

این کتاب، درسی در هندسه مقدماتی مناسب دانش‌آموزان پایه‌های ششم، هفتم و هشتم است. البته، در برنامه درسی معمول جایی برای هندسه با این سبک و حجم وجود ندارد، اما شیفتگان هندسه کم نیستند، و هندسه انتخاب اول معلمان برای علاقه‌مند کردن دانش‌آموزان به ریاضیات است. از این رو، این کتاب منبعی الهام‌بخش برای معلمان نیز هست. خواندن این کتاب پیش‌نیازی نمی‌خواهد، و همه آنچه را که می‌خواهیم گفته‌ایم و ثابت کرده‌ایم.

رویکرد کلی کتاب «مسئله حل کردن» است. بنابراین فصل اول مربوط به این موضوع است. در این فصل اصلی‌ترین استراتژی‌هایی را که برای حل کردن مسئله‌های هندسی احتیاج داریم آورده‌ایم، و بقیه را به فصل‌های دیگر موکول کرده‌ایم. هندسه با فصل دوم شروع می‌شود، که درباره مفهومی‌های اولیه و تعریف‌هاست. یافتن «مثال» یا «مثال نقض» به درک مفهومی‌ها بسیار کمک می‌کند. بنابراین، در این فصل، و البته فصل‌های دیگر، به سؤال‌هایی از نوع «مثالی بزنید...» و «آیا می‌توان...» زیاد برمی‌خورید. فصل سوم درباره هم‌نهشتی است. در بخش اول این فصل به مفهوم هم‌نهشتی پرداخته‌ایم و مسئله‌ها بیشتر مربوط به تقسیم شکل‌ها به قسمت‌های هم‌نهشت‌اند تا اثبات هم‌نهشتی دو شکل. در بقیه این فصل معیارهای مهم هم‌نهشتی برای مثلث‌ها و چند نتیجه ناشی از آنها را بررسی کرده‌ایم. فصل چهارم مربوط به اصلی‌ترین نابرابری‌های هندسی و البته مهم‌ترین آنها، یعنی نابرابری مثلث، است. این موضوع علاوه بر اینکه مسئله‌های جذابی دارد در اثبات قضیه‌های بعدی به کارمان می‌آید. فصل پنجم به تعبیری مهم‌ترین فصل این کتاب و

در بارهٔ توازی و نتیجه‌های ناشی از آن است.

تقریباً برای هر مفهوم یا مطلبی که از هندسه گفته‌ایم مسئله یا مسئله‌هایی حل شده مربوط به آن آورده‌ایم. دشواری تمرین‌های انتهای هر بخش در حد مسئله‌های حل شدهٔ همین بخش است. برخی از مسئله‌هایی که در انتهای کتاب با عنوان «تمرین‌های تکمیلی» آورده‌ایم کمی دشوارترند و می‌توانید پس از اینکه فصلی را کامل خواندید و تمرین‌هایش را حل کردید تمرین‌های تکمیلی مربوط به آن فصل را هم حل کنید. اگر خودتان مسئله حل نکنید «مسئله حل‌کن» نمی‌شوید. بنابراین راه حل تمرین‌ها را نیاورده‌ایم.

بسیاری از مسئله‌ها و تمرین‌هایی که در این کتاب آورده‌ایم تمرین‌هایی عادی نیستند. خیلی از آنها را از میان مسئله‌هایی که در مسابقه‌های ریاضی در گوشه و کنار دنیا داده شده‌اند انتخاب کرده‌ایم؛ البته، مسابقه‌هایی که مربوط به دانش‌آموزان ۱۱-۱۴ ساله‌اند:

**مسابقهٔ ریاضی کانگورو** مسابقه‌ای است که در بسیاری کشورها، از جمله ایران، هر سال برگزار می‌شود. دانش‌آموزان هر پایه می‌توانند در مسابقهٔ مربوط به پایهٔ خودشان شرکت کنند.

**جشنوارهٔ ریاضی مسکو** مسابقه‌ای برای دانش‌آموزان پایه‌های ششم و هفتم است که هر سال در مسکو برگزار می‌شود.

**المپیاد شفاهی مسکو** مسابقه‌ای برای دانش‌آموزان پایه‌های ششم و هفتم است که هر سال پاییز در مسکو برگزار می‌شود.

**المپیاد شفاهی هندسی مسکو** مسابقه‌ای برای دانش‌آموزان پایه‌های هشتم تا یازدهم است که هر سال بهار در مسکو برگزار می‌شود.

**المپیاد هندسهٔ شاریگین** مسابقه‌ای دومرحله‌ای است که مرحلهٔ اولش به شکل مکاتبه‌ای است و مرحلهٔ دومش به شکل شفاهی در مسکو برگزار می‌شود.

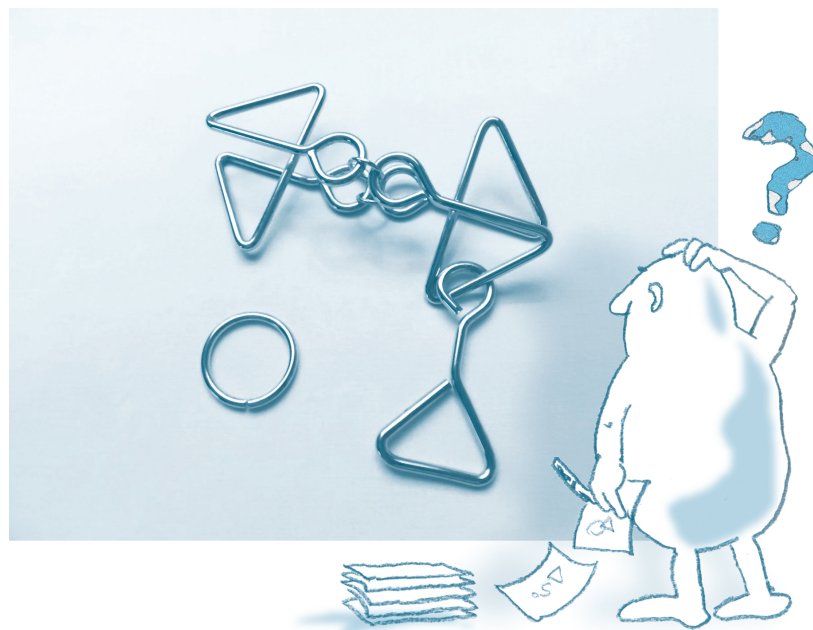
**مسابقهٔ ریاضی رگاتا** مسابقه‌ای برای دانش‌آموزان پایه‌های هفتم تا یازدهم است که هر سال در مسکو برگزار می‌شود.

**تورنمنت لومونوسف** مسابقه‌ای برای دانش‌آموزان پایه‌های ششم تا دوازدهم است که هر سال در مسکو برگزار می‌شود.

تورنمنت شهرها مسابقه‌ای است که هر سال دوبار، یک‌بار پاییز و یک‌بار بهار، در خیلی از کشورها، از جمله ایران، برگزار می‌شود. تقریباً همهٔ مسائلهایی را که از این مسابقه‌ها و مسابقه‌های ملی کشورهای مختلف برداشته‌ایم برای پایه‌های ششم، هفتم و هشتم بوده‌اند.

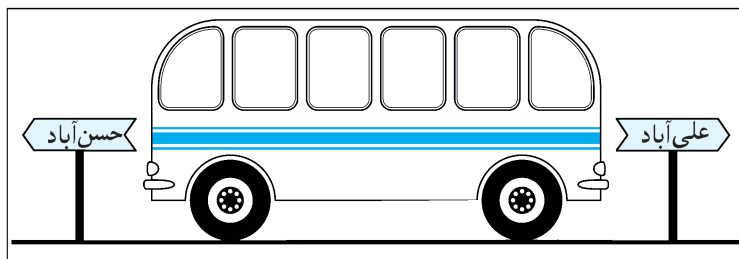
ارشک حمیدی

اسفند ۹۳



مسئله حل کردن

به نظر شما در شکل زیر اتوبوس به سمت علی‌آباد می‌رود یا به سمت حسن‌آباد؟



اگر پاسخ را یافته‌اید، آمادگی خوبی برای مطالعه این کتاب دارید؛ اما اگر هنوز پاسخ را پیدا نکرده‌اید، و از یافتن پاسخ ناامید شده‌اید، برای دیدن آن، که در صفحه ۱۴ آمده است، عجله نکنید. برای پیدا کردن پاسخ این مسئله، که بیشتر معماگونه است، به دو نوع مهارت احتیاج دارید: خوب دیدن و خوب استدلال کردن. البته، داشتن این دو مهارت برای حل کردن مسئله‌های هندسی هم بسیار مهم است.

این کتاب در باره هندسه مقدماتی است. نظام آموزش هندسه مقدماتی سابقه‌ای چند هزار ساله دارد و با این سابقه طولانی، هندسه مقدماتی گنجینه‌ای غنی از مسئله‌هاست. به کمک این نظام آموزشی بدون و چنین منبعی از مسئله‌ها می‌توانید بسیاری از استراتژی‌های مسئله حل کردن را بیاموزید و بر آنها مسلط شوید.

گفته‌اند که مسئله حل کردن یعنی اینکه بفهمید وقتی نمی‌دانید باید چه بکنید، چه کار باید بکنید! یکی از مهم‌ترین چیزهایی که باید در دوران تحصیل یاد بگیرید مسئله حل کردن است. اگر توانایی مسئله حل کردن نداشته باشید، کارایی و قدرت ایده‌ها، دانش‌ها و مهارت‌هایتان به شدت محدود می‌شود. این وضعیت به‌ویژه در ریاضیات خیلی زود پیش می‌آید. یکی از مهم‌ترین هدف‌های این کتاب آموزش گام به گام و روش‌مند مسئله حل کردن در هندسه است، به طوری که مهارت‌هایتان رفته‌رفته افزایش پیدا کند. به این ترتیب، این کتاب مملو از مسئله است. باید توجه کنید که مسئله‌های این کتاب معمولاً از تمرین‌های کتاب درسی‌تان دشوارترند و برای حل کردن آنها باید زمان بیشتری را صرف کنید.

برای حل کردن مسئله‌های ریاضی دستوالعملی کلی وجود دارد.

#### دستوالعمل کلی برای مسئله حل کردن

- ابتدا باید خوب بفهمید که داده‌های مسئله چه چیزهایی هستند و خواسته مسئله چیست.
- سپس نقشه‌ای برای رسیدن به خواسته مسئله طراحی کنید.

قسمت دوم این دستوالعمل مهم‌ترین مرحله در فرایند مسئله حل کردن است. برای طراحی نقشه موردنظر استراتژی‌هایی وجود دارند که موضوع اصلی بحث ما هستند. در این کتاب استراتژی‌هایی را که برای حل کردن مسئله‌های هندسه مفیدترند معرفی می‌کنیم. بعد از اینکه استراتژی را انتخاب کردید، باید آن را اجرا کنید و استدلال‌ها و محاسبات لازم را انجام دهید. البته باید به یاد داشته باشید که اجرای این دستوالعمل لزوماً به پیدا کردن راه حل مسئله‌ها منجر نمی‌شود، اما روشی منسجم برای مواجه شدن با مسئله‌ها فراهم می‌کند. در این فصل سه استراتژی را معرفی می‌کنیم و با بقیه استراتژی‌ها در فصل‌های بعد آشنا خواهید شد.

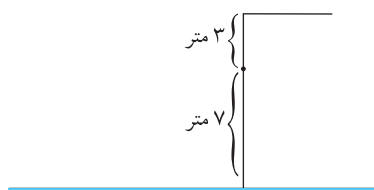
اولین استراتژی **شکل کشیدن** است. می‌توان ادعا کرد که برای حل کردن تقریباً همه مسئله‌های هندسه اولین کار این است که شکلی بکشید که وضعیت مسئله را نشان دهد. اما شکل کشیدن در بسیاری از دیگر مسئله‌ها نیز انتخاب اول است. به طور کلی، اگر بتوان فرض‌ها و اطلاعات مسئله را روی شکل نشان داد و وضعیت مسئله را مجسم کرد، استراتژی شکل کشیدن به کار می‌آید. در موارد زیر می‌توان از این استراتژی استفاده کرد.

- مسئله مربوط به اتفاقی است که روی داده است.
- در مسئله شکل‌های هندسی و اندازه وجود دارد.
- در مسئله مواردی مانند شمردن، حرکت، نسبت، ... وجود دارد.

#### مسئله ۱

حلزونی می‌خواهد از دیواری که ارتفاعش  $10^\circ$  متر است بالا برود. این حلزون در طول روز ۳ متر از دیوار بالا می‌رود، اما در طول شب ۲ متر از دیوار پایین می‌آید. اگر این حلزون بالا رفتن

از این دیوار را در ابتدای یک روز شروع کند، چند روز طول می‌کشد که به بالای دیوار برسد؟  
**راه‌حل.** توجه کنید که در هر شبانه‌روز حلزون ۱ متر جابه‌جا می‌شود. البته پاسخ مسئله ۱۰ روز نیست! شکل زیر را ببینید.



توجه کنید که اگر در ابتدای روزی فاصله حلزون تا بالای دیوار ۳ متر باشد، در طول این روز به بالای دیوار می‌رسد. از طرف دیگر، ۷ روز طول می‌کشد که حلزون به چنین نقطه‌ای برسد. بنابراین ۸ روز طول می‌کشد که حلزون به بالای دیوار برسد.

یکی دیگر از موارد استفاده استراتژی شکل کشیدن در مسئله‌هایی است که می‌توان برای اجزای آنها تعبیر هندسی پیدا کرد.

### مسئله ۲

کارل فریدریش گاوس شش‌ساله بود که روزی معلمش از شاگردانش خواست تا سر کلاس مجموع عددهای ۱، ۲، ۳، ... و ۱۰۰ را حساب کنند:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = ?$$

معلم فکر می‌کرد که این کار تا پایان کلاس طول می‌کشد و او می‌تواند در این بین استراحت کند! چند لحظه بعد گاوس کوچک دست بلند کرد و پاسخ درست را گفت. اگر راه‌حل گاوس را بدانید اصلاً تعجب نمی‌کنید که این کودک بعدها یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان همه اعصار شده است. برای اینکه نشان دهید چیزی از گاوس کم ندارید سعی کنید این مسئله را با استفاده از اینکه

۵ ■ مسئله حل کردن

مساحت مربع با طول ضلع ۱ برابر با ۱ است و تعبیر عددهای ۱، ۲، ۳، ... و  $100$  به مساحت مستطیل‌هایی که از کنار هم گذاشتن چندتا مربع پدید آمده‌اند حل کنید.

راه حل. توجه کنید که

۱ مساحت مربعی با طول ضلع ۱ است:



۲ مساحت دو مربع با طول ضلع ۱ است:

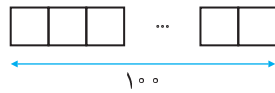


۳ مساحت سه مربع با طول ضلع ۱ است:

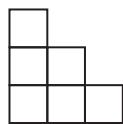


⋮

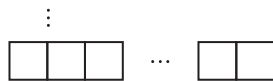
$100$  مساحت صد مربع با طول ضلع ۱ است:



اکنون این ردیف‌ها را به شکل زیر روی هم بچینید



(\*)



و مستطیل صفحه بعد را تشکیل دهید: