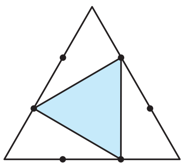
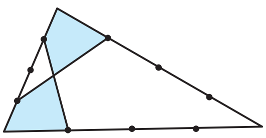
☆**۱۸۰.** هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع مقابل به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم شده است. مساحت مثلث رنگی چند برابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع است؟ (سراسری ریاضی- ۸۸)



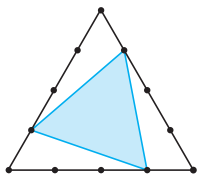
۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{4}{9}$
۴) $\frac{1}{2}$

☆**۱۸۱.** در شکل روبه‌رو هر ضلع مثلث به ۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. دو چهارضلعی رنگی نسبت به هم کدام وضع را دارند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۹)



۱) هم‌مساحت
۲) هم‌محیط
۳) همنهشت
۴) متشابه

☆**۱۸۲.** هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به نسبت‌های ۱ و ۳ تقسیم شده است. مساحت مثلث رنگی چند برابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۸)

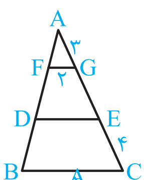


۱) $\frac{1}{3}$
۲) $\frac{3}{8}$
۳) $\frac{7}{16}$
۴) $\frac{5}{8}$

قسمت دوم: قضیهٔ تالس

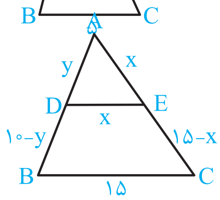
تست‌های متنوعی از قضیهٔ تالس در کنکور مطرح می‌شود به‌خصوص تالس‌های چندگانه یا قرار گرفتن متوازی‌الاضلاع در داخل یک مثلث.

☆**۱۸۳.** در مثلث ABC، $GF \parallel DE \parallel BC$ است. اندازهٔ DE کدام است؟



۱) ۴
۲) ۳
۳) $\frac{7}{3}$
۴) $\frac{5}{3}$

☆**۱۸۴.** در شکل روبه‌رو $DE \parallel BC$. اگر محیط مثلث ADE با محیط ذوزنقهٔ $BDEC$ برابر باشد، آن‌گاه x کدام است؟

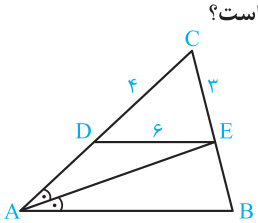


۱) ۱۰
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) ۱۳

☆**۱۸۵.** اندازه‌های قاعده‌های یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه ۱۲ و ۴۸ است. فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی ساق‌ها از نزدیک‌ترین رأس ذوزنقه ۱۶ است. طول ساق بزرگ ذوزنقه کدام است؟

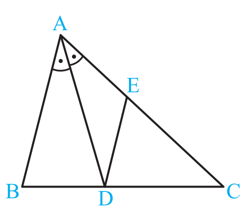
۱) ۲۰
۲) ۴۰
۳) ۶۰
۴) ۸۰

☆**۱۸۶.** در شکل روبه‌رو $AB \parallel DE$، $CE = 3$، $DE = 6$ و $CD = 4$. اگر AE نیمساز زاویهٔ A باشد، اندازهٔ BE کدام است؟



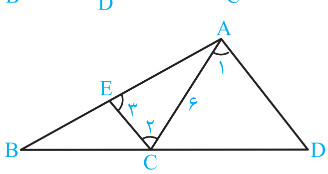
۱) ۴/۵
۲) ۳/۵
۳) ۳
۴) ۲

۱۸۷. در شکل روبه‌رو، $5AB = 3AC = 60$، AD نیمساز زاویهٔ A و $AB \parallel DE$ است. اندازهٔ EC کدام است؟



۱) ۱۲
۲) ۱۲/۵
۳) ۱۳/۵
۴) ۱۵

۱۸۸. در شکل روبه‌رو داریم $\hat{3}=\hat{2}=\hat{1}$. اگر $AB = 15$ و $AC = 6$ باشد، $\frac{BD}{CD}$ چقدر است؟



۱) $\frac{5}{3}$
۲) $\frac{5}{2}$
۳) ۲
۴) ۳

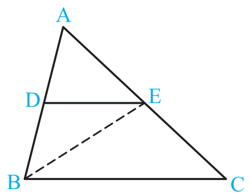
۱۸۹. در مثلث ABC به اضلاع $AB = ۶$ ، $AC = ۳$ و $BC = ۴$. نقاط D، E و F به ترتیب روی اضلاع AB، AC و BC قرار دارند، به طوری‌که چهارضلعی $BDEF$ لوزی است. اندازهٔ ضلع این لوزی کدام است؟

۱) ۲
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) ۳
۴) $\frac{۱۲}{۵}$

۱۹۰. در ذوزنقه‌ای اندازهٔ قاعده‌ها ۴ و ۹ واحد و اندازهٔ ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون ذوزنقه تشکیل می‌شود، کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۴)

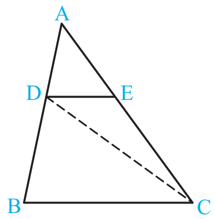
۱) ۱۱/۴
۲) ۱۱/۶
۳) ۱۲/۲
۴) ۱۲/۸

۱۹۱. در مثلث ABC، پاره‌خط DE موازی ضلع BC و $AD = \frac{۴}{۵}DB$ است. مساحت مثلث EBC چند برابر مساحت مثلث EBD است؟ (سراسری ریاضی- ۹۳)



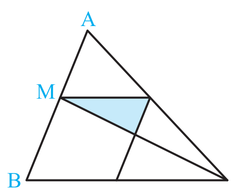
۱) ۲
۲) ۲/۲۵
۳) ۲/۵
۴) ۲/۷۵

☆**۱۹۲.** در شکل مقابل $\frac{۳}{۷} = \frac{AD}{AB}$ و $DE \parallel BC$. مساحت مثلث ADE چند درصد مساحت مثلث DEC است؟ (سراسری تجربی- ۸۹)



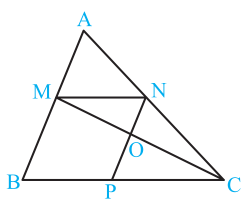
۱) ۷۰
۲) ۷۵
۳) ۷۸
۴) ۸۴

☆**۱۹۳.** در شکل مقابل $\frac{۲}{۳} = \frac{MA}{MB}$. مساحت مثلث رنگی چند درصد مساحت متوازی‌الاضلاع است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۰)



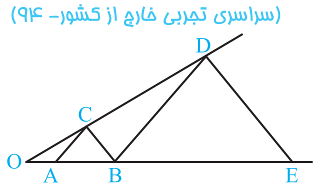
۱) ۲۰
۲) ۲۴
۳) ۲۵
۴) ۳۰

۱۹۴. در شکل مقابل $\frac{۳}{۷} = \frac{MA}{MB}$ و چهارضلعی $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است. مساحت مثلث OMN چند درصد مساحت مثلث AMN است؟ (سراسری تجربی- ۹۰)



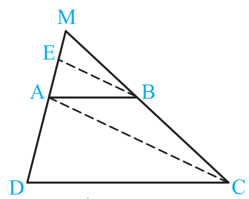
۱) ۶۳
۲) ۶۰
۳) ۷۰
۴) ۸۴

☆**۱۹۵.** در شکل روبه‌رو، دو جفت پاره‌خط موازی‌اند. $OA = ۳$ و $AB = ۵$ است. اندازهٔ پاره‌خط BE کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۴)



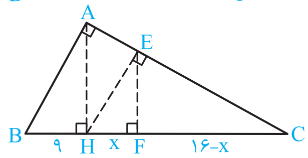
۱) $۱۳\frac{۱}{۳}$
۲) $۱۲\frac{۲}{۳}$
۳) $۱۱\frac{۱}{۳}$
۴) $۱۰\frac{۲}{۳}$

۱۹۶. در ذوزنقهٔ $ABCD$، پاره‌خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD = ۷$ و $AE = ۳$ باشد، طول پاره‌خط MD کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۳)



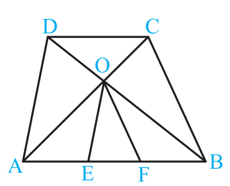
۱) ۱۲
۲) ۱۲/۲۵
۳) ۱۲/۵
۴) ۱۲/۷۵

☆**۱۹۷.** در شکل مقابل، ارتفاع هر سه مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازهٔ x کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۶)



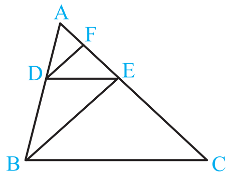
۱) ۴/۵۴
۲) ۵/۳۶
۳) ۵/۷۶
۴) ۶/۷۵

۱۹۸. در ذوزنقهٔ مقابل اندازهٔ قاعده‌ها ۶ و ۱۰ است. از نقطهٔ O محل تلاقی قطرها، خطوطی موازی ساق‌ها رسم شده است. طول پاره‌خط EF کدام است؟



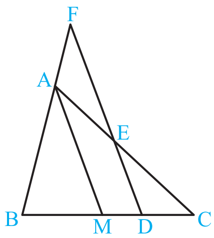
۱) ۲/۴
۲) ۲/۵
۳) ۱/۶
۴) ۳/۲

☆۱۹۹. در شکل مقابل $DE \parallel BC$ ، $DF \parallel BE$ ، $DE = ۸$ و $BC = ۲۰$ است. حاصل $\frac{EF}{AC}$ کدام است؟



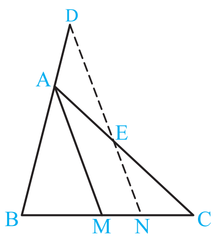
۱) ۰/۲۴
۲) ۰/۲۷
۳) ۰/۳
۴) ۰/۱۸

۲۰۰. در مثلث ABC طول میانهٔ $AM = ۳۰$ ، $\frac{CD}{BD} = \frac{۲}{۳}$ و $DF \parallel AM$ است. طول پاره‌خط EF کدام است؟



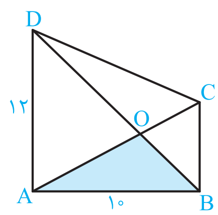
۱) ۱۵
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۹

☆۲۰۱. در مثلث ABC $\left(AB = \frac{۲}{۳}AC\right)$ ، پاره‌خط ND موازی میانهٔ AM است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی -۹۴)



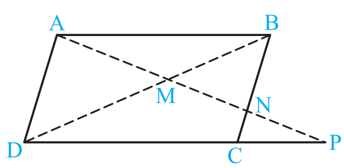
۱) $\frac{۴}{۹}$
۲) $\frac{۵}{۹}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۴}{۵}$

۲۰۲. در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ مقابل اندازهٔ ساق $AB = ۱۰$ ، قاعدهٔ بزرگ $AD = ۱۲$ و مساحت مثلث AOB، ۳۵ است. مساحت ذوزنقه کدام است؟



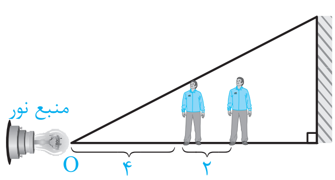
۱) ۲۸۸
۲) ۱۴۴
۳) ۲۰۰
۴) ۱۸۰

☆۲۰۳. در شکل روبه‌رو $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است. حاصل $MN \times MP$ برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور -۹۴)



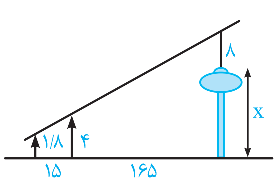
۱) $AB^۲$
۲) $AD^۲$
۳) $MD^۲$
۴) $MA^۲$

۲۰۴. در شکل مقابل تصویر سایهٔ فردی به ارتفاع ۱/۶ متر روی دیوار مقابل، ۴ متر است. اگر این فرد ۲ متر به دیوار نزدیک شود، تصویر سایهٔ جدید فرد روی دیوار چند متر است؟



۱) $\frac{۸}{۵}$
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) $\frac{۸}{۳}$

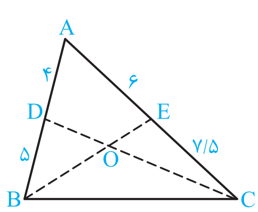
☆۲۰۵. در شکل مقابل دکلی به طول ۸ متر بر بالای برجی نصب شده است. دید چشمی ناظر به ارتفاع ۱/۸ متر، از ارتفاع دکل و تیرک در یک راستا است. بلندی برج چند متر است؟ (سراسری ریاضی -۸۷)



۱) ۱۹/۸
۲) ۲۰/۲
۳) ۲۰/۸
۴) ۲۱/۲

(سراسری تجربی خارج از کشور -۸۷)

۲۰۶. در شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE کدام است؟

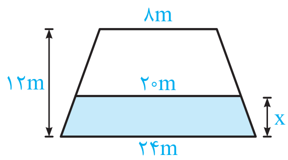


۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۴}{۵}$
۳) $\frac{۵}{۶}$
۴) ۱

۲۰۷. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ ، $AB = ۵$ قاعدهٔ کوچک و $CD = ۱۳$ قاعدهٔ بزرگ می‌باشد. ارتفاع BH را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ H خطی موازی قطر AC رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با ساق AD را E می‌نامیم. حاصل $\frac{AE}{DE}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

۲۰۸. مقطع عرضی یک کانال آب به‌صورت ذوزنقه می‌باشد. ارتفاع آب جاری در کانال چند متر است؟

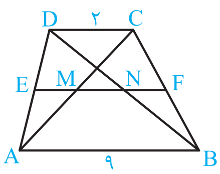


۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

★۲۰۹. در ذوزنقهٔ $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ ، اگر $AB = ۱۰$ ، $CD = ۳$ ، M وسط AB، E نقطهٔ تلاقی قطر AC و پاره‌خط DM و F نقطهٔ تلاقی قطر BD و پاره‌خط CM باشد، آن‌گاه طول پاره‌خط EF کدام است؟

۱) $۱\frac{۵}{۸}$ ۲) $۱\frac{۷}{۸}$ ۳) $۱\frac{۳}{۴}$ ۴) $۱\frac{۱}{۲}$

۲۱۰. در ذوزنقهٔ مقابل EF موازی قاعده‌ها، دو قطر ذوزنقه را در M و N قطع کرده است به طوری‌که $ME = MN = NF$. حاصل $\frac{AE}{DE}$ کدام است؟



۱) ۳/۵ ۲) ۳/۲۵
۳) ۲/۲۵ ۴) ۱/۲۵

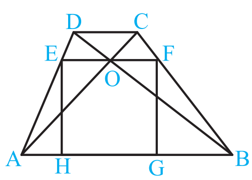
★۲۱۱. قاعده‌های یک ذوزنقه ۷ و ۱۳ است. خطی موازی قاعده‌ها که فاصله‌اش از قاعدهٔ کوچک دو برابر فاصله‌اش از قاعدهٔ بزرگ است، دو ساق را قطع می‌کند. اگر مساحت ناحیهٔ کوچک‌تر ایجادشده ۱۶ باشد، مساحت ناحیهٔ بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

★۲۱۲. در ذوزنقهٔ $ABCD$، وسط‌های ساق‌های CD و AB را به هم وصل کرده‌ایم. اگر قاعدهٔ بزرگ ذوزنقه دو برابر قاعدهٔ کوچک آن باشد $(BC = ۲AD)$، آن‌گاه نسبت مساحت‌های دو ذوزنقهٔ ایجادشده کدام است؟

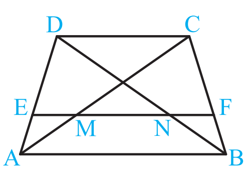
۱) ۱/۲ ۲) ۱/۵ ۳) ۱/۶ ۴) ۱/۴

۲۱۳. در ذوزنقهٔ مقابل اندازهٔ قاعده‌ها $AB = ۴$ و $CD = ۱$ و O نقطهٔ تلاقی قطرها است. اگر چهارضلعی $EFGH$ مربع باشد، مساحت آن کدام است؟



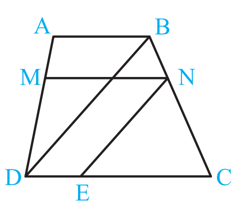
۱) ۲/۸۹ ۲) ۲/۲۵
۳) ۲/۵۶ ۴) ۲/۱۶

۲۱۴. در ذوزنقهٔ $ABCD$ مطابق شکل اندازهٔ قاعده‌ها ۸ و ۱۲ است. اگر $\frac{۳}{۲} = \frac{CF}{BF} = \frac{DE}{AE}$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ پاره‌خط MN کدام است؟



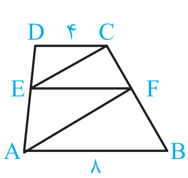
۱) ۴/۸ ۲) ۴
۳) ۳/۶ ۴) ۵/۲

☆۲۱۵. در ذوزنقهٔ مقابل، MN موازی قاعده‌ها و $BD \parallel NE$ است. اگر $\frac{AM}{MD} = \frac{۳}{۷}$ و $CD = ۱۵$ باشد، آن‌گاه اختلاف طول پاره‌خط‌های CE و DE کدام است؟



۱) ۴/۵ ۲) ۵/۵
۳) ۶ ۴) ۵

۲۱۶. در ذوزنقهٔ $ABCD$ مطابق شکل EF موازی CD و CE موازی با AF است. طول پاره‌خط EF کدام است؟

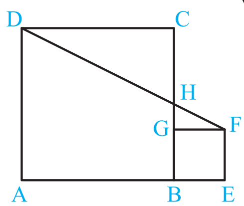


۱) $\frac{۱۶}{۳}$ ۲) ۶
۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۱۰}$

آزمون ۲ جامع فصل دوم

۳۱۵. در تناسب $\frac{m}{n}=\frac{a}{b}$ با فرض $a+m=۴۵$، $b+n=۴۰$ و $m=۵$، مقدار n کدام است؟

۱) $\frac{۴۰}{۹}$ ۲) $\frac{۲۰}{۹}$ ۳) $\frac{۱۵}{۳}$ ۴) $\frac{۲۰}{۳}$

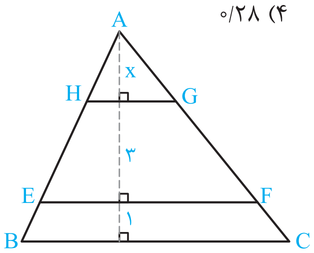


۳۱۶. مساحت مربع‌های ABCD و BEFG به ترتیب ۴۹ و ۱ است. طول پاره‌خط GH کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۷}{۸}$

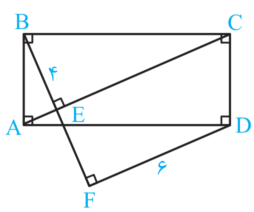
۳۱۷. در مثلث به اضلاع ۳، ۴ و ۵، عمودمنصف بزرگ‌ترین ضلع، ضلع متوسط را در نقطهٔ M قطع می‌کند. نقطهٔ M این ضلع را بــه چــه نســبتی تقسیم می‌کند؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۳۶ ۴) ۰/۲۸



۳۱۸. در شکل مقابل $BC \parallel EF \parallel GH$، $GH=۶$ و $BC=۱۰$ است. طول پاره‌خط EF کدام است؟

۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۷/۵



۳۱۹. با توجه به شکل مقابل، مساحت مستطیل ABCD کدام است؟

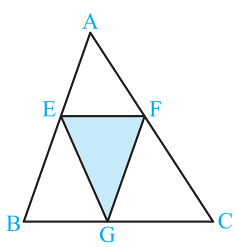
۱) ۳۰
۲) ۲۴
۳) ۴۸
۴) ۴۰

۳۲۰. نسبت مساحت‌های دو پنج‌ضلعی متشابه، $\frac{۴}{۹}$ است. اگر محیط یکی از آن‌ها ۱۲ واحد باشد، دو مقدار برای محیط پنج‌ضلعی دیگر به‌دســت می‌آید. تفاضل این دو مقدار کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۶

۳۲۱. در یک مثلث قائم‌الزاویه طول ارتفاع وارد بر وتر $\sqrt{۴۰}$ و اختلاف اندازهٔ پاره‌خط‌هایی که این ارتفاع بر وتر پدید می‌آورد، ۳ است. طــول وتــر این مثلث کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۳ ۳) ۹ ۴) ۱۲

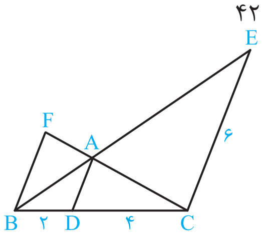


۳۲۲. در شکل روبه‌رو، چهارضــلعی BEFG متوازی‌الاضــلاع و $\frac{AE}{BE}=\frac{۲}{۳}$ اســت. نســبت مســاحت مثلث‌های EFG و ABC کدام است؟

۱) $\frac{۱۲}{۲۵}$ ۲) $\frac{۶}{۲۵}$ ۳) $\frac{۸}{۲۵}$ ۴) $\frac{۵}{۲۵}$

۳۲۳. اندازهٔ قاعده‌های یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه ۴ و ۹ است و قطرهای آن بر هم عمودند. مساحت ذوزنقه کدام است؟

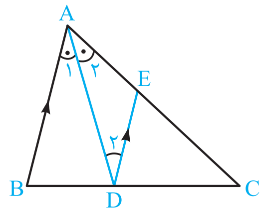
۱) ۴۰ ۲) ۳۶ ۳) ۳۹ ۴) ۴۲



۳۲۴. در شکل مقابل با فرض $BF \parallel CE \parallel AD$، طول پاره‌خط BF کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۳/۵ ۴) ۲

۱۸۷ ۱ **۲** ۳ ۴



$AB \parallel DE$ ، AD مورب $\Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{D}_۲$

$\xrightarrow{\hat{A}_۱=\hat{A}_۲} \hat{A}_۲ = \hat{D}_۲ \Rightarrow AE = DE$

$\overset{\Delta}{ABC} : DE \parallel AB \Rightarrow \dfrac{DE}{AB} = \dfrac{CE}{AC}$

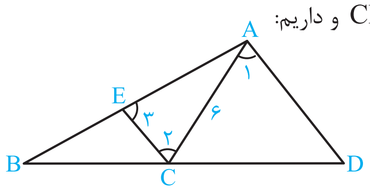
بنابه فرض $۵AB = ۳AC = ۶۰$، پس $AB = ۱۲$ و $AC = ۲۰$، در نتیجه:

$$\frac{DE}{۱۲} = \frac{CE}{۲۰} \xrightarrow{DE=AE} \frac{AE}{۱۲} = \frac{CE}{۲۰} = \frac{AE+CE}{۱۲+۲۰} = \frac{AC}{۳۲}$$

$$\Rightarrow CE = ۲۰ \times \frac{AC}{۳۲} = ۲۰ \times \frac{۲۰}{۳۲} = \frac{۵۰}{۴} = ۱۲/۵$$

۱۸۸ ۱ **۲** ۳ ۴

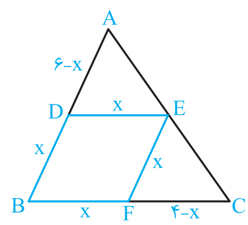
چون $\hat{۳} = \hat{۲}$، پس مثلث ACE متساوی‌الساقین است. $AE = AC = ۶$ و از طرفی $\hat{۲} = \hat{۱}$، پس $CE \parallel AD$ و داریم:



$$CE \parallel AD \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{AE}{AB} = \frac{۶}{۱۵} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{۵}{۲}$$

۱۸۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

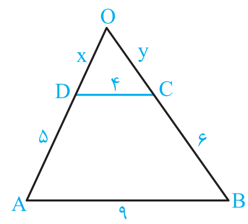
بنابه فرض چهارضلعی $BDEF$ لوزی است، به کمک قضیهٔ تالس و خواص تناسب داریم:



$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{۶-x}{۶} = \frac{x}{۴} = \frac{۶-x+x}{۶+۴} \Rightarrow \frac{x}{۴} = \frac{۶}{۱۰} \Rightarrow x = \frac{۲۴}{۱۰} = \frac{۱۲}{۵}$$

۱۹۰ **۱** ۲ ۳ ۴



$$CD \parallel AB \Rightarrow \frac{OD}{OA} = \frac{CD}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+۵} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow \frac{x}{۵} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow x = ۴$$

$$CD \parallel AB \Rightarrow \frac{OC}{OB} = \frac{CD}{AB} \Rightarrow \frac{y}{y+۶} = \frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{۶} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow y = \frac{۲۴}{۵} = ۴/۸$$

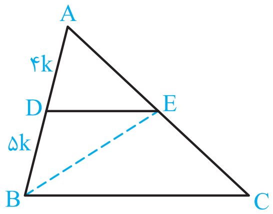
محیط $\overset{\Delta}{ODC} = OD + OC + CD = ۴ + ۴/۸ + ۴ = ۱۲/۸$

۱۹۱ ۱ **۲** ۳ ۴

نکته: قطر هر ذوزنقه آن را به دو مثلث تقسیم می‌کند که نسبت مساحت آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های ذوزنقه است.

بنابه فرض $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{۴}{۵}$. پس $AD = ۴k$ و $DB = ۵k$

پس در ذوزنقهٔ $BDEC$ داریم:



$$\frac{S(EBC)}{S(EBD)} = \frac{BC}{DE}$$

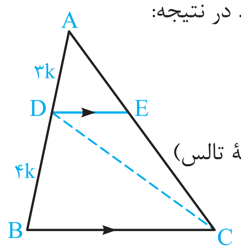
$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{۴k}{۹k} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{BC}{DE} = \frac{۹}{۴}$$

$$\frac{S(EBC)}{S(EBD)} = \frac{BC}{DE} = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$$

۱۹۲ ۱ **۲** ۳ ۴

بنابه فرض $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{۳}{۷}$، پس $AD = ۳k$، $AB = ۷k$ و $BD = ۴k$. دو مثلث ADE و DEC در رأس D هم‌ارتفاعند. در نتیجه:

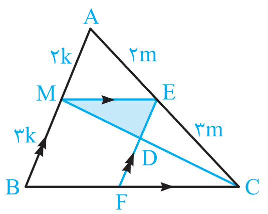


$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{S(ADE)}{S(DEC)} = \dfrac{AE}{CE} \\ \text{(قضیهٔ تالس)}\ \dfrac{AE}{CE} = \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{۳}{۴}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{S(ADE)}{S(DEC)} = \frac{۳}{۴} = \frac{۷۵}{۱۰۰} = ۷۵\%$$

۱۹۳ **۱** ۲ ۳ ۴

بنابه فرض $ME \parallel BC$ و $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{۲}{۳}$. پس بنابه قضیهٔ تالس داریم $\dfrac{AE}{CE} = \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{۲}{۳}$ و در نتیجه $AE = ۲m$ و $CE = ۳m$



مثلث MDE و متوازی‌الاضلاع $BMEF$ در رأس M هم‌ارتفاع هستند. پس:

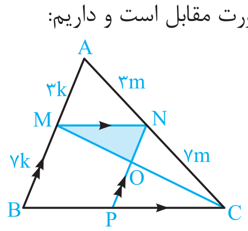
$$\frac{S(MDE)}{S(BMEF)} = \frac{\frac{۱}{۲} DE \times h}{EF \times h} = \frac{DE}{۲EF} = \frac{DE}{۲BM}$$

$$\overset{\Delta}{ACM} : DE \parallel AM \Rightarrow \frac{DE}{AM} = \frac{CE}{AC} \Rightarrow DE = ۲k \times \frac{۳m}{۵m} = \frac{۶k}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{S(MDE)}{S(BMEF)} = \frac{\frac{۶k}{۵}}{۲ \times ۳k} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow \frac{S(MDE)}{S(BMEF)} = \frac{۱}{۵} \times ۱۰۰ = ۲۰\%$$

۱۹۴ ۱ ۲ **۳** ۴

با فرض $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{۳}{۷}$، نسبت پاره‌خط‌ها به‌صورت مقابل است و داریم:



$$\overset{\Delta}{ACM} : ON \parallel AM \Rightarrow \frac{ON}{AM} = \frac{CN}{AC}$$

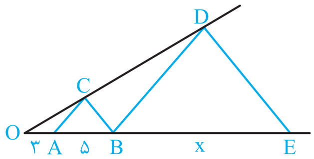
$$\Rightarrow ON = ۳k \times \frac{۷m}{۱۰m} = \frac{۲۱}{۱۰}k$$

دو مثلث OMN و AMN هر کدام دارای یک ارتفاع هستند که همان ارتفاع ذوزنقهٔ $AMON$ یا فاصلهٔ دو خط موازی PN و AB است. پس:

$$\frac{S(OMN)}{S(AMN)} = \frac{ON}{AM} = \frac{\frac{۲۱}{۱۰}k}{۳k} = \frac{۷۰}{۱۰۰} = ۷۰\%$$

۱۹۵ (**۱**) (۲) (۳) (۴)

دو بار قضیهٔ تالس را می‌نویسیم:

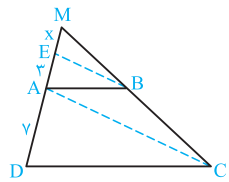


$$\begin{cases}\overset{\Delta}{OBD}: AC\|BD \Rightarrow \frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}\\ \overset{\Delta}{ODE}: BC\|DE \Rightarrow \frac{OB}{BE}=\frac{OC}{CD}\end{cases} \Rightarrow \frac{OA}{AB}=\frac{OB}{BE} \Rightarrow \frac{۳}{۵}=\frac{۳+۵}{x}$$

$$\Rightarrow x=\frac{۴۰}{۳}=\frac{۳۹+۱}{۳}=۱۳\frac{۱}{۳}$$

۱۹۶ (۱) (**۲**) (۳) (۴)

نکته: اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ آن‌گاه $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}$



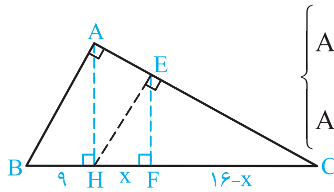
$$\begin{cases}\overset{\Delta}{MDC}: AB\|CD \Rightarrow \frac{MA}{AD}=\frac{MB}{BC}\\ \overset{\Delta}{MAC}: AC\|BE \Rightarrow \frac{ME}{AE}=\frac{MB}{BC}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{AD}=\frac{ME}{AE} \Rightarrow \frac{x+۳}{۷}=\frac{x}{۳}=\frac{x+۳-x}{۷-۳}=\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۳}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow x=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$$

$$MD=x+۳+۷=۱۰+۲/۲۵=۱۲/۲۵$$

۱۹۷ (۱) (۲) (**۳**) (۴)



$$\begin{cases}\overset{\Delta}{ABC}: AB\|HE \Rightarrow \frac{CH}{BH}=\frac{CE}{AE}\\ \overset{\Delta}{ACH}: AH\|EF \Rightarrow \frac{CF}{HF}=\frac{CE}{AE}\end{cases}$$

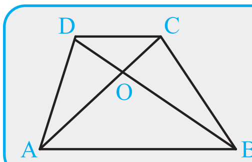
$$\Rightarrow \frac{CH}{BH}=\frac{CF}{HF} \Rightarrow \frac{x+۱۶-x}{۹}=\frac{۱۶-x}{x} \Rightarrow \frac{۱۶}{۹}=\frac{۱۶-x}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{۲۵}{۹}=\frac{۱۶}{x} \Rightarrow x=\frac{۱۴۴}{۲۵}=\frac{۵۷۶}{۱۰۰}=۵/۷۶$$

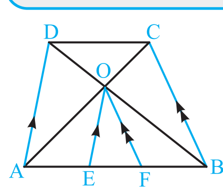
۱۹۸ (۱) (**۲**) (۳) (۴)

نکته: در هر ذوزنقه قطرها یکدیگر را به نسبت قاعده‌ها قطع می‌کنند.

$$\frac{OC}{OA}=\frac{OD}{OB}=\frac{CD}{AB}$$



بنابه فرض در ذوزنقهٔ ABCD داریم $CD=۶$ و $AB=۱۰$. قضیهٔ تالس را در مثلث AOB برای امتداد اضلاع می‌نویسیم:



$$CD\|AB \Rightarrow \frac{OC}{OA}=\frac{OD}{OB}=\frac{CD}{AB}=\frac{۶}{۱۰}=\frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}OC=۳m \text{ ، } OA=۵m\\ OD=۳n \text{ ، } OB=۵n\end{cases}$$

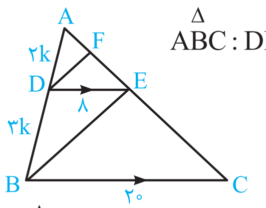
$$\overset{\Delta}{ABC}: OF\|BC \Rightarrow \frac{AF}{AB}=\frac{OA}{AC} \Rightarrow \frac{AF}{۱۰}=\frac{۵m}{۸m} \Rightarrow AF=\frac{۲۵}{۴}$$

با استدلال مشابه در مثلث ABD نتیجه می‌شود $BE=\frac{۲۵}{۴}$ و نهایتاً:

$$EF=AF-AE=AF-(AB-BE)=AF+BE-AB$$

$$=\frac{۲۵}{۴}+\frac{۲۵}{۴}-۱۰=\frac{۲۵}{۲}-۱۰=۱۲/۵-۱۰=۲/۵$$

۱۹۹ (**۱**) (۲) (۳) (۴)



$$\overset{\Delta}{ABC}: DE\|BC \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{۸}{۲۰}=\frac{۲}{۵}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}AD=۲k\\ AB=۵k\end{cases} \Rightarrow BD=۳k$$

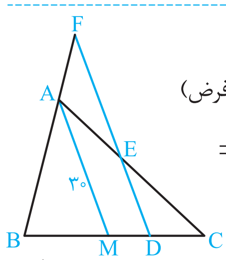
$$\overset{\Delta}{ABE}: DF\|BE \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AF}{EF}=\frac{AD}{BD}=\frac{۲k}{۳k}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \begin{cases}AF=۲m\\ EF=۳m\end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: DE\|BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{CE}=\frac{AD}{BD}=\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow CE=\frac{۳}{۲}AE=\frac{۳}{۲}(AF+EF)=\frac{۳}{۲}(۲m+۳m)=\frac{۱۵m}{۲}$$

$$\frac{EF}{AC}=\frac{۳m}{۲m+۳m+\frac{۱۵m}{۲}}=\frac{۶}{۲۵}=۰/۲۴$$

۲۰۰ (۱) (۲) (**۳**) (۴)



$$\frac{CD}{BD}=\frac{۲}{۳} \text{ (فرض)} \Rightarrow CD=۲m \text{ ، } BD=۳m$$

$$\Rightarrow BC=BD+CD=۵m$$

$$\overset{\Delta}{AMC}: DE\|AM \Rightarrow \frac{DE}{AM}=\frac{CD}{CM} \Rightarrow \frac{DE}{۳۰}=\frac{۲m}{\frac{۵m}{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{۳۰}=\frac{۴}{۵} \Rightarrow DE=۳۰\times\frac{۴}{۵}=۲۴$$

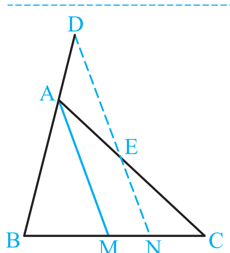
$$\overset{\Delta}{BDF}: AM\|DF \Rightarrow \frac{BM}{BD}=\frac{AM}{DF} \Rightarrow \frac{\frac{۵m}{۲}}{۳m}=\frac{۳۰}{DF}$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۶}=\frac{۳۰}{DF} \Rightarrow DF=\frac{۶\times۳۰}{۵}=۳۶$$

$$EF=DF-DE=۳۶-۲۴=۱۲$$

۲۰۱ (۱) (۲) (**۳**) (۴)

بنابه فرض AM میانه $(BM=CM)$ است و $\frac{AB}{AC}=\frac{۲}{۳}$ و $ND\|AM$ است. داریم:



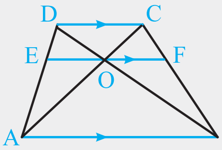
$$\begin{cases}\overset{\Delta}{AMC}: NE\|AM \Rightarrow \frac{AE}{AC}=\frac{MN}{CM}\\ \overset{\Delta}{BDN}: AM\|ND \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{MN}{BM}\end{cases}$$

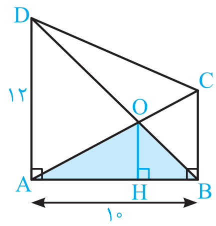
$$\xrightarrow{BM=CM} \frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}=\frac{۲}{۳}$$

۲۰۲ ۱ **۲** ۳ ۴

نکته: در هر ذوزنقه مطابق شکل، با فرض $EF \parallel AB \parallel CD$ داریم:

$$\frac{۱}{OE} = \frac{۱}{OF} = \frac{۱}{AB} + \frac{۱}{CD}$$





$$S(AOB) = ۳۵ \Rightarrow \frac{۱}{۲}OH \times AB = ۳۵$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}OH \times ۱۰ = ۳۵ \Rightarrow OH = \frac{۷۰}{۱۰} = ۷$$

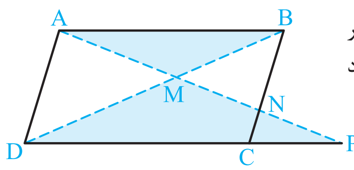
$$\frac{۱}{OH} = \frac{۱}{AD} + \frac{۱}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{۷} = \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{BC} = \frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۱۲} = \frac{۵}{۸۴} \Rightarrow BC = \frac{۸۴}{۵}$$

$$S(ABCD) = \frac{۱}{۲} \times AB \times (AD + BC) = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times (۱۲ + \frac{۸۴}{۵})$$

$$= ۶۰ + ۸۴ = ۱۴۴$$

۲۰۳ ۱ ۲ ۳ **۴**



ابتدا قضیهٔ تالس را در مثلث DMP برای امتداد اضلاعش می‌نویسیم:

$$AB \parallel DP \Rightarrow \frac{MA}{MP} = \frac{BM}{DM}$$

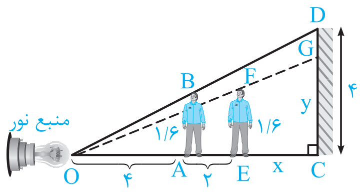
حال قضیهٔ تالس را در مثلث ADM برای امتداد اضلاعش می‌نویسیم:

$$AD \parallel BN \Rightarrow \frac{BM}{DM} = \frac{MN}{MA}$$

از مقایسهٔ این دو تناسب نتیجه می‌شود:

$$\frac{MA}{MP} = \frac{MN}{MA} \Rightarrow MA^۲ = MN \times MP$$

۲۰۴ ۱ ۲ ۳ **۴**



$$\overset{\Delta}{OCD} : AB \parallel CD$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{OA}{OC}$$

$$\Rightarrow \frac{۱/۶}{۴} = \frac{۴}{۴ + ۲ + x}$$

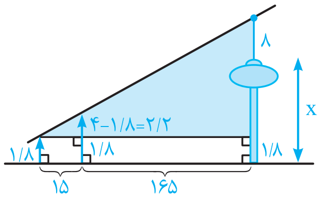
$$\Rightarrow x + ۶ = ۱۰ \Rightarrow x = ۴$$

$$\overset{\Delta}{OCG} : EF \parallel CG \Rightarrow \frac{EF}{CG} = \frac{OE}{OC} \Rightarrow \frac{۱/۶}{y} = \frac{۴ + ۲}{۴ + ۲ + x}$$

$$\Rightarrow \frac{۱/۶}{y} = \frac{۶}{۶ + ۴} \Rightarrow y = \frac{۱۶}{۶} = \frac{۸}{۳}$$

۲۰۵ ۱ **۲** ۳ ۴

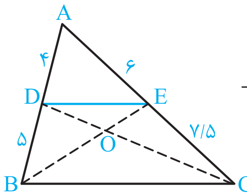
ارتفاع برج و دکل برابر $x + ۸$ است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ رنگی، قضیهٔ تالس برقرار است. داریم:



$$\frac{۲/۲}{x + ۸ - ۱/۸} = \frac{۱۵}{۱۵ + ۱۶۵} \Rightarrow \frac{۲/۲}{x + ۶/۲} = \frac{۱۵}{۱۸۰}$$

$$\Rightarrow \frac{۲/۲}{x + ۶/۲} = \frac{۱}{۱۲} \Rightarrow x + ۶/۲ = ۲۶/۴ \Rightarrow x = ۲۶/۴ - ۶/۲ = ۲۰/۲$$

۲۰۶ ۱ ۲ ۳ **۴**



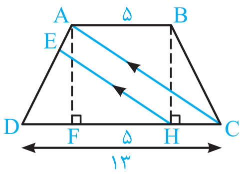
D را به E وصل می‌کنیم. داریم:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{۴}{۵} \ , \ \frac{AE}{CE} = \frac{۶}{۷/۵} = \frac{۱۲}{۱۵} = \frac{۴}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE} \xrightarrow{\text{عکس قضیهٔ تالس}} DE \parallel BC$$

بنابراین مساحت‌های دو مثلث BDE و CDE برابرند. زیرا قاعدهٔ DE در آن‌ها مشترک است و رأس سوم آن‌ها یعنی B و C روی خطی موازی DE قرار دارد. با کم کردن مساحت DOE از مساحت آن‌ها نتیجه می‌شود: $S(OBD) = S(OCE)$

۲۰۷ ۱ **۲** ۳ ۴



AF را عمود بر CD رسم می‌کنیم. چهارضلعی ABHF مستطیل است پس $FH = AB = ۵$

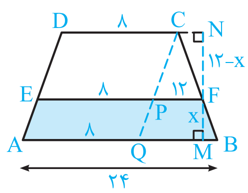
دو پاره‌خط CH و DF برابرند زیرا مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ BHC و AFD همنهشت‌اند. داریم:

$$CH = DF = \frac{CD - FH}{۲} = \frac{CD - AB}{۲} = \frac{۱۳ - ۵}{۲} = ۴$$

$$\overset{\Delta}{ACD} : EH \parallel AC \Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{CH}{DH} = \frac{۴}{۱۳ - ۴} = \frac{۴}{۹}$$

۲۰۸ ۱ ۲ **۳** ۴

قضیهٔ تالس را برای امتداد اضلاع در مثلث FBM می‌نویسیم:



$$\frac{BF}{CF} = \frac{FM}{FN} = \frac{x}{۱۲ - x}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{BC}{CF} = \frac{۱۲}{۱۲ - x}$$

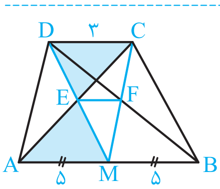
$$\Rightarrow \frac{CF}{BC} = \frac{۱۲ - x}{۱۲}$$

حال از C خطی موازی ساق AD رسم می‌کنیم. چهارضلعی‌های DEPC و DAQC متوازی‌الاضلاع هستند و به کمک قضیهٔ تالس در مثلث BCQ داریم:

$$\frac{CF}{BC} = \frac{PF}{BQ} \Rightarrow \frac{۱۲ - x}{۱۲} = \frac{EF - PE}{AB - AQ} \Rightarrow \frac{۱۲ - x}{۱۲} = \frac{۲۰ - ۸}{۲۴ - ۸}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۲ - x}{۱۲} = \frac{۱۲}{۱۶} \Rightarrow ۱۲ - x = \frac{۱۴۴}{۱۶} = ۹ \Rightarrow x = ۱۲ - ۹ = ۳$$

۲۰۹ ۱ **۲** ۳ ۴



قضیهٔ تالس را در مثلث AME برای امتداد اضلاع می‌نویسیم $\frac{AM}{CD} = \frac{ME}{DE}$. با استدلال مشابه در مثلث MFB داریم: $\frac{MB}{CD} = \frac{MF}{CF}$. اما $\frac{AM}{CD} = \frac{MB}{CD} = \frac{۵}{۳}$ و در نتیجه:

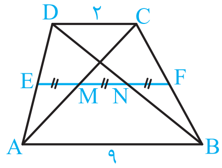
$$\frac{ME}{DE} = \frac{MF}{CF} = \frac{۵}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{عکس قضیهٔ تالس در مثلث } CDM} EF \parallel CD \Rightarrow \frac{EF}{CD} = \frac{ME}{MD}$$

اما از $\frac{ME}{DE} = \frac{۵}{۳}$ با ترکیب در مخرج نتیجه می‌شود $\frac{ME}{MD} = \frac{۵}{۸}$ و در نتیجه:

$$\frac{EF}{۳} = \frac{۵}{۸} \Rightarrow EF = \frac{۱۵}{۸} = ۱\frac{۷}{۸}$$

۲۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴)



بنابه فرض EF موازی قاعده‌های ذوزنقه است و سایر موارد فرض روی شکل نشان داده شده است. داریم:

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ABD}: EN \parallel AB \Rightarrow \dfrac{DN}{BD}=\dfrac{EN}{AB}=\dfrac{۲ME}{۹} \\ \overset{\Delta}{BCD}: NF \parallel CD \Rightarrow \dfrac{BN}{BD}=\dfrac{NF}{CD}=\dfrac{ME}{۲} \end{cases}$$

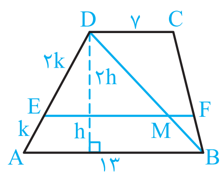
$$\xrightarrow{+} \frac{DN+BN}{BD}=\left(\frac{۲}{۹}+\frac{۱}{۲}\right)ME$$

$$\Rightarrow ME\times\frac{۱۳}{۱۸}=\frac{BD}{BD}=۱\Rightarrow ME=\frac{۱۸}{۱۳}$$

$$\overset{\Delta}{ACD}: ME \parallel CD \Rightarrow \frac{AE}{AD}=\frac{ME}{CD}=\frac{\frac{۱۸}{۱۳}}{۲}=\frac{۹}{۱۳}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{AE}{DE}=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$$

۲۱۱ (۱) (۲) (۳) (۴)



بنابه فرض فاصلهٔ E از قاعدهٔ کوچک دو برابر فاصلهٔ آن تا قاعدهٔ بزرگ است. پس E ساق AD را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند. جهت محاسبهٔ EF، قطر BD را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با EF را M می‌نامیم. داریم:

$$\overset{\Delta}{ABD}: ME \parallel AB$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{AD}=\frac{ME}{AB}\Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{ME}{۱۳}\Rightarrow ME=\frac{۲۶}{۳}$$

حال به کمک قضیهٔ تالس در ذوزنقه $\frac{BF}{BC}=\frac{AE}{AD}=\frac{۱}{۳}$ داریم:

$$\overset{\Delta}{BDC}: MF \parallel CD \Rightarrow \frac{BF}{BC}=\frac{MF}{CD}\Rightarrow \frac{۱}{۳}=\frac{MF}{۷}\Rightarrow MF=\frac{۷}{۳}$$

$$EF=ME+MF=\frac{۲۶}{۳}+\frac{۷}{۳}=\frac{۳۳}{۳}=۱۱$$

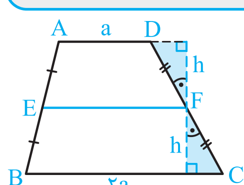
فرض: $S(AEFB)=۱۶\Rightarrow \frac{۱}{۲}\times h\times(EF+AB)=۱۶$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\times h\times(۱۱+۱۳)=۱۶\Rightarrow h=\frac{۱۶}{۱۲}=\frac{۴}{۳}$$

$$S(CDEF)=\frac{۱}{۲}\times ۲h\times(EF+CD)=\frac{۴}{۳}\times(۱۱+۷)=\frac{۴}{۳}\times ۱۸=۲۴$$

۲۱۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

نکته: پاره‌خطی که وسط دو ساق یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، پاره‌خط میانگین ذوزنقه نامیده می‌شود که همواره موازی قاعده‌ها و اندازهٔ آن میانگین حسابی طول دو قاعده است.



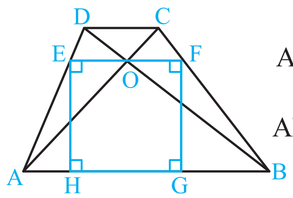
پس چهارضلعی‌های AEFD و EFCB ذوزنقه هستند و ارتفاعهایشان برابر است، زیرا مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ رنگی به حالت وتر و یک زاویهٔ حاده همنهشت هستند. داریم:

$$\frac{S(AEFD)}{S(EFCB)}=\frac{\frac{۱}{۲}h\times(BC+EF)}{\frac{۱}{۲}h\times(AD+EF)}=\frac{۲a+\frac{a+۲a}{۲}}{a+\frac{a+۲a}{۲}}$$

$$=\frac{۴a+۳a}{۵a}=\frac{۷}{۵}=۱/۴$$

۲۱۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

روش اول:



$$\overset{\Delta}{ABD}: OE \parallel AB \Rightarrow \frac{OE}{AB}=\frac{DE}{AD}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: OF \parallel AB \Rightarrow \frac{OF}{AB}=\frac{CF}{BC}$$

$$\text{قضیهٔ تالس در ذوزنقه}\Rightarrow \frac{DE}{AE}=\frac{CF}{BF}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{DE}{AD}=\frac{CF}{BC}$$

از مقایسه سه تناسب فوق نتیجه می‌شود $\frac{OE}{AB}=\frac{OF}{AB}$ پس $OE=OF$.

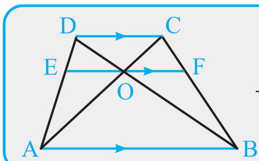
به کمک قضیهٔ تالس در مثلث‌های ABD و BCD داریم:

$$\frac{OE}{AB}=\frac{OD}{BD},\ \frac{OF}{CD}=\frac{OB}{BD}\xrightarrow{+}\frac{OE}{AB}+\frac{OF}{CD}=\frac{OD+OB}{BD}$$

$$\Rightarrow \frac{OE}{۴}+\frac{OE}{۱}=\frac{BD}{BD}=۱\Rightarrow OE+۴OE=۴\Rightarrow OE=\frac{۴}{۵}$$

$$\text{مساحت مربع } EFGH=EF^۲=(۲OE)^۲=\left(۲\times\frac{۴}{۵}\right)^۲=(۱/۶)^۲=۲/۵۶$$

روش دوم:



نکته: در ذوزنقهٔ روبه‌رو داریم:

$$\frac{۱}{OE}=\frac{۱}{OF}=\frac{۱}{CD}+\frac{۱}{AB}$$

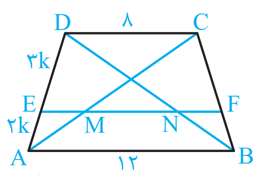
$$\frac{۱}{OE}=\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{CD}$$

$$\xrightarrow{\text{بنابه فرض } CD=۱\text{ ، }AB=۴}\frac{۱}{OE}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow OE=OF=\frac{۴}{۵}$$

$$EF=OE+OF=۲\times\frac{۴}{۵}=\frac{۸}{۵}$$

$$\text{مساحت مربع } EFGH=EF^۲=\left(\frac{۸}{۵}\right)^۲=\frac{۶۴}{۲۵}=\frac{۲۵۶}{۱۰۰}=۲/۵۶$$

۲۱۴ (۱) (۲) (۳) (۴)



بنابه عکس قضیهٔ تالس در ذوزنقه، از فرض $\frac{DE}{AE}=\frac{CF}{BF}=\frac{۳}{۲}$ نتیجه می‌شود $EF \parallel CD \parallel AB$ داریم:

$$\overset{\Delta}{ACD}: ME \parallel CD \Rightarrow \frac{ME}{CD}=\frac{AE}{AD}$$

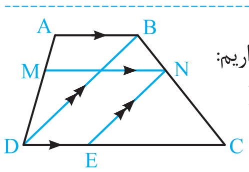
$$\Rightarrow \frac{ME}{۸}=\frac{۲k}{۵k}\Rightarrow ME=\frac{۱۶}{۵}=۳/۲$$

$$\overset{\Delta}{ABD}: NE \parallel AB \Rightarrow \frac{NE}{AB}=\frac{DE}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{NE}{۱۲}=\frac{۳k}{۵k}\Rightarrow NE=\frac{۳۶}{۵}=۷/۲$$

$$MN=NE-ME=۷/۲-۳/۲=۴$$

۲۱۵ (۱) (۲) (۳) (۴)



بنابه فرض $\frac{AM}{MD}=\frac{۳}{۷}$ و $CD=۱۵$ است. داریم:

$$MN \parallel AB \parallel CD$$

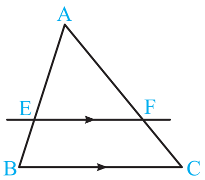
$$\xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس در ذوزنقه}}\frac{BN}{NC}=\frac{AM}{MD}=\frac{۳}{۷}$$

$$\overset{\Delta}{BDC}: NE \parallel BD \xrightarrow{\text{تالس}}\frac{BN}{NC}=\frac{DE}{CE}$$

فصل ۲ قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

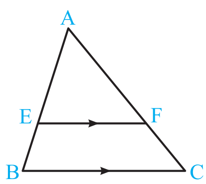
قسمت دوم: قضیهٔ تالس

قضیهٔ تالس: اگر خطی موازی یک ضلع مثلث دو ضلع دیگر آن را قطع کند، پاره‌خط‌های متناظر ایجادشده روی آن دو ضلع متناسب هستند.



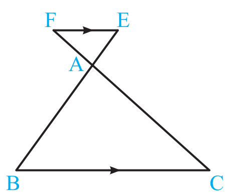
$$EF \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} ۱)\ \dfrac{AE}{BE}=\dfrac{AF}{CF} \\ ۲)\ \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC} \\ ۳)\ \dfrac{BE}{AB}=\dfrac{CF}{AC} \end{cases}$$

عکس قضیهٔ تالس: اگر در مثلث ABC نقطه‌های E و F روی اضلاع AB و AC چنان باشند که هر یک از تناسب‌های فوق برقرار باشد، آن‌گاه $EF \parallel BC$ است.



نتیجهٔ اساسی در قضیهٔ تالس: خطی که موازی یک ضلع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند، مثلثی ایجاد می‌کند که اضلاعش متناظراً با اضلاع مثلث مفروض متناسب هستند. (به عبارت دیگر دو مثلث AEF و ABC متشابه هستند.)

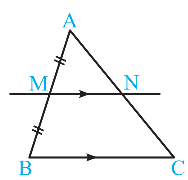
$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$$



نکته قضیهٔ تالس و نتیجهٔ اساسی آن هنگامی که خطی موازی یک ضلع مثلث امتداد دو ضلع دیگر را قطع کند نیز برقرار است. (دو مثلث AEF و ABC متشابه‌اند.)

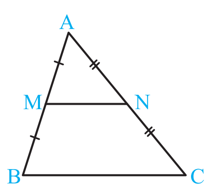
$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$$

پاره‌خط میانگین مثلث



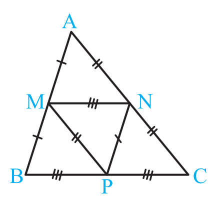
۱- خطی که از وسط یک ضلع مثلث موازی ضلع سوم آن رسم شود، از وسط ضلع مقابل می‌گذرد و پاره‌خط حاصل نصف ضلع سوم است (این پاره‌خط را، پاره‌خط میانگین مثلث می‌نامند. هر مثلث سه پاره‌خط میانگین دارد.)

$$(AM=MB\ ,\ MN \parallel BC) \Rightarrow AN=CN\ ,\ MN=\frac{BC}{۲}$$



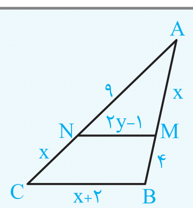
۲- پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع یک مثلث را به هم وصل می‌کند (پاره‌خط میانگین مثلث)، موازی و نصف ضلع سوم است.

$$(AM=MB\ ,\ AN=NC) \Rightarrow MN \parallel BC\ ,\ MN=\frac{BC}{۲}$$



نتیجه اگر هر سه پاره‌خط میانگین یک مثلث را به هم وصل کنیم، چهار مثلث همنهشت (ض‌ض‌ض) پدید می‌آید که مثلث وسطی را مثلث میانگین می‌نامند. هم‌چنین سه متوازی‌الاضلاع و سه ذوزنقه ایجاد می‌شود. مساحت هر یک از این مثلث‌ها $\frac{۱}{۴}$ مساحت مثلث ABC و محیط آن‌ها نصف محیط مثلث ABC است. این مثلث‌ها با مثلث ABC متشابه با نسبت تشابه ۲ یا $\frac{۱}{۲}$ می‌باشند.

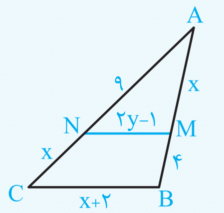
تست: در شکل مقابل $MN \parallel BC$ است. $x-y$ کدام است؟



۱) ۳/۱ ۲) ۳/۲

۳) ۲/۷ ۴) ۳/۳

پاسخ :

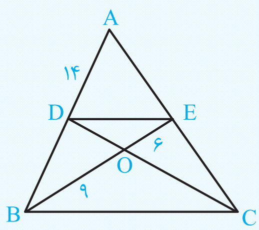


$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AN}{CN}=\frac{AM}{BM} \Rightarrow \frac{۹}{x}=\frac{x}{۴} \Rightarrow x^{۲}=۳۶ \Rightarrow x=۶$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{MN}{BC}=\frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{۲y-۱}{x+۲}=\frac{۹}{۹+x} \Rightarrow \frac{۲y-۱}{۶+۲}=\frac{۹}{۹+۶}$$

$\Rightarrow ۲y-۱=\frac{۲۴}{۵}=۴/۸ \Rightarrow y=\frac{۵/۸}{۲}=۲/۹ \Rightarrow x-y=۶-۲/۹=۳/۱ \Rightarrow$ گزینهٔ (۱) درست است.

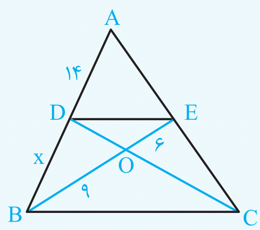
تست: در ذوزنقهٔ روبه‌رو اندازهٔ ساق BD کدام است؟



۱) ۶ ۲) ۷

۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ : قضیهٔ تالس را در مثلث OBC برای امتداد اضلاع می‌نویسیم یا این‌که می‌گوییم دو مثلث OBC و OED متشابه‌اند.

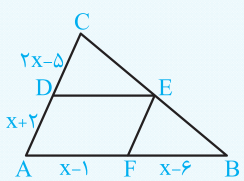


$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{DE}{BC}=\frac{OE}{OB}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$$

$\Rightarrow \frac{۱۴}{x+۱۴}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۱۴}{x}=\frac{۲}{۱} \Rightarrow x=۷ \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) درست است.

تست: در شکل مقابل چهارضلعی ADEF متوازی‌الاضلاع است. محیط آن کدام است؟



۱) ۶۰ ۲) ۵۶

۳) ۶۶ ۴) ۷۰

پاسخ :

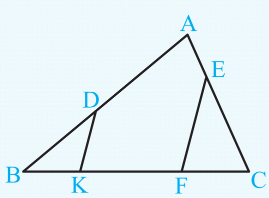
$$\left.\begin{array}{l} DE \parallel AB \Rightarrow \dfrac{CD}{AD}=\dfrac{CE}{BE} \\ EF \parallel AC \Rightarrow \dfrac{CE}{BE}=\dfrac{AF}{BF} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{CD}{AD}=\frac{AF}{BF} \Rightarrow \frac{۲x-۵}{x+۲}=\frac{x-۱}{x-۶}$$

$$\Rightarrow ۲x^{۲}-۱۷x+۳۰=x^{۲}+x-۲ \Rightarrow x^{۲}-۱۸x+۳۲=۰ \Rightarrow (x-۱۶)(x-۲)=۰ \Rightarrow x=۱۶ , x=۲$$

جواب $x=۲$ قابل قبول نیست (چرا؟)، پس $x=۱۶$ است.

محیط ADEF $=۲(AF+AD)=۲(x-۱+x+۲)=۲(۲x+۱)=۲(۳۲+۱)=۶۶ \Rightarrow$ گزینهٔ (۳) درست است.

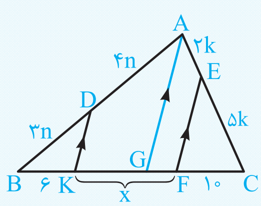
تست: در شکل مقابل $\frac{۲}{۵}=\frac{AE}{CE}$ ، $\frac{۴}{۳}=\frac{AD}{BD}$ و $EF \parallel DK$. اگر $CF=۱۰$ و $BK=۶$ باشد، طول پاره‌خط KF کدام است؟



۱) ۱۴ ۲) ۱۲

۳) ۱۰ ۴) ۱۵

پاسخ : از A خطی موازی EF یا DK رسم می‌کنیم تا BC را در G قطع کند. بنابه قضیهٔ تالس در مثلث‌های AGC و ABG داریم:

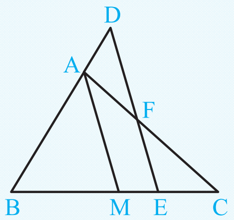


$$\frac{CF}{GF}=\frac{CE}{AE} \Rightarrow \frac{۱۰}{GF}=\frac{۵k}{۲k}=\frac{۵}{۲} \Rightarrow GF=\frac{۲۰}{۵}=۴$$

$$\frac{BK}{GK}=\frac{BD}{AD} \Rightarrow \frac{۶}{GK}=\frac{۳n}{۴n}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow GK=\frac{۲۴}{۳}=۸$$

$x=KF=GK+GF=۸+۴=۱۲ \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) درست است.

تست: در مثلث ABC مطابق شکل، AM میانه و $DE \parallel AM$. اگر DE ضلع AC را در F قطع کند به‌طوری‌که $\frac{EF}{AM}=\frac{۳}{۵}$ باشد، آن‌گاه نسبت $\frac{DE}{AM}$ کدام است؟



۱) ۱/۵ ۲) ۱/۴

۳) ۱/۶ ۴) ۱/۲

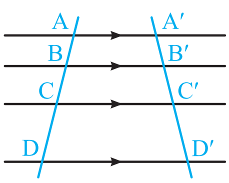
پاسخ: بنابه فرض $BM = CM$. به کمک قضیهٔ تالس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{AMC}: EF \parallel AM \Rightarrow \dfrac{EF}{AM}=\dfrac{CE}{CM}\\ \overset{\Delta}{BDE}: AM \parallel DE \Rightarrow \dfrac{DE}{AM}=\dfrac{BE}{BM}=\dfrac{BE}{CM}\end{array}\right\} \xrightarrow{+} \dfrac{EF}{AM}+\dfrac{DE}{AM}=\dfrac{CE+BE}{CM}=\dfrac{BC}{CM}$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{AM}+\frac{DE}{AM}=\frac{۲CM}{CM}=۲ \Rightarrow \frac{DE}{AM}+\frac{۳}{۵}=۲ \Rightarrow \frac{DE}{AM}=۲-\frac{۳}{۵}=\frac{۷}{۵}=۱/۴ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) درست است.

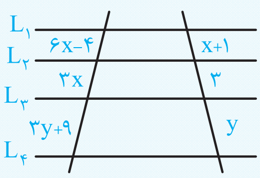
قضیهٔ تالس در خطوط متوازی

اگر چند خط موازی از یک صفحه دو خط مورب را قطع کنند، پاره‌خط‌های متناظر ایجادشده روی دو خط مورب، متناسب هستند.



$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\cdots$$

تست: در شکل مقابل $L_۱ \parallel L_۲ \parallel L_۳ \parallel L_۴$ است. حاصل $y - x$ کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: بنابه قضیهٔ تالس در خطوط موازی داریم:

$$\frac{۶x-۴}{x+۱}=\frac{۳x}{۳}=\frac{۳y+۹}{y} \Rightarrow \frac{۶x-۴}{x+۱}=x \Rightarrow ۶x-۴=x^۲+x \Rightarrow x^۲-۵x+۴=۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۴)=۰ \Rightarrow x=۱ \text{ یا } x=۴$$

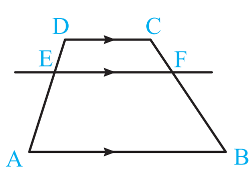
$$x=\frac{۳y+۹}{y} \xrightarrow{x=۱} y=۳y+۹ \Rightarrow y=-\frac{۹}{۲} \;,\; x=\frac{۳y+۹}{y} \xrightarrow{x=۴} ۴y=۳y+۹ \Rightarrow y=۹$$

پس $x=۱$، قابل قبول نیست، زیرا به ازای آن مقدار y منفی می‌شود. $x=۴$ و $y=۹$ جواب هستند، که نتیجه می‌دهد:

$y-x=۹-۴=۵ \Rightarrow$ گزینهٔ (۳) درست است.

قضیهٔ تالس در ذوزنقه

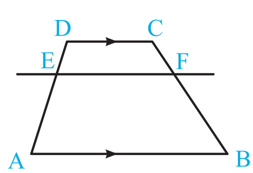
اگر خطی موازی قاعده‌های یک ذوزنقه ساق‌های آن را قطع کند، نسبت پاره‌خط‌های ایجادشده روی دو ساق متناظراً متناسب هستند.



$$EF \parallel AB \parallel CD \Rightarrow \frac{DE}{AE}=\frac{CF}{BF}$$

عکس قضیهٔ تالس در ذوزنقه

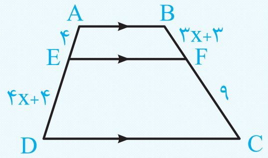
اگر خطی دو ساق ذوزنقه را قطع کند و پاره‌خط‌های ایجادشده روی آن‌ها متناظراً متناسب باشند، آن‌گاه آن خط با قاعده‌ها موازی است.



$$\frac{DE}{AE}=\frac{CF}{BF} \Rightarrow EF \parallel CD \parallel AB$$

نکته برای محاسبهٔ طول پاره‌خط EF در قضیهٔ تالس ذوزنقه، بهتر است یکی از قطرهای ذوزنقه رسم شود یا از یکی از دو سر قاعدهٔ کوچک، خطی موازی ساق ذوزنقه رسم شود.

تست: در ذوزنقهٔ ABCD مطابق شکل EF موازی قاعده‌ها است. نسبت طول دو ساق ذوزنقه کدام است؟



۱) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}+۱$

۳) $\frac{۵\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$

پاسخ: بنابه قضیهٔ تالس در ذوزنقه داریم:

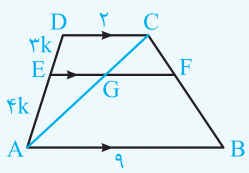
$$\frac{AE}{DE}=\frac{BF}{CF}\Rightarrow\frac{۴}{۴x+۴}=\frac{۳x+۳}{۹}\Rightarrow\frac{۱}{x+۱}=\frac{x+۱}{۳}\Rightarrow(x+۱)^{۲}=۳\Rightarrow x+۱=\sqrt{۳}\Rightarrow x=\sqrt{۳}-۱$$

$$\frac{AD}{BC}=\frac{۴x+۸}{۳x+۱۲}=\frac{۴\sqrt{۳}-۴+۸}{۳\sqrt{۳}-۳+۱۲}=\frac{۴(\sqrt{۳}+۱)}{۳(\sqrt{۳}+۳)}\Rightarrow\frac{AD}{BC}=\frac{۴(\sqrt{۳}+۱)}{۳\sqrt{۳}(\sqrt{۳}+۱)}=\frac{۴}{۳\sqrt{۳}}\Rightarrow\frac{BC}{AD}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}\Rightarrow$$ گزینهٔ (۴) درست است.

تست: در ذوزنقهٔ ABCD $(AB\parallel CD)$، $AB=۹$ ، $CD=۲$. نقطهٔ E روی ساق AD چنان قرار دارد که $\frac{DE}{EA}=\frac{۳}{۴}$ است. از E خطی موازی قاعده‌ها رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با ساق BC را F می‌نامیم. طول پاره‌خط EF کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: قطر AC را رسم می‌کنیم. بنابه قضیهٔ تالس داریم:



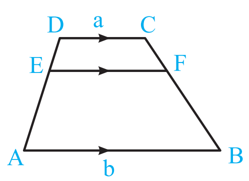
$$GE\parallel CD\Rightarrow\frac{GE}{CD}=\frac{AE}{AD}\Rightarrow\frac{GE}{۲}=\frac{۴k}{۷k}=\frac{۴}{۷}\Rightarrow GE=\frac{۸}{۷}$$

$$GF\parallel AB\Rightarrow\frac{GF}{AB}=\frac{CF}{BC}$$

از طرفی بنابه قضیهٔ تالس در ذوزنقه داریم $\frac{۳}{۴}=\frac{DE}{AE}=\frac{CF}{BF}$. در نتیجه $\frac{CF}{BC}=\frac{۳}{۷}$ و داریم: $\frac{GF}{۹}=\frac{۳}{۷}\Rightarrow GF=\frac{۲۷}{۷}$

$$EF=GE+GF=\frac{۸}{۷}+\frac{۲۷}{۷}=\frac{۳۵}{۷}=۵\Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) درست است.

روش فرمولی برای تست قبل: به طور کلی اگر خطی موازی قاعده‌های ذوزنقه ساق‌ها را قطع کند، طول پاره‌خط حاصل را می‌توان به‌صورت مقابل به‌دست آورد:



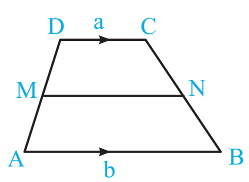
$$\frac{DE}{AE}=\frac{m}{n}\Rightarrow EF=\frac{mb+na}{m+n}$$

برای مثال در تست قبلی داریم $a=۲$ ، $b=۹$ و $\frac{DE}{AE}=\frac{۳}{۴}$ در نتیجه:

$$EF=\frac{۳\times b+۴a}{۳+۴}=\frac{۳\times ۹+۴\times ۲}{۷}=\frac{۲۷+۸}{۷}=\frac{۳۵}{۷}=۵$$

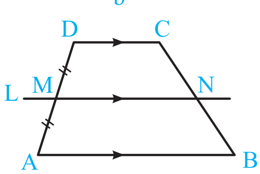
پاره‌خط میانگین ذوزنقه

پاره‌خطی که وسط‌های ساق‌های یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، پاره‌خط میانگین ذوزنقه می‌نامند.



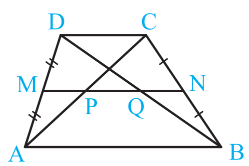
آ) پاره‌خط میانگین ذوزنقه، موازی قاعده‌هاست و اندازهٔ آن میانگین حسابی دو قاعده است.

$$(AM=MD\ ,\ BN=CN)\Rightarrow MN\parallel AB\parallel CD\ ,\ MN=\frac{AB+CD}{۲}$$



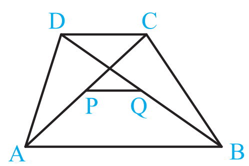
ب) اگر خطی از وسط یک ساق ذوزنقه موازی قاعده‌های آن رسم شود از وسط ساق دیگر می‌گذرد و پاره‌خط محدود به دو ساق همان پاره‌خط میانگین ذوزنقه است.

$$(MD=MA\ ,\ L\parallel AB\parallel CD)\Rightarrow CN=BN\ ,\ MN=\frac{AB+CD}{۲}$$



پ) پاره‌خط میانگین هر ذوزنقه قطرهای آن را نصف می‌کند و طول پاره‌خط بین قطرها برابر است با نصف تفاضل قاعدهٔ کوچک از قاعدهٔ بزرگ.

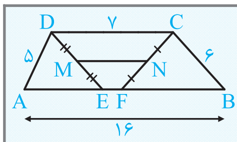
$$(AM=MD\ ,\ BN=CN)\Rightarrow PA=PC\ ,\ QB=QD\ ,\ PQ=\frac{AB-CD}{۲}$$



ت) پاره‌خطی که وسط‌های دو قطر یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند موازی قاعده‌های ذوزنقه است و اندازهٔ آن برابر است با نصف تفاضل قاعدهٔ کوچک از قاعدهٔ بزرگ. همچنین امتداد این پاره‌خط از وسط ساق‌ها می‌گذرد.

$$(AP=PC\ ,\ BQ=QD)\Rightarrow PQ\parallel AB\parallel CD\ ,\ PQ=\frac{AB-CD}{۲}$$

تست: در ذوزنقهٔ مقابل نیمساز زوایای C و D قاعدهٔ بزرگ را به ترتیب در F و E قطع کرده‌اند. اگر M وسط DE و N وسط CF باشد، آن‌گاه طول پاره‌خط MN کدام است؟



۱) ۴/۵ ۲) ۵/۵ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: $AB \parallel CD$ ، مورب $DE \Rightarrow E\hat{D}C = A\hat{E}D \xrightarrow{(فرض) A\hat{D}E = E\hat{D}C} A\hat{D}E = A\hat{E}D \Rightarrow AE = AD = ۵$

$AB \parallel CD$ ، مورب $CF \Rightarrow D\hat{C}F = B\hat{F}C \xrightarrow{(فرض) D\hat{C}F = B\hat{C}F} B\hat{C}F = B\hat{F}C \Rightarrow BF = BC = ۶$

$EF = AB - AE - BF = ۱۶ - ۵ - ۶ = ۵$

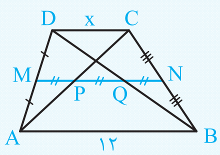
اما چهارضلعی EFCD ذوزنقه و MN پاره‌خط میانگین آن است. پس داریم:

$MN = \frac{EF + CD}{۲} = \frac{۵ + ۷}{۲} = \frac{۱۲}{۲} = ۶ \Rightarrow$ گزینهٔ (۴) درست است.

تست: در یک ذوزنقه پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل می‌کند، قطرها را قطع می‌کند و به سه پاره‌خط به طول‌های مساوی تقسیم می‌شود. اگر طول قاعدهٔ بزرگ ذوزنقه ۱۲ باشد، آن‌گاه طول قاعدهٔ کوچک آن کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

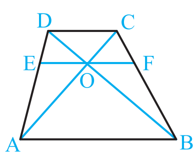
پاسخ: MN پاره‌خط میانگین ذوزنقه است و از وسط قطرها می‌گذرد، پس داریم:



$$\begin{cases} PQ = \frac{AB - CD}{۲} \Rightarrow PQ = \frac{۱۲ - x}{۲} \\ MN = \frac{AB + CD}{۲} \Rightarrow ۳PQ = \frac{۱۲ + x}{۲} \end{cases}$$

$\Rightarrow ۳ \times \frac{۱۲ - x}{۲} = \frac{۱۲ + x}{۲} \Rightarrow ۳۶ - ۳x = ۱۲ + x \Rightarrow ۴x = ۲۴ \Rightarrow x = ۶ \Rightarrow$ گزینهٔ (۴) درست است.

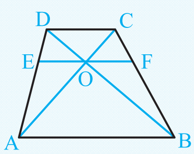
یک خاصیت مهم در ذوزنقه‌ها



اگر خطی از نقطهٔ تلاقی قطرهای ذوزنقه رسم شود و مطابق شکل ساق‌ها را در نقاط E و F قطع کند، آن‌گاه داریم:

$$\frac{۱}{OE} = \frac{۱}{OF} = \frac{۱}{AB} + \frac{۱}{CD} \quad \text{یا} \quad \frac{۲}{EF} = \frac{۱}{CD} + \frac{۱}{AB}$$

تست: اندازهٔ قاعده‌های یک ذوزنقه ۳ و ۷ است. از نقطهٔ تلاقی قطرهای آن خطی موازی قاعده‌ها رسم می‌کنیم. طول پاره‌خط ایجادشده بین ساق‌ها کدام است؟



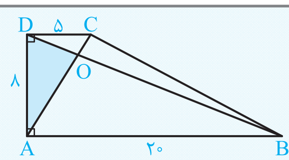
۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۳/۶ ۴) ۴/۲

پاسخ: شکل مقابل همان شکل مطلوب است. پس داریم:

$\frac{۱}{OE} = \frac{۱}{OF} = \frac{۱}{AB} + \frac{۱}{CD} = \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۳} = \frac{۱۰}{۲۱}$

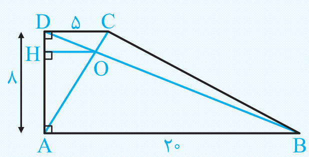
$\Rightarrow OE = OF = \frac{۲۱}{۱۰} = ۲/۱ \Rightarrow EF = ۲ \times ۲/۱ = ۴/۲ \Rightarrow$ گزینهٔ (۴) درست است.

تست: در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ مقابل قطرها رسم شده است. مساحت مثلث AOD کدام است؟



۱) ۱۲ ۲) ۱۵
۳) ۱۶ ۴) ۱۸

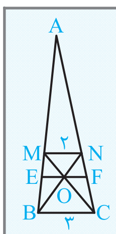
پاسخ: با توجه به نکتهٔ گفته‌شده داریم:



$\frac{۱}{OH} = \frac{۱}{CD} + \frac{۱}{AB} = \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۲۰} = \frac{۴ + ۱}{۲۰} = \frac{۵}{۲۰} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow OH = ۴$

$S(AOD) = \frac{۱}{۲} OH \times AD = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۸ = ۱۶ \Rightarrow$ گزینهٔ (۳) درست است.

تست: در شکل مقابل $BC \parallel EF \parallel MN$ است. حاصل $\frac{AM}{ME}$ کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۳
۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: $\frac{۲}{EF} = \frac{۱}{MN} + \frac{۱}{BC} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} = \frac{۵}{۶} \Rightarrow EF = \frac{۶ \times ۲}{۵} = \frac{۱۲}{۵}$

$\overset{\Delta}{AEF} : MN \parallel EF \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AM}{AE} = \frac{MN}{EF} = \frac{۲}{\frac{۱۲}{۵}} = \frac{۱۰}{۱۲} = \frac{۵}{۶} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{AM}{ME} = \frac{۵}{۱} = ۵ \Rightarrow$ گزینهٔ (۴) درست است.