

دهم هندسه

حمیدرضا بیات
مرتضی خمایی ابدی
کیان کریمی خراسانی



پیشگفتار

به نام خداوند جان و خرد
کزین برتر اندیشه برنگذرد

بسیار خرسندیم که کتاب هندسه دهم را در اختیار دانش‌آموزان عزیز و دبیران گرامی قرار می‌دهیم. این کتاب در اصل برای دانش‌آموزان «مدارس استعداد‌های درخشان» تألیف شده است؛ اما استفاده از آن‌ها، به دانش‌آموزان ممتاز سایر مدارس کشور و داوطلبان شرکت در مسابقات نیز توصیه می‌شود.

از ویژگی‌های این کتاب می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- آموزش پیشرفته کتاب درسی با مثال‌های متنوع؛
- تمرین‌های تفکیک شده براساس درس‌های هر فصل؛
- ۵۰ پرسش چهارگزینه‌ای برای هر فصل همراه با پاسخ کلیدی؛
- پاسخ‌نامه تشریحی تمام تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای؛
- طبقه‌بندی تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای به دشوار (☆) و دارای نکته کلیدی (✉).

امیدواریم این کتاب مورد توجه دانش‌آموزان عزیز، دبیران گرامی و خانواده‌ها قرار گیرد و در ارتقای سطح علمی دانش‌آموزان مؤثر واقع شود.

در پایان لازم می‌دانیم از مؤلفان محترم کتاب آقایان: حمیدرضا بیات، مرتضی خمایی ابدی و کیان کریمی خراسانی که این کتاب را زیر نظر آقای مهندس هادی عزیززاده تألیف کرده‌اند، تشکر کنیم.

هم‌چنین از خانم فاطمه محمدی آندرس که زحمت حروفچینی و صفحه‌آرایی و خانم‌ها نرگس سربندی (رسم شکل) و بهاره خدای (گرافیک و طراح جلد) سپاسگزاریم.

انتشارات مبتکران

صفحه

عنوان

۷

فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال

۸ درس اول: ترسیم‌های هندسی

۱۸ درس دوم: استدلال

۲۹ تمرین‌ها

۳۳ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۴۰ پاسخ‌نامه کلیدی

۴۱

فصل دوم: قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن

۴۲ درس اول: نسبت و تناسب در هندسه

۴۵ درس دوم: قضیه تالس

۵۰ درس سوم: تشابه

۵۹ درس چهارم: کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها

۶۶ تمرین‌ها

۷۷ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۸۶ پاسخ‌نامه کلیدی

۸۷

فصل سوم: چندضلعی‌ها

۸۸ درس اول: چندضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها

۹۹ درس دوم: مساحت و کاربردهای آن

۱۱۵ تمرین‌ها

۱۲۵ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۳۴ پاسخ‌نامه کلیدی

عنوان

صفحه

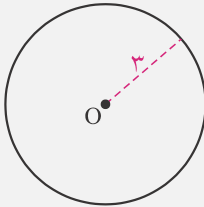
۱۳۵	فصل چهارم: تجسم فضایی
۱۳۶	درس اول: خط، نقطه و صفحه
۱۴۷	درس دوم: تفکر تجسمی
۱۵۱	درس سوم: برش
۱۵۵	درس چهارم: دورن حول محور
۱۵۸	تمرین‌ها
۱۶۶	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۷۴	پاسخ‌نامه کلیدی
۱۷۵	پرسش‌های کنکور سراسری رشته‌های ریاضی و تجربی داخل و خارج کشور ۱۳۹۵
۱۷۸	پاسخ‌نامه کلیدی
۱۷۹	پاسخ‌نامه هندسه ۱۰ ام شهاب
۱۸۰	پاسخ تمرین‌های فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال
۱۸۹	پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال
۲۰۴	پاسخ تمرین‌های فصل دوم: قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن
۲۱۹	پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل دوم: قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن
۲۳۳	پاسخ تمرین‌های فصل سوم: چندضلعی‌ها
۲۵۰	پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل سوم: چندضلعی‌ها
۲۶۵	پاسخ تمرین‌های فصل چهارم: تجسم فضایی
۲۷۶	پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل چهارم: تجسم فضایی
۲۸۷	پاسخ پرسش‌های کنکور سراسری رشته‌های ریاضی و تجربی داخل و خارج کشور ۱۳۹۵
۲۹۲	پرسش‌های کنکور سراسری رشته‌های ریاضی و تجربی داخل و خارج کشور ۱۳۹۸
۲۹۳	پاسخ پرسش‌های کنکور سراسری رشته‌های ریاضی و تجربی داخل و خارج کشور ۱۳۹۸
۲۹۵	پرسش‌های کنکور سراسری رشته‌های ریاضی و تجربی داخل و خارج کشور ۱۳۹۹
۲۹۷	پاسخ پرسش‌های کنکور سراسری رشته‌های ریاضی و تجربی داخل و خارج کشور ۱۳۹۹



فصل اول

ترسیم‌های هندسی و استدلال

ترسیم



- برای ترسیم، تنها از خط‌کش و پرگار استفاده می‌کنیم.
- برای پیدا کردن مجموعه نقاطی که از نقطه O به فاصله یکسان هستند، از پرگار استفاده می‌کنیم. مثلاً برای مجموعه نقاط به فاصله ۳ از O ، پرگار را به شعاع ۳ باز می‌کنیم، دایره‌ای به شعاع ۳ و مرکز O رسم می‌کنیم.

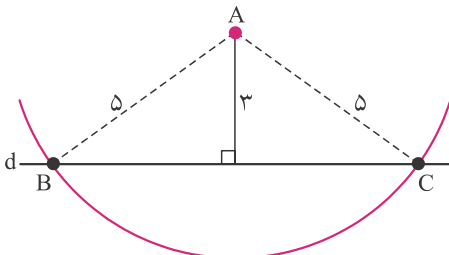
مثال: در شکل روبه‌رو، فاصله نقطه A ، از خط d برابر ۳ است.

(الف) روی خط d ، چند نقطه به فاصله ۵ از نقطه A وجود دارد؟

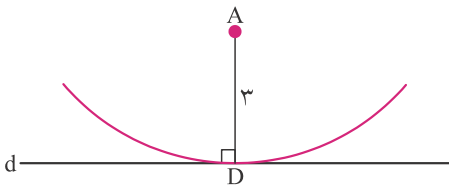
(ب) روی خط d ، چند نقطه به فاصله ۳ از نقطه A وجود دارد؟

(ج) روی خط d ، چند نقطه به فاصله ۲ از نقطه A وجود دارد؟

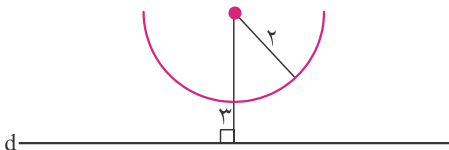
پاسخ: (الف) دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۵ رسم می‌کنیم، چون $۵ > ۳$ است، دایره خط d را در دو نقطه قطع می‌کند. پس پاسخ مسئله دو نقطه B و C است.



(ب) دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۳ رسم می‌کنیم، چون $۳ = ۳$ است، دایره خط d را در یک نقطه قطع می‌کند. پس پاسخ مسئله نقطه D است.



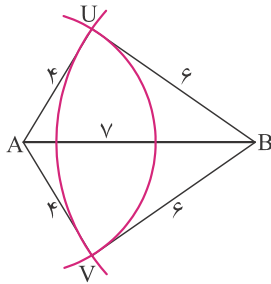
(ج) دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۲ رسم می‌کنیم، چون $۲ < ۳$ است، دایره خط d را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند. پس پاسخ مسئله صفر نقطه است.



مثال: در شکل روبه‌رو، می‌دانیم $AB = ۷$ است. نقطه‌ای پیدا کنید که $BC = ۶$ و $AC = ۴$ باشد.

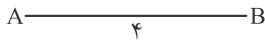


پاسخ: دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۴ رسم می‌کنیم (دایره اول). سپس دایره‌ای به مرکز B و به شعاع ۶ رسم می‌کنیم (دایره دوم). این دو دایره یکدیگر را در نقاط U و V قطع می‌کنند. نقطه U روی دایره اول است، پس $AU=4$ است، همچنین روی دایره دوم است، پس $BU=6$ است. برای V به همین شکل داریم $AV=4$ و $BV=6$. پس U و V پاسخ مسئله هستند.

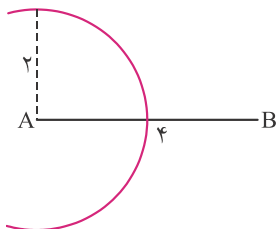


مثال: توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلثی به طول اضلاع ۲، ۳ و ۴ رسم کرد.

پاسخ: ابتدا پاره‌خط AB به طول ۴ را رسم می‌کنیم.

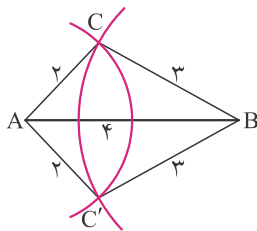


دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۲ رسم می‌کنیم (دایره اول).



سپس دایره‌ای به مرکز B و به شعاع ۳ رسم می‌کنیم (دایره دوم).

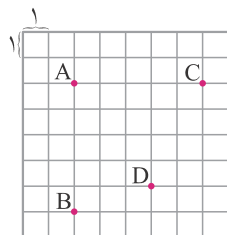
این دو دایره هم‌دیگر را در نقاط C و C' قطع می‌کنند. با توجه به شکل، مثلث‌های ABC و ABC' پاسخ مسئله هستند.



مثال: در شکل روبه‌رو، طول ضلع هر مربع ۱ است. دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۵ رسم می‌کنیم.

(الف) نشان دهید این دایره از نقاط B و C می‌گذرد.

(ب) نشان دهید این دایره از نقطه D می‌گذرد.



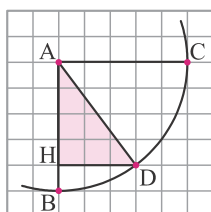
پاسخ: (الف) فاصله عمودی نقطه B از A و فاصله افقی نقطه C از A برابر با ۵ است. پس $AB=AC=5$ است و دایره از نقاط

B و C می‌گذرد.

(ب) در مثلث AHD ، رابطه فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$AD^2 = AH^2 + DH^2 \Rightarrow AD^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow AD = \sqrt{25} = 5$$

چون $AD=5$ است، دایره از نقطه D می‌گذرد.



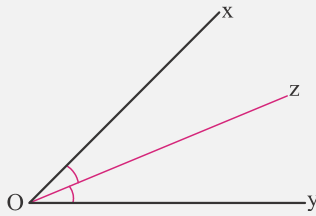
برخی خواص نیمساز و ترسیم آن

شهاب

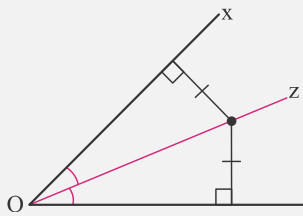


تعریف نیمساز: نیم خطی که یک زاویه را به دو زاویه برابر تقسیم می کند نیمساز می گویند.

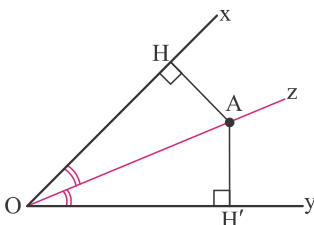
- تمامی نقاط روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن به یک فاصله اند.



- اگر نقطه ای درون یک زاویه از دو ضلع آن به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن قرار دارد.

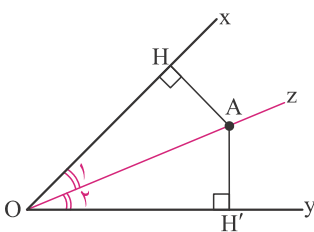


مثال: نقطه A روی نیمساز زاویه \widehat{xOy} قرار دارد. ثابت کنید $AH = AH'$.

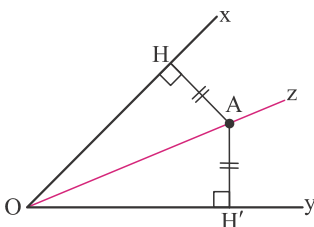


پاسخ: ثابت کنید دو مثلث OAH و OAH' هم نهشت هستند.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \\ OA = OA \\ \widehat{H} = \widehat{H}' = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وز}} \triangle OAH \cong \triangle OAH' \Rightarrow AH = AH'$$

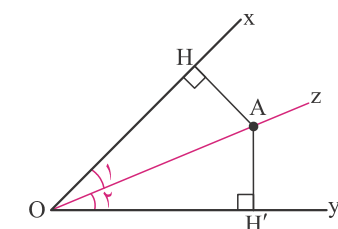


مثال: فاصله نقطه A از Ox و Oy برابر است. ثابت کنید نقطه A روی نیمساز زاویه xOy قرار دارد.



پاسخ: ثابت می کنیم دو مثلث OAH و OAH' هم نهشت هستند.

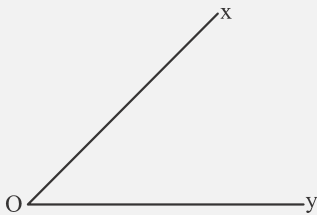
$$\left. \begin{array}{l} AH = AH' \\ OA = OA \\ \widehat{H} = \widehat{H}' = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وض}} \triangle OAH \cong \triangle OAH' \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$$



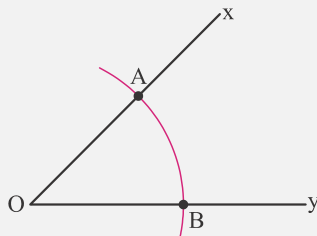


روش رسم نیمساز:

برای رسم نیمساز زاویه \widehat{xOy} این گونه عمل می‌کنیم:

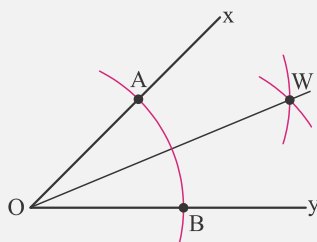


- کمانی به مرکز O رسم می‌کنیم تا دو ضلع زاویه را در نقاط A و B قطع کند.



- دو کمان به مرکزهای A و B و با شعاع‌های برابر رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه W قطع کنند.

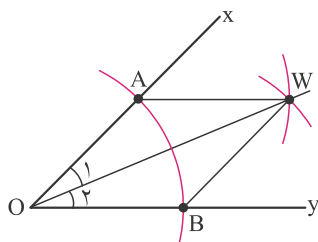
- O را به W وصل می‌کنیم. OW نیمساز است.



مثال: درستی روش رسم بالا را اثبات کنید.

پاسخ: ثابت می‌کنیم دو مثلث OAW و OBW هم‌نهشت هستند. می‌دانیم شعاع‌های کمان‌های به مرکز A و B برابر هستند. پس

$AW = BW$ است:



$$\left. \begin{array}{l} AW = BW \\ OA = OB \\ OW = OW \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAW \cong \triangle OBW \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$$

برخی خواص عمودمنصف و ترسیم آن



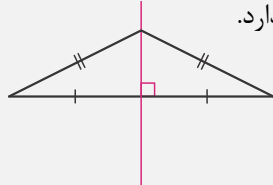
تعریف عمودمنصف: به خطی که بر یک پاره‌خط عمود باشد و از وسط

آن بگذرد، عمودمنصف آن پاره‌خط می‌گویند.

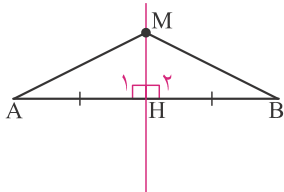
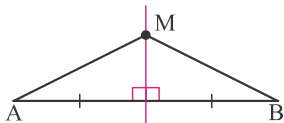


- تمامی نقاط روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن به یک فاصله‌اند.

- اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن قرار دارد.



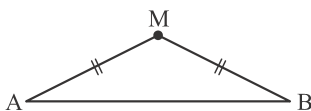
مثال: نقطه M روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد. ثابت کنید $MA = MB$.



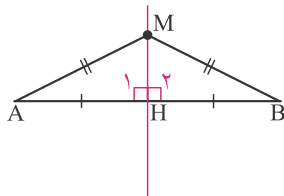
پاسخ: ثابت می‌کنیم دو مثلث MAH و MBH هم‌نهشت هستند:

$$\left. \begin{array}{l} AH = BH \\ MH = MH \\ \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle MAH \cong \triangle MBH \Rightarrow MA = MB$$

مثال: فاصله نقطه M از A و B برابر است. ثابت کنید نقطه M روی عمود منصف AB قرار دارد.



پاسخ: از نقطه M بر ضلع AB عمودی رسم می‌کنیم. ثابت می‌کنیم دو مثلث MAH و MBH هم‌نهشت هستند:



$$\left. \begin{array}{l} MA = MB \\ MH = MH \\ \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض}} \triangle MAH \cong \triangle MBH \Rightarrow AH = BH$$

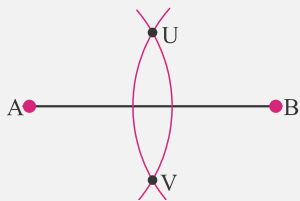
پس MH بر AB عمود است و هم از وسط آن می‌گذرد، در نتیجه عمود منصف آن است.

روش رسم عمود منصف:

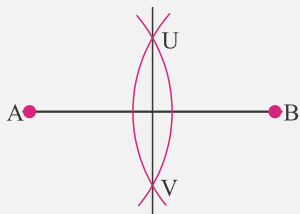
برای رسم عمود منصف پاره خط AB این‌گونه عمل می‌کنیم:



- دو کمان به شعاع‌های برابر (بزرگ‌تر از نصف AB) و به مرکزهای A و B رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در U و V قطع کنند.

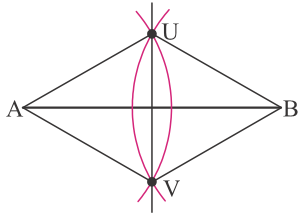


- U و V را به هم وصل می‌کنیم. UV عمود منصف AB است.



مثال: درستی روش رسم عمودمنصف را اثبات کنید.

پاسخ: پیش از این ثابت کردیم که اگر فاصله نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط برابر باشد، آن نقطه روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد. شعاع دو کمان رسم شده برابر است:



$$AU = BU \Rightarrow U \text{ روی عمودمنصف } AB \text{ است}$$

$$AV = BV \Rightarrow V \text{ روی عمودمنصف } AB \text{ است}$$

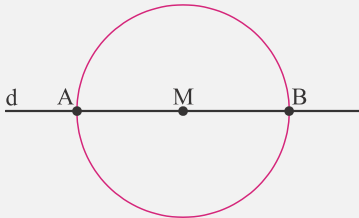
نقاط U و V روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند و برای مشخص شدن یک خط، دو نقطه کافی است، پس خط گذرنده از U و V عمودمنصف AB است.

رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی خط:

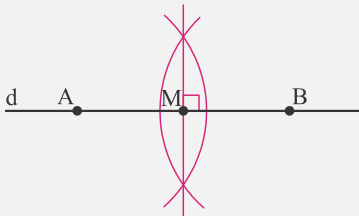
- خط d و نقطه M روی آن مفروض است. می‌خواهیم از نقطه M خطی عمود بر d رسم کنیم.



- کمانی به مرکز M رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند.

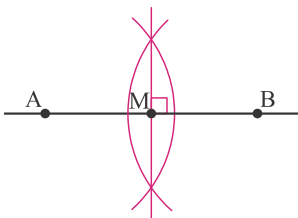


- عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم. این عمودمنصف خطی است که از نقطه M بر d عمود است.



مثال: درستی روش بالا را توضیح دهید.

پاسخ: ابتدا کمانی به مرکز M زده‌ایم، پس $MA = MB$ است و نقطه M وسط AB است. عمودمنصف AB خطی است که از وسط AB می‌گذرد و بر آن عمود است. پس عمودمنصف در نقطه M بر AB عمود است.



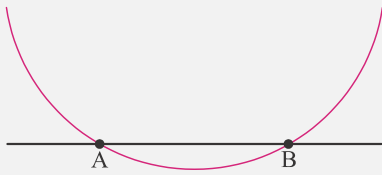
رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج خط:

- خط d و نقطه T خارج آن مفروض است. می‌خواهیم از نقطه T خطی عمود بر d رسم کنیم.

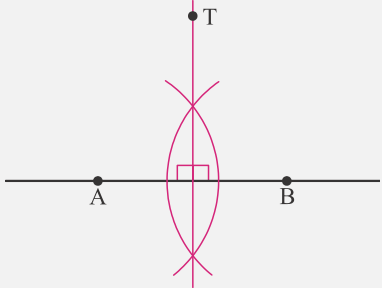
T

- کمانی به مرکز T رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند.

T

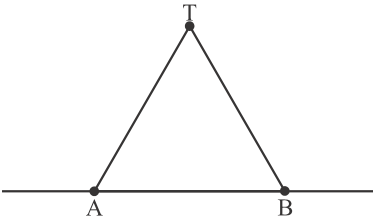


- عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم. این عمودمنصف خطی است که از نقطه T بر d عمود است.



مثال: درستی روش بالا را اثبات کنید.

پاسخ: ابتدا کمانی به مرکز T زده‌ایم، پس $TA = TB$ است. مثلث TAB متساوی‌الساقین است. می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین، عمودمنصف، ارتفاع و میانه بر هم منطبق هستند، پس عمودمنصف AB از T می‌گذرد.

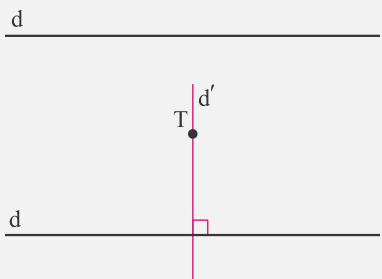


رسم خط موازی با یک خط:

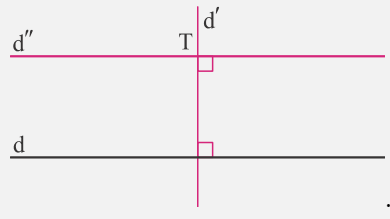
- خط d و نقطه T خارج آن مفروض است. می‌خواهیم از نقطه T خطی موازی d رسم کنیم.

T

- از نقطه T خط d' عمود بر خط d را رسم می‌کنیم.



- از نقطه T خط d'' را عمود بر خط d' رسم می‌کنیم.



- d'' و d موازی هستند.

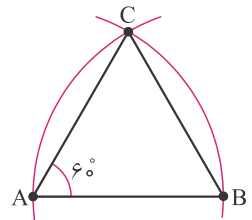
مثال: درستی روش رسم بالا را توضیح دهید.

پاسخ: دو خط d و d'' بر خط d' عمود هستند، پس d و d'' موازی هستند.

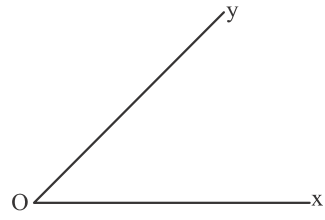
کاربردهای ترسیم

مثال: روش ترسیم یک زاویه 60° را توضیح دهید.

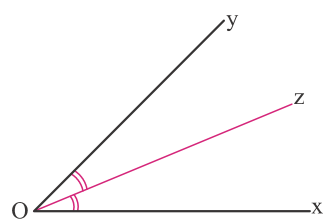
پاسخ: یک مثلث متساوی‌الاضلاع رسم می‌کنیم. اندازه هر زاویه برابر با 60° می‌شود.



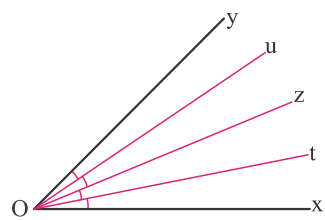
مثال: زاویه \widehat{xOy} را به چهار زاویه برابر تقسیم کنید.



پاسخ: ابتدا نیمساز زاویه xOy را رسم می‌کنیم، $\widehat{xOz} = \widehat{zOy}$ است.



سپس نیمساز زاویه‌های xOz و zOy را رسم می‌کنیم. چون $\widehat{uOy} = \widehat{zOu} = \widehat{tOz} = \widehat{xOt}$ است، پس زاویه xOy به چهار زاویه برابر تقسیم شده است.

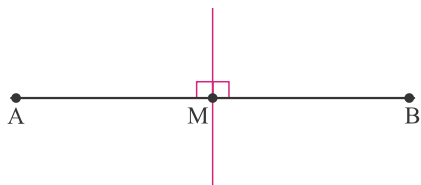




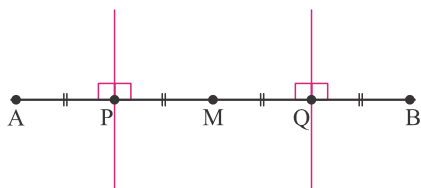
مثال: پاره خط AB را به ۴ پاره خط برابر تقسیم کنید.



پاسخ: ابتدا عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم تا نقطه M به دست آید.



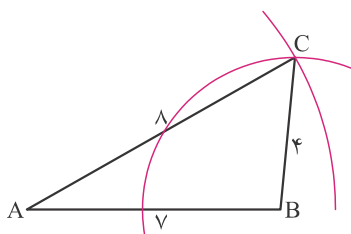
سپس عمود منصف پاره خط‌های AM و MB را رسم می‌کنیم تا نقاط P و Q به دست آیند. چون $AP = PM = MQ = QB$ است، پاره خط AB به چهار قسمت برابر تقسیم شده است.



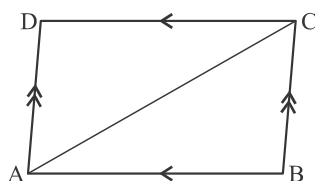
مثال: روش رسم متوازی الاضلاعی را توضیح دهید که طول اضلاعش ۴ و ۷ باشد و طول یکی از قطرهایش ۸ باشد.

پاسخ: متوازی الاضلاع $ABCD$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $AB = 7$ ، $BC = 4$ و $AC = 8$ باشد. ابتدا مثلث ABC را رسم

می‌کنیم. طول اضلاع ۴، ۷ و ۸ است.



سپس از رأس C خطی موازی AB و از رأس A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا نقطه D به دست آید.

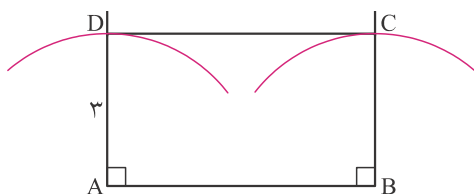


مثال: روش رسم مستطیلی به طول اضلاع ۳ و ۶ را توضیح دهید.

پاسخ: ابتدا پاره خط AB به طول ۶ را رسم می‌کنیم و از نقاط A و B دو خط عمود بر AB رسم می‌کنیم.

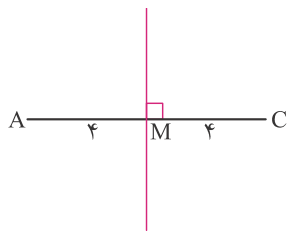


کمان‌هایی به شعاع ۳ و به مرکزهای A و B رسم می‌کنیم تا دو خط d و d' را در نقاط D و C قطع کند. C و D را به هم وصل می‌کنیم. چهارضلعی $ABCD$ مستطیلی به طول اضلاع ۳ و ۶ است.

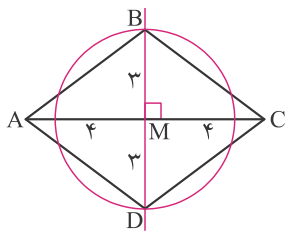


مثال: روش رسم یک لوزی را توضیح دهید که طول قطرهاش ۸ و ۶ باشد.

پاسخ: ابتدا قطر AC به طول ۸ را رسم می‌کنیم و سپس عمودمنصف آن را رسم می‌کنیم. $AM = CM = 4$ می‌شود.

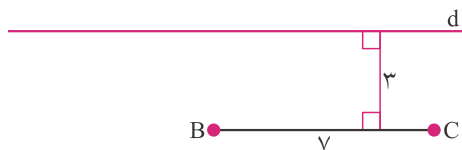


سپس به مرکز M ، دایره‌ای به شعاع ۳ رسم می‌کنیم تا عمودمنصف را در نقاط B و D قطع کند. B و D را به A و C وصل می‌کنیم. چهارضلعی $ABCD$ لوزی به طول قطرهای ۸ و ۶ است.

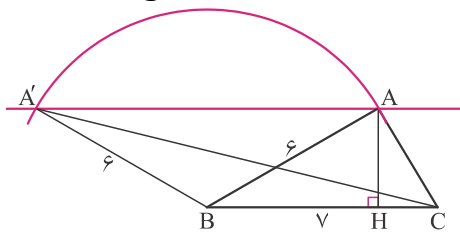


مثال: در مثلث ABC می‌دانیم $BC = 7$ ، $AB = 6$ و $AH = 3$ است. (AH ارتفاع وارد از رأس A است). روش رسم مثلث را توضیح دهید. مسئله چند جواب دارد؟

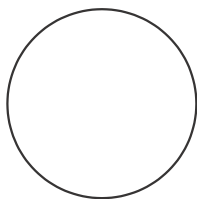
پاسخ: ابتدا ضلع BC به طول ۷ را رسم می‌کنیم و خط d موازی با آن به فاصله ۳ از آن رسم می‌کنیم.



دایره‌ای به شعاع ۶ و به مرکز B رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و A' قطع کند. دو مثلث ABC و $A'BC$ پاسخ مسئله هستند.



مثال: در شکل روبه‌رو، یک دایره دیده می‌شود. به کمک خط‌کش و پرگار، مرکز دایره را پیدا کنید.



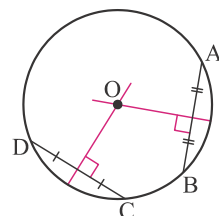
پاسخ: دو وتر دلخواه و غیرموازی AB و CD را رسم می‌کنیم. اگر O مرکز دایره و r شعاع

دایره باشد، می‌دانیم $OA = OB = r$ است، پس O روی عمودمنصف AB قرار دارد. همچنین

$OC = OD = r$ است، پس O روی عمودمنصف CD قرار دارد. پس عمودمنصف‌های AB و

CD را رسم می‌کنیم، محل تلاقی دو عمودمنصف نقطه‌ای است که از هر چهار نقطه به یک فاصله

است و مرکز دایره است.



استدلال استقرایی

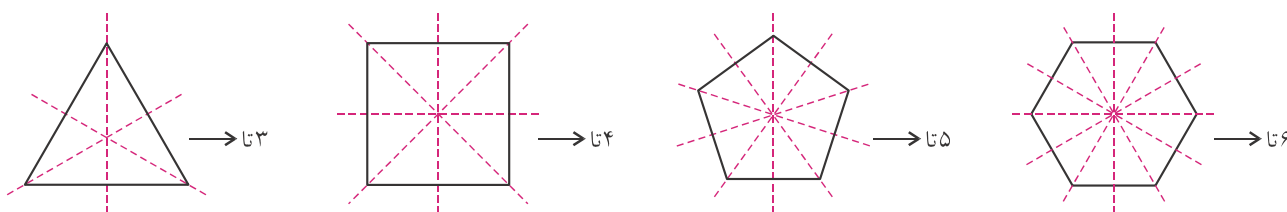


- استدلال استقرایی بر اساس مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت خاص است و به اصطلاح «از جزء به کل می‌رسد».

- در استدلال استقرایی نمی‌توان همواره به نتیجه گرفته شده مطمئن بود. مثلاً اگر فردی با مشاهده پنج مسافر آمریکایی که اضافه وزن دارند، نتیجه‌گیری کند که همه آمریکایی‌ها اضافه وزن دارند، از استدلال استقرایی استفاده کرده است.

مثال: به روش استدلال استقرایی نشان دهید که یک n ضلعی منتظم، n تا محور تقارن دارد.

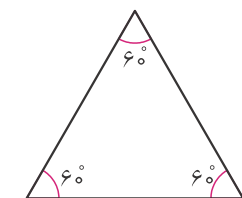
پاسخ: تعداد محورهای تقارن مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع، پنج ضلعی منتظم و شش ضلعی منتظم را بررسی می‌کنیم:



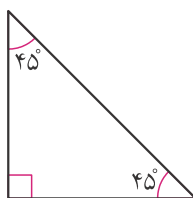
حکم مسأله را در چهار حالت بررسی کردیم و درست بود. با استدلال استقرایی نتیجه می‌گیریم که یک n ضلعی منتظم به تعداد n تا محور تقارن دارد.

مثال: به روش استقرایی نشان دهید که مجموع زاویه‌های یک مثلث، 180° درجه است.

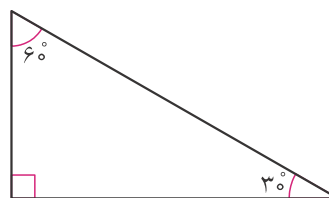
پاسخ: سه مثلث زیر را در نظر می‌گیریم:



$$60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$



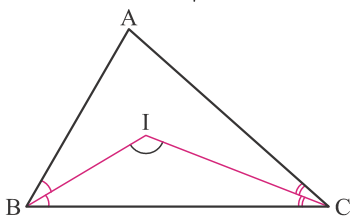
$$90^\circ + 45^\circ + 45^\circ = 180^\circ$$

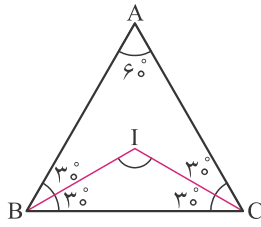


$$90^\circ + 60^\circ + 30^\circ = 180^\circ$$

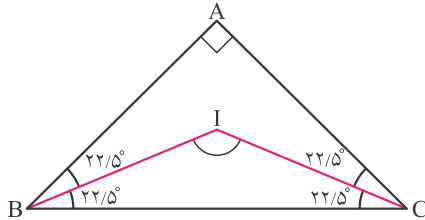
با توجه به سه مثلث بالا، با استدلال استقرایی نتیجه می‌گیریم که مجموع زوایای همه مثلث‌ها 180° درجه است.

مثال: در مثلث ABC ، نیمساز زاویه‌های B و C را رسم می‌کنیم. به روش استدلال استقرایی ثابت کنید: $\hat{I} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$.



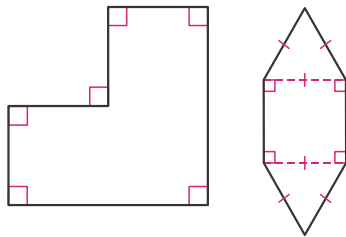


$$\left. \begin{aligned} \hat{I} + 30^\circ + 30^\circ &= 180^\circ \Rightarrow \hat{I} = 120^\circ \\ 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} &= 90^\circ + \frac{60^\circ}{2} = 120^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{I} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$$



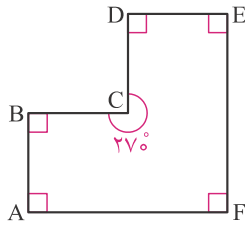
$$\left. \begin{aligned} \hat{I} + 22/5^\circ + 22/5^\circ &= 180^\circ \Rightarrow \hat{I} = 135^\circ \\ 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} &= 90^\circ + \frac{90^\circ}{2} = 135^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{I} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$$

با توجه به دو مثلث بالا، با استدلال استقرایی نتیجه می‌گیریم رابطه $\hat{I} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ برقرار است.

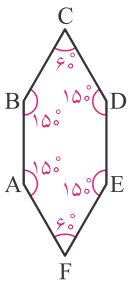


مثال: به دو شکل روبه‌رو توجه کنید. به کمک این دو شکل و با روش استدلال استقرایی نشان دهید مجموع زوایای یک شش ضلعی برابر است با 720° درجه.

پاسخ:



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} + \hat{F} + \hat{G} = 90^\circ + 90^\circ + 270^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 720^\circ$$



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} + \hat{F} = 15^\circ + 15^\circ + 60^\circ + 15^\circ + 15^\circ + 60^\circ = 720^\circ$$

چون مجموع زوایای دو شش ضلعی بالا برابر با 720° درجه است، نتیجه می‌گیریم مجموع زوایای یک شش ضلعی برابر با 720° درجه است.

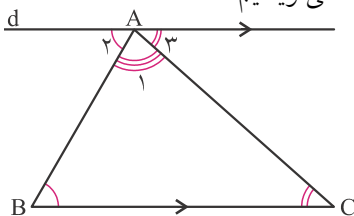
استدلال استنتاجی



- استدلال استنتاجی براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه حقایقی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم. مثلاً اگر فردی در جایی باشد که باران ببارد و نتیجه‌گیری کند که در آسمان ابر وجود دارد، از استدلال استنتاجی استفاده کرده است.

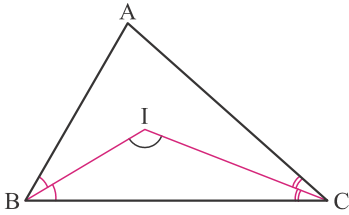
مثال: به روش استدلال استنتاجی ثابت کنید که مجموع زوایای یک مثلث 180° است.

پاسخ: از رأس A خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم به کمک قضیه «خطوط موازی و مورب» می‌نویسیم:

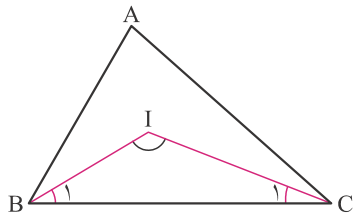


$$\left. \begin{aligned} d \parallel BC &\Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_2 \\ d \parallel BC &\Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$

مثال: در مثلث ABC ، نیمساز زاویه‌های B و C را رسم می‌کنیم. به روش استدلال استنتاجی ثابت کنید: $\hat{I} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$.



پاسخ:



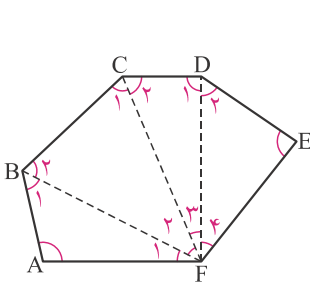
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A}$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{B}_1 &= \frac{\hat{B}}{2} \\ \hat{C}_1 &= \frac{\hat{C}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$

$$\hat{I} + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ \Rightarrow \hat{I} = 180^\circ - (\hat{B}_1 + \hat{C}_1) = 180^\circ - (90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}) = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$$

مثال: ثابت کنید مجموع زاویه‌های یک شش ضلعی برابر است با 180° درجه.

پاسخ:



$$\left. \begin{aligned} \Delta ABF: \hat{A} + \hat{B}_1 + \hat{F}_1 &= 180^\circ \\ \Delta BCF: \hat{B}_2 + \hat{C}_1 + \hat{F}_2 &= 180^\circ \\ \Delta CDE: \hat{C}_2 + \hat{D}_1 + \hat{F}_3 &= 180^\circ \\ \Delta DEF: \hat{D}_2 + \hat{E} + \hat{F}_4 &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B}_1 + \hat{F}_1 + \hat{B}_2 + \hat{C}_1 + \hat{F}_2 + \hat{C}_2 + \hat{D}_1 + \hat{F}_3 + \hat{D}_2 + \hat{E} + \hat{F}_4 = 4 \times 180^\circ = 720^\circ$$

$$\Rightarrow \overbrace{\hat{A} + \hat{B}_1 + \hat{B}_2}^{\hat{B}} + \overbrace{\hat{C}_1 + \hat{C}_2}^{\hat{C}} + \overbrace{\hat{D}_1 + \hat{D}_2}^{\hat{D}} + \hat{E} + \overbrace{\hat{F}_1 + \hat{F}_2 + \hat{F}_3 + \hat{F}_4}^{\hat{F}} = 720^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} + \hat{F} = 720^\circ$$

همرسی عمودمنصف‌های مثلث:

- در یک مثلث، عمودمنصف‌های سه ضلع هم‌رس هستند. (در یک نقطه به هم می‌رسند).

- $OA = OB = OC$ می‌شود.

