



## هندسه (۳)

پایه دوازدهم

مؤلفان:

نادر حاجی زاده، محمد جمال صادقی



انتشارات خوشخون

## خنده و گریه

تا حالا شده توی یه مکان عمومی مثل رستوران، بانک و ... یه موضوع خنده‌داری براتون اتفاق بیفته بخواید از ته دل بخندید، اونم در حد انفجارجار!!! چی کار می‌کنید؟ خجالت رو می‌ذارید کنار و از ته دل می‌خندید اونم طوری که همه با خنده‌تون بخندن یا نه، یکم چاشنی شو می‌آرید پایین طوری که چند نفر اطرافتون بفهمن یا فقط به یه لبخند کوچک بسنده می‌کنید!!

حالا اگر یه اتفاق ناراحت‌کننده افتاده باشه چی؟ گریه‌تونو پنهون می‌کنید، با به چند قطره اشک اکتفا می‌کنید، یا نه بیشتر، با چشمای گریون شروع می‌کنید تو خیابون قدم زدن!!  
نمی‌دونم کدموشون منطقی به نظر میاد!!

از نظر شما کدومش درسته!! خنده‌ای که باعث خنده دیگران بشه یا گریه‌ای که غم رو تو دل دیگران راه بده.

اگر خنده‌تون باعث شه که یه لحظه یه نفر از غم‌های دنیا رها شه باید این کار رو بکنید یا نکنید!! من که باشم می‌کنم (البته طوری که نودگی به نظر نیاد). اگر گریه‌تون باعث بشه بغض دل یه نفر: یگه بترکه و اونم شروع کنه به گریه، باید این کار رو بکنید یا نکنید!! من که باشم می‌کنم.

خب شاید بگید که چی!!

احتمالا هر کدوم از ما لذت خنده‌هایی که با خنده‌ی خودمون ایجاد کردیم رو تجربه کردیم. چه حس جانبی داره، وقتی بلند می‌خندی و همه به صدای خنده‌ی تو می‌خندن، یکی از ته دل و بدوز قضاوت تو، یکی با دلیل اینکه چه خوب! دلش شاده و یکی با این فکر که بابا اینم رد داده، ولی هر کدوم با هر دیدی با تو همراه می‌شن شروع می‌کنن به خندیدن.

حس جالبیه اگر تجربه نکردید حتما توی یه مکان و فضای مناسب امتحان کنید (نرید وسط مراسم عزاداری بعد بگید حرفت جواب نداد).

هر کاری توش یه لذتی داره. اگر آدم ته دلش صاف و صادق باشه شاید کوچکترین کارش هم همراه با لذت باشه.

## شما تو چه چیزی استعداد دارید؟

من یکی از استعدادها تو ریاضی پیدا کردم، همه یه استعداد یا توانایی ندارن، به قول اساتید علوم تربیتی و اجتماعی، سی و چند شاخه‌ی توانایی و استعداد داریم که هر فردی می‌تونه توی چندتا از شاخه‌ها استعداد داشته باشه و هیچ کس هم نیست که توی تمام شاخه‌ها توانایی داشته باشه. یکی استعداد ورزشی داره اونم نه نو همه‌ی رشته‌ها یکی شناگر خوبه، یکی فوتبالیست، یکی ژیمناست، یکی تیسور و ...، یکی استعداد تو هنر نقاشی داره، یکی مجسمه‌سازی، یکی بازیگری، یکی گلدوزی، یکی فرش‌بافی و ...، یکی استعداد ریاضی داره، یکی فیزیک، یکی تاریخ، یکی ادبیات و ...

گفتم یه انسان تک بعدی نیست ممکنه یه تاجر و ورزشکار مهندس باشی مثل علی دایی یا پزشک آهنگساز خواننده باشی مثل محمد اصفهانی یا استاد مجری برنامه‌ساز مهندس باشی مثل عادل فردوسی‌پور یا ...

حالا اگر بپرسید چطور باید استعدادها تو بشناسید می‌گم یکی از راهاش مدرسه است که به دلیل سیستم آموزشی نادرست یا ناقص ممکنه نتونه کمک لازم رو بهتون بکنه، ولی شما می‌تونید استعدادتونو با مطالعه، مشاوره، روابط اجتماعی، علایق و ... پیدا کنید.

خب یکی از توانایی‌ها و استعدادهایی که من در دوران مدرسه در خونم پیدا کردم ریاضیه، عاشق ریاضی‌ام شاید بهتر بگم گاهی دیووونه‌شم. خب بر طبق یه قاعده‌ی روانشناسی باید دوست و همکاری داشته باشم که اون‌ها هم عاشق یا دیووونه‌ی یه شاخه علمی باشن (بازم می‌گم صددرصد نیست). اونا هم علاقه، استعداد آرامشون رو تو ریاضی، فیزیک، شیمی، هنر، ادبیات و ... یافتن. باز هم می‌گم ممکنه من همین آرامش، هیجان، عشق و ... رو تو گفتن شعر یا نوشتن متنی مثل همین متن هم داشته باشم (فکر نکنین به آدم تک بعدی هستین هیچ آدمی تک بعدی نیست).

## خوشخوان انتشاراتی ویژه‌ی دانش آموزان ممتاز

آره این شعار ما در بدو تاسیس بود؛ وقتی که کسی زیاد به ممتازها اهمیت نمی‌داد! اگر هم بود در حد چند مدرسه و چند کتاب خاص. ما اومدیم که بگیم تو همه‌ی کشور ممتاز داریم نه فقط شهرهای بزرگ. خواستیم بگیم ممتازهایی که توی روستای گرمسیر و سردسیر هستین ما هواتونو داریم، چون خودمون هم از همون ریشه‌ایم. خب به مرور مثل هر شغل و حرفه‌ای دوستان دیگه هم وارد زمینه‌ی توجه به دانش‌آموزان ممتاز شدن (ما با ممتازها بودیم وقتی ممتاز بودن مد نبود).

ما می‌نوشتیم تا اون‌ای که مثل خودمون عاشق درس و مبحث خاصیه سیرآب بشه. ما تالیف می‌کردیم تا دانش‌آموزهای خوبمون هی دنبال این کتاب اون کتاب نرن و گذشت ...

ما به هدفمون رسیدیم، شدیم ویژه‌ی ویژه ... ولی همین ویژه بودن به روزایی شد در دسر، روزایی که به دلیل تغییر فرهنگ و شرایط درس خوندن (گاهی بی‌ارزش شدن ادامه تحصیل و کم‌علاقگی به علم و بی‌ارزش شدن مدارج تحصیلی)، دانشگاه رفتن ساده‌تر از گذشته شد و کم‌بهاتر (که چه خوب) و شکر که استرس کمتر شد وای کاش کمتر بشه و روزی برسه که روی دوش هیچ جووونی استرس کنکور نباشه تا راحت به پرورش استعدادهای واقعی فکر کنه و اون‌ها روفدای کنکور نکنه (ونی هنوز تشنه‌ها هستن).

بگذریم، پس از ۱۷ سال می‌خواهیم بگیم که ما نه تنها علاقه‌مندان هر شاخه‌ی علمی خاص مختص به دبیرستان رو رها نکردیم بلکه می‌خواهیم روش آموزشی رو ارائه بدیم تا هر دانش‌آموزی با هر استعدادی بتونه در زمینه‌ی خاص در حد توانش (تاکید می‌کنم در حد ظرفیتش و نه بیشتر) رشد کنه تا علاوه بر ایجاد علاقه در زمینه‌ی علمی مورد نظر، بتونیم راهی رو برای رسیدن به اهداف آینده‌اش باز کنیم. شاید ریاضی برای من شیرین باشه و برای شما سخت، فیزیک برای یکی شیرین باشه و برای دیگری سخت، ولی مهم این‌ه که یاد بگیریم رشد کنیم و راه رشد کردن رو یاد بگیریم. به قولیه جمله معروف ما می‌خواهیم به‌جای ماهی، ماهیگیری (روش حل، لذت بردن و فکر کردن) رو به شما یاد بدیم تا هر کسی به اندازه‌ی توانش بتونه از دریای بزرگ جلوی روش ماهی بگیره. یکی با یه ماهی خودشو سیر می‌کنه، یکی با چند تا خانواده شو و یکی با ماهی‌های بیشتری جامعه و فرهنگشو.

امیدوارم در سانی که پیش رو دارید کلی ماهی از دریای موفقیت بگیرید، کنکور آینده‌ی کسی رو نمی‌سازه شما یید که آینده رو می‌سازید.

## ساختار

کتاب‌های دوازدهمی که از انتشارات به چاپ رسیده، به شکل زیرند:

**درس‌نامه:** درس‌نامه‌ی هر فصل به‌صورت جلسه‌بندی به همراه مثال‌ه و تست‌های متنوع ارائه شده، تا ضمن عمق بخشی به مطالب موجود در کتاب درسی، دانش‌آموزهای عزیز رو برای امتحان‌های مختلف از جمله امتحان نهایی آماده کنن.

**پرسش‌های چهارگزینه‌ای:** پرسش‌ها چهار دسته دارن:

۱. سطح ساده ۲. سطح متوسط ۳. سطح دشوار ۴. ترکیب سطوح

برای این‌که کتاب، برای بیشتر دانش‌آموزان قابل استفاده باشه، پرسش‌ها سطح‌بندی شده‌اند تا دانش‌آموزان متوسط به پایین لزوماً دنبال پرسش‌های سطح سخت نرن و دانش‌آموزهای متوسط به بالا وقت خودشونو برای پرسش‌های ساده خیلی سپری نکنن. برای این‌که مهارت دوستای عزیز رو در تشخیص سوالات ساده، متوسط و سخت بالا ببریم، پرسش‌های ترکیب سطوح رو آوردیم تا هر دانش‌آموزی بتونه متناسب با سطح توانیش سوالات مربوط به سطحشو تشخیص بده.

**پرسش‌های تکمیلی فصل:** چون بعد از تموم شدن هر جلسه دانش‌آموز با ذهنیت نکات همون بخش شروع به حل کردن سوالات می‌کنه، شاید این موضوع در نهایت ایده‌آل نباشه، چون هنر شما زمانی نشون داده می‌شه که بتونید تشخیص بدید هر سوال برای کدوم مبحثه، پس با آوردن سوالات ترکیبی با یه تیر دو نشون زدیم یکی بالا بردن قدرت تشخیص مبحث مرتبط با سوال و دوم مرور فصل.

**سوالات کنکور مرتبط با فصل:** سعی کردیم سوالات کنکور داخل و خارج سال‌های اخیر مربوط به هر فصل رو برای شما جمع کنیم تا با شکل سوالات کنکور هم آشنا بشید.

**پاسخ کلیدی و تشریحی پرسش‌ها:** هم پاسخ‌نامه‌ی کلیدی و هم تشریحی سوالات رو بعد از اتمام فصل آوردیم، حتی برای بعضی از سوالات بیشتر از یک راه‌حل آوردیم. راستی، همه به پاسخ‌نامه‌ی تشریحی حتما سر بزنا!!!!!!

**آزمون‌های سه‌گانه:** در آخر هر فصل سه آزمون استاندارد برای کنکورهای عزیز آوردیم تا سطح یادگیری مطالب رو برای خودشون بسنجن. راستی فقط جواب کلیدی رو داخل کتاب قرار دادیم تا خدایی نکرده اگر تو سوالی مشکل داشتید سعی کنید با جست‌وجو داخل کتاب یا مراجعه به دبیرتون به اون بخش مسلط بشین. (البته سعی می‌کنیم جوابا رو داخل سایت قرار بدیم تا دوستایی که احیاناً مراجعه به دبیر براشون سخته دچار مشکل نشن).

## آخر

با تشکر از تمام دوستانی که ما رو در تالیف و چاپ این کتاب یاری کردند و با طلب عفو و بخشش برای نواقص و کاستی‌ها از شما، برای همه‌ی شما در زندگی موفقیت و سربلندی رو از خداوند متعال خواستارم.

رسول حاجی‌زاده

مدیر انتشارات خوشخوان

دیدای ای دل که غم عشق دگر بار چه کرد  
آه از آن نرگس جادو که چه بازی انگیخت  
اشک من رنگ شفق یافت ز بی مهری یار  
برقی از منزل لیلی بدرخشید سحر  
ساقیا جام می ام ده که نگارنده غیب  
آن که پر نقش زد این دایره مینایی  
فکر عشق آتش غم در دل حافظ زد و سوخت  
چون بشد دلبر و با یار وفادار چه کرد  
آه ز آن مست که با مردم هشیار چه کرد  
طاع بی شفقت بین که در این کار چه کرد  
وه که با خرمن مجنون دل افگار چه کرد  
نیست معلوم که در پرده اسرار چه کرد  
کس ندانست که در گردش پرگار چه کرد  
یار دیرینه ببینید که با یار چه کرد

" غزلیات حافظ "

مهمترین هدف آموزش ریاضی پرورش تفکر ریاضی است. در کتاب هندسه ۳ علاوه بر رسیدن به تفکر ریاضی، کاربردی کردن مفاهیم هندسی در ریاضی در عمل مورد توجه قرار گرفته است. در واقع با یادگیری مطالب جدید کاربرد آنها را در عمل می بینید در فصل اول این کتاب استفاده از ماتریسها در حل دستگاه معادلات و دترمینان در حل و بحث دستگاهها مطرح شده است. و در فصل دوم کتاب به مقاطع مخروطی از جمله دایره، بیضی و سهمی و ویژگیهای آنها پرداخته شده است. و در فصل سوم کتاب فضای سه بعدی، فضا و بردارها و استفاده از بردار در محاسبه مساحت و حجم بررسی شده اند.

بانغ بر ۱۰ ماه گروه هندسه انتشارات خوشخوان کتاب هندسه ۳ را مورد بررسی قرار داده و با در نظر گرفتن کلیه مطالب و مفاهیم و نکات درسی سعی کردیم به دقت به همه آنها پرداخته و با حل و بحث مسائل و پرسشهای چهارگزینه ای و عمق بخشیدن به آنها، یادگیری این کتاب را ساده تر کنیم.

در هر فصل ابتدا با تدریس مطالب درسی و پرداختن همه جانبه به تدریس آنها، در چند سطح ساده، متوسط، دشوار و ترکیبی سؤالات را طبقه بندی کرده ایم، تا دانش آموزان با توجه به آنچه خوانده اند به سراغ سطح مورد نظر رفته و با حل تستهای مطرح شده خود را برای سطح بعدی آماده کنند.

در ضمن انتهای هر فصل ۳ آزمون برای تکرار و تمرین بیشتر آن فصل آماده شده است تا دانش آموزان عزیز با بررسی آنها فصل مورد نظر را کامل کنند.




گروه مؤلفان این کتاب امیدوارند این اثر گامی هر چند کوچک در جهت ارتقای علمی دانش آموزان عزیز مهین اسلامی مان باشد.

لازم است از آقایان ناظم بوشهری و وطن پرست و خانمها محمدخانی و احمدخانی که زحمت و پیرایش و نسخه خوانی را بر عهده داشتند و مدیریت محترم انتشارات خوشخوان آقای رسول حاجی زاده تشکر کنیم.

در انتها از همکاران و دانش آموزان محترم خواهشمندیم نظرات اصلاحی خود را به انتشارات در خصوص این کتاب ارسال فرمایید، تا در چاپهای بعدی از این نظرات استفاده شود.

## فهرست مطالب



۱	ماتریس و کاربردها	فصل اول 
۱۰۹	آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی	فصل دوم 
۲۵۵	بردارها	فصل سوم 

# ماتریس و کاربردها

## درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

- تعریف ماتریس
- معرفی چند ماتریس خاص
- تساوی دو ماتریس
- جمع ماتریس‌ها
- ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس
- خواص مهم جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس
- ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی
- ضرب ماتریس در ماتریس
- خواص عمل ضرب ماتریس‌ها
- توان‌های طبیعی ماتریس‌های مربعی
- حاصل ضرب چند ماتریس خاص
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس اول

۲  
۴  
۶  
۷  
۸  
۹  
۱۰  
۱۰  
۱۴  
۱۵  
۲۰  
۳۳

## درس دوم: وارون ماتریس و دترمینان

- دترمینان و کاربردهای آن
- دستور ساروس برای محاسبه‌ی دترمینان ماتریس‌های  $3 \times 3$
- وارون ماتریس‌ها
- ویژگی‌های وارون ماتریس
- حل دستگاه معادلات (دومعادله و دومجهولی) با استفاده از ماتریس وارون
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس دوم

۳۱  
۴۱  
۴۲  
۴۲  
۴۶  
۴۸  
۵۲

پرسش‌های تکمیلی فصل ۱

سؤالات کنکور مرتبط با فصل ۱

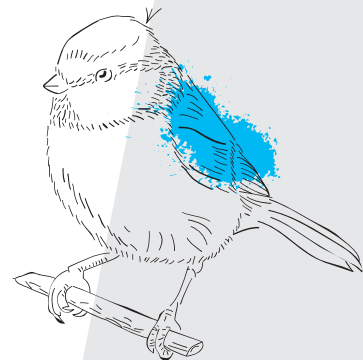
پاسخ کلیدی پرسش‌های فصل ۱

پاسخ تشریحی پرسش‌های فصل ۱

آزمون‌های سه‌گانه فصل ۱

پاسخ کلیدی آزمون‌های سه‌گانه فصل ۱

۶۵  
۶۷  
۷۰  
۷۱  
۱۰۴  
۱۰۸



تعریف ماتریس

مفهوم ماتریس نخستین بار در کارهای ویلیام هامیلتون ریاضی‌دان ایرلندی و کیلی ریاضی‌دان انگلیسی در نیمه‌ی اول قرن نوزدهم مطرح شد. یکی از کاربردهای مهم ماتریس در فیزیک کوانتوم است. هایزنبرگ، اولین کسی که در فیزیک ماتریس‌ها را به کار برد جمله‌ی معروفی دارد که می‌گوید: «تنها ابزار ریاضی که من در مکانیک کوانتم به آن احتیاج دارم، ماتریس‌ها است.»  
فرض کنید نمرات دروس ریاضی، فیزیک، شیمی و ادبیات آرش، نادر و فرشید به ترتیب از راست به چپ «۲۰، ۱۸/۵، ۱۷ و ۱۹»، «۱۹، ۱۶، ۱۴/۵ و ۱۸/۵» و «۱۶، ۱۵/۵، ۱۹ و ۲۰» باشند. می‌توانیم این نمرات را به یکی از دو صورت زیر نشان دهیم:

(ب)

		ستون‌ها		
		آرش	نادر	فرشید
سطرها	ریاضی	۲۰	۱۹	۱۶
	فیزیک	۱۸/۵	۱۶	۱۵/۵
	شیمی	۱۷	۱۴/۵	۱۹
	ادبیات	۱۹	۱۸/۵	۲۰

(الف)

		ستون‌ها			
		ریاضی	فیزیک	شیمی	ادبیات
سطرها	آرش	۲۰	۱۸/۵	۱۷	۱۹
	نادر	۱۹	۱۶	۱۴/۵	۱۸/۵
	فرشید	۱۶	۱۵/۵	۱۹	۲۰

و در این‌جا اطلاعات را در یک ماتریس با ۴ سطر و ۳ ستون مرتب کردیم.

در این‌جا از یک ماتریس با ۳ سطر و ۴ ستون استفاده کردیم.

**تعریف:** هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک «ماتریس» نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در ماتریس را «درایه‌ی» آن ماتریس می‌نامیم.

معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و ... نام‌گذاری می‌کنیم.

**مثال:** ماتریسی با ۳ سطر و ۴ ستون مثال بزنید.

**حل:** برای نمونه به دو ماتریس زیر توجه کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pi & 4 \\ -1 & 7 & \sqrt{2} & 3 \\ 5 & -3 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 7 \\ 1/5 & 0 & 4 & -1 \\ 6 & -6 & -7 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

به هر کدام از ماتریس‌های  $A$  و  $B$  ماتریسی از مرتبه  $3 \times 4$  (۳ در ۴) گوئیم. این ماتریس دارای  $3 \times 4 = 12$  درایه است.

در ماتریس  $A$  درایه‌ی  $\sqrt{2}$  در سطر دوم و ستون سوم قرار دارد. و در ماتریس  $B$  درایه‌ی ۷ در سطر اول و ستون چهارم قرار دارد.

نکته

اگر ماتریس  $A$  دارای  $m$  سطر و  $n$  ستون باشد آن را ماتریس از مرتبه‌ی  $m \times n$  گوئیم و به صورت  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  نشان می‌دهیم.

$a_{ij}$  را «درایه‌ی عمومی» ماتریس  $A$  می‌نامیم که  $1 \leq i \leq m$  و  $1 \leq j \leq n$  تغییر می‌کنند.

**مثال:** ماتریس‌های  $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$  و  $B = [b_{ij}]_{2 \times 4}$  را با درایه‌هایشان نشان دهید.

**حل:** ماتریس  $A$  دارای ۳ سطر و ۲ ستون و ماتریس  $B$  دارای ۲ سطر و ۴ ستون است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix}$$

همان‌طور که متوجه شدید به‌عنوان مثال درایه‌ی  $a_{11}$  یعنی درایه‌ی از ماتریس  $A$  که در سطر دوم و ستون اول قرار دارد.

پس در حالت کلی درایه‌ی  $a_{ij}$  از ماتریس  $A$  در سطر  $i$  ام و ستون  $j$  ام قرار دارد.



**مثال:** اگر در ماتریس  $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$  برای  $i = j$  داشته باشیم  $a_{ij} = 5$ ، برای  $i > j$  داشته باشیم  $a_{ij} = -2$  و برای  $i < j$  داشته باشیم  $a_{ij} = 0$ . در این صورت  $A$  را با درایه‌هایش نشان دهید.

**حل:** ماتریس  $A$  به صورت  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  است. در درایه‌های  $a_{11}$  و  $a_{22}$  داریم  $i = j$  پس مقدار آن‌ها برابر ۵ است.

در درایه‌ی  $a_{12}$  داریم  $i < j$  پس طبق فرض  $a_{12} = 0$  و در درایه‌ی  $a_{21}$  داریم  $i > j$  پس طبق فرض  $a_{21} = -2$ . بنابراین ماتریس  $A$  به صورت مقابل است:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

**مثال:** درایه‌های ماتریس  $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$  را با تعریف زیر به دست آورید:

$$a_{ij} = \begin{cases} i - 2j & ; i = j \\ \frac{i+j}{2} & ; i > j \\ 0 & ; i < j \end{cases}$$

**حل:** ماتریس  $A$  به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

طبق فرض داریم:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= 1 - 2(1) = -1 \\ a_{22} &= 2 - 2(2) = -2 \\ a_{33} &= 3 - 2(3) = -3 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} a_{12} &= a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = a_{34} = 0 \\ a_{21} &= \frac{2+1}{2} = 1/5 \\ a_{31} &= \frac{3+1}{2} = 2 \\ a_{32} &= \frac{3+2}{2} = 2/5 \end{aligned} \right\}$$

در این درایه‌ها داریم  $i = j$  پس از قانون اول استفاده می‌کنیم.

در این درایه‌ها داریم  $i < j$  پس از قانون سوم استفاده می‌کنیم

در این درایه‌ها داریم  $i > j$  پس از قانون دوم استفاده می‌کنیم

پس ماتریس  $A$  به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2/5 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

**مثال:** در ماتریس  $A = [i + 2j]_{2 \times 4}$  مجموع درایه‌های ستون سوم چقدر است؟

**حل:** ماتریس  $A$  به صورت مقابل است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

ستون سوم دارای درایه‌های  $a_{13}$  و  $a_{23}$  است.

$$a_{13} = 1 + 2(3) = 7, \quad a_{23} = 2 + 2(3) = 8$$

طبق فرض:

بنابراین مجموع درایه‌های ستون سوم برابر  $7 + 8 = 15$  است.

**تست:** ماتریس  $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$  با درایه‌های  $A = \begin{cases} 2i - j & i > j \\ i + 3j & i = j \\ i^2 - j & i < j \end{cases}$  تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس  $A$  برابر کدام است؟

۲۰ (۴)

۲۱ (۳)

۲۳ (۲)

۲۲ (۱)

$$a_{11} = 1 + 3 = 4, \quad a_{12} = 1^2 - 2 = -1$$

$$a_{21} = 4 - 1 = 3, \quad a_{22} = 2 + 6 = 8$$

$$a_{31} = 6 - 1 = 5, \quad a_{32} = 6 - 2 = 4$$

**حل:** درایه‌های ماتریس  $A$  را با توجه به تعریف  $a_{ij}$  می‌نویسیم:

بنابراین  $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 8 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ . در نتیجه مجموع درایه‌های ماتریس  $A$  برابر  $4 - 1 + 3 + 8 + 5 + 4 = 23$  است. پس گزینه‌ی «۲» درست است.





۱) **ماتریس مربعی**: اگر در ماتریس  $A$  تعداد سطرها با تعداد ستونها با هم برابر و مساوی  $n$  باشد،  $A$  را ماتریس «مربعی» از مرتبه  $(n \times n)$  می‌نامیم. مانند ماتریس‌های زیر:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad (\text{ماتریس مربعی از مرتبه } 2)$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{ماتریس مربعی از مرتبه } 3)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

قطر اصلی                      قطر فرعی

در ماتریس‌های مربعی درایه‌هایی که شماره‌ی سطر و ستون آن‌ها برابر است روی «قطر اصلی» قرار دارند. قطر دیگر این ماتریس را «قطر فرعی» می‌گوییم. (مجموع شماره‌ی سطر و ستون درایه‌هایی که روی قطر فرعی هستند برابر است با  $(n+1)$ ) در ضمن در ماتریس مربعی در درایه‌های بالای قطر اصلی شماره‌ی سطر از ستون کمتر است و در درایه‌های پایین قطر اصلی شماره‌ی سطر از ستون بیشتر است. به عبارت دیگر اگر  $i < j$  آن‌گاه  $a_{ij}$  درایه‌ی بالای قطر اصلی است و اگر  $i > j$  آن‌گاه  $a_{ij}$  درایه‌ی پایین قطر اصلی است.

۲) **ماتریس سطری**: اگر ماتریس  $A$  فقط از یک سطر تشکیل شده باشد آن را یک ماتریس «سطری» می‌نامیم. مانند ماتریس‌های زیر:

$$A = [1 \ 2]_{1 \times 2}, \quad B = [-1 \ 0 \ 4]_{1 \times 3}, \quad C = [9]_{1 \times 1} = 9$$

پس مرتبه‌ی هر ماتریس سطری به صورت  $1 \times n$  است.

توجه کنید که هر ماتریس  $1 \times 1$  مانند  $A = [a]_{1 \times 1}$  را مساوی با عدد حقیقی  $a$  تعریف می‌کنیم.

۳) **ماتریس ستونی**: اگر ماتریس فقط دارای یک ستون باشد آن را ماتریس «ستونی» می‌نامیم. مانند ماتریس‌های زیر:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{2 \times 1}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \sqrt{2} \\ 7 \end{bmatrix}_{4 \times 1}, \quad C = [90]_{1 \times 1} = 90$$

پس مرتبه‌ی هر ماتریس ستونی به صورت  $m \times 1$  است.

۴) **ماتریس‌های بالامثلثی و پایین‌مثلثی**: اگر  $A$  ماتریس مربعی باشد به طوری که همه‌ی درایه‌های زیر قطر اصلی آن برابر صفر باشند آن‌گاه  $A$  را ماتریس «بالامثلثی» می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی بالا مثلثی‌اند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر اگر  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  بالامثلثی باشد آن‌گاه به ازای هر  $i > j$  درایه‌ی  $a_{ij}$  صفر است. توجه داشته باشید در ماتریس بالامثلثی درایه‌های بالا و روی قطر اصلی هم می‌توانند صفر باشند.

به همین ترتیب اگر  $A$  یک ماتریس مربعی باشد به طوری که همه‌ی درایه‌های بالای قطر اصلی آن برابر صفر باشند آن‌گاه  $A$  را ماتریس «پایین‌مثلثی» می‌نامیم. مانند ماتریس‌های زیر:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 7 & \sqrt{2} & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 9 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر اگر  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  پایین مثلثی باشد آن‌گاه به ازای هر  $i < j$  درایه‌ی  $a_{ij}$  صفر است. توجه داشته باشید در ماتریس پایین مثلثی درایه‌های روی قطر اصلی و زیر قطر اصلی هم می‌توانند صفر باشند.



**مثال:** ماتریس  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  با درایه‌های  $i = j$  با  $-2$  و  $a_{ij} = 2i+1$  برای  $i < j$  مفروض است، نوع این ماتریس را مشخص کنید.

**حل:** ابتدا با تعریف داده شده برای درایه‌های این ماتریس را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -2, & a_{12} &= 2+1=3, & a_{13} &= 2+1=3 \\ a_{21} &= 0, & a_{22} &= -2, & a_{23} &= 4+1=5 \\ a_{31} &= 0, & a_{32} &= 0, & a_{33} &= -2 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس  $A$  به صورت مقابل است.

درایه‌های زیر قطر اصلی ماتریس مربعی  $A$  صفر است پس  $A$  ماتریس بالامثلثی است.

**تست:** ماتریس  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  را در نظر بگیرید. با کدام تعریف برای  $a_{ij}$  ماتریس  $A$  پایین مثلثی است؟ (در گزینه‌ها [ ] نماد جزء صحیح است.)

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{i-j}{3} \\ i+j \end{bmatrix} - 2 \quad i < j \right. \quad (۴) \quad \left\{ \begin{bmatrix} \frac{i+j}{3} \\ i-j \end{bmatrix} - 1 \quad i < j \right. \quad (۳) \quad \left\{ \begin{bmatrix} \frac{i-j}{2} \\ i+j \end{bmatrix} - 2 \quad i > j \right. \quad (۲) \quad \left\{ \begin{bmatrix} \frac{i+j}{2} \\ i-j \end{bmatrix} - 2 \quad i > j \right. \quad (۱)$$

**حل:** ماتریس مربعی  $A$  در صورتی پایین مثلثی است که درایه‌های بالای قطر اصلی برابر با صفر باشند. پس به ازای هر  $i < j$  باید  $a_{ij} = 0$  باشد.

در گزینه‌ی «۳» به ازای  $i < j$  مقدار  $\frac{i+j}{3}$  بین اعداد ۱ و ۲ قرار دارد (اگر  $i=1$  و  $j=2$  باشد  $\frac{i+j}{3}$  دقیقاً ۱ می‌شود). پس

$$\left[ \frac{i+j}{3} \right] - 1 = 0 \text{ در نتیجه } \left[ \frac{i+j}{3} \right] = 1 \text{ پس با این تعریف ماتریس } A \text{ پایین مثلثی است. (اگر } i=1 \text{ و } j=3 \text{ را در نظر بگیرید در گزینه‌های}$$

«۱»، «۲» و «۴» درایه‌ی  $a_{13}$  مخالف صفر می‌شود، پس پایین مثلثی نیستند.)

**۵) ماتریس قطری:** ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. توجه کنید که درایه‌های واقع بر قطر اصلی

می‌توانند صفر باشند یا نباشند. مانند ماتریس‌های زیر:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

پس ماتریس قطری هم ماتریس بالامثلثی و هم ماتریس پایین مثلثی محسوب می‌شود.

**۶) ماتریس اسکالر:** اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند آن را یک ماتریس «اسکالر» می‌نامیم. مانند

ماتریس‌های زیر:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad D = [\gamma] = \gamma, \quad E = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

می‌توان گفت: هر ماتریس اسکالر ماتریس قطری است ولی هر ماتریس قطری ممکن است ماتریس اسکالر نباشد.

**مثال:** ماتریس  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  اسکالر است. اگر مجموع تمام درایه‌های آن برابر ۱۸ باشد، آن‌گاه حاصل ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن

چند است؟

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

**حل:** طبق تعریف ماتریس اسکالر،  $A$  به صورت مقابل است:

$$x + x + x = 18 \Rightarrow x = 6$$

بنابراین طبق فرض مسأله:

$$(x)(x)(x) = 6^3 = 216$$

پس:





**۷** ماتریس همانی (واحد): اگر ماتریس  $A$  اسکالر باشد و همه‌ی درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن یک باشد آن را ماتریس «همانی» می‌نامیم.

معمولاً ماتریس همانی را با  $I_n$  نمایش می‌دهیم که در آن  $n$  مرتبه‌ی ماتریس است. مانند ماتریس‌های زیر:

$$I_1 = [1] \quad , \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر می‌توان درایه‌های ماتریس همانی  $I_n = [a_{ij}]_{n \times n}$  را به صورت زیر تعریف کرد.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

**۸** ماتریس صفر: ماتریسی است که همه‌ی درایه‌های آن صفر باشند. ماتریس صفر را با نماد  $\bar{O}$  نشان می‌دهیم. مانند ماتریس‌های زیر:

$$\bar{O} = [0]_{1 \times 1} \quad , \quad \bar{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad , \quad \bar{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad , \quad \bar{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

توجه کنید ماتریس صفر می‌تواند مربعی یا غیرمربعی باشد.

**مثال:** اگر ماتریس  $\begin{bmatrix} 1+x & z^2+y \\ 2y-2x & z^2+t \end{bmatrix}$  ماتریس صفر باشد آن‌گاه مقدار  $2t^2 - 3x^3$  را به دست آورید.

**حل:** در ماتریس صفر همه‌ی درایه‌ها صفر است. بنابراین:

$$1+x=0 \Rightarrow x=-1 \quad , \quad 2y-2x=0 \Rightarrow y=-1 \quad , \quad z^2+y=0 \Rightarrow z=1 \quad , \quad z^2+t=0 \Rightarrow t=-1$$

در نتیجه مقدار خواسته شده برابر است با:

$$2t^2 - 3x^3 = 2(-1)^2 - 3(-1)^3 = 2 + 3 = 5$$

### تساوی دو ماتریس

دو ماتریس هم مرتبه‌ی  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  و  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$  را مساوی می‌گوییم هرگاه درایه‌های آن‌ها نظیر به نظیر با هم برابر باشند. به عبارت دیگر:

$$\forall i, j \quad a_{ij} = b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}] = [b_{ij}]$$

یعنی:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = b_{11} \\ a_{12} = b_{12} \\ a_{13} = b_{13} \\ a_{21} = b_{21} \\ a_{22} = b_{22} \\ a_{23} = b_{23} \end{cases}$$

**مثال:** دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2x-y & 3 & 4 \\ 1 & 2z & 2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 4 & x-y+1 & 4 \\ 1 & 10 & x-2y \end{bmatrix}$  با هم برابرند.  $x+y+z$  چقدر است؟

**حل:** طبق تعریف دو ماتریس مساوی داریم:

$$\begin{cases} 4 = 2x - y \\ x - y + 1 = 3 \\ 10 = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + y = -2 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow x + y + z = 7$$

$$\begin{cases} 10 = 2z \Rightarrow z = 5 \\ x - 2y = 2 \Rightarrow 2 - 2(0) = 2 \quad \checkmark \end{cases}$$

**تست:** اگر دو ماتریس  $\begin{bmatrix} x-y & 3y-1 \\ 3 & k \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 1+2x & y+x \\ 1-z & x^2+y \end{bmatrix}$  مساوی باشند، آن‌گاه حاصل  $z+k$  برابر کدام است؟

۱ (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

**حل:** هر دو ماتریس  $2 \times 2$  بوده پس هم‌مرتبه هستند. بنابراین مساوی‌اند هرگاه درایه‌های نظیر آن‌ها برابر هم باشند. بنابراین:

$$\begin{cases} x-y=1+2x \\ 3y-1=y+x \\ 1-z=3 \\ x^2+y=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x-2y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-z=3 \Rightarrow z=-2 \\ x^2+y=k \xrightarrow{x=-1, y=0} k=1 \end{cases}$$

در نتیجه حاصل  $z+k$  برابر  $-2+1=-1$  است. پس گزینه‌ی «۳» درست است.

### جمع ماتریس‌ها

اگر دو ماتریس هم‌مرتبه‌ی  $A$  و  $B$  مفروض باشند برای جمع یا تفاضل آن‌ها کافی است درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم که حاصل مجموع یا تفاضل  $A$  و  $B$  ماتریسی مانند  $C$  است که با  $A$  و  $B$  هم‌مرتبه است.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad B = [b_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow \begin{cases} A+B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \\ A-B = [a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}] \end{cases}$$

**مثال:** دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -2 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}$  مفروض‌اند. ماتریس‌های  $A+B$  و  $B-A$  را تشکیل دهید.

**حل:**

$$A+B = \begin{bmatrix} 1+4 & 2+(-2) \\ -1+7 & 4+(-2) \\ 0+(-4) & 5+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 2 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} \quad B-A = \begin{bmatrix} 4-1 & -2-2 \\ 7-(-1) & -2-4 \\ -4-0 & 9-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 8 & -6 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

**مثال:** دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$  مفروض‌اند. ماتریس  $C = [c_{ij}]_{3 \times 3}$  را چنان تشکیل دهید که تساوی  $A+C=B$  برقرار باشد.

**حل:**

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2+c_{11} & 3+c_{12} & 4+c_{13} \\ -1+c_{21} & 2+c_{22} & 0+c_{23} \\ 4+c_{31} & -1+c_{32} & 5+c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_{11} = -1, & c_{12} = -3, & c_{13} = -6 \\ c_{21} = 5, & c_{22} = -5, & c_{23} = 1 \\ c_{31} = -3, & c_{32} = 3, & c_{33} = -2 \end{cases} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -6 \\ 5 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

بنابراین از تساوی  $A+C=B$  می‌توان تساوی  $C=B-A$  را نتیجه گرفت.

**تست:** اگر  $A = [ij]_{3 \times 3}$  و  $B = [j-2i]_{3 \times 3}$  دو ماتریس باشند، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس  $A+B$  برابر کدام است؟

۱ (۱) صفر (۲) ۵ (۳) ۱ (۴) ۳

**حل:** از آن‌جایی که این دو ماتریس هم‌مرتبه هستند، در نتیجه می‌توان آن‌ها را جمع کرد. ابتدا درایه‌های هر دو ماتریس  $A$  و  $B$  را به‌دست می‌آوریم. در ماتریس  $A$  درایه‌ها به صورت  $a_{ij} = ij$  تعریف شده از پس:

$$\begin{aligned} a_{11} = 1, & \quad a_{12} = 2, & \quad a_{13} = 3 \\ a_{21} = 2, & \quad a_{22} = 4, & \quad a_{23} = 6 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \text{ در نتیجه}$$





از طرف دیگر در ماتریس  $B$  درایه‌ها به صورت  $b_{ij} = j - 3i$  تعریف شده‌اند. پس:

$$b_{11} = 1 - 3 = -2, \quad b_{12} = 2 - 3 = -1, \quad b_{13} = 3 - 3 = 0$$

$$b_{21} = 1 - 6 = -5, \quad b_{22} = 2 - 6 = -4, \quad b_{23} = 3 - 6 = -3$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -5 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

در نتیجه  $A + B$  برابر است با:

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس  $A + B$  برابر ۳ است. بنابراین گزینه‌ی «۴» درست است.

### ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس

برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریسی مانند  $A$  آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم. یعنی:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad r \in \mathbb{R} \Rightarrow rA = r[a_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij}]_{m \times n}$$

اگر  $r = -1$  آن‌گاه  $(-1)A = -A$ .

در این حالت  $-A$  را قرینه‌ی ماتریس  $A$  می‌نامیم و اگر  $r = 0$  آن‌گاه  $0A = \bar{O}$ . هم‌چنین اگر  $k$  عددی حقیقی و دلخواه باشد. آن‌گاه:

$$k\bar{O}_{m \times n} = \bar{O}_{m \times n}$$

مثال: اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$  آن‌گاه ماتریس  $2A - 3B$  را تشکیل دهید.

حل:

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 8 \\ 14 & 12 \end{bmatrix}, \quad 3B = \begin{bmatrix} 6 & -21 \\ -9 & 0 \\ 12 & -15 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$2A - 3B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 8 \\ 14 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -21 \\ -9 & 0 \\ 12 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 25 \\ 3 & 8 \\ 2 & 27 \end{bmatrix}$$

تست: ماتریس  $A = [a_{ij}]_{r \times r}$  با درایه‌های  $a_{ij} = \begin{cases} j - 2i & i \leq j \\ i - j & i > j \end{cases}$  و ماتریس  $B = [b_{ij}]_{r \times r}$  با درایه‌های  $b_{ij} = \begin{cases} i - 2j & i < j \\ j - i & i \geq j \end{cases}$

مفروض‌اند. ماتریس  $2A + 2B$  چگونه است؟

(۴) پایین مثلثی

(۳) بالامثلثی

(۲) اسکالر

(۱) قطری

حل: ابتدا درایه‌های ماتریس‌های  $A$  و  $B$  را با توجه به تعریف آن‌ها به دست می‌آوریم:

$$a_{11} = 1 - 2 = -1, \quad a_{12} = 2 - 2 = 0, \quad a_{13} = 3 - 2 = 1$$

$$a_{21} = 2 - 1 = 1, \quad a_{22} = 2 - 4 = -2, \quad a_{23} = 3 - 4 = -1$$

$$a_{31} = 3 - 1 = 2, \quad a_{32} = 3 - 2 = 1, \quad a_{33} = 3 - 6 = -3$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

پس ماتریس  $A$  به صورت مقابل است:

$$b_{11} = 1 - 1 = 0, \quad b_{12} = 1 - 4 = -3, \quad b_{13} = 1 - 6 = -5$$

$$b_{21} = 1 - 2 = -1, \quad b_{22} = 2 - 2 = 0, \quad b_{23} = 2 - 6 = -4$$

$$b_{31} = 1 - 3 = -2, \quad b_{32} = 2 - 3 = -1, \quad b_{33} = 3 - 3 = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -5 \\ -1 & 0 & -4 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

پس:

در نتیجه:

$$2A + 2B = 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & -3 & -5 \\ -1 & 0 & -4 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & -8 \\ 0 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس  $2A + 2B$  ماتریس بالامثلثی است. پس گزینه‌ی «۳» درست است. (با توجه به گزینه‌ها می‌توان فقط مثلاً درایه‌ی ۱۲ را به‌دست آورد و گزینه‌ی صحیح را انتخاب کرد.)

### خواص مهم جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

فرض کنید  $A$  و  $B$  ماتریس‌های هم مرتبه و  $m \times n$  و  $r$  و  $s$  دو عدد حقیقی باشند. خواص زیر به راحتی با توجه به تعریف جمع ماتریس‌ها و تعریف ضرب عدد در ماتریس قابل اثبات‌اند:

$A + B = B + A$	خاصیت جابه‌جایی جمع	(الف)
$A + (B + C) = (A + B) + C$	خاصیت شرکت‌پذیری جمع	(ب)
$A + \bar{O} = \bar{O} + A = A$	خاصیت عضو خنثی برای عمل جمع ماتریس	(پ)
$A + (-A) = (-A) + A = A - A = \bar{O}$	خاصیت عضو قرینه	(ت)
$r(A \pm B) = rA \pm rB$		(ث)
$(r \pm s)A = rA \pm sA$		(ج)
$rA = rB$ , $r \neq 0 \Rightarrow A = B$		(چ)
$A = B \Rightarrow rA = rB$		(ح)
$(rs)A = r(sA) = s(rA)$		(خ)

**مثال:** به‌عنوان نمونه خاصیت «ث» را اثبات کنید.

**حل:** فرض کنید  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  و  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$  در این صورت اگر  $r \in \mathbb{R}$  آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} r(A \pm B) &= r([a_{ij}]_{m \times n} \pm [b_{ij}]_{m \times n}) = r[a_{ij} \pm b_{ij}]_{m \times n} = [r(a_{ij} \pm b_{ij})] \\ &= [ra_{ij} \pm rb_{ij}] && \text{(توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع یا تفریق در } \mathbb{R} \text{)} \\ &= [ra_{ij}] \pm [rb_{ij}] && \text{(تعریف جمع یا تفاضل دو ماتریس)} \\ &= r[a_{ij}] \pm r[b_{ij}] && \text{(تعریف ضرب عدد در ماتریس)} \\ &= rA \pm rB \end{aligned}$$

**مثال:** ماتریس‌های  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$  در تساوی  $2(A + \frac{3}{2}C) = 3(2B - C)$  صدق می‌کنند. درایه‌های ماتریس

$C$  را به‌دست آورید.

**حل:** با استفاده از ویژگی‌های جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس تساوی داده‌شده در مسئله را ساده می‌کنیم.

$$2(A + \frac{3}{2}C) = 3(2B - C) \Rightarrow 2A + 3C = 6B - 3C \Rightarrow 6C = 6B - 2A \Rightarrow 3C = 3B - A$$

بنابراین:

$$3C = 3 \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -11 & 2 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$C = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & -11 & 2 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{7}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$





### ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی

قبل از تعریف ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی به مثال زیر توجه کنید.

**مثال:** اگر  $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$  و  $B = [b_{ij}]_{3 \times 1}$  آن‌گاه هر یک از عبارات زیر را توصیف کنید. به طوری که  $k$  عدد طبیعی در فاصله‌ی  $1 \leq k \leq 3$  باشد.

$$a_{rk} \quad (1) \quad \sum_{k=1}^3 a_{rk} \quad (2) \quad \sum_{k=1}^3 a_{rk} b_{k3} \quad (3)$$

**حل:** (۱) عبارت  $a_{rk}$  با تغییر  $k$  مشخص کننده‌ی درایه‌های سطر دوم ماتریس  $A$  است به عبارتی  $a_{rk}$  نمایشگر درایه‌های  $a_{r1}$  و  $a_{r2}$  و  $a_{r3}$  در ماتریس  $A$  است.

$$(2) \text{ عبارت } \sum_{k=1}^3 a_{rk} \text{ بنا به تعریف سیگما مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس } A \text{ است. یعنی:}$$

$$\sum_{k=1}^3 a_{rk} = a_{r1} + a_{r2} + a_{r3}$$

$$(3) \text{ عبارت } \sum_{k=1}^3 a_{rk} b_{k3} \text{ درایه‌های سطر دوم ماتریس } A \text{ را در درایه‌های ستون سوم } B \text{ نظیر به نظیر ضرب کرده و جواب‌های آن‌ها را جمع می‌کند. یعنی:}$$

$$\sum_{k=1}^3 a_{rk} b_{k3} = a_{r1} b_{13} + a_{r2} b_{23} + a_{r3} b_{33} = [a_{r1} \quad a_{r2} \quad a_{r3}] \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix}$$

حال اگر  $A$  ماتریسی سطری و  $B$  ماتریسی ستونی باشد به طوری که تعداد ستون‌های  $A$  با تعداد سطرهای  $B$  برابر باشند در این صورت  $A \times B$  تعریف می‌شود و برای ضرب کافی است هر درایه‌ی ماتریس  $A$  را در درایه‌ی نظیرش در  $B$  ضرب کرده و حاصل این ضرب‌ها را با هم جمع کنیم که در این صورت ماتریسی  $1 \times 1$  یا یک عدد حقیقی به دست می‌آید.

$$\text{به عنوان نمونه فرض کنید } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}_{1 \times 3} \text{ و } B = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

در این صورت داریم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} = 2(-2) + 0(7) - \frac{1}{2}(6) = -4 + 0 - 3 = -7$$

### ضرب ماتریس در ماتریس

اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  و  $B = [b_{ij}]_{n \times p}$  (تعداد ستون‌های  $A$  با تعداد سطرهای  $B$  برابر باشد) در این صورت  $A \times B$  قابل تعریف است.  $A \times B$  ماتریسی مانند  $C$  بوده که مرتبه‌ی آن  $m \times p$  است. هر درایه‌ی از  $C$  مانند  $c_{ij}$  از ضرب سطر  $i$  ام ماتریس  $A$  در ستون  $j$  ام ماتریس  $B$  به دست می‌آید.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad \text{به عبارت دیگر درایه‌های } c_{ij} \text{ به صورت مقابل به دست می‌آیند.}$$

زیرا  $a_{ik}$  نمایشگر درایه‌های سطر  $i$  ام و  $b_{kj}$  نمایشگر درایه‌های ستون  $j$  ام  $B$  هستند و  $\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$  نمایشگر ضرب سطر  $i$  ام ماتریس  $A$  در ستون  $j$  ام ماتریس  $B$  است.

به عنوان مثال فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$  می‌خواهیم  $A \times B$  را تشکیل دهیم.  $A \times B$  ماتریسی به صورت

$$C = [c_{ij}]_{2 \times 3} \text{ است.}$$

$$A_{2 \times 2} \times B_{2 \times 3} = C_{2 \times 3} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2(2) + 3(4) = 16 \quad , \quad c_{21} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = -3(2) + 0(4) = -6$$

$$c_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = 2(-1) + 3(5) = 13 \quad , \quad c_{22} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = -3(-1) + 0(5) = 3 \quad \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 16 & 13 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

$$c_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 2(3) + 3(0) = 6 \quad , \quad c_{23} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = -3(3) + 0(0) = -9$$

**مثال:** دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$  مفروض‌اند.  $A \times B$  و  $B \times A$  را به دست آورید.

**حل:** چون  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  و  $B = [b_{ij}]_{2 \times 3}$  پس  $A \times B$  ماتریسی  $3 \times 3$  است.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1)+2(0) & 3(2)+2(4) & 3(3)+2(-1) \\ -1(1)+3(0) & -1(2)+3(4) & -1(3)+3(-1) \\ 7(1)+0(0) & 7(2)+0(4) & 7(3)+0(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 14 & 7 \\ -1 & 10 & -6 \\ 7 & 14 & 21 \end{bmatrix}$$

ماتریس  $B \times A$  یک ماتریس  $2 \times 2$  است.

$$B \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(3)+2(-1)+3(7) & 1(2)+2(3)+3(0) \\ 0(3)+4(-1)+(-1)(7) & 0(2)+4(3)+(-1)(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 8 \\ -11 & 12 \end{bmatrix}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید لزومی ندارد که  $A \times B$  با  $B \times A$  برابر باشد. (از این پس  $A \times B$  را به صورت  $AB$  نشان خواهیم داد.)

**مثال:** ماتریس‌های  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$  مفروض‌اند. ماتریس‌های  $AB$  و  $BA$  را در صورت وجود تشکیل دهید.

**حل:** چون  $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$  و  $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$  بنابراین  $AB$  وجود ندارد زیرا تعداد ستون‌های  $A$  با تعداد سطرهای  $B$  برابر نیست. ولی  $BA$  وجود دارد.

$$BA = C \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(2)+5(1) & 1(-1)+5(4) & 1(3)+5(5) \\ -2(2)+7(1) & -2(-1)+7(4) & -2(3)+7(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 19 & 28 \\ 3 & 30 & 29 \end{bmatrix}$$

**تست:** ماتریس‌های  $A = \begin{bmatrix} 13 & 12 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & m & -5 \\ 11 & 5 & 1 & 19 \\ 21 & \sqrt{7} & 2 & -23 \end{bmatrix}$  مفروض‌اند. اگر درایه‌ی سطر دوم، ستون سوم  $AB$  برابر ۹ باشد آن‌گاه  $m$  برابر کدام است؟

۹ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

**حل:** برای پیدا کردن درایه سطر دوم ستون سوم ماتریس  $AB$  کافیست سطر دوم  $A$  را در ستون سوم  $B$  ضرب کنیم، به عبارت دیگر لازم نیست همی درایه‌های ماتریس  $AB$  را پیدا کنیم.

$$AB = \text{درایه‌ی سطر دوم ستون سوم} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3m + 1 + 2 = 3m + 3$$

$$3m + 3 = 9 \Rightarrow 3m = 6 \Rightarrow m = 2$$

بنا به فرض سؤال داریم:

پس گزینه‌ی «۲» درست است.

**مثال:** دو ماتریس  $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$  با درایه‌های  $i = j$  و  $a_{ij} = \begin{cases} i-j & i < j \\ i+j & i = j \\ i-2j & i > j \end{cases}$  و  $B = [i^2 - 2j]_{3 \times 2}$  را در نظر بگیرید. درایه‌های ماتریس  $AB$  را

به دست آورید.

**حل:** ابتدا درایه‌های هر دو ماتریس را محاسبه می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} a_{11} = 1+1 = 2, \quad a_{12} = 1-2 = -1, \quad a_{13} = 1-3 = -2 \\ a_{21} = 2-2 = 0, \quad a_{22} = 2+2 = 4, \quad a_{23} = 2-3 = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} b_{11} = 1^2 - 2 = -1, \quad b_{12} = 1^2 - 4 = -3 \\ b_{21} = 2^2 - 2 = 2, \quad b_{22} = 2^2 - 4 = 0 \\ b_{31} = 9 - 2 = 7, \quad b_{32} = 9 - 4 = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & -16 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

بنابراین:







**مثال:** اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ . مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری به دست آورید که حاصل ضرب  $A \times B$  ماتریسی قطری باشد.

**حل:** بنا بر فرض سؤال ماتریس  $AB$  باید ماتریسی قطری باشد. پس لازم است درایه‌های سطر اول ستون دوم و همچنین سطر دوم ستون اول  $AB$  برابر صفر باشد. پس ابتدا ماتریس  $AB$  را به دست می‌آوریم.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3a & -8+2a \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix}$$

چون  $AB$  قطری است بنا بر آنچه گفته شد باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} -8+2a=0 \Rightarrow a=4 \\ b-3=0 \Rightarrow b=3 \end{cases}$$

(البته نیازی به به دست آوردن  $4+3a$  و  $-2b-2$  نیست.)

**مثال:** ماتریس‌های  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$  مفروض‌اند. اگر درایه‌ی سطر اول و ستون دوم  $AB$  برابر  $x$  و درایه‌ی سطر دوم و ستون اول  $AB$  برابر  $y$  باشد، آن‌گاه  $x+y$  را به دست آورید.

**حل:** به جای محاسبه‌ی ماتریس  $AB$  فقط دو درایه‌ی خواسته شده را پیدا می‌کنیم.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow x = -25$$

از طرف دیگر:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow y = 18$$

$$x+y = -25+18 = -7$$

**نکته**

اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریسی باشند که  $AB$  یا  $BA$  یا هر دو تعریف شده باشند آن‌گاه لزوماً  $AB$  با  $BA$  برابر نیست. ولی می‌توان مثال‌هایی یافت که  $AB = BA$  باشد. در این صورت گوییم برای دو ماتریس  $A$  و  $B$  ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد و یا به طور اختصار «جابه‌جایی» است.  
اگر  $AB = BA$  آن‌گاه حتماً  $A$  و  $B$  مربعی بوده و مرتبه‌ی آن‌ها برابر است.

**مثال:** نشان دهید ضرب ماتریس‌های  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$  دارای خاصیت جابه‌جایی است.

**حل:**  $AB$  و  $BA$  هر دو ماتریس‌های  $2 \times 2$  هستند.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(7)+2(6) & 1(4)+2(3) \\ 3(7)-1(6) & 3(4)-1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 10 \\ 15 & 9 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7(1)+4(3) & 7(2)+4(-1) \\ 6(1)+3(3) & 6(2)+3(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 10 \\ 15 & 9 \end{bmatrix}$$

پس  $AB = BA$ .

**تست:** اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} m-n & n-1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$  و  $AB = BA$ . آن‌گاه مقدار  $3m-2n$  برابر کدام است؟

۳ (۴)

صفر (۳)

۶ (۲)

-۴ (۱)

**حل:** می‌دانیم در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد. پس ماتریس‌های  $AB$  و  $BA$  را محاسبه کرده و بنا بر فرض سؤال آن‌ها را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m-n & n-1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m-2n+12 & 2n-2+9 \\ 3m-3n-8 & 3n-3-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m-2n+12 & 2n+7 \\ 3m-3n-8 & 3n-9 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} m-n & n-1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m-2n+3n-3 & -3m+3n+2n-2 \\ -8-9 & 12-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m+n-3 & -3m+5n-2 \\ -17 & 6 \end{bmatrix}$$

$$AB = BA \Rightarrow \begin{bmatrix} 2m-2n+12 & 2n+7 \\ 3m-3n-8 & 3n-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m+n-3 & -3m+5n-2 \\ -17 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{حال داریم:}$$

$$\begin{cases} 3n-9=6 \Rightarrow n=5 \\ 3m-3n-8=-17 \Rightarrow 3m-15-8=-17 \Rightarrow m=2 \end{cases} \quad \text{بنابراین:}$$

(به راحتی می‌توان دید که  $m=2$  و  $n=5$  در شرایط دیگر برابری نیز صدق می‌کنند)

در نتیجه  $-4 = 6 - 10 = 3m - 2n = 6 - 10 = -4$  پس گزینه‌ی «۱» درست است.

**مثال:** برای ماتریس‌های  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  نشان دهید که ماتریس‌های  $AB$  و  $BA$  برابر نیستند.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2 & -4+0 \\ 1+3 & 4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{حل: هر دو ماتریس } AB \text{ و } BA \text{ را تشکیل می‌دهیم:}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+4 & -2-12 \\ 1+0 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -14 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌کنید که دو ماتریس به‌دست آمده با هم برابر نیستند.

**مثال:** نشان دهید ماتریس‌های به فرم  $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$  خاصیت جابه‌جایی دارند. این موضوع را در مورد ماتریس به شکل  $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$  نیز بررسی کنید.

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{bmatrix} \quad \text{حل: دو ماتریس } A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} \text{ را در نظر می‌گیریم.}$$

$$BA = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac+bd & bc+ad \\ ad+bc & bd+ac \end{bmatrix}$$

بنابراین  $AB = BA$ .

به همین ترتیب برای ماتریس دیگر نیز می‌توان عمل کرد.

$$\text{مثال: اگر } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ آن‌گاه } AB \text{ را تشکیل دهید.}$$

**حل:**  $AB$  ماتریسی  $2 \times 3$  خواهد بود.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(-1)-1(-1)+0(-1) & 1(2)-1(2)+0(2) & 1(-2)-1(-2)+0(-2) \\ 2(-1)-1(-1)-1(-1) & 2(2)-1(2)-1(2) & 2(-2)-1(-2)-1(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

ملاحظه می‌کنید  $AB = \bar{O}$  ولی هیچ کدام از ماتریس‌های  $A$  یا  $B$  صفر نیستند.

نکته

اگر برای دو ماتریس  $A$  و  $B$  داشته باشیم  $AB = \bar{O}$  آن‌گاه لزومی ندارد که یکی از ماتریس‌های  $A$  یا  $B$  حتماً ماتریس صفر باشند.

**مثال:** اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  آن‌گاه ماتریس مربعی مرتبه‌ی دوم  $X$  را چنان تعیین کنید که  $AX = \bar{O}$  برقرار باشد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x+2z & y+2t \\ 2x+4z & 2y+4t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{حل: فرض کنید } X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \text{ در این صورت داریم:}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2z=0 \Rightarrow x=-2z \\ y+2t=0 \Rightarrow y=-2t \\ 2x+4z=0 \Rightarrow x=-2z \\ 2y+4t=0 \Rightarrow y=-2t \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -2z & -2t \\ z & t \end{bmatrix}$$

با انتخاب مقادیر مختلف برای  $z$  و  $t$  ماتریس‌های متنوعی برای  $X$  پیدا می‌شود. به‌عنوان مثال  $X = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  و  $X = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  می‌توانند

جواب مسأله باشند.





۱ در حالت کلی  $AB$  و  $BA$  با هم برابر نیستند. (به بیان دیگر در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد)

۲ اگر ماتریس همبندی  $I_n$  را از چپ یا راست در  $A_{n \times n}$  ضرب کنیم حاصل خود  $A_{n \times n}$  می‌شود. یعنی:  $A_{n \times n} \times I_n = I_n \times A_{n \times n} = A_{n \times n}$   
 $I_n$  و  $A_{n \times n}$  خاصیت جابه‌جایی دارند.

در واقع  $I_n$  مانند عدد ۱ در اعداد بوده و عضو خنثی برای عمل ضرب است. همچنین رابطه‌های زیر را برای ماتریس غیرمربعی  $A$  می‌توان نوشت:

$$I_n A_{n \times m} = A_{n \times m} \quad , \quad A_{n \times m} \times I_m = A_{n \times m}$$

۳ می‌توان عمل ضرب در ماتریس‌ها را در عمل جمع یا تفریق ماتریس‌ها پخش (توزیع) کرد. یعنی:

$$A \times (B \pm C) = A \times B \pm A \times C$$

اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ ،  $B = [b_{ij}]_{p \times n}$ ،  $C = [c_{ij}]_{p \times n}$  آن‌گاه:

$$(B \pm C)A = BA \pm CA$$

و اگر  $A = [a_{ij}]_{n \times m}$  آن‌گاه:

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

۴ اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ ،  $B = [b_{ij}]_{p \times k}$  و  $C = [c_{ij}]_{k \times n}$  آن‌گاه:

به این خاصیت، «خاصیت شرکت‌پذیری ضرب» ماتریس‌ها می‌گوییم.

$$A_{m \times n} \times \bar{O}_{n \times p} = \bar{O}_{m \times p} \quad , \quad \bar{O}_{p \times m} \times A_{m \times n} = \bar{O}_{p \times n}$$

۵ اگر  $\bar{O}$  ماتریس صفر باشد، آن‌گاه:

یعنی ماتریس  $\bar{O}$  هم مانند عدد صفر عمل می‌کند.

$$r(AB) = (rA)B = A(rB)$$

۶ اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  و  $B = [b_{ij}]_{n \times p}$  و  $r \in \mathbb{R}$  آن‌گاه:

یعنی هر وقت خواستیم می‌توانیم عدد  $r$  را در یکی از دو ماتریس ضرب کنیم.

$$(rA)(sB) = (rs)(AB)$$

۷ اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  و  $B = [b_{ij}]_{n \times p}$  و  $r, s \in \mathbb{R}$  آن‌گاه:

دیدید ضرب ماتریس‌ها روی جمع و تفریق آن‌ها خاصیت پخش دارد. ولی در فاکتور گرفتن از ماتریس‌ها باید دقت کرد به نمونه‌های زیر توجه کنید.

در عبارت  $AB + BC$  از ماتریس  $B$  نمی‌توان فاکتور گرفت زیرا در  $AB$  ماتریس  $B$  از سمت راست در  $A$  ضرب شده و در  $BC$  ماتریس  $B$  از چپ در  $C$  ضرب شده است و ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد. بنابراین  $AB + BC$  در حالت کلی مساوی  $B(A + C)$  نیست. یا در عبارت  $AB + 2A$  از ماتریس  $A$  می‌توان چپ فاکتور گرفت ولی  $AB + 2A$  مساوی  $A(B + 2)$  نیست زیرا  $B + 2$  تعریف نشده است. نحوه‌ی درست نوشتن این فاکتورگیری به صورت زیر است:

$$AB + 2A = A(B + 2I)$$

**مثال:** ماتریس‌های  $A$  و  $B$  در تساوی  $A \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} B + A \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  صدق می‌کنند. مجموع درایه‌های ماتریس  $AB$  را

به دست آورید.

**حل:** در تساوی داده شده در طرف اول از سمت چپ از  $A$  و از سمت راست از  $B$  فاکتور می‌گیریم، داریم:

$$A \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} B + A \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A \left( \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \right) B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_I B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow AIB = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس  $AB$  برابر  $5 + 7 - 1 + 2 = 13$  است.

**مثال:** ماتریس‌های  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$  را در نظر گرفته و حاصل ضرب‌های  $AB$  و  $AC$  را به دست آورید.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad AC = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

**حل:**

همان‌طور که مشاهده می‌کنید  $AB = AC$  ولی  $B \neq C$ . یعنی نمی‌توانیم از طرفین ضرب ماتریس‌ها، ماتریس ثابتی را حذف کنیم. پس:

نکته

اگر ماتریس‌های  $A$  و  $B$  و  $C$  چنان باشند که داشته باشیم  $AB = AC$  آن‌گاه لزوماً نمی‌توانیم نتیجه بگیریم  $B = C$  یعنی عمل حذف از طرفین در ضرب ماتریس‌ها همواره برقرار نیست.

### توان‌های طبیعی ماتریس‌های مربعی

اگر  $A$  یک ماتریس مربعی باشد در این صورت توان‌های طبیعی  $A$  به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A^1 = A, \quad A^2 = A \times A, \quad A^3 = A \times A^2, \dots$$

در صورتی که مرتبه‌ی  $A$  برابر  $n$  باشد، حتماً مرتبه‌ی همه‌ی توان‌های طبیعی  $A$  نیز  $n$  خواهد بود. در ضمن فقط ماتریس‌های مربعی را می‌توان به توان رساند. به عنوان مثال  $(A_{3 \times 2})^2$  تعریف نشده است، چون ضرب  $(A_{3 \times 2})(A_{3 \times 2})$  معنی ندارد. تذکر این نکته ضروری است که در ضرب توان‌های مختلف  $A$  خاصیت جابه‌جایی برقرار است، یعنی:

$$A^k A^m = A^m A^k = A^{m+k}$$

$$A^r A^r = A^r A^r = A^0$$

مثلاً:

هم‌چنین می‌توان نشان داد اگر  $A$  یک ماتریس مربعی،  $k$  یک عدد حقیقی و  $m$  و  $n$  اعداد طبیعی باشند آن‌گاه:

$$(kA)^n = k^n A^n, \quad I^n = I, \quad (A^m)^n = A^{mn}$$

نکته

اگر در مسأله‌ای توان‌های طبیعی یک ماتریس مشخص را خواسته باشند، باید چند توان اولیه‌ی آن را به‌دست آورده و با مشخص شدن یک فرمول کلی جواب مسأله را پیدا کنیم.

مثال: اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & k \\ \frac{1}{k} & 0 \end{bmatrix}$  آن‌گاه ماتریس  $A^{100}$  را بیابید.

حل: ابتدا ماتریس  $A^2$  را محاسبه می‌کنیم.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 0 & k \\ \frac{1}{k} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & k \\ \frac{1}{k} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^{100} = (A^2)^{50} = I^{50} = I$$

بنابراین:

مثال: اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  آن‌گاه  $A^{100}$  را بیابید.

حل: ابتدا چند توان اولیه را به‌دست می‌آوریم:

$$A^1 = A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 2 \times 2^1 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 3 \times 2^2 \\ 0 & 2^3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A \times A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 32 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^4 & 4 \times 2^3 \\ 0 & 2^4 \end{bmatrix}$$

بنابراین  $A^n$  به‌صورت  $\begin{bmatrix} 2^n & n \times 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$  است. در نتیجه:

$$A^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 100 \times 2^{99} \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix}$$





**تست:** اگر  $A = \begin{bmatrix} \circ & \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \circ \end{bmatrix}$ ، آن گاه  $A^{99}$  برابر کدام است؟

(۱)  $A$  (۲)  $I$  (۳)  $-I$  (۴)  $-A$

**حل:** ابتدا ماتریس  $A^T$  را محاسبه می‌کنیم.

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} \circ & \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \circ \\ \circ & -1 \end{bmatrix} = -I$$

بنابراین ماتریس  $A^{99}$  را برحسب  $A^T$  به صورت مقابل می‌نویسیم:

پس گزینه‌ی «۴» درست است.

**مثال:** اگر  $A^T = \lambda A$  که در آن  $A$  ماتریس مربعی و  $\lambda$  یک عدد حقیقی است آن گاه  $A^{1397}$  را به دست آورید.

$$A^T = \lambda A^1$$

**حل:** چند توان اولیه‌ی  $A$  را نوشته و یک فرمول کلی به دست می‌آوریم:

$$A^T = A \times A^T = A \times (\lambda A^1) = \lambda A^T = \lambda(\lambda A^1) = \lambda^2 A^1$$

$$A^T = A \times A^T = A \times (\lambda^2 A^1) = \lambda^2 A^T = \lambda^2(\lambda A) = \lambda^3 A$$

$$A^n = \lambda^{n-1} A$$

بنابراین با ادامه‌ی این روند خواهیم داشت:

$$A^{1397} = \lambda^{1396} A$$

پس:

**تست:** در ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}$  مجموع درایه‌های  $A^{10}$  کدام است؟

(۱)  $2^{10}$  (۲)  $2^{11}$  (۳)  $2^{12}$  (۴)  $2^9$

**حل:** ابتدا ماتریس  $A^T$  را به دست می‌آوریم.

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix} = 2A$$

$$A^{10} = 2^9 A$$

می‌دانیم اگر  $A^T = \lambda A$  آن گاه  $A^n = \lambda^{n-1} A$  بنابراین داریم:

پس مجموع درایه‌های ماتریس  $A^{10}$  برابر  $2^9 \times 2^2 = 2^9 \times 4 = 2^{11} \times 2 = 2^{12}$  است. بنابراین گزینه‌ی «۳» صحیح است.

**مثال:**  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی هستند اگر  $AB = B$  و  $BA = A$  آن گاه ثابت کنید  $A^T = B$  و  $B^T = A$ .

**حل:** از فرضیات سؤال به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$AB = B \xrightarrow[\text{از راست ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در } A} ABA = BA \xrightarrow{BA=A} AA = A \Rightarrow A^T = A$$

$$BA = A \xrightarrow[\text{از راست ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در } B} BAB = AB \xrightarrow{AB=B} BB = B \Rightarrow B^T = B$$

**تست:** اگر  $\overline{AB + 4BA} = \overline{O}$  آن گاه در تساوی  $AB^T = kB^T A$  مقدار  $k$  کدام است؟

(۱) ۶۴ (۲) -۶۴ (۳) ۳۲ (۴) -۳۲

**حل:** از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم  $AB = -4BA$ .

حال با استفاده از خاصیت شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها در  $AB^T$  ماتریس  $AB$  را ایجاد می‌کنیم و به جای آن  $-4BA$  را قرار می‌دهیم.

$$AB^T = (AB)B^T = (-4BA)B^T = -4B \underbrace{(AB)}_{-4BA} B = 16B^T \underbrace{(AB)}_{-4BA} = -64B^T A$$

با مقایسه‌ی  $-64B^T A$  با  $kB^T A$  نتیجه می‌گیریم  $k = -64$ . پس گزینه‌ی «۲» درست است.

**مثال:** اگر  $C = BA$  آن گاه حاصل  $B(AB)^T A$  را بر حسب ماتریس  $C$  به دست آورید.

**حل:** از خاصیت شرکت پذیری ضرب ماتریس‌ها استفاده کرده می‌نویسیم:

$$B(AB)^T A = B(AB)(AB)A = (BA)(BA)(BA) = (BA)^3 = C^3$$

پس ماتریس  $B(AB)^T A$  برابر  $C^3$  است.

**مثال:** فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ . مجموع درایه‌های ماتریس  $A^{19}$  را به دست آورید.

**حل:** ابتدا چند توان اولیه‌ی  $A$  را به دست می‌آوریم:

$$A^1 = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 3A$$

پس  $A^2 = 3A$  و می‌دانیم اگر  $A^2 = \lambda A$  باشد آن گاه  $A^n = \lambda^{n-1} A$  بنابراین داریم:

$$A^{20} = 3^{19} A = \begin{bmatrix} 3^{19} & 3^{19} & 3^{19} \\ 3^{19} & 3^{19} & 3^{19} \\ 3^{19} & 3^{19} & 3^{19} \end{bmatrix}$$

$$9 \times 3^{19} = 3^{21}$$

بنابراین مجموع درایه‌های این ماتریس برابر است با:

$$A^n = (mk)^{n-1} A, \quad A = \begin{bmatrix} k & k & \dots & k \\ k & k & \dots & k \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ k & k & \dots & k \end{bmatrix}_{m \times m}$$

در حالت کلی می‌توان نشان داد اگر

$$(x+y)(z+t) = xz + xt + yz + yt$$

همان‌طور که می‌دانید در مجموعه‌ی اعداد حقیقی خاصیت را داریم در ماتریس‌ها هم چنین خاصیتی برقرار است.

**نکته**

اگر  $A, B, C$  و  $D$  چهار ماتریس باشند که همه‌ی ضرب‌های لازم تعریف شده باشند، آن گاه:

$$(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD$$

باید به جایگاه ماتریس‌ها دقت لازم را داشت. یعنی وقتی  $C$  و  $D$  از سمت راست ضرب می‌شود باید آن را در سمت راست نوشت و نیز  $A$  و  $B$  را باید از سمت چپ ضرب کنیم.

**مثال:** اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، مطلوب است:

$$(A+B)^T \quad \text{(الف)} \quad (A+B)(A-B) \quad \text{(ب)} \quad (A-B)^T \quad \text{(پ)}$$

$$(A+B)^T = (A+B)(A+B) = A^T + AB + BA + B^T \quad \text{(حل: الف)}$$

چون ممکن است  $AB \neq BA$  پس آن را نمی‌توان به صورت  $A^T + 2AB + B^T$  نوشت.

$$(A+B)(A-B) = A^T - AB + BA - B^T \quad \text{(ب)}$$

به همان دلیل این عبارت را نمی‌توان به صورت  $A^T - B^T$  نوشت.

$$(A-B)^T = (A-B)(A-B) = A^T - AB - BA + B^T \quad \text{(پ)}$$

باز به همان دلیل این عبارت را نمی‌توان به صورت  $A^T - 2AB + B^T$  نوشت.

**نکته**

در ماتریس‌ها هیچ کدام از اتحادهای جبری معروف لزوماً برقرار نیستند.

اگر ضرب ماتریس‌های  $A$  و  $B$  خاصیت جابه‌جایی داشته باشد ( $AB = BA$ ) آن گاه اتحادها برقرار است. به عنوان مثال اگر  $AB = BA$  باشد، آن گاه  $(A+B)^T = A^T + 2AB + B^T$ .

به عنوان مثال اگر  $A$  ماتریسی مربعی و  $I$  ماتریس همانی هم‌مرتبه با  $A$  باشد چون  $AI = IA$  پس در محاسبات  $(A+kI)^n$  می‌توان از اتحادها استفاده کرد.





**مثال:** اگر  $A$  ماتریس  $2 \times 2$  باشد حاصل  $(A - 2I)^T$  را به دست آورید.

**حل:** از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$(A - 2I)^T = A^T + (-2I)^T - 2(A)(2I) = A^T + 4I - 4A$$

**مثال:** ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  مفروض است ثابت کنید  $A^T = \bar{O}$ .

**حل:** ابتدا ماتریس  $A^T$  را به دست می‌آوریم.

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & ac \\ ac & c^2 \end{bmatrix}$$

$$A^T = A^T \times \bar{A} = \begin{bmatrix} a^2 & ac \\ ac & c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^3 & a^2b \\ a^2c & acd \end{bmatrix} = \bar{O}$$

حال  $A^T$  را محاسبه می‌کنیم:

بنابراین اگر توانی از یک ماتریس صفر باشد نمی‌توان نتیجه گرفت آن ماتریس صفر است. (اگر توانی از ماتریس صفر باشد توان‌های بالاتر آن نیز صفر است).

**تست:** اگر  $(A - I)^T = \bar{O}$  آن‌گاه ماتریس  $A^T$  برابر کدام است؟

$I$  (۱)       $3A - 2I$  (۲)       $2A - I$  (۳)       $4A - 3I$  (۴)

**حل:** از تساوی  $(A - I)^T = \bar{O}$  نمی‌توان نتیجه گرفت  $A - I = \bar{O}$  یعنی  $A = I$  پس  $A^T = I$ . برای حل این سؤال ابتدا به کمک اتحاد

تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

حال این تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$A^T = 2A - I \Rightarrow A^T = (2A - I)^T = 4A^T + I - 4A \Rightarrow A^T = 4(2A - I) + I - 4A \Rightarrow A^T = 4A - 3I$$

بنابراین گزینه‌ی «۴» درست است.

توجه کنید در حالت کلی با فرض  $(A - I)^T = \bar{O}$  ماتریس  $A^T$  برابر  $4A - 3I$  است نه  $I$  ولی اگر  $A$  برابر  $I$  هم انتخاب شود نیز گزینه‌ی «۴» درست خواهد بود.

**مثال:** ماتریس‌های  $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & y \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  در تساوی  $(A + B)^T = A^T + 2AB + B^T$  صدق می‌کنند نسبت  $\frac{x}{y}$  را به دست آورید.

**حل:** چون دو ماتریس  $A$  و  $B$  در اتحاد  $(A + B)^T = A^T + 2AB + B^T$  صدق می‌کنند. لذا  $AB = BA$  داریم:

$$AB = BA \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & y \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1+3x & x+y \\ 5 & 2y+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2y & x+y \\ 5 & 3x+1 \end{bmatrix}$$

$$1+3x = 1+2y \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$

بنابراین:

**مسئله:** ثابت کنید ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  همواره در تساوی مقابل صدق می‌کند.

**حل:** ابتدا ماتریس  $A^T$  را به دست می‌آوریم.

ماتریس‌های  $A^T$ ،  $A$  و  $I$  را در رابطه‌ی داده‌شده قرار می‌دهیم.

$$A^T - (a+d)A + (ad-bc)I = \begin{bmatrix} a^T+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^T \end{bmatrix} - (a+d) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + (ad-bc) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^T+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a^T+ad & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

این رابطه که برای ماتریس‌های  $2 \times 2$  همواره برقرار است معروف به رابطه‌ی کیلی - همیلتون است.

**تست:** اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$  و  $A^\top = \alpha A - \beta I$  . آن‌گاه زوج مرتب  $(\alpha, \beta)$  برابر کدام است؟

- (۱)  $(1, 0)$       (۲)  $(2, -1)$       (۳)  $(-1, 2)$       (۴)  $(0, 1)$

**حل:** ابتدا ماتریس  $A^\top$  را به دست می‌آوریم:

$$A^\top = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^\top = I$$

بنابراین تساوی داده شده در صورت سؤال به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} A^\top &= \alpha A - \beta I \Rightarrow A = \alpha A - \beta I \Rightarrow (\alpha - 1)A = \beta I \\ \Rightarrow (\alpha - 1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} &= \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \\ \alpha - 1 = \beta \Rightarrow \beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

در نتیجه  $(\alpha, \beta) = (1, 0)$  پس گزینه‌ی «۱» درست است.

**تست:** ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$  در تساوی  $A^\top + \alpha A + \beta I = 0$  صدق می‌کند. حاصل  $\alpha + \beta$  برابر کدام است؟

- (۱) ۴      (۲) ۶      (۳) -۷      (۴) ۱۳

**حل: روش اول:** با استفاده از رابطه‌ی کیلی - همیلتون می‌نویسیم:

$$A^\top - (a+d)A + (ad-bc)I = \bar{0}$$

در ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$  مقدار  $a+d = 7$  برابر  $2+5=7$  است و مقدار  $ad-bc = 13$  برابر  $(2)(5) - (-1)(3) = 13$  است. بنابراین:

$$A^\top - 7A + 13I = \bar{0}$$

با مقایسه‌ی این تساوی با فرض  $A^\top + \alpha A + \beta I = 0$  نتیجه می‌گیریم  $\alpha = -7$  و  $\beta = 13$ . پس  $\alpha + \beta = 6$  و گزینه‌ی «۲» درست است.

**روش دوم:** ابتدا ماتریس  $A^\top$  را به دست می‌آوریم:

$$A^\top = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 21 \\ -7 & 22 \end{bmatrix}$$

ماتریس  $A^\top$ ،  $A$  و  $I$  را در تساوی داده‌شده قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} A^\top + \alpha A + \beta I = 0 &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 21 \\ -7 & 22 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1+2\alpha+\beta & 21+3\alpha \\ -7-\alpha & 22+5\alpha+\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} -7-\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -7 \\ 1+2\alpha+\beta = 0 \xrightarrow{\alpha=-7} \beta = 13 \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین  $\alpha + \beta = 6$ .

**تست:** کدام یک از گزینه‌های زیر برای ماتریس‌های  $A$  و  $B$  همواره درست است؟

- (۱)  $(AB)^n = A^n B^n$       (۲)  $A^n = \bar{0} \Rightarrow A = \bar{0}$   
 (۳)  $(A+B)(A-B) = A^\top - B^\top$       (۴)  $A^m \times A^n = A^n \times A^m$

**حل:** در ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی وجود ندارد، پس گزینه‌ی «۱» نادرست است. (اگر  $AB = BA$  باشد درست است).

در ضمن گزینه‌ی «۲» هم نادرست است به‌عنوان مثال اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  آن‌گاه  $A^\top = \bar{0}$  ولی  $A \neq \bar{0}$ . و می‌دانیم در ضرب ماتریس‌ها از

اتحادهای جبری در حالت کلی نمی‌توان استفاده کرد، پس گزینه‌ی «۳» هم نادرست است. بنابراین گزینه‌ی «۴» درست است، زیرا ضرب

ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد به همین علت مثلاً ماتریس  $A^\top$  که برابر  $A \times A \times A$  است را می‌توان به صورت  $A^\top \times A$  یا  $A \times A^\top$  نوشت.







۱] حاصل ضرب دو ماتریس قطری هم‌مرتبه یک ماتریس قطری است و برای محاسبه‌ی حاصل ضرب باید درایه‌های روی قطرهای دو ماتریس را نظریه‌نظیر در هم ضرب کنیم. یعنی:

$$\begin{bmatrix} a & \circ & \circ \\ \circ & b & \circ \\ \circ & \circ & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & \circ & \circ \\ \circ & b' & \circ \\ \circ & \circ & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & \circ & \circ \\ \circ & bb' & \circ \\ \circ & \circ & cc' \end{bmatrix}$$

به همین علت برای محاسبه‌ی توان ماتریس‌های قطری کفایت درایه‌های قطر اصلی را به توان برسانیم. به عنوان نمونه:

$$\begin{bmatrix} a & \circ & \circ \\ \circ & b & \circ \\ \circ & \circ & c \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & \circ & \circ \\ \circ & b^n & \circ \\ \circ & \circ & c^n \end{bmatrix}$$

تست: اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & \circ & \circ \\ \circ & -1 & \circ \\ \circ & \circ & -1 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس  $A^{1397}$  کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)      -۱

حل: ماتریس  $A$  یک ماتریس قطری است پس:

$$A^{1397} = \begin{bmatrix} 1^{1397} & \circ & \circ \\ \circ & (-1)^{1397} & \circ \\ \circ & \circ & (-1)^{1397} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \circ & \circ \\ \circ & -1 & \circ \\ \circ & \circ & -1 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس  $A^{1397}$  برابر  $-1$  است. در نتیجه گزینه‌ی «۴» درست است.

۲] حاصل ضرب دو ماتریس بالامتلی (پایین مثلثی) هم‌مرتبه یک ماتریس بالامتلی (پایین مثلثی) است و درایه‌های روی قطر این حاصل ضرب مثل حاصل ضرب ماتریس‌های قطری به دست می‌آید و سایر درایه‌های غیر صفر را باید با ضرب کردن پیدا کرد. به عنوان نمونه به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ \circ & b & f \\ \circ & \circ & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & d' & e' \\ \circ & b' & f' \\ \circ & \circ & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & x & y \\ \circ & bb' & z \\ \circ & \circ & cc' \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & \circ & \circ \\ d & b & \circ \\ e & f & c \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & \circ & \circ \\ x & b^n & \circ \\ y & z & c^n \end{bmatrix}$$

مقادیر  $x$ ،  $y$  و  $z$  را با تعریف ضرب ماتریس باید به دست آورد.

مثال: ماتریس‌های  $A = \begin{bmatrix} 1 & \circ & 3 \\ \circ & 1 & -3 \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & \circ & -3 \\ \circ & 1 & 3 \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix}$  مفروض‌اند. درایه‌های ماتریس  $A^T + B^T + AB$  را پیدا کنید.

حل: ماتریس‌های  $A$  و  $B$  بالامتلی هستند پس ماتریس‌های  $A^T$ ،  $B^T$  و  $AB$  نیز بالامتلی هستند. پس درایه‌های روی قطر اصلی به سادگی محاسبه می‌شوند و درایه‌های زیر قطر اصلی صفر هستند. پس فقط در محاسبه‌ی آن‌ها باید درایه‌های بالای قطر اصلی را با ضرب به دست آوریم.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & \circ & 3 \\ \circ & 1 & -3 \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \circ & 3 \\ \circ & 1 & -3 \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \circ & 6 \\ \circ & 1 & -6 \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & \circ & -3 \\ \circ & 1 & 3 \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \circ & -3 \\ \circ & 1 & 3 \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \circ & -6 \\ \circ & 1 & 6 \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & \circ & 3 \\ \circ & 1 & -3 \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \circ & -3 \\ \circ & 1 & 3 \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A^T + B^T + AB = \begin{bmatrix} 3 & \circ & \circ \\ \circ & 3 & \circ \\ \circ & \circ & 3 \end{bmatrix} = 3I$$

۳ اگر  $A^T = A$  آن گاه  $A^n = A$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

مثال: اگر  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$  آن گاه ماتریس  $A^{1397} - A^{1398}$  را به دست آورید.

حل: ابتدا ماتریس  $A^T$  را پیدا می کنیم.

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = A$$

بنابراین  $A^{1398} = A$  و  $A^{1397} = A$  در نتیجه  $\overline{O} = A^{1397} - A^{1398}$ .

مثال: اگر  $A^T = A$  آن گاه ثابت کنید  $(I - A)^T = I - A$ .

حل: ماتریس  $(I - A)^T$  را به کمک اتحاد مربع دو جمله ای پیدا می کنیم:

$$(I - A)^T = I + A^T - 2A \stackrel{A^T=A}{\Rightarrow} (I - A)^T = I + A - 2A \Rightarrow (I - A)^T = I - A$$

۴ اگر  $A^T = I$  آن گاه اگر  $n$  زوج باشد  $A^n = I$  و اگر  $n$  فرد باشد  $A^n = A$ .

تست: اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  آن گاه ماتریس  $A^{1397} - A^{1398}$  برابر کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۲) \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (۳) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۴) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

حل: ابتدا ماتریس  $A^T$  را پیدا می کنیم.

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

بنابراین  $A^{1397} = A$  و  $A^{1398} = I$  داریم:

$$A^{1398} - A^{1397} = I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پس گزینه ی «۴» درست است.

۵ حاصل ضرب یک ماتریس قطری و یک ماتریس دلخواه مربعی هم مرتبه با آن.

اگر ماتریس قطری  $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$  از سمت چپ در ماتریس  $B_{n \times n}$  ضرب شود حاصل ماتریس  $C_{n \times n}$  است که سطر اول آن

$a_1$  برابر سطر اول  $B$ ، سطر دوم آن  $a_2$  برابر سطر دوم  $B$  و ... سطر  $n$ م آن  $a_n$  برابر سطر  $n$ ام ماتریس  $B$  است.

اگر ماتریس قطری  $A$  از سمت راست در  $B$  ضرب شود حاصل ماتریس  $D_{n \times n}$  است که ستون اول آن  $a_1$  برابر ستون اول  $B$ ، ستون دوم آن  $a_2$  برابر ستون دوم  $B$  و ستون  $n$ م آن  $a_n$  برابر ستون  $n$ م ماتریس  $B$  است.

بعنوان مثال اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 6 & -1 & 7 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$  باشد آن گاه:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -2(6) & -2(-1) & -2(7) \\ 3(-2) & 0 & 3(4) \end{bmatrix}, \quad B \times A = \begin{bmatrix} 4 & -2(-2) & 3(5) \\ 6 & -2(-1) & 3(7) \\ -2 & 0 & 3(4) \end{bmatrix}$$



**تست:** اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$  و  $B_{3 \times 3}$  ماتریسی باشد که مجموع عناصر ستون اول، دوم و سوم آن به ترتیب ۴، ۳ و ۲- باشد آن گاه مجموع

درایه‌های ماتریس  $B \times A$  کدام است؟

- (۱) ۱۹      (۲) ۵      (۳) -۵      (۴) -۱۹

**حل:** فرض کنیم  $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$  باشد بنا بر مطالب گفته شده داریم:

$$B \times A = \begin{bmatrix} 2a & -5b & 6c \\ 2d & -5e & 6f \\ 2g & -5h & 6i \end{bmatrix} \Rightarrow B \times A \text{ مجموع درایه‌های } = 2(a+d+g) - 5(b+e+h) + 6(c+f+i)$$

$$= 2(4) - 5(3) + 6(-2) = 8 - 15 - 12 = -19$$

بنابراین گزینه‌ی «۴» صحیح است.

**نکته**

اگر  $A$  ماتریسی اسکالر باشد که در روی قطر اصلی آن همه‌ی عناصر  $a$  باشد و  $B$  ماتریسی دلخواه هم‌مرتبه با  $A$  باشد  $AB = BA$  است و حاصل، ماتریسی مانند  $C$  است که درایه‌های آن از ضرب تک‌تک درایه‌های  $B$  در  $a$  به‌دست می‌آید.  
 $AB = BA = aB$



۱. ماتریس‌های  $A$  و  $B$  تعداد قبولی و مردودی در درس‌های هندسه و گسسته را در دو مدرسه نشان می‌دهند. چند درصد از دانش‌آموزان این دو دبیرستان در درس هندسه قبول شده‌اند؟

$$A = \begin{bmatrix} 90 & 10 \\ 89 & 11 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{مردود قبول} \\ \text{هندسه} \\ \text{گسسته} \end{matrix} \quad B = \begin{bmatrix} 42 & 8 \\ 40 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{مردود قبول} \\ \text{هندسه} \\ \text{گسسته} \end{matrix}$$

(۱) ۱۴٪ (۲) ۸۶٪

(۳) ۸۸٪ (۴) ۱۲٪

۲. در ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2m & -1 \\ m+1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$  داریم:  $3a_{11} - 2a_{22} = 0$ ؛ کدام عدد  $m$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳. اگر ماتریس  $\begin{bmatrix} 3 & 2a-3b+5 & 0 \\ 0 & -b & 3a+b-2 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}$  قطری باشد، آن‌گاه  $\frac{b}{a}$  کدام است؟

(۱) ۷ (۲) -۱ (۳) -۱۳ (۴) ۱۹

۴. اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 4 \\ -7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس  $2A + 3B$  چقدر است؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۸ (۴) ۱۴

۵. حاصل ضرب درایه‌های واقع در سطر دوم  $AB$  که در آن  $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  هستند، کدام است؟

(۱) ۴۶۲ (۲) ۵۵ (۳) ۱۱۵ (۴) ۱۱۰

۶. در معادله  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  حاصل  $x^2 + y^2 + z^2$  کدام است؟

(۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۷. اگر  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  آن‌گاه  $y$  چقدر است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۸. اگر  $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 7 \\ 0 & -2c & 8 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$  و  $3a - 2c + b = 9$ ، آن‌گاه مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس  $AB$  چقدر است؟

(۱) ۱۸ (۲) ۱۷ (۳) ۱۶ (۴) ۱۵

۹. دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 1 \\ 1 & b & -2 \end{bmatrix}$  مفروض‌اند. اگر درایه‌های زیر قطر اصلی ماتریس  $AB$  صفر باشند، آن‌گاه حاصل  $a + b$  چقدر است؟

(۱) ۸ (۲) -۸ (۳) ۴ (۴) -۴

۱۰. ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & m \end{bmatrix}$  مفروض است. اگر درایه سطر سوم و ستون سوم ماتریس  $A^2$  برابر ۶ باشد، آن‌گاه  $m$  کدام است؟

(۱)  $\pm 1$  (۲)  $\pm 2$  (۳)  $\pm 3$  (۴)  $\pm 4$





۱۱. اگر  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  آن گاه حاصل  $AB - BA$  کدام ماتریس زیر است؟

(۱)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

۱۲. اگر  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  آن گاه  $B^2 A$  کدام است؟

(۱)  $A$  (۲)  $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} d & b \\ c & a \end{bmatrix}$

۱۳. حاصل  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^4$  کدام است؟

(۱)  $4I_2$  (۲)  $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$  (۳)  $-4I_2$  (۴)  $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

۱۴. اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  آن گاه درایه‌ی واقع در سطر اول و ستون دوم ماتریس  $A^{20}$  کدام است؟

(۱)  $2^{10}$  (۲)  $2^{40}$  (۳)  $4^0$  (۴)  $2^0$

۱۵. اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  آن گاه درایه‌ی سطر اول و ستون سوم ماتریس  $A^{10}$  کدام است؟

(۱) صفر (۲)  $1^0$  (۳)  $2^{10}$  (۴)  $1$

۱۶. فرض کنید  $A$  ماتریسی  $2 \times 3$ ،  $B$  ماتریسی  $3 \times 4$  و  $C$  ماتریسی  $3 \times 3$  باشد. کدام حاصل ضرب قابل انجام است؟

(۱)  $ABC$  (۲)  $CAB$  (۳)  $BA$  (۴)  $ACB$

۱۷. اگر ماتریس  $A = \begin{bmatrix} m-n & m+4 \\ n+2 & 0 \end{bmatrix}$  قطری باشد. در این صورت حاصل  $m+n$  چقدر است؟

(۱)  $6$  (۲)  $-6$  (۳) صفر (۴)  $12$

۱۸. ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  مفروض است. مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس  $A^2$  کدام عدد است؟

(۱)  $20$  (۲) صفر (۳)  $-2$  (۴)  $4$

### پرسش‌های سطح متوسط

۱۹. مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  با تعریف  $a_{ij} = \begin{cases} 2i-j & ; i < j \\ 2j+i & ; i \geq j \end{cases}$  کدام است؟

(۱)  $10$  (۲)  $11$  (۳)  $12$  (۴)  $13$

۲۰. ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$  مفروض است. کدام یک از تعاریف زیر مشخص کننده‌ی این ماتریس است؟

$a_{ij} = \begin{cases} j+1 & ; i \leq j \\ j+i & ; i > j \end{cases}$  (۴)  $a_{ij} = \begin{cases} j+1 & ; i \leq j \\ j-1 & ; i > j \end{cases}$  (۳)  $a_{ij} = \begin{cases} i+1 & ; i = j \\ j-i & ; i > j \\ 2j+1 & ; i < j \end{cases}$  (۲)  $a_{ij} = \begin{cases} i+1 & ; i < j \\ j+i & ; i \geq j \end{cases}$  (۱)

۲۱. اگر  $A = [ij-1]_{3 \times 3}$  و  $B = [i^2 - j]_{3 \times 3}$  آن گاه مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس  $A+B$  کدام است؟

(۱)  $17$  (۲)  $16$  (۳)  $10$  (۴)  $14$

۲۲. ماتریس  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  با درایه‌های  $a_{ij} = \begin{cases} a^2 - 3ai + 2i^2 & ; i < j \\ a^2 - 3aj + 2j^2 & ; i \geq j \end{cases}$  به‌ازای کدام مقدار  $a$  ماتریس  $A$  یک

ماتریس قطری است؟

(۱)  $1$  (۲)  $2$  (۳)  $3$  (۴)  $4$



۲۳. اگر  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$  و  $D = ABC$  آن گاه  $d_{12} + d_{21}$  کدام است؟

۱) صفر (۱)      ۲) ۶ (۲)      ۳) ۱۲ (۳)      ۴) ۲۰ (۴)

۲۴. اگر  $A_{m \times n}$  و  $B_{p \times q}$  دو ماتریس باشند به طوری که  $AB$  و  $BA$  هر دو تعریف شده باشند و  $mnpq = ۳۲۴۰۰$  و

$m + n + p + q = ۵۴$  آن گاه حاصل  $m^2 + n^2 + p^2 + q^2$  چقدر است؟

۱) ۱۴۵۸ (۱)      ۲) ۷۳۸ (۲)      ۳) ۷۰۰ (۳)      ۴) ۲۵۹۲ (۴)

۲۵. اگر بین ماتریس‌های  $A$  و  $B$  رابطه‌ی  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$  برقرار باشد چه تعداد از روابط زیر درست‌اند؟

الف)  $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$       ب)  $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

پ)  $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$       ت)  $A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$

۱) (۱)      ۲) (۲)      ۳) (۳)      ۴) (۴)

۲۶. فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $2 \times 2$  باشد به طوری که  $A \times \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} = \bar{O}$  و تمام درایه‌های  $A$  از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۵ باشند.

چند ماتریس  $A$  وجود دارد؟

۱) ۵ (۱)      ۲) ۲۵ (۲)      ۳) ۱۲۵ (۳)      ۴) ۶۲۵ (۴)

۲۷. اگر برای دو ماتریس  $A$  و  $B$  داشته باشیم  $2A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  و  $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  آن گاه مجموع تمام درایه‌های ماتریس  $B^2$  کدام است؟

۱) ۶ (۱)      ۲) ۲ (۲)      ۳) ۸ (۳)      ۴) ۱۰ (۴)

۲۸. اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$  آن گاه درایه‌ی سطر دوم و ستون سوم ماتریس  $A^3$  کدام است؟

۱) -۱ (۱)      ۲) ۱ (۲)      ۳) -۳ (۳)      ۴) ۳ (۴)

۲۹. اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 + \tan^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha & 0 \end{bmatrix}$  آن گاه  $A^7 + A^8$  کدام است؟

۱)  $2A$  (۱)      ۲)  $I$  (۲)      ۳)  $A + I$  (۳)      ۴)  $A$  (۴)

۳۰. اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -\frac{1}{\sqrt{7}} & 0 \end{bmatrix}$  آن گاه ماتریس  $A^{25}$  برابر کدام است؟

۱)  $I$  (۱)      ۲)  $-I$  (۲)      ۳)  $A$  (۳)      ۴)  $-A$  (۴)

۳۱. اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$  آن گاه  $A^{1500}$  کدام ماتریس است؟

۱)  $A$  (۱)      ۲)  $-A$  (۲)      ۳)  $I$  (۳)      ۴)  $A^{15}$  (۴)

۳۲. اگر  $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$  آن گاه مجموع درایه‌های ماتریس  $A^5$  چقدر است؟

۱)  $-۳^7$  (۱)      ۲)  $۳^7$  (۲)      ۳)  $-۳^6$  (۳)      ۴)  $۳^6$  (۴)

۳۳. اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  آن گاه مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس  $A^{24}$  چقدر است؟

۱) ۲۴ (۱)      ۲) ۴۷ (۲)      ۳) ۴۹ (۳)      ۴) ۴۸ (۴)

۳۴. اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  باشد آن گاه مجموع درایه‌های  $A^{11}$  کدام است؟

۱) ۳۷۵ (۱)      ۲) ۸۷۵ (۲)      ۳) ۱۳۷۵ (۳)      ۴) ۱۸۷۵ (۴)



۳۵. اگر  $A^2 = 3I - 4A$  آن گاه  $A^3$  برابر کدام است؟

- ۱)  $12I - 19A$  (۱)      ۲)  $12A - 19I$  (۲)      ۳)  $12I - 19A$  (۳)      ۴)  $19I - 12A$  (۴)

۳۶. اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  و  $A^3 = mA - nI$  آن گاه حاصل  $m - n$  چقدر است؟

- ۱) ۳۶ (۱)      ۲) ۳۷ (۲)      ۳) ۳۳ (۳)      ۴) ۱۳ (۴)

۳۷. اگر  $A$  یک ماتریس مربعی بوده و  $A^2 = \bar{O}$  آن گاه حاصل  $A(I + A)^3$  کدام است؟

- ۱)  $A$  (۱)      ۲)  $3A$  (۲)      ۳)  $A + I$  (۳)      ۴)  $A - I$  (۴)

۳۸. اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  و  $B = [b_{ij}]_{n \times 5}$  و  $C = [c_{ij}]_{6 \times 1}$  حاصل ضرب  $CAB$  تعریف شده باشد آن گاه  $mn$  چقدر است؟

- ۱) ۳۵ (۱)      ۲) ۵۰ (۲)      ۳) ۶۰ (۳)      ۴) ۷۰ (۴)

۳۹. چند ماتریس قطری مرتبه‌ی ۶ وجود دارد که در رابطه‌ی  $A^2 = I_6$  صدق کند؟

- ۱) ۳۶ (۱)      ۲) ۳۲ (۲)      ۳) ۶۴ (۳)      ۴) بی‌شمار (۴)

۴۰. هرگاه  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 6 & 8 \\ -2 & 8 & 12 \end{bmatrix}$  آن گاه  $BA$  برابر کدام است؟

- ۱)  $A^2$  (۱)      ۲)  $2A^2$  (۲)      ۳)  $B^2$  (۳)      ۴)  $2B^2$  (۴)

۴۱. اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  آن گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس  $A^2$  کدام است؟

- ۱) ۱۰ (۱)      ۲) ۱۵ (۲)      ۳) ۱۶ (۳)      ۴) ۳۲ (۴)

۴۲. اگر  $A, B$  و  $C$  ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باشند، آن گاه، چه تعداد از موارد زیر همواره صحیح‌اند؟

الف) اگر  $A^2$  قطری باشد،  $A$  نیز قطری است.

ب) اگر  $A$  و  $B$  قطری باشند،  $A$  و  $B$  خاصیت جابه‌جایی دارند.

ج) اگر  $A$  با  $B$  و  $A$  با  $C$  بتوانند جابه‌جا شوند، آن گاه  $B$  با  $C$  نیز می‌توانند جابه‌جا شوند.

د) اگر  $A^3 = B^3$  باشد، آن گاه  $A = B$

ه) اگر  $A$  اسکالر باشد،  $A$  و  $B$  خاصیت جابه‌جایی دارند.

- ۱) ۴ (۱)      ۲) ۳ (۲)      ۳) ۲ (۳)      ۴) ۱ (۴)

۴۳. اگر  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  و  $A = -a_{ji}$  باشد  $A^2 = -2B$  (ماتریسی است که روی قطر اصلی آن تمامی درایه‌ها ۱ هستند). در این صورت مجموع مربعات درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی  $A$  کدام است؟

- ۱) ۴ (۱)      ۲) ۲ (۲)      ۳) ۶ (۳)      ۴) ۸ (۴)

۴۴. ماتریس‌های  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  با تعریف  $a_{ij} = \begin{cases} j-i & ; i \leq j \\ j+i & ; i > j \end{cases}$  و  $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$  با تعریف  $b_{ij} = \begin{cases} i+j & ; i < j \\ i-j & ; i \geq j \end{cases}$  مفروض‌اند.

ماتریس  $A - B$  چگونه است؟

- ۱) قطری (۱)      ۲) بالامتلی (۲)      ۳) اسکالر (۳)      ۴) مجموع تمام درایه‌هایش صفر است. (۴)

### پرسش‌های سطح دشوار

۴۵. اگر  $A = [a_{ij}]_{7 \times 7}$  و  $a_{ij} = ij$  باشد، آن گاه مجموع تمام درایه‌های ماتریس  $A$  کدام است؟

- ۱) ۴۴۱ (۱)      ۲) ۱۰۱۵ (۲)      ۳) ۷۸۴ (۳)      ۴) ۸۱۹ (۴)

۴۶. اگر  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  و  $a_{ij} = ij$  و مجموع تمام درایه‌های ماتریس  $A$  برابر ۱۲۹۶ باشد، آن گاه  $n$  کدام است؟

- ۱) ۶ (۱)      ۲) ۸ (۲)      ۳) ۷ (۳)      ۴) ۹ (۴)

۴۷. ماتریس  $A = [a_{ij}]_{m \times 3}$  که در آن  $a_{ij} = i^j$  مفروض است. اگر مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس  $A$  برابر ۲۸ باشد، آن گاه مجموع درایه‌های ستون سوم  $A$  کدام است؟

- ۱) ۸۴ (۱)      ۲) ۷۸۴ (۲)      ۳) ۲۸ (۳)      ۴) ۷۵۶ (۴)

۴۸. ماتریس  $A_{3 \times 3}$  چنان است که مجموع درایه‌های تمام سطرها، ستون‌ها، قطر اصلی و قطر فرعی آن برابر بوده و درایه‌هایش اعداد ۱ تا ۹ هستند. درایه‌ی سطر دوم و ستون دوم ماتریس  $A$  کدام است؟
- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۹
۴۹. ماتریس غیرسطری و غیرستونی  $A$  دارای ۱۳۹۷ درایه است. مجموع تعداد سطرها و ستون‌های ماتریس  $A$  کدام است؟
- (۱) ۱۳۹۸ (۲) ۱۳۸ (۳) ۱۴۱ (۴) مقدار یکتا به دست نمی‌آید.
۵۰. چند ماتریس اسکالر مانند  $A$  وجود دارد به طوری که حاصل ضرب عناصر غیرصفر آن ۶۴ و مجموع تمام عناصر آن ۱۲ باشد؟
- (۱) چنین ماتریسی وجود ندارد. (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیش از ۲
۵۱. اگر  $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه حاصل  $a + 2b + 3c + 4d$  چقدر است؟
- (۱) ۳۰ (۲) ۳۱ (۳) ۳۲ (۴) ۳۳
۵۲. اگر  $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$  و  $B$  یک ماتریس غیرصفر و  $2 \times 2$  باشد به طوری که  $AB = BA$ . آن‌گاه ماتریس  $B$  همواره چگونه است؟
- (۱) قطری (۲) اسکالر (۳) بالامتلی (۴) پایین‌متلی
۵۳. اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌های  $2 \times 2$  باشند و مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس  $AB$  برابر  $m$  باشد آن‌گاه مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس  $BA$  کدام است؟
- (۱)  $m$  (۲)  $\frac{1}{m}$  (۳)  $m^2$  (۴) قابل محاسبه نیست.
۵۴. ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $B$  ماتریس ستونی باشد که درایه‌ی سطر دوم آن مربع درایه سطر اول و درایه‌ی سطر سوم آن مکعب درایه‌ی سطر اول آن باشد. اگر  $A \times B = 12$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس  $B$  کدام است؟
- (۱) ۱۴ (۲) ۳۹ (۳) ۱۲ (۴) ۸۴
۵۵. برای ماتریس‌های مربعی و هم‌مرتبه‌ی  $A$  و  $B$  رابطه‌ی  $A = B - C$  برقرار است. حاصل  $A^2 + B^2 - AB - BA$  کدام است؟
- (۱)  $-C^2$  (۲)  $\bar{O}$  (۳)  $C^2$  (۴)  $C$
۵۶. برای دو ماتریس  $A$  و  $B$  داریم  $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ،  $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  و  $B^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$  و  $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$  حاصل  $AB + BA$  کدام ماتریس است؟
- (۱)  $\begin{bmatrix} 17 & 15 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} 17 & 15 \\ -16 & 11 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} 17 & 15 \\ 11 & -16 \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} 17 & 15 \\ 16 & 11 \end{bmatrix}$
۵۷. فرض کنید  $A$  و  $B$  دو ماتریس مرتبه‌ی ۲ باشند، ماتریس  $AB - BA$  با کدام یک از ماتریس‌های زیر می‌تواند برابر باشد؟
- (۱)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  (۴) هیچ کدام
۵۸. فرض کنید  $A$ ،  $B$  و  $C$  ماتریس‌های  $n \times n$  باشند به طوری که  $A$  با  $C$  و  $B$  با  $C$  جابه‌جا شوند ( $BC = CB$  و  $AC = CA$ ) کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟
- (۱)  $CA$  با  $B$  جابه‌جا می‌شود. (۲)  $BA$  با  $C$  جابه‌جا می‌شود. (۳)  $BC$  با  $A$  جابه‌جا می‌شود. (۴) هیچ کدام
۵۹. فرض کنید  $A$  و  $B$  دو ماتریس مرتبه‌ی ۲ باشند به طوری که مجموع درایه‌های هر سطر هر دو آن‌ها برابر  $k$  باشند. اگر مجموع تمام درایه‌های ماتریس  $AB$  برابر ۷۲ باشد، آن‌گاه مجموع تمام درایه‌های ماتریس  $A$  کدام است؟
- (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳)  $\pm 6$  (۴)  $\pm 12$
۶۰. اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$  آن‌گاه  $A^{15}$  کدام است؟
- (۱)  $A$  (۲)  $I$  (۳)  $-A$  (۴)  $A^{15}$
۶۱. برای ماتریس  $A$  رابطه‌ی  $A^2 = 3A + I$  برقرار است. حاصل  $A(A - 2I)^2$  کدام است؟
- (۱)  $2A - I$  (۲)  $5I - A$  (۳)  $2A + I$  (۴)  $5A + I$
۶۲. اگر  $2AB + 3BA = \bar{O}$  آن‌گاه از رابطه‌ی  $AB^3 = kB^3A$  مقدار  $k$  کدام است؟
- (۱)  $\frac{27}{8}$  (۲)  $-\frac{27}{8}$  (۳)  $\frac{8}{27}$  (۴)  $-\frac{8}{27}$







۶۳. اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$ ، آن گاه حاصل  $(A - 2I)(A^2 + 2A + I)$  کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3a & 1 & 0 \\ -3b & -3c & 1 \end{bmatrix} \quad (۴) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3a & -6 & 0 \\ -3b & -3c & 0 \end{bmatrix} \quad (۳) \quad \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ -3a & -6 & 0 \\ -3b & -3c & -6 \end{bmatrix} \quad (۲) \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3a & -2 & 0 \\ -3b & -3c & -2 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

۶۴. اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس هم مرتبه و  $AB = B$  و  $BA = A$  باشد، آن گاه حاصل  $(A + B)^3$  کدام است؟

$$4(A+B) \quad (۴) \quad 3(A+B) \quad (۳) \quad 2(A+B) \quad (۲) \quad A+B \quad (۱)$$

۶۵. اگر  $A$  ماتریس مربعی بوده و  $A^2 = A$  آن گاه حاصل  $(I - A)^{100}$  کدام است؟

$$I - 100A \quad (۴) \quad I - A \quad (۳) \quad I + 100A \quad (۲) \quad I + A \quad (۱)$$

۶۶. اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  آن گاه ماتریس  $A^{1398} - A^{1397}$  چند درایه‌ی صفر دارد؟

$$5 \quad (۴) \quad 6 \quad (۳) \quad 3 \quad (۲) \quad 4 \quad (۱)$$

۶۷. اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  آن گاه  $A^{10}$  کدام ماتریس است؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 20 & 210 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۴) \quad \begin{bmatrix} 1 & 20 & 180 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۳) \quad \begin{bmatrix} 1 & 30 & 210 \\ 0 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۲) \quad \begin{bmatrix} 1 & 30 & 180 \\ 0 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

۶۸. اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  باشد آن گاه حاصل  $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{20}$  کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 20 & 630 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \quad (۴) \quad \begin{bmatrix} 400 & 900 \\ 0 & 400 \end{bmatrix} \quad (۳) \quad \begin{bmatrix} 20 & 320 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \quad (۲) \quad \begin{bmatrix} 20 & 320 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

۶۹. اگر  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$  باشد آن گاه حاصل  $A + A^2 + \dots + A^{10}$  کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 1 - (\frac{1}{3})^{10} & 0 \\ 0 & \frac{1 - (\frac{1}{4})^{10}}{2} \end{bmatrix} \quad (۴) \quad \begin{bmatrix} 1 - (\frac{1}{3})^{10} & 0 \\ 0 & \frac{1 - (\frac{1}{3})^{10}}{2} \end{bmatrix} \quad (۳) \quad \begin{bmatrix} 1 - (\frac{1}{3})^{11} & 0 \\ 0 & \frac{1 - (\frac{1}{3})^{11}}{2} \end{bmatrix} \quad (۲) \quad \begin{bmatrix} 1 - (\frac{1}{3})^9 & 0 \\ 0 & \frac{1 - (\frac{1}{3})^9}{2} \end{bmatrix} \quad (۱)$$

۷۰. فرض کنید  $A = [a_{ij}]_{1397 \times 1397}$  و  $a_{ij} = \begin{cases} 0 & ; i + j \neq 1398 \\ -1 & ; i + j = 1398 \end{cases}$  در این صورت مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس

$A^{2018} + A^{2019}$  چقدر است؟

$$-1397 \quad (۴) \quad 0 \quad (۳) \quad 1397 \quad (۲) \quad 1396 \quad (۱)$$

۷۱. فرض کنید  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  و  $a_{ij} = i$  و  $B = [b_{ij}]_{n \times n}$  و  $b_{ij} = j$  در این صورت مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس  $AB$  کدام

است؟

$$\frac{n^2(n+1)}{2} \quad (۴) \quad \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} \quad (۳) \quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (۲) \quad \frac{n(n+1)}{2} \quad (۱)$$

۷۲. ماتریس سطر  $A$  مفروض است. اگر ماتریس  $A$  ستونی هم باشد و مجموع تمام درایه‌های  $A$  برابر  $5x^2 + 4x^2 + 2x + 5$  و درایه‌ی

واقع در سطر اول و ستون اول آن برابر  $3x^2 + x + 19$  باشد. مجموع تمام درایه‌های ماتریس  $A^2$  کدام است؟

$$1089 \quad (۴) \quad 1156 \quad (۳) \quad 144 \quad (۲) \quad 529 \quad (۱)$$

۷۳. ماتریس  $A$  یک ماتریس قطری است. اگر تمام درایه‌های ماتریس  $A$  صفر یا اعداد طبیعی و مخالف ۱ باشند و حاصل ضرب عناصر قطر

اصلی  $A$  برابر  $120$  باشد آن گاه تعداد سطرهای  $A$  چند حالت مختلف می‌تواند داشته‌باشد؟

$$6 \quad (۴) \quad 6 \quad (۳) \quad 5 \quad (۲) \quad 4 \quad (۱)$$

۶. گزینه ۲

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x \\ x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2z \\ 0 & -z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x+2z \\ x+y & y-z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x+2z=1 \\ x+y=1 \\ y-z=-1 \end{cases}$$

با مقایسه‌ی معادلات فوق با یکدیگر جواب‌های زیر به دست می‌آیند.

$$x=3, y=-2, z=-1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3^2 + (-2)^2 + (-1)^2 = 14 \quad \text{پس:}$$

۷. گزینه ۲

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x+3y \\ 3x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 3x+2y=1 \end{cases}$$

اگر معادله‌ی اول را در عدد ۳، معادله‌ی دوم را در عدد ۲- ضرب

کرده و طرفین آن‌ها را با هم جمع کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 6x+9y=-3 \\ -6x-4y=-2 \end{cases} \Rightarrow 5y=-5 \Rightarrow y=-1$$

۸. گزینه ۱ در حالت کلی، حاصل ضرب دو ماتریس بالامتلی یک

ماتریس بالامتلی است و درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس

حاصل ضرب از ضرب نظیر به نظیر درایه‌های روی قطر اصلی آن دو

ماتریس به دست می‌آیند، ولی درایه‌های بالای قطر اصلی را باید با

ضرب کردن به دست آورد. برای مثال:

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & d' & e' \\ 0 & b' & f' \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & x & y \\ 0 & bb' & z \\ 0 & 0 & cc' \end{bmatrix}$$

پس در این تست حاصل ضرب  $AB$  به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$AB = \begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 6 & 7 \\ 0 & -2c & 8 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6a & ? & ? \\ 0 & -4c & ? \\ 0 & 0 & 2b \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$AB = 6a - 4c + 2b$$

$$= 2(3a - 2c + b) = 2 \times 9 = 18$$

۹. گزینه ۳ فقط درایه‌های زیر قطر اصلی  $AB$  را به دست می‌آوریم و

آن‌ها را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 6 & 1 \\ 1 & b & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ -6+a & ? & ? \\ 0 & 6+3b & ? \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6+a=0 \\ 6+3b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow a+b=4$$

۱. گزینه ۳ تعداد دانش‌آموزان مدرسه‌ی اول ۱۰۰ نفر و تعداد

دانش‌آموزان مدرسه‌ی دوم ۵۰ نفر است. تعداد کسانی که در

مدرسه‌ی اول در درس هندسه قبول شده‌اند ۹۰ نفر و نفرات قبول شده

در مدرسه‌ی دوم در درس هندسه ۴۲ نفر است. پس در کل از بین

۱۵۰ نفر تعداد ۱۳۲ نفر در درس هندسه قبول شده‌اند.

$$\text{درصد قبولی در درس هندسه} = \frac{132}{150} \times 100 = 88\%$$

۲. گزینه ۳

$$\begin{cases} a_{21} = m+1 \\ a_{22} = 2m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a_{21} - 2a_{22} = 3(m+1) - 2(2m) = -m+3 \\ a_{22} = 2m \end{cases}$$

$$\Rightarrow -m+3=0 \Rightarrow m=3$$

۳. گزینه ۴ در ماتریس قطری، درایه‌های غیر قطر اصلی صفر هستند.

بنابراین:

$$\begin{cases} 2a-3b+5=0 \\ 3a+b-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a-3b=-5 \\ 3a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a-3b=-5 \\ 9a+3b=6 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} 11a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{11}$$

در نتیجه:

$$2a-3b=-5 \xrightarrow{a=\frac{1}{11}} \frac{2}{11}-3b=-5$$

$$\Rightarrow 3b=\frac{2}{11}+5=\frac{57}{11} \Rightarrow b=\frac{19}{11}$$

پس نسبت  $\frac{b}{a}$  برابر  $\frac{\frac{19}{11}}{\frac{1}{11}}$  مساوی ۱۹ است.

۴. گزینه ۱ ابتدا  $2A$  و  $3B$  را به دست می‌آوریم سپس آن‌ها را جمع

می‌کنیم:

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix} \quad 3B = \begin{bmatrix} 0 & -18 & 12 \\ -21 & 15 & 6 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$2A+3B = \begin{bmatrix} 2+0 & 4-18 & -2+12 \\ 0-21 & 8+15 & 4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -14 & 10 \\ -21 & 23 & 10 \end{bmatrix}$$

که مجموع تمام درایه‌های این ماتریس برابر با عدد ۱۰ است.

۵. گزینه ۱ کافی است فقط درایه‌های سطر دوم  $AB$  را حساب کنیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ 21 & 2 & 11 \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$AB \text{ حاصل ضرب درایه‌های سطر دوم} = 21 \times 2 \times 11 = 462$$





۱۰. گزینه ۴ کافی است فقط سطر سوم ماتریس  $A$  را در ستون سوم آن ضرب کنیم:

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & -10 + m^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -10 + m^2 = 6 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$$

۱۱. گزینه ۴ ابتدا ماتریسهای  $AB$  و  $BA$  را به دست می آوریم:

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$AB - BA = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۲. گزینه ۱ ابتدا  $B^T$  را به دست می آوریم:

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$B^T A = IA = A$$

بنابراین:

۱۳. گزینه ۳

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T = A^T \times A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = -4I_2$$

۱۴. گزینه ۳ ابتدا چند توان اول را به دست می آوریم:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T = A^T \times A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T = A^T \times A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با مشاهده این روند معلوم می شود که فرم کلی ماتریس  $A^n$  به صورت  $\begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  است؛ پس درایه ی واقع در سطر اول و ستون دوم  $A^{20}$  برابر ۴۰ است.

۱۵. گزینه ۲ توجه کنید که ماتریس  $A$  یک ماتریس بالامتثلی است.

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = A^T \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^{10} = A^{10} \times A = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A^{10}$  = درایه ی سطر اول ستون سوم = ۱۰

۱۶. گزینه ۴ ماتریس  $ACB$  تعریف شده است، زیرا:

$$A_{T \times T} C_{T \times T} B_{T \times F}$$

۱۷. گزینه ۲ چون  $A$  قطری است، پس درایه های غیرواقعی بر قطر اصلی آن صفر هستند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} m+4=0 \\ n+2=0 \end{cases} \Rightarrow m+n=-6$$

۱۸. گزینه ۳

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 17 & 3 & -14 \\ -2 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه های قطر اصلی برابر با عدد  $-2$  است. البته می توانستیم فقط درایه های روی قطر اصلی را به دست آوریم.

۱۹. گزینه ۴ درایه های ستون دوم ماتریس  $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}$  هستند. طبق تعریف داریم:

$$\begin{aligned} a_{12} &= 2(1) - 2 = 0 & (i < j) \\ a_{22} &= 2(2) + 2 = 6 & (i = j) \\ a_{32} &= 2(2) + 3 = 7 & (i > j) \end{aligned}$$

بنابراین مجموع این درایه ها برابر  $13 = 0 + 6 + 7$  است.

۲۰. گزینه ۴ با توجه به گزینه ها تنها گزینه ی «۴» درست است:

$$a_{ij} = \begin{cases} j+1 & i \leq j \\ j+i & i > j \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

۲۱. گزینه ۱ کافی است ستون دوم  $A$  را با ستون دوم  $B$  جمع کنیم:

$$A \text{ ستون دوم} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad B \text{ ستون دوم} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع این درایه ها} = 1 + 3 + 5 + (-1) + 2 + 7 = 17$$

۲۲. گزینه ۳ ماتریس  $A$  قطری است، هرگاه درایه های غیر قطر اصلی صفر باشند،

$$A = \begin{bmatrix} - & a^2 - 3a + 2 & a^2 - 3a + 2 \\ a^2 - 3a + 2 & - & a^2 - 6a + 8 \\ a^2 - 3a + 2 & a^2 - 6a + 8 & - \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 - 3a + 2 = 0 &\Rightarrow (a-2)(a-1) = 0 \Rightarrow a=2 \text{ یا } a=1 \\ a^2 - 6a + 8 = 0 &\Rightarrow a=4 \text{ یا } a=2 \end{aligned} \right\}$$

اشتراک  $\Rightarrow a=2$

۲۳. گزینه ۴ برای محاسبه ی  $ABC$  ابتدا  $AB$  را به دست می آوریم.

البته توجه کنید چون  $d_{12}$  را می خواهیم محاسبه کنیم پس سطر اول  $AB$  کفایت می کند:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$d_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ \dots & \dots \end{bmatrix} = 4$$

حال:

$$d_{12}^T + d_{12} = 4^2 + 4 = 20$$

بنابراین:



۲۹. گزینه ۳

$$A^T = \begin{bmatrix} \circ & 1 + \tan^T \alpha \\ \cos^T \alpha & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & 1 + \tan^T \alpha \\ \cos^T \alpha & \circ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \circ & \frac{1}{\cos^T \alpha} \\ \cos^T \alpha & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \frac{1}{\cos^T \alpha} \\ \cos^T \alpha & \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^V = (A^T)^T \times A = I^T \times A = A, \quad A^A = (A^T)^T = I^T = I$$

$$A^V + A^A = I + A$$

۳۰. گزینه ۳ ابتدا ماتریس  $A^T$  را بدست می‌آوریم.

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} \circ & 7 \\ -\frac{1}{7} & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & 7 \\ -\frac{1}{7} & \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \circ \\ \circ & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$A^{20} = (A^T)^{12} \times A = (-I)^{12} \times A = A$$

۳۱. گزینه ۳ ابتدا چند توان اولیه را بدست می‌آوریم:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^T = A^T A = IA = A$$

$$A^T = A^T \times A^T = I \times I = I$$

⋮

پس توان‌های زوج  $A$  برابر  $I$  و توان‌های فرد  $A$  برابر خود  $A$  است.۳۲. گزینه ۳ ابتدا ماتریس  $A^T$  را بدست می‌آوریم:

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \lambda A \Rightarrow A^n = \lambda^{n-1} A \quad \text{پس: } A^T = -3A \quad \text{و می‌دانیم:}$$

$$A^0 = (-3)^4 A = 81A = \begin{bmatrix} -81 & -81 & -81 \\ -81 & -81 & -81 \\ -81 & -81 & -81 \end{bmatrix} \quad \text{در نتیجه:}$$

$$(-81) \times 9 = -3^6 \quad \text{یعنی مجموع درایه‌های } A^0 \text{ برابر است با:}$$

۳۳. گزینه ۳ توجه کنید که حاصل ضرب دو ماتریس بالامتثلی یک ماتریس بالامتثلی است.

$$\begin{bmatrix} d^n & x & y \\ \circ & b^n & z \\ \circ & \circ & c^n \end{bmatrix} \text{ پس اگر } A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ \circ & b & f \\ \circ & \circ & c \end{bmatrix} \text{ آن‌گاه ماتریس } A^n \text{ به صورت}$$

است. یعنی برای محاسبه‌ی توان‌های ماتریس بالامتثلی  $A$  فقط لازم

است درایه‌های بالای قطر اصلی را با ضرب بدست آوریم:

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \circ & 1 & 2 \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \circ & 1 & 2 \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ \circ & 1 & 4 \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = A^T \times A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ \circ & 1 & 4 \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \circ & 1 & 2 \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 21 \\ \circ & 1 & 6 \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n & x \\ \circ & 1 & 2n \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix} \quad \text{با ادامه‌ی این روند نتیجه می‌گیریم:}$$

$$A^{2f} = \begin{bmatrix} 1 & 48 & x \\ \circ & 1 & 48 \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix} \quad \text{بنابراین:}$$

پس مجموع درایه‌های سطر دوم  $A^{2f}$  عدد ۴۹ است.۲۴. گزینه ۲  $AB$  و  $BA$  هر دو تعریف شده‌اند پس چون  $A$  ماتریس $m \times n$  است،  $B$  ماتریس  $n \times m$  باید باشد یعنی  $p = n$  و  $q = m$ 

پس:

$$\begin{cases} m+n+p+q = 54 \\ mnpq = 32400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(m+n) = 54 \\ m^2 n^2 = 32400 \end{cases}$$

در نتیجه:

$$m+n = 27, \quad mn = 180$$

$$m^2 + n^2 + p^2 + q^2 = 2(m^2 + n^2) = 2[(m+n)^2 - 2mn]$$

$$= 2[(27)^2 - 2(180)] = 738$$

۲۵. گزینه ۴ از رابطه‌ی  $(A+B)^T = A^T + 2AB + B^T$  نتیجه

می‌گیریم:

$$AB = BA$$

پس اتحادها برقرارند. یعنی هر ۴ رابطه‌ی داده‌شده درست هستند.

۲۶. گزینه ۲ فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  باشد پس:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2a-2c & 2b-2d \\ -6a+6c & -6b+6d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$$

به جای هر کدام از  $a$  و  $b$  ۵ عدد می‌توان جاگذاری کرد پس کلاً

$$= 25 = 5^2 \text{ ماتریس } A \text{ می‌توان تشکیل داد.}$$

۲۷. گزینه ۴ از دستگاه زیر ماتریس  $B$  را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} 2A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ A+B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & \circ \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & \circ \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B^T = B \times B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{جمع درایه‌ها} \Rightarrow = 7+2-1+2=10$$

۲۸. گزینه ۴ ابتدا کفایت سطر دوم  $A^T$  را بدست آوریم:

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \circ \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \circ \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 7 & 1 & -1 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}$$

حالا سطر دوم  $A^T$  را در ستون سوم  $A$  ضرب می‌کنیم:

$$A^T = A^T \times A = \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 7 & 1 & -1 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \circ \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & 3 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}$$



۳۴. گزینه ۳ چند توان اولیه ی  $A$  را بدست می آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 5I$$

$$A^3 = 5I$$

بنابراین:

$$\Rightarrow A^4 = (5I)^3 = 125I \Rightarrow A^{11} = A^4 \times A^7 = (125I)(A^7)$$

$$= 125A^7 = 125 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 125 \\ 625 & 0 & 0 \\ 0 & 625 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌ها} = 625 + 625 + 125 = 1375$$

۴۰. گزینه ۲ اگر از درایه‌های ماتریس  $B$  عدد ۲ را فاکتور بگیریم

نتیجه می‌شود  $B = 2A$ . بنابراین داریم:

$$BA = 2A \times A = 2A^2$$

۴۱. گزینه ۳ فقط درایه‌های قطری اصلی  $A^2$  را به دست می آوریم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & & & \\ & 6 & & \\ & & 5 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 16 = \text{جمع درایه‌های روی قطر اصلی}$$

۴۲. گزینه ۲ با توجه به شرایط تست اگر  $A$  و  $B$  قطری باشند

$AB = BA$  است. اگر  $A$  اسکالر باشد و روی قطر اصلی آن تمامی

$$AB = BA = aB$$

درایه‌ها برابر  $a$  باشد آن‌گاه:

موارد (الف)، (ج) و (د) ممکن است درست نباشد.

مثال نقض (الف)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A^2$  قطری است ولی  $A$  قطری نیست.

مثال نقض (ج) اگر  $A = I$  باشد،  $A$  با  $B$  جابه‌جا می‌شود و  $A$  با  $C$  نیز

جابه‌جا می‌شود ولی دلیلی ندارد  $B$  با  $C$  جابه‌جا شود.

مثال نقض (د)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = B^3$$

۴۳. گزینه ۳ با توجه به تعریف  $A$  داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

در این صورت داریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & bc & -ac \\ bc & a^2 + c^2 & ab \\ -ac & ab & b^2 + c^2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ a^2 + c^2 = 2 \Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) = 6 \\ b^2 + c^2 = 2 \end{cases}$$

که این همان خواسته‌ی مسئله است.

۳۵. گزینه ۳  $A^2 = 3I - 4A \xrightarrow{\times A} A^3 = -3A - 4A^2$

$$\xrightarrow{A^2 = 3I - 4A} A^3 = 3A - 4(3I - 4A) = 3A - 12I + 16A = 19A - 12I$$

۳۶. گزینه ۲  $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = mA - nI \Rightarrow \begin{bmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow m - n = 37$$

۳۷. گزینه ۱ می‌دانیم اگر یکی از ماتریس‌ها مضربی از  $I$  باشد

می‌توانیم اتحادها را به کار ببریم:

$$A(I+A)^3 = A(I^3 + A^3 + 3A^2I + 3AI^2)$$

$$= A(I + A^3 + 3A^2 + 3A)$$

$$\stackrel{A^2 = \bar{O}}{=} A(I + \bar{O} + 3 \times \bar{O} + 3A) = A(I + 3A)$$

$$= A + 3A^2 = A + 3 \times \bar{O} = A$$

۳۸. گزینه ۴  $C$  یک ماتریس  $6 \times 10$  و  $A$  یک ماتریس  $m \times 7$  است.

پس ماتریس  $CA$  در صورتی قابل تعریف است که  $m = 10$  باشد.

یک ماتریس  $n \times 5$  است. پس ماتریس  $CAB$  تعریف می‌شود هرگاه

$$n = 7 \text{ باشد، در نتیجه } mn = 70.$$

۳۹. گزینه ۳

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f^2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = I \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$b = \pm 1, c = \pm 1, d = \pm 1, e = \pm 1, f = \pm 1$$

بنابراین هرکدام از متغیرهای  $a, b, c, d, e, f$  دو حالت ۱ یا -۱

می‌توانند باشند یعنی به  $2^6$  حالت می‌توان ماتریس  $A$  را تشکیل داد.



۴۸. گزینه ۳  $a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{31} + a_{32} + a_{33}$

$$= 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = \frac{9 \times 10}{2} = 45$$

$$\Rightarrow a_{11} + a_{12} + a_{13} = \frac{45}{3} = 15$$

یعنی مجموع هر سه سطر، هر سه ستون، قطر اصلی و قطر فرعی با هم برابر بوده و ۱۵ است.

$$\underbrace{a_{11} + a_{21} + a_{31}}_{\text{قطر اصلی}} + \underbrace{a_{12} + a_{22} + a_{32}}_{\text{قطر فرعی}} + \underbrace{a_{13} + a_{23} + a_{33}}_{\text{ستون دوم}} + \underbrace{a_{11} + a_{12} + a_{13}}_{\text{سطر دوم}} = 15 \times 4 = 60$$

$$\Rightarrow \underbrace{a_{11} + a_{12} + \dots + a_{33}}_{45} + 3a_{22} = 60$$

$$\Rightarrow 3a_{22} = 60 - 45 = 15 \Rightarrow a_{22} = 5$$

۴۹. گزینه ۲ می‌دانیم اگر  $A$  ماتریسی  $m \times n$  باشد آن‌گاه دارای  $mn$

تا درایه است پس:  $mn = 1397 \Rightarrow mn = 11 \times 127$

چون هم ۱۱ و هم ۱۲۷ اول‌اند در نتیجه:  $m = 11$  و  $n = 127$  یا

$m = 127$  و  $n = 11$  است. در هر صورت  $m + n = 138$ .

۵۰. گزینه ۳ هر ماتریس اسکالر به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{bmatrix}$$

$x$  گویا است

$$\begin{cases} x^n = 64 \xrightarrow{\text{گویا } x} \text{طبیعی است} \\ xn = 12 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 64, n = 1 \text{ یا } x = 4, n = 3 \text{ یا } x = 8, n = 2$$

$$\text{یا } n = 6 \text{ و } x = 2.$$

حالت‌های  $n = 1$  و  $x = 64$  و  $n = 2$  و  $x = 8$  مورد پذیرش نیست

زیرا  $xn \neq 12$ .

پس دو حالت ممکن وجود دارد.

۵۱. گزینه ۲

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a+b+c+d & a-b+c+d \\ a+b-c+d & a+b+c-d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a+b+c+d = 5 \\ a-b+c+d = 6 \\ a+b-c+d = 7 \\ a+b+c-d = 10 \end{cases} \Rightarrow 2(a+b+c+d) = 28$$

$$\Rightarrow a+b+c+d = 14$$

حال معادله‌ی اخیر را با هر کدام از معادلات بالا حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a+b+c+d = 14 \\ -a+b+c+d = 5 \end{cases} \Rightarrow 2a = 9 \Rightarrow a = \frac{9}{2}$$

$$b = 4, c = \frac{7}{2}, d = 2 \quad \text{به همین ترتیب خواهیم داشت:}$$

$$a + 2b + 3c + 4d = \frac{9}{2} + 8 + \frac{21}{2} + 8 = 31 \quad \text{در نتیجه:}$$

۴۴. گزینه ۴ درایه‌های ماتریس‌های  $A$  و  $B$  را با توجه به تعریف

آن‌ها به دست می‌آوریم:

$$A = [a_{ij}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = [b_{ij}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه مجموع تمام درایه‌های آن صفر است.

۴۵. گزینه ۳ ماتریس  $A$  طبق تعریف به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 \times 2 & 2 \times 3 & 2 \times 4 & 2 \times 5 & 2 \times 6 & 2 \times 7 \\ 3 & 3 \times 2 & 3 \times 3 & 3 \times 4 & 3 \times 5 & 3 \times 6 & 3 \times 7 \\ 4 & 4 \times 2 & 4 \times 3 & 4 \times 4 & 4 \times 5 & 4 \times 6 & 4 \times 7 \\ 5 & 5 \times 2 & 5 \times 3 & 5 \times 4 & 5 \times 5 & 5 \times 6 & 5 \times 7 \\ 6 & 6 \times 2 & 6 \times 3 & 6 \times 4 & 6 \times 5 & 6 \times 6 & 6 \times 7 \\ 7 & 7 \times 2 & 7 \times 3 & 7 \times 4 & 7 \times 5 & 7 \times 6 & 7 \times 7 \end{bmatrix}$$

یعنی سطر  $i$  ام  $i$  برابر سطر اول است. مجموع درایه‌های سطر اول با

$$\frac{7 \times 8}{2} \quad \text{یعنی } 28 \text{ برابر است. پس:}$$

$$\begin{aligned} A \text{ های درایه‌های} &= 1 \times 28 + 2 \times 28 + \dots + 7 \times 28 \\ &= 28(1 + 2 + \dots + 7) = 28 \times 28 \\ &= 784 \end{aligned}$$

۴۶. گزینه ۲ مانند مسأله‌ی قبل داریم:

$$A \text{ های درایه‌های} = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

پس:

$$\left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = 1296 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 36 \Rightarrow n = 8$$

۴۷. گزینه ۲ ماتریس  $A$  به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3^1 & 3^2 & 3^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m^1 & m^2 & m^3 \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌های ستون اول} = 1 + 2^1 + 3^1 + \dots + m^1 = 28$$

$$\Rightarrow \frac{m(m+1)}{2} = 28 \Rightarrow m = 7$$

پس:

$$\begin{aligned} \text{مجموع درایه‌های ستون سوم} &= 1^3 + 2^3 + \dots + 7^3 \\ &= \left[ \frac{7(7+1)}{2} \right]^2 = 28^2 = 784 \end{aligned}$$



۵۲. گزینه ۱ فرض کنید  $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ .

$$AB = BA \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ax & ay \\ bz & bt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & by \\ az & bt \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax = ax \\ ay = by \Rightarrow y(b-a) = 0 \Rightarrow y = 0 \\ bz = az \Rightarrow z(b-a) = 0 \Rightarrow z = 0 \\ bt = bt \end{cases}$$

بنابراین ماتریس  $B$  به صورت  $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}$  است که یک ماتریس قطری است.

۵۳. گزینه ۱ فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$  در این صورت:

درایه‌های روی قطر اصلی  $AB$  عبارتند از:  $ax + bz$ ,  $cy + dt$

پس مجموع آن‌ها برابر با  $ax + bz + cy + dt$  است. هم‌چنین

درایه‌های روی قطر اصلی  $BA$  عبارتند از:  $bx + at$ ,  $cy + dt$

پس مجموع آن‌ها برابر با  $ax + bz + cy + dt$  است. توجه کنید که

این نکته در حالت کلی برقرار است که اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی

هم‌مرتبه باشند، مجموع درایه‌های روی قطر اصلی دو ماتریس  $AB$  و

$BA$  با هم برابرند.

۵۴. گزینه ۲ طبق اطلاعات مسئله داریم:

$$B = \begin{bmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = 12 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} = 12 \Rightarrow a - 2a^2 + a^3 = 12$$

یکی از جواب‌های این معادله  $a = 3$  است، پس:

$$(a-3)(a^2+a+4) = 0$$

معادله  $a^2 + a + 4 = 0$  ریشه ندارد زیرا  $\Delta$  آن منفی است.

بنابراین تنها جواب معادله  $a = 3$  است در نتیجه ماتریس  $B$  به صورت

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 27 \end{bmatrix}$$

بوده که مجموع درایه‌های آن ۳۹ است.

۵۵. گزینه ۳  $A^T + B^T - AB - BA = (A - B)^T$

از طرفی  $A - B = -C$  پس:

$$A^T + B^T - AB - BA = (-C)^T = C^T$$

۵۶. گزینه ۴ با توجه به رابطه  $(A+B)^T = A^T + B^T + AB + BA$

$$(A+B)^T = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 18 & 18 \\ 18 & 18 \end{bmatrix}$$

جواب را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 18 & 18 \\ 18 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + AB + BA$$

$$\Rightarrow AB + BA = \begin{bmatrix} 18 & 18 \\ 18 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 15 \\ 16 & 11 \end{bmatrix}$$

۵۷. گزینه ۴ فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$  در این صورت داریم:

$$AB = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} ax+cy & bx+dy \\ az+ct & bz+dt \end{bmatrix}$$

پس:

$$AB - BA = \begin{bmatrix} bz - cy & \text{---} \\ \text{---} & cy - bz \end{bmatrix}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید درایه‌های واقع بر قطر اصلی ماتریس

$AB - BA$  قرینه‌ی یکدیگرند که در هیچ کدام از گزینه‌ها چنین

چیزی دیده نمی‌شود.

در حالت کلی می‌توان نشان داد که اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی و

هم‌مرتبه باشند آن‌گاه مجموع درایه‌های روی قطر اصلی  $AB - BA$

برابر صفر است.

۵۸. گزینه ۲ با توجه به اطلاعات مسئله می‌توانیم بنویسیم:

$$(BA)C = B(AC) = B(CA) = BCA$$

و هم‌چنین:

$$C(BA) = (CB)A = BCA$$

پس ماتریس  $C$  با ماتریس  $BA$  جابه‌جا می‌شود.

با در نظر گرفتن  $C = I$  گزینه‌های دیگر رد می‌شوند.

۵۹. گزینه ۴ ماتریس‌های  $A$  و  $B$  را با توجه به فرض می‌توان

به صورت زیر انتخاب کرد:

$$A = \begin{bmatrix} a & k-a \\ b & k-b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & k-c \\ d & k-d \end{bmatrix}$$

پس:

$$AB = \begin{bmatrix} ac+kd-ad & ak-ac+k^2-ak-dk+da \\ bc+dk-bd & bk-bc+k^2-bk-dk+bd \end{bmatrix}$$

$AB$  مجموع تمام درایه‌های  $AB$

$$\Rightarrow 2k^2 = 72 \Rightarrow k = \pm 6 \Rightarrow 2k = \pm 12$$

۶۰. گزینه ۲ ابتدا  $A^2$  را به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A^{15!} = A^{\overbrace{(3 \times 2 \times \dots \times 15)}^k} = (A^2)^k = (I)^k = I$$

۶۱. گزینه ۱ اگر یکی از ماتریس‌ها مضربی از  $I$  باشد می‌توانیم

اتحادها را بنویسیم:

$$\begin{aligned} A(A-2I)^T &= A(A^T+4I-4A) = A(3A+I+4I-4A) \\ &= A(5I-A) = 5A-A^T = 5A-(3A+I) \\ &= 2A-I \end{aligned}$$



۶۷. گزینه ۴ ابتدا چند درایه‌ی اولیه را به دست آورده و یک فرمول کلی برای توان‌های  $A$  پیدا می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 21 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n & 3n + \frac{n(n-1)}{2} \times 4 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 20 & 30 + 180 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پس:

۶۸. گزینه ۴ یک فرمول کلی برای  $A^n$  به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A + A^2 + \dots + A^{20} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 1 & 60 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 3(1+2+\dots+20) \\ 0 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 630 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

۶۹. گزینه ۳ از دو رابطه‌ی زیر استفاده خواهیم کرد:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{10}} = \frac{\frac{1}{2}[1 - (\frac{1}{2})^{10}]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{10}}{1} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{10}} = \frac{\frac{1}{3}[1 - (\frac{1}{3})^{10}]}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1 - (\frac{1}{3})^{10}}{2} \quad (\text{ب})$$

حال فرمول کلی  $A^n$  را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{1}{3})^2 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{3})^2 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} (\frac{1}{3})^n & 0 \\ 0 & (\frac{1}{3})^n \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A + A^2 + \dots + A^{10} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\frac{1}{3})^2 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{3})^2 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} (\frac{1}{3})^{10} & 0 \\ 0 & (\frac{1}{3})^{10} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{10}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{10}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - (\frac{1}{3})^{10} & 0 \\ 0 & 1 - (\frac{1}{3})^{10} \end{bmatrix} \quad (\text{ب و الف})$$

۶۲. گزینه ۲ طبق فرض  $AB = -\frac{3}{4}BA$ ، پس داریم:

$$AB^T = (AB)B^T = (-\frac{3}{4}BA)B^T = -\frac{3}{4}B(AB)B^T$$

$$= -\frac{3}{4}B(-\frac{3}{4}BA)B^T = \frac{9}{16}B^T(AB)$$

$$= \frac{9}{16}B^T(-\frac{3}{4}BA) = -\frac{27}{64}B^T A$$

بنابراین  $k = -\frac{27}{64}$ .

۶۳. گزینه ۱ اگر  $A^T$  را محاسبه کنیم، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم  $A^T = \bar{O}$ ، بنابراین داریم:

$$(A - 2I)(A^T + 2A + I) = A^T + 2A^T + A - 2A^T - 4A - 2I$$

$$= -3A - 2I = -3 \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3a & -2 & 0 \\ -3b & -3c & -2 \end{bmatrix}$$

۶۴. گزینه ۴ از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم:

$$AB = B \quad BA = A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = B \Rightarrow BAB = B \Rightarrow BB = B \Rightarrow B^T = B \\ BA = A \Rightarrow ABA = A \Rightarrow AA = A \Rightarrow A^T = A \end{cases}$$

$$(A+B)^T = A^T + AB + BA + B^T = A + B + A + B = 2(A+B)$$

$$(A+B)^T = (A+B)^T(A+B) = 2(A+B)(A+B)$$

$$= 2(A+B)^T = 4(A+B)$$

اگر  $AB = I$  باشد حاصل برابر با  $AI$  است و فقط گزینه‌ی «۴» درست است.

۶۵. گزینه ۳ از فرض  $A^T = A$  استفاده کرده، داریم:

$$(I - A)^T = I^T + A^T - 2AI = I + A - 2A = I - A$$

دیده می‌شود  $(I - A)^T = I - A$  پس  $(I - A)^{100} = I - A$  نیز برابر  $I - A$  است.

۶۶. گزینه ۴

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

بنابراین  $A^n$  به‌ازای  $n$ های زوج برابر  $I$  و به‌ازای  $n$ های فرد برابر  $A$  است، پس:

$$A^{1398} - A^{1397} = I - A$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که این ماتریس دارای پنج درایه‌ی صفر است.





۷۰. گزینه ۱) ماتریس  $A$  به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

یعنی یک ماتریس مربعی مرتبه‌ی ۱۳۹۷ که قطر فرعی آن همگی عدد ۱- و بقیه‌ی درایه‌ها همگی صفرند. در چنین ماتریسی می‌توان نشان داد  $A^n$  به‌ازای  $n$  های زوج برابر  $I$  و به‌ازای  $n$  های فرد برابر  $A$  است. پس:

$$\begin{aligned} A^{2018} + A^{2019} &= I + A \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

یعنی در قطر اصلی  $I + A$  یکی از درایه‌ها (درایه‌ی وسطی) صفر و بقیه عدد ۱ هستند. بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس  $I + A$  برابر ۱۳۹۶ است.

۷۱. گزینه ۳) ماتریس‌های  $A$  و  $B$  به‌صورت زیر هستند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \dots & n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$AB = \begin{bmatrix} n & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 4n & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 9n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & n^2 \times n \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های قطر اصلی برابر است با:

$$\begin{aligned} n + 2^2 \times n + 3^2 \times n + \dots + n^2 \times n &= n[1 + 2^2 + \dots + n^2] \\ &= n \left[ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \end{aligned}$$

۷۲. گزینه ۴) ماتریس  $A$  هم سطری و هم ستونی است. پس نتیجه‌ای

که می‌توان گرفت این است که  $A$  به‌صورت  $[a]_{n \times n}$  است، یعنی یک عدد حقیقی است. بنابراین:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x^2 + 2x + 5 &= 3x^2 + x + 19 \Rightarrow x^2 + x^2 + x - 14 = 0 \\ \Rightarrow x^2 + x^2 + x - 8 - 4 - 2 &= 0 \\ \Rightarrow (x^2 - 8) + (x^2 - 4) + (x - 2) &= 0 \\ \Rightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4) + (x-2)(x+2) + (x-2) &= 0 \\ \Rightarrow (x-2)(x^2 + 3x + 7) = 0 \xrightarrow{x^2 + 3x + 7 > 0} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ \Rightarrow (3x^2 + x + 19)^2 &= 33^2 = 1089 \end{aligned}$$

۷۳. گزینه ۲) چون حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی  $A$  برابر ۱۲۰

است پس روی قطر اصلی  $A$  درایه‌های صفر وجود ندارد.

$$120 = 2 \times 60 = 2 \times 3 \times 20 = 2 \times 2 \times 5 \times 6 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

بنابراین  $A$  از مرتبه‌ی ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ است. توجه کنید که روی قطر اصلی ماتریس  $A$  عدد ۱ هم نمی‌تواند قرار بگیرد.

۷۴. گزینه ۳) با استفاده از اطلاعات سؤال می‌فهمیم که ماتریس

موردنظر ماتریس صفر است. پس:

$$\begin{aligned} 3B^T A - BA = \vec{0} &\Rightarrow 3B^T A = BA \quad (1) \\ B^T A = B^T (BA) &\stackrel{(1)}{=} B^T (3B^T A) = 3B^T A = 3B^T (BA) \\ &\stackrel{(1)}{=} 3B^T (3B^T A) = 9B^T A = 9B^T (BA) \\ &\stackrel{(1)}{=} 9B^T (3B^T A) = 27B^T A \end{aligned}$$

۷۵. گزینه ۲)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 12 \end{bmatrix}$$

پس:

$$A^t A = A \cdot A = A^2 = \begin{bmatrix} 3^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 4^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 12^2 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع تمام درایه‌های ماتریس  $A^2$  برابر است با:

$$3^2 + 4^2 + \dots + 12^2 = \frac{12 \times 13 \times 25}{6} - 5 = 645$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{توجه کنید که:}$$

۷۶. گزینه ۳) می‌دانیم اگر اتحاد  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$  برقرار باشد باید  $AB = BA$  باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} 1+xy & x+1 \\ y+1 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & x+1 \\ y+1 & xy+1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} 1+xy = 2 \\ x+1 = x+1 \\ y+1 = y+1 \\ 2 = xy+1 \end{cases} &\Rightarrow xy = 1 \end{aligned}$$

۷۷. گزینه ۲) طبق تعریف ماتریس زیر به‌دست می‌آید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

پس: مجموع درایه‌های ستون دوم  $= 1 + 4 + 4 = 9$

(البته کافی است درایه‌های ستون دوم را به‌دست آورید.)