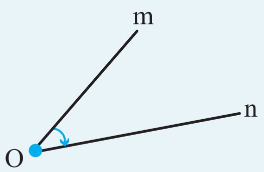
مروری بر هندسه‌ی متوسطه‌ی اول

«زاویه»

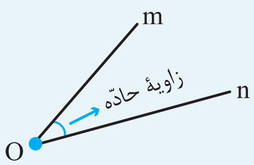
هر یک از دو نیم خط Om و On در شکل زیر را اضلاع زاویه و نقطه‌ی O را رأس زاویه می‌نامیم.



انواع زاویه:

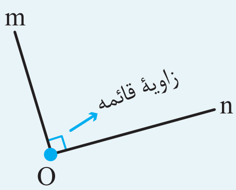
۱ زاویه‌ی تند (حاده): اگر زاویه‌ای کوچکتر از ۹۰° باشد، آن را یک زاویه‌ی حاده می‌نامیم.

$$(m\hat{O}n < ۹۰^\circ)$$



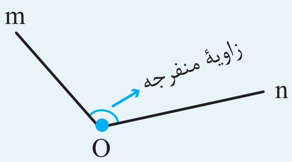
۲ زاویه‌ی قائمه: اگر زاویه‌ای برابر ۹۰° باشد آن را یک زاویه‌ی قائمه می‌نامیم. توجه کنید که در این حالت، می‌گوییم دو ضلع زاویه بر هم عمود هستند.

$$(m\hat{O}n = ۹۰^\circ) \text{ و } (mO \perp nO)$$



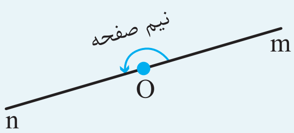
۳ زاویه‌ی باز (منفرجه): هر زاویه‌ی بزرگتر از ۹۰° را، زاویه‌ی باز «منفرجه» می‌نامیم.

$$(m\hat{O}n > ۹۰^\circ)$$



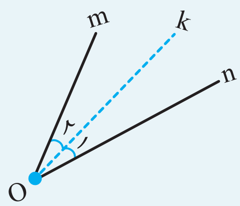
۴ زاویه‌ی نیم صفحه: اگر دو ضلع زاویه در یک امتداد باشند و دو طرف رأس زاویه باشند، آن زاویه را زاویه‌ی نیم‌صفحه می‌نامیم. زاویه‌ی نیم‌صفحه همواره برابر ۱۸۰° است.

$$(m\hat{O}n = ۱۸۰^\circ)$$



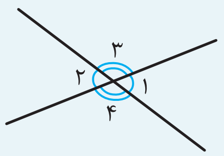
نیمساز زاویه: نیم‌خطی که از رأس زاویه می‌گذرد و آنرا به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند را نیمساز زاویه می‌گوییم. مثلاً نیمساز زاویه‌ی ۶۰° خطی است که آنرا به دو زاویه‌ی ۳۰° تقسیم می‌کند.

$$\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \Rightarrow m\hat{O}n \text{ نیمساز } Ok$$



زاویه‌های متمم: اگر مجموع اندازه‌های دو زاویه برابر ۹۰° درجه باشد، می‌گوییم آن دو زاویه متمم یکدیگرند. پس اگر دو زاویه‌ی $\hat{x}$ و $\hat{y}$ متمم هم باشند، آن وقت: $\boxed{\hat{x}+\hat{y}=۹۰^\circ}$

زاویه‌های مکمل: اگر مجموع اندازه‌های دو زاویه برابر ۱۸۰° باشد، می‌گوییم آن دو زاویه مکمل یکدیگرند. پس اگر دو زاویه‌ی $\hat{x}$ و $\hat{y}$ مکمل هم باشند، آن وقت: $\boxed{\hat{x}+\hat{y}=۱۸۰^\circ}$

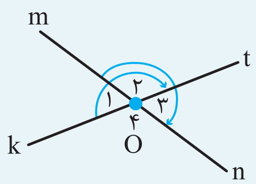


زاویه‌های متقابل به رأس: وقتی دو خط همدیگر را قطع می‌کنند، چهار زاویه ایجاد می‌شود که زاویه‌های روبرو دو به دو متقابل به رأس هستند.

مثلاً در شکل روبرو زاویه‌های $\hat{۳}$ و $\hat{۴}$ متقابل به رأس و زاویه‌های $\hat{۲}$ و $\hat{۱}$ نیز متقابل به رأس هستند.

نکته

دو زاویه‌ی متقابل به رأس همواره با هم برابرند.



اثبات:

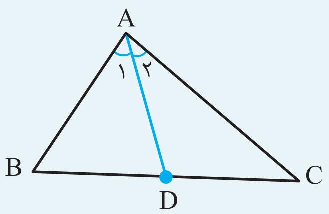
زاویه‌ی $k\hat{O}t$ نیم صفحه است، پس $\hat{O}_۱+\hat{O}_۲=۱۸۰^\circ$

زاویه‌ی $m\hat{O}n$ نیز نیم صفحه است، پس $\hat{O}_۲+\hat{O}_۳=۱۸۰^\circ$

$$\Rightarrow \hat{O}_۱+\cancel{\hat{O}_۲}=\cancel{\hat{O}_۲}+\hat{O}_۳ \Rightarrow \boxed{\hat{O}_۱=\hat{O}_۳}$$

«مثلث‌ها»

تعاریف اولیه:

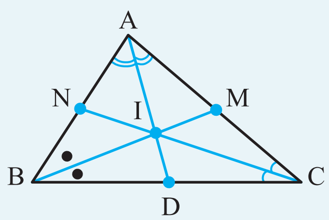


۱ **نیمساز نظیر رأس A در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$:** خطی است که زاویه‌ی $\hat{A}$ را نصف می‌کند.

$\hat{A}_۱=\hat{A}_۲ \Leftrightarrow$ A نیمساز نظر رأس AD)

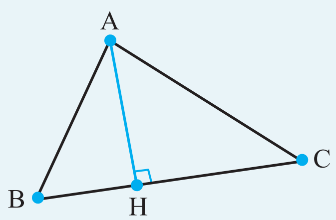
نکته

در هر مثلث هر سه نیمساز نظیر رأس‌ها، در یک نقطه به هم می‌رسند.



در شکل مقابل I محل برخورد سه نیمساز زاویه‌های مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ است.

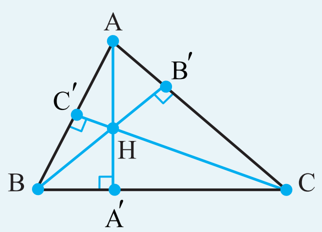
۲ **ارتفاع وارد بر ضلع BC در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$:** پاره‌خطی که از زاویه‌ی A می‌گذرد و با ضلع روبروی آن یعنی ضلع BC زاویه‌ی ۹۰° می‌سازد را ارتفاع نظیر ضلع BC می‌نامیم.



(در شکل مقابل AH ارتفاع نظیر ضلع BC است.)

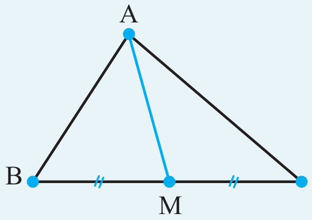
نکته

در هر مثلث هر سه ارتفاع نظیر اضلاع، در یک نقطه به هم می‌رسند.



H محل برخورد سه ارتفاع مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ است.)

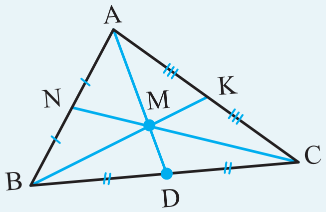
۳ **میانه‌ی نظیر ضلع BC در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$** : پاره‌خطی که از زاویه‌ی $\hat{A}$ می‌گذرد و ضلع روبرو به این زاویه، یعنی ضلع BC را نصف می‌کند، میانه‌ی نظیر رأس A یا میانه نظیر ضلع BC در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ می‌نامیم.



(AM میانه‌ی نظیر ضلع BC ⟺ $BM = MC$)

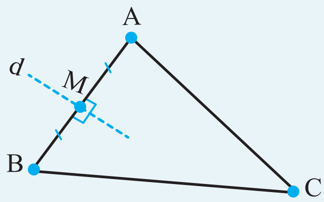
نکته

در هر مثلث هر سه میانه‌ی نظیر رأس‌ها در یک نقطه هم‌رسند.



(AD، BK و CN در نقطه‌ی M هم‌رسند.)

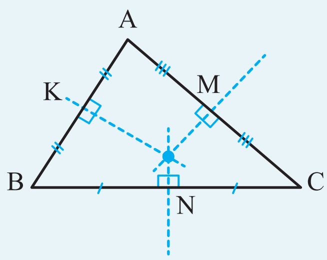
۴ **عمود منصف نظیر ضلع AB در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$**: خطی که ضلع AB در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ را نصف کرده و ضمناً بر آن عمود است، عمود منصف ضلع AB نامیده می‌شود.



(عمود منصف AB ⟺ $d \perp AB , AM = MB$)

نکته

در هر مثلث هر سه عمود منصف سه ضلع در یک نقطه به هم می‌رسند.

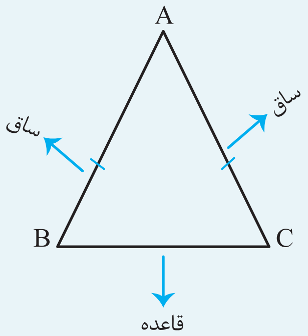


(عمود منصف‌ها در نقطه‌ی T هم‌رسند.)

«انواع مثلث‌های خاص»

۱. مثلث متساوی‌الساقین:

مثلثی که دو ضلع برابر داشته باشد را مثلث متساوی‌الساقین می‌نامیم. به ضلع‌های برابر ساق‌های مثلث و به ضلع دیگر قاعده‌ی مثلث می‌گوییم.

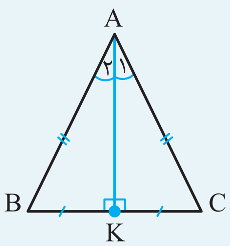


$(AB = AC)$

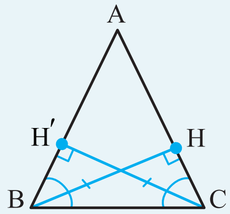
ویژگی‌های مثلث متساوی‌الساقین:

۱ زاویه‌های مجاور به قاعده با هم برابرند. یعنی در شکل روبرو $\hat{B} = \hat{C}$.

۲ میانه، ارتفاع و نیمساز نظیر رأس روبرو به قاعده بر هم منطبق‌اند. یعنی در شکل روبرو AK هم میانه، هم ارتفاع و هم نیمساز است.



$$\begin{matrix} AB = AC \\ AK \perp BC \end{matrix} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 , BC = CK$$

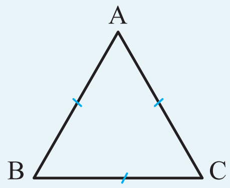


۳ ارتفاع‌های نظیر دو ساق با هم برابرند. یعنی در شکل زیر $BH = CH'$.

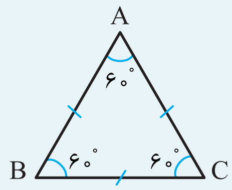
$$(\hat{B} = \hat{C} \Rightarrow BH = CH')$$

۲. مثلث متساوی الاضلاع:

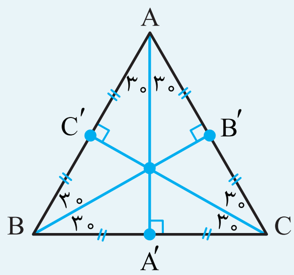
مثلثی که سه ضلع برابر داشته باشد را مثلث متساوی الاضلاع می‌نامیم.



ویژگی‌های مثلث متساوی‌الاضلاع:

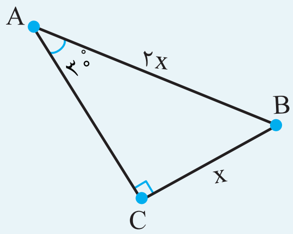


۱ هر سه زاویه‌ی مثلث با هم برابرند، پس از آنجایی که مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است، اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی در مثلث متساوی الاضلاع برابر $\frac{۱۸۰^\circ}{۳} = ۶۰^\circ$ است.



۲ در هر مثلث متساوی الاضلاع میانه، ارتفاع و نیمساز نظیر هر رأس بر هم منطبق هستند و ضمناً طول همگی آنها با هم برابر است، یعنی:

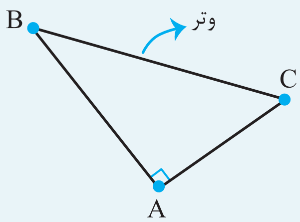
$$(AA' = BB' = CC')$$



۳ با توجه به ویژگی قبل می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث قائم الزاویه، ضلع روبرو به زاویه ۳۰° نصف وتر است.

$$(\hat{A} = ۳۰^\circ \Leftrightarrow BC = \frac{AB}{۲})$$

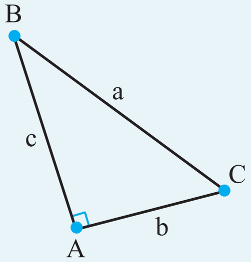
۳. مثلث قائم الزاویه:



مثلثی که یک زاویه‌ی قائم (۹۰°) داشته باشد را مثلث قائم الزاویه می‌نامیم. (به ضلع روبرو به زاویه‌ی قائمه، وتر می‌گویند.)

ویژگی‌های مثلث قائم‌الزاویه:

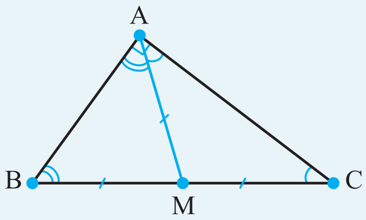
۱) از آنجایی که مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰° است، و مثلث قائم الزاویه یک زاویه‌ی ۹۰° دارد، پس دو زاویه‌ی دیگر قطعاً زاویه‌های حاده هستند.



۲) **رابطه‌ی فیثاغورث:** در هر مثلث قائم الزاویه مربع طول وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع زاویه‌ی قائم، یعنی:

$$(\hat{A} = ۹۰ \Leftrightarrow a^{۲} = b^{۲} + c^{۲})$$

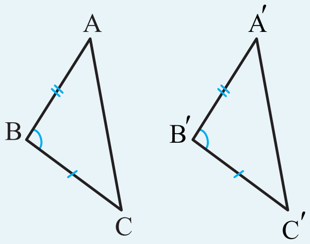
۳) در هر مثلث قائم الزاویه میانه‌ی نظیر وتر، نصف وتر است.



(AM میانه‌ی BC $\Rightarrow AM = BM = CM$)

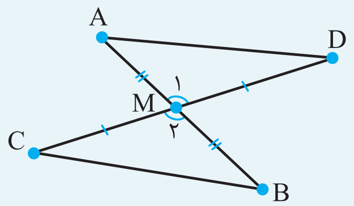
«حالت‌های تساوی مثلث‌ها»

۱) **حالت (ض ز ض):** اگر دو ضلع و زاویه‌ی بین آنها از مثلثی با دو ضلع و زاویه‌ی بین آنها از مثلث دیگری برابر باشند، آن دو مثلث «قابل انطباق» یا «هم‌نهشتند.»



$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ BC = B'C' \\ B = B' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ABC} \simeq \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

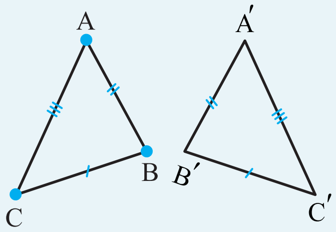
مثال **ثابت کنید اگر AB و CD یکدیگر را نصف کنند، آن وقت دو مثلث $\overset{\Delta}{BMC}$ و $\overset{\Delta}{AMD}$ هم‌نهشتند.**



چون AB و CD یکدیگر را نصف می‌کنند، پس M وسط AB و ضمناً وسط CD است، لذا $AM = BM$ و $MC = MD$

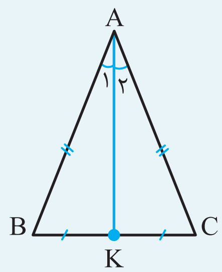
$$\left.\begin{array}{ll} AM = MB & (\text{وسط } AB \ M) \\ \hat{M}_{۲} = \hat{M}_{۱} & (\text{مقابل به رأس}) \\ MD = MC & (\text{وسط } CD \ M) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{AMD} \simeq \overset{\Delta}{MBC}$$

۲) **حالت (ض ض ض):** اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث «قابل انطباق» یا «هم‌نهشتند.»



$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ BC = B'C' \\ B = B' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\Delta}{ABC} \simeq \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

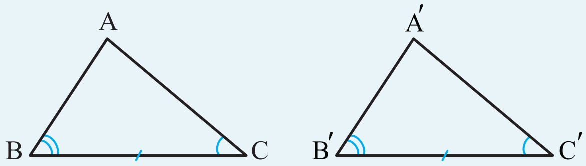
مثال **ثابت کنید در هر مثلث متساوی‌الساقین میانه‌ی نظیر قاعده، نیمساز هم هست.**



$$\left.\begin{array}{ll} AB = AC & (\text{متساوی‌الساقین}) \\ BK = CK & (\text{میانه } AK) \\ AK = AK & (\text{مشترک}) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ABK} \simeq \overset{\Delta}{ACK}$$

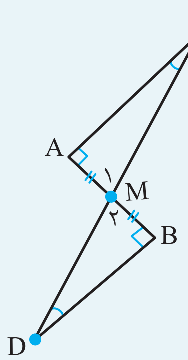
$$\xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} \hat{A}_{۱} = \hat{A}_{۲} \Rightarrow$$ AK نیمساز هم هست.

۳ **حالت (ز ض ز)**: اگر دو زاویه و ضلع بین آنها از یک مثلث با دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث با هم، هم‌نهشتند.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\hat{B}'\\ \hat{C}=\hat{C}'\\ BC=B'C'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ز ض ز}}\overset{\Delta}{ABC}\cong\overset{\Delta}{A'B'C'}$$

مثال **با توجه به شکل ثابت کنید:** $\hat{C}=\hat{D}$

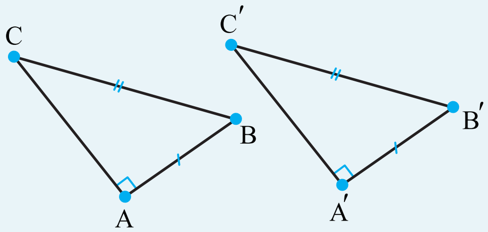


$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{B}=۹۰^\circ\\ \hat{M}_۲=\hat{M}_۱\ (\text{مقابل به رأس})\\ AM=MB(\text{وسط } AB \ M)\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ز ض}}\overset{\Delta}{AMC}\cong\overset{\Delta}{BMD}\xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}}\boxed{\hat{C}=\hat{D}}$$

علاوه بر سه حالت تساوی مثلث‌ها که تا کنون به آنها اشاره کردیم، دو حالت تساوی ویژه‌ی مثلث‌های قائم الزاویه نیز داریم که یادآوری می‌کنیم.

اگر $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ در رأس‌های A و A' قائمه باشند، آن وقت دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ می‌توانند بنا به حالت‌های زیر با هم هم‌نهشت باشند.

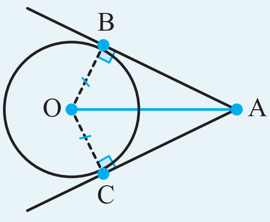
حالت اول: وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه: اگر در دو مثلث قائم الزاویه، وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه از یک مثلث با وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه از مثلث دیگر با هم برابر باشند، آن وقت دو مثلث قابل انطباق یا هم‌نهشتند.



$$\left.\begin{array}{l}BC=B'C'\\ AB=A'B'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{و ض}}\overset{\Delta}{ABC}\cong\overset{\Delta}{A'B'C'}$$

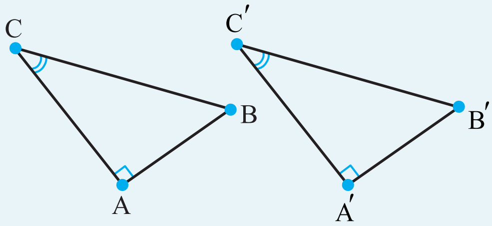
مثال **ثابت کنید اگر از نقطه‌ی A خارج یک دایره دو مماس AB و AC را بر دایره رسم کنیم، آن وقت** $AB=AC$.

می‌دانیم خط مماس در نقطه‌ی تماس بر شعاع دایره عمود است.



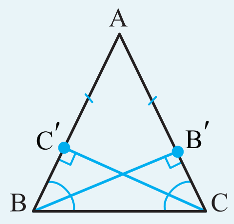
$$\left.\begin{array}{l}OB=OC\quad(\text{شعاع})\\ OA=OA\ (\text{وتر مشترک})\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{و ض}}\overset{\Delta}{OAB}\cong\overset{\Delta}{OAC}\xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}}\boxed{AB=AC}$$

حالت دوم: وتر و یک زاویه‌ی حاده: اگر در دو مثلث قائم الزاویه وتر و یک زاویه‌ی حاده از یک مثلث با وتر و یک زاویه‌ی حاده از مثلث دیگر برابر باشند، آن وقت آن دو مثلث هم‌نهشتند.



$$\left.\begin{array}{l}BC=B'C'\\ \hat{C}'=\hat{C}'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{و ز}}\overset{\Delta}{ABC}\cong\overset{\Delta}{A'B'C'}$$

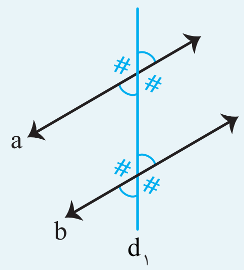
مثال **ثابت کنید در یک مثلث متساوی الساقین ارتفاع‌های وارد بر ساق‌ها با هم برابرند.**



$$\left.\begin{array}{ll}\hat{B}=\hat{C} & (\text{متساوی الساقین})\\ BC=BC & (\text{مشترک})\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{و ز}} \overset{\Delta}{BCC'} \cong \overset{\Delta}{BCB'} \xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} \boxed{BB'=CC'}$$

نکته‌ی مهم **همیشه در دو مثلث هم‌نهشت ضلع‌های روبرو به زاویه‌های برابر، با هم برابرند و برعکس، یعنی زاویه‌های روبرو به ضلع‌های برابر نیز با هم برابرند.**

«توازی و تعامد»

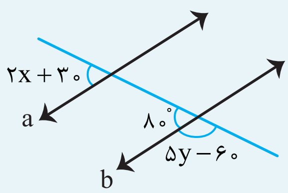


اگر خطی مانند $d_۱$، خطوط a و b را مانند شکل با زاویه‌های مساوی قطع کرده باشد، خط‌های a و b موازیند و ضمناً خط $d_۱$، مورب است.

خط $d_۱$، هشت زاویه توسط برخورد با خطوط a و b می‌سازد که چهار زاویه‌ی حاده با هم و چهار زاویه‌ی منفرجه نیز با هم برابرند. (این رابطه همواره برای دو خط موازی برقرار است.)

اگر دو خط a و b موازی باشند، می‌نویسیم «$a \parallel b$» و اگر دو خط a و b موازی نباشند، می‌نویسیم «$a \nparallel b$».

مثال **دو خط a و b با هم موازیند، با توجه به شکل مقدار $x+y$ کدام است؟**

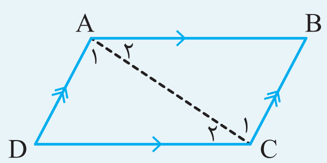


زاویه‌های حاده برابرند. $\Rightarrow ۸۰ = ۲x + ۳۰ \Rightarrow ۲x = ۵۰ \Rightarrow \hat{x} = ۲۵^\circ$

زاویه‌های منفرجه برابرند. $\Rightarrow ۱۸۰ - ۸۰ = ۵y - ۶۰ \Rightarrow ۱۶۰ = ۵y \Rightarrow \hat{y} = ۳۲^\circ$

$\Rightarrow x + y = ۳۲ + ۲۵ = ۵۷$

مثال **با استفاده از حالت (ز ض ز) در تساوی مثلث‌ها ثابت کنید اگر قطر یک متوازی الاضلاع را رسم کنیم دو مثلث هم‌نهشت ایجاد می‌شوند.**

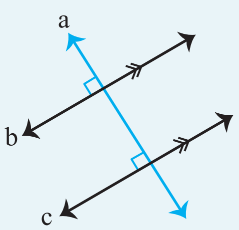


$$\left.\begin{array}{l}AD \parallel BC \text{ و مورب } AC \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱\\ AB \parallel CD \text{ و مورب } AC \Rightarrow \hat{C}_۲ = \hat{A}_۲\\ AC = AC \ (\text{مشترک})\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ADC}$$

نکته **دو خط موازی با یک خط، با هم موازیند. یعنی اگر $a \parallel d$ و $b \parallel d$، آن وقت $a \parallel b$.**

دو خط وقتی بر هم عمودند که زاویه‌ی بین آنها ۹۰ درجه باشد، اگر دو خط $\ell_۱$ و $\ell_۲$ بر هم عمود باشند، می‌نویسیم: $\ell_۱ \perp \ell_۲$.

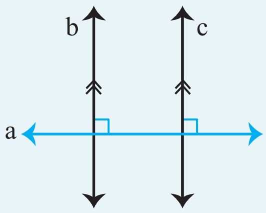
نکته ۱ **اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است. یعنی اگر $a \perp b$ و $b \parallel c \Leftarrow a \perp c$.**



آنچه گذشت . . .

تخته‌سیاه

نکته ۲



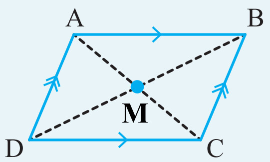
دو خط عمود بر یک خط همواره با هم موازیند. یعنی اگر $c \perp a$ و $b \perp a \Leftarrow b \parallel c$.

«ویژگی‌های مقدماتی برخی چهارضلعی‌ها»

۱. متوازی‌الاضلاع:

چهار ضلعی که ضلع‌های روبروی آن دو به دو با هم موازیند، متوازی‌الاضلاع نام دارد.

ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع:



۱ اضلاع روبرو با هم برابرند و برعکس، یعنی هر چهار ضلعی که در آن اضلاع روبرو دو به دو با هم برابر باشند، متوازی‌الاضلاع نام دارد. $(AB = CD\ ,\ AD = BC)$.

۲ زاویه‌های روبرو با هم برابرند و برعکس، یعنی هر چهار ضلعی که در آن زاویه‌های روبرو با هم برابر باشند، متوازی‌الاضلاع است. $(\hat{A} = \hat{C}\ ,\ \hat{B} = \hat{D})$.

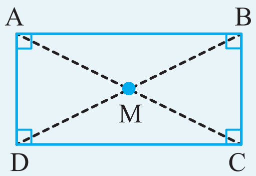
۳ زاویه‌های مجاوری مکمل یکدیگرند و برعکس، یعنی هر چهار ضلعی که در آن زاویه‌های مجاور مکمل باشند، متوازی‌الاضلاع است. $(\hat{A} + \hat{B} = ۱۸۰^\circ\ ,\ \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ)$

۴ قطرها همدیگر را نصف می‌کنند و برعکس، یعنی هر چهارضلعی که در آن قطرها همدیگر را نصف کنند، متوازی‌الاضلاع است. $(MA = MC\ ,\ MB = MD)$

۲. مستطیل:

متوازی‌الاضلاعی است که زاویه‌های قائمه دارد.

ویژگی‌های مستطیل:

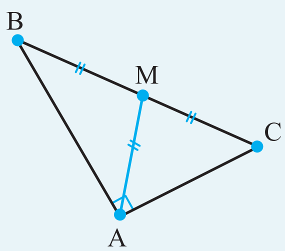


۱ چون مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است، پس همه‌ی ویژگی‌های یک متوازی‌الاضلاع را دارد.

۲ در هر مستطیل قطرها با هم برابرند. $(AC = BD)$

نکته

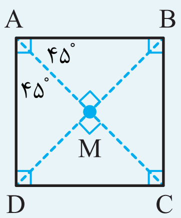
با استفاده از خواص مستطیل می‌توان نتیجه گرفت که در هر مثلث قائم‌الزاویه میانه‌ی نظیر وتر، نصف وتر است. یعنی همواره در شکل زیر $(AM = BM = CM)$.



۳. مربع:

متوازی‌الاضلاعی است که چهارضلع مساوی و زاویه‌های قائمه دارد. یا به بیان دیگر، مربع، مستطیلی است که در آن دو ضلع مجاور با هم برابرند.

ویژگی‌های مربع:



۱ همه‌ی ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع را دارد.

۲ هر چهار ضلع با هم مساویند. $(AB = BC = CD = DA)$

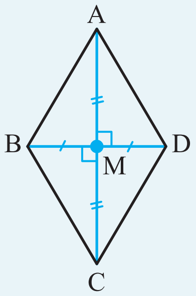
۳ قطرها با هم برابرند. $(AC = BD)$

۴ قطرها بر هم عمودند. $(AC \perp BD)$

۵ قطرها نیمساز زاویه‌های رأس‌ها هستند، یعنی هر قطر در هر رأس دو زاویه‌ی $45°$ تولید می‌کند.

ع. لوزی:

متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع آن برابرند.



ویژگی‌های لوزی:

۱ تمام خصیت‌های یک متوازی الاضلاع را دارد.

۲ هر چهار ضلع با هم برابرند. $(AB = BC = CD = DA)$

۳ قطرها عمود منصف یکدیگرند. $(AC \perp BD)$

نکته ۱
مربع نوعی لوزی است، در واقع هر لوزی که یک زاویه‌ی $90°$ داشته باشد، مربع است.

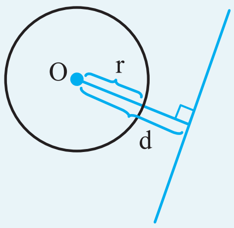
نکته ۲
لوزی که قطرهای برابر داشته باشد، مربع است.

«دایره‌ها و خواص آنها»

تمام نقاط روی دایره‌ای به شعاع r از مرکز دایره به فاصله‌ی r هستند. در حالت کلی یک خط و دایره سه حالت نسبت به هم دارند.

حالت اول:

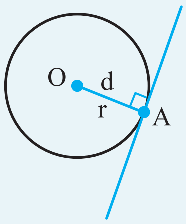
خط خارج دایره: در این صورت خط و دایره یکدیگر را قطع نمی‌کنند و در نتیجه فاصله‌ی خط از مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره است.



$(d > r)$

حالت دوم:

خط بر دایره مماس باشد: در این صورت خط فقط در یک نقطه دایره را قطع می‌کند و در نتیجه فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مورد نظر برابر شعاع دایره است.

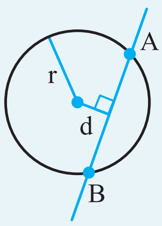


$(d = r)$

نکته
خط مماس در نقطه‌ی تماس بر شعاع دایره عمود است یا به عبارت دیگر شعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است. (به شکل بالا توجه کنید.)

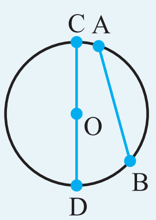
حالت سوم:

خط داخل دایره: در این صورت خط در دو نقطه دایره را قطع می‌کند و در نتیجه فاصله‌ی خط از مرکز دایره کمتر از شعاع دایره است.



$(d < r)$

وتر دایره: پاره‌خطی که دو نقطه‌ی A و B روی دایره را به هم وصل می‌کند «وتر» دایره نام دارد.

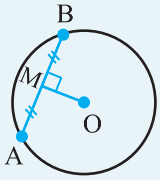


(AB و CD دو وتر مختلف از دایره هستند.)

قطر دایره: دایره وتری از دایره است که از مرکز دایره عبور می‌کند و ضمناً بزرگترین وتر دایره، قطر دایره است. همچنین هر دایره بی‌شمار وتر دارد و دقت کنید که شعاع دایره وتری از دایره نیست.

نکته

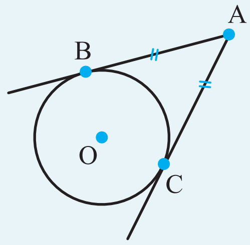
اگر از O مرکز دایره، عمود OM بر وتر دلخواه AB را بکشیم، در این صورت همواره OM عمود منصف AB است. در واقع به دو صورت می‌توان بیان کرد که اولاً اگر خطی از مرکز دایره بر وتری عمود شود، آنرا نصف می‌کند و ثانیاً اگر خطی از مرکز دایره به وسط وتری دلخواه رسم شود، بر آن عمود است.



$$\left.\begin{array}{l}(OM \perp AB \Rightarrow AM = MB)\\(AM = MB \Rightarrow OM \perp AB)\end{array}\right\} \Rightarrow$$ (OM عمود منصف AB است.)

نکته

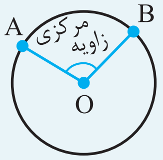
اگر از نقطه‌ی A خارج دایره دو مماس AB و AC بر دایره را رسم کنیم، آن وقت $AB = AC$.



$(AB = AC)$

«زاویه‌های مرکزی»

زاویه‌ای که رأس آن روی مرکز دایره و ضلع‌های آن دو شعاع دایره باشند، زاویه‌ی مرکزی نام دارد.



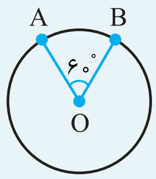
همانطور که در شکل بالا می‌بینید، دو نقطه‌ی A و B دایره را به دو کمان تقسیم می‌کنند که کمان کوچکتر را با $\overset{\frown}{AB}$ نمایش می‌دهیم و آنرا کمان AB می‌نامیم.

اندازه‌ی کمان $\overset{\frown}{AB}$ برابر است با اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی روبرو به آن یا به عبارت دیگر:

(اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی = اندازه‌ی کمان روبر به آن)

مثال

کمان روبرو به زاویه‌ی مرکزی ۶۰°، چه کسری از کل دایره است؟



زاویه‌ی $\hat{O} = ۶۰^\circ$ است، پس $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$. از آنجا که یک دایره‌ی کامل ۳۶۰° است، پس کمان $\overset{\frown}{AB}$، $\frac{۱}{۶} = \frac{۶۰}{۳۶۰}$ کل دایره است.

نکته

$$\frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان } AB}{۳۶۰^\circ}$$

نکته

در هر دایره، وترهای نظیر دو کمان برابر، با هم برابرند، یعنی:

اگر $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Leftarrow AB = CD$.