته: حجم متوازی السطوح پدید آمده توسط سه بردار $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ ، $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ و $\vec{c}=(c_1, c_2, c_3)$ برابر است با:

$$a\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=k \Rightarrow \text{حجم متوازی السطوح}=|k|$$

◂ $$\text{ارتفاع متوازی السطوح}=h=\frac{a.(\vec{b}\times\vec{c})}{|\vec{b}\times\vec{c}|^2}(\vec{b}\times\vec{c})$$

(در واقع ارتفاع برابر با اندازهٔ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر روی بردار $\vec{b}\times\vec{c}$ است.)

تست: دو بردار با تصاویر $\vec{a}=(1, -2, 3)$ و $\vec{b}=(2, 1, -1)$ مفروض هستند. حجم متوازی‌السطوح که بر روی سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ ساخته می‌شود، کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) ۵۴ ۲) ۷۲ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

پاسخ گزینه «۳»

ابتدا $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=(1, -2, 3)\times(2, 1, -1)=(-1, 7, 5)$$
$$\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{1+49+25}=\sqrt{75}$$

حجم متوازی السطوح تولید شده توسط $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با:

$$|\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})|=|(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{a}\times\vec{b})|=|\vec{a}\times\vec{b}|^2=(\sqrt{75})^2=75$$

پیوست

فرمول‌نامه

ب $AC^2 = BC \times CH$

پ $AH^2 = BH \times CH$

ت $AH \times BC = AB \times AC$

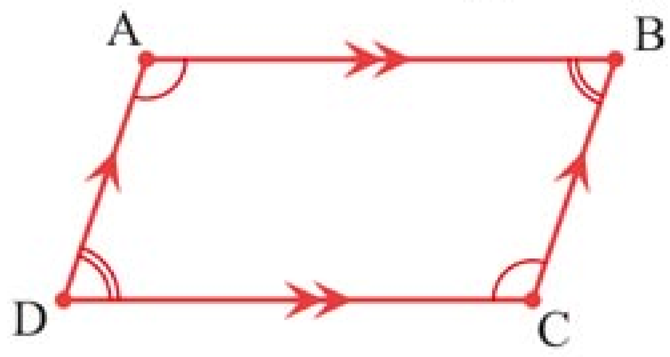
ث $b^2 - c^2 = 2a \times HM$

چند ضلعی‌ها

۱ در هر n ضلعی محدب داریم:

$$\begin{cases} \text{تعداد قطرها} = \dfrac{n(n-3)}{2} \\ \text{مجموع زوایای داخلی} = (n-2) \times 180^\circ \\ \text{مجموع زوایای خارجی} = 360^\circ \end{cases}$$

۲ ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع:



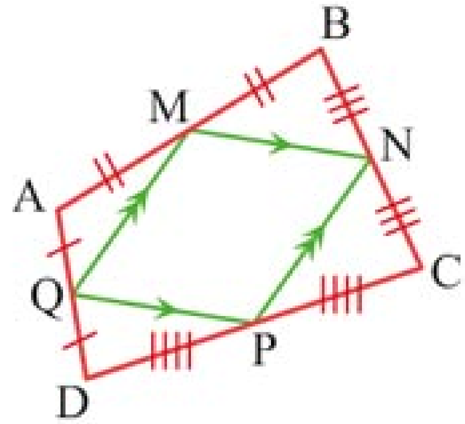
الف متوازی‌الاضلاع $ABCD \Leftrightarrow (AB = DC\,,\, AD = BC)$

ب متوازی‌الاضلاع $ABCD \Leftrightarrow (\widehat{A} = \widehat{C}\,,\, \widehat{B} = \widehat{D})$

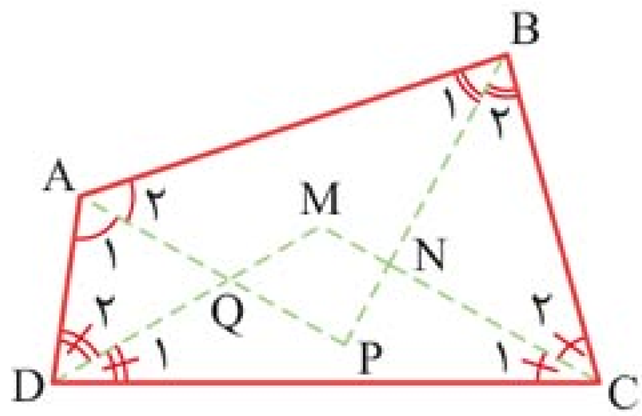
پ متوازی‌الاضلاع $ABCD \Leftrightarrow \widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{B} + \widehat{C}$
$= \widehat{C} + \widehat{D} = \widehat{D} + \widehat{A} = 180^\circ$

۳ ویژگی چهارضلعی‌ها

الف اگـر وسـط اضلاع هـر چهارضلعی را بـه طور متوالی بـه هم وصل کنیم یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.



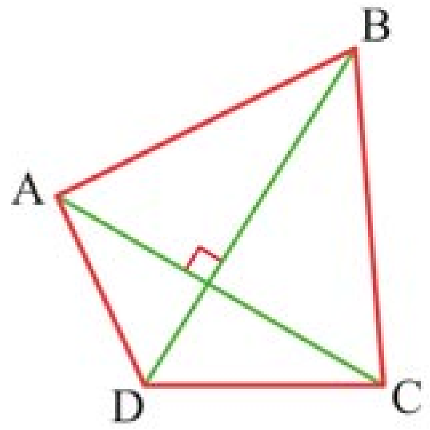
ب



$$\begin{cases} \widehat{A}_{۱} = \widehat{A}_{۲} \ , \widehat{B}_{۱} = \widehat{B}_{۲} \\ \widehat{C}_{۱} = \widehat{C}_{۲} \ , \widehat{D}_{۱} = \widehat{D}_{۲} \end{cases}$$

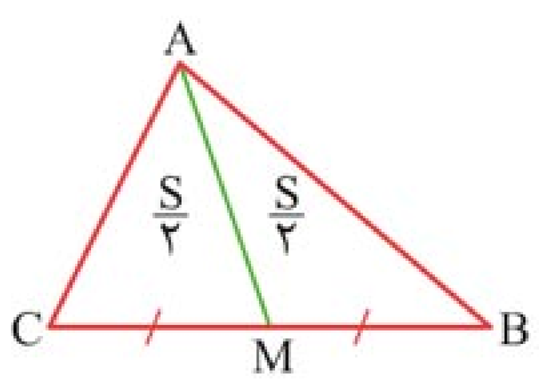
$$\Rightarrow \widehat{M} + \widehat{P} = \widehat{Q} + \widehat{N} = ۱۸۰^{\circ}$$

پ



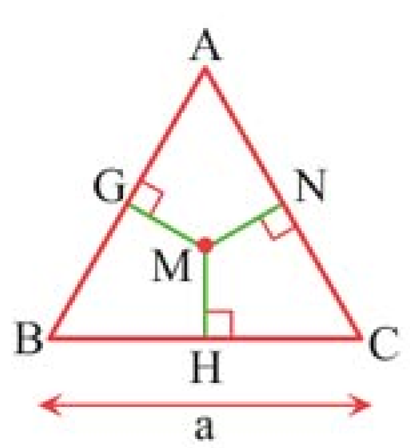
$$\Rightarrow \begin{cases} AC \perp BD \\ S_{ABCD} = \dfrac{AC \times BD}{۲} \end{cases}$$

۴



$$S_{\underset{ABM}{\triangle}} = S_{\underset{AMC}{\triangle}} = \frac{۱}{۲} S_{\underset{ABC}{\triangle}}$$

۵



$$MN + MH + MG = \frac{\sqrt{۳}}{۲} a$$