فهرست

فصل ۱
دایــــره

فصل ۲
تبدیل‌های هندسی و کاربردها

فصل ۳
روابط طولی در مثلث

دایره

(فصل ۱)

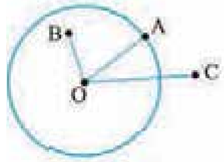
(درس ۱)

مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

در سال‌های قبل با دایره آشنا شدیم و فهمیدیم که فاصلهٔ هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر شعاع است.

یک دایره به مرکز O و شعاع R را با نماد $C(O,R)$ نشان می‌دهیم.

حالا یک دایره به شعاع ۶ و مرکز O را در نظر بگیرید، هر نقطه‌ای را که در صفحه در نظر بگیرید، نسبت به دایره ۳ حالت می‌تواند داشته باشد:



۱) اگر فاصلهٔ این نقطه از مرکز دایره ۶ باشد، این نقطه روی دایره قرار دارد.

۲) اگر فاصلهٔ این نقطه از مرکز دایره بیشتر از ۶ باشد، بدیهی است که بیرون دایره می‌افتد.

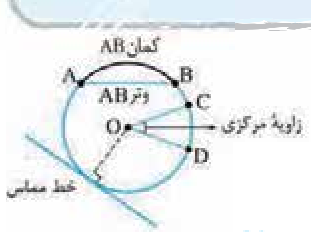
۳) اگر هم فاصلهٔ این نقطه از مرکز دایره کم‌تر از ۶ باشد، درون دایره می‌افتد.

مثال **اگر فاصلهٔ نقطه‌ای از مرکز دایره‌ای به شعاع ۶ برابر با $3m-1$ باشد، محدودهٔ m را طوری تعیین کنید که این نقطه درون دایره باشد.**

پاسخ اولاً که این فاصله باید عددی مثبت باشد پس: $3m-1>0 \Rightarrow m>\frac{1}{3}$

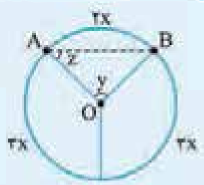
و از طرفی برای این‌که این نقطه درون دایره بیفتد باید فاصله‌اش از مرکز دایره کم‌تر از شعاع باشد: $3m-1<6 \Rightarrow 3m<7 \Rightarrow m<\frac{7}{3}$

پس محدودهٔ m می‌شود: $\frac{1}{3}<m<\frac{7}{3}$.



تعریف کمان، وتر، زاویهٔ مرکزی و خط مماس بر دایره را که می‌دانید و یادتان هست که کل دایره 360° است.
و راستی یادتان هست که دوتا کمان AB داریم یکی کمان کوچک‌تره و یکی هم کمان بزرگ‌تره! یک چیز دیگر را هم یادآوری کنم و برویم سراغ هندسهٔ سال یازدهم، زاویهٔ مرکزی، با کمان مقابلش برابر است یعنی $\hat{O}=\overset{\frown}{CD}$.

تست **در شکل مقابل، حاصل $x+y+z$ کدام است؟**



۱) 180° ۲) 225° ۳) 270° ۴) 245°

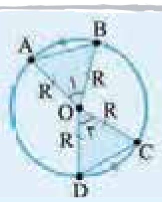
پاسخ **گزینهٔ ۱** مجموع کمان‌های دایره 360° است، پس x به دست می‌آید:

$$3x+3x+2x=360^\circ \Rightarrow 8x=360^\circ \Rightarrow x=45^\circ$$

پس کمان AB که $2x$ است می‌شود: $\overset{\frown}{AB}=90^\circ$ و زاویهٔ مرکزی مقابلش هم باید 90° شود پس $y=90^\circ$. حالا باید z را پیدا کنیم، اول از هر چیزی باید حواسمان باشد که OA و OB شعاع‌های دایره هستند پس OA و OB برابرند، یعنی مثلث AOB متساوی‌الساقین است و در نتیجه داریم: $\overset{\Delta}{AOB}: \hat{O}=90^\circ \Rightarrow 2z=90^\circ \Rightarrow z=45^\circ$

پس $x+y+z$ می‌شود: $x+y+z=45^\circ+90^\circ+45^\circ=180^\circ$

مثال **ثابت کنید اگر دو کمان از دایره‌ای با هم برابر باشند، وترهای متناظر آن‌ها نیز با هم برابرند.**



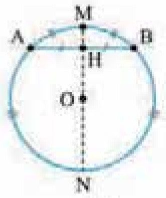
پاسخ مطابق شکل فرض می‌کنیم که کمان‌های AB و CD برابر باشند، می‌خواهیم ثابت کنیم که وترهای AB و CD با هم برابرند:

کمان‌های AB و CD برابرند، پس زاویه‌های مرکزی روبه‌روی آن‌ها نیز با هم برابرند.

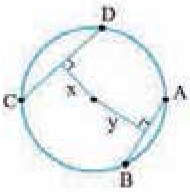
یعنی: $\hat{O}_1=\hat{O}_2$، حالا چون OA و OB و OC و OD همگی شعاع‌اند می‌توانیم دربارهٔ مثلث‌های OAB و OCD بگوییم:

$$\begin{cases} OA=OC \\ \hat{O}_1=\hat{O}_2 \\ OB=OD \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{OAB} \cong \overset{\Delta}{OCD} \Rightarrow AB=CD$$

نکات مهم



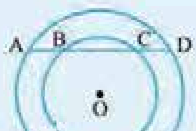
۱) اگر از مرکز دایره عمودی بر یک وتر رسم کنیم، وتر را که نصف می‌کند هیچ، کمان‌های متناظر این وتر را هم نصف می‌کند. شکل هم می‌گوید که از O عمودی بر AB رسم کردیم که هم وتر AB $(AH = HB)$ و هم کمان کوچک‌تر AB $(AM = MB)$ و همین‌طور کمان بزرگ‌تر AB $(AN = NB)$ را نصف کرده است. (چرا؟) از طرفی AB کوتاه‌ترین وتر گذرنده از H درون دایره است.



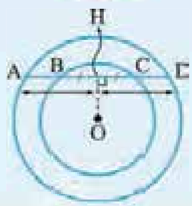
۲) هر چه‌قدر که یک وتر به مرکز دایره نزدیک‌تر باشد، طولش بزرگ‌تر می‌شود. مثلاً در شکل مقابل چون CD به مرکز دایره نزدیک‌تر از AB است، می‌فهمیم که $CD > AB$ و شاید بعضی‌ها بگویند چون بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است.

۳) اگر دو وتر دایره برابر باشند، فاصلهٔ آن‌ها از مرکز دایره برابر است.

مثال در شکل مقابل مرکز هر دو دایره نقطهٔ O است، ثابت کنید: $AB = CD$.



پاسخ از O عمودی بر وتر AD رسم می‌کنیم، در دایرهٔ کوچک‌تر داریم:



$$OH \perp BC \Rightarrow BH = HC$$

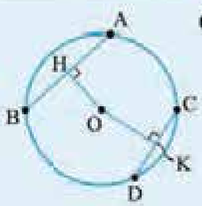
و در دایرهٔ بزرگ‌تر نیز داریم:

$$OH \perp AD \Rightarrow AH = HD$$

حالا می‌توانیم بگوییم که:

$$AH - BH = DH - CH \Rightarrow AB = CD$$

تست در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره است. اگر $AB = ۸$ و $CD = ۶$ و $OH = ۱۰ - m$ و $OK = ۳m - ۲$ محدودهٔ m کدام است؟



۱) $m > ۳$
۲) $m < ۳$
۳) $۳ < m < ۱۰$
۴) $\frac{۲}{۳} < m < ۱۰$

پاسخ **گزینهٔ ۳** چون AB از CD بزرگ‌تر است پس OH از OK کوچک‌تر است، یعنی وتر AB نزدیک‌تر بوده که بزرگ‌تر شده!

پس داریم:

$$OK > OH \Rightarrow ۳m - ۲ > ۱۰ - m \Rightarrow ۴m > ۱۲ \Rightarrow m > ۳$$

از طرفی طول هر پاره‌خط باید عددی مثبت باشد. در نتیجه:

$$\begin{cases} ۱۰ - m > ۰ \Rightarrow m < ۱۰ \\ ۳m - ۲ > ۰ \Rightarrow m > \frac{۲}{۳} \end{cases}$$

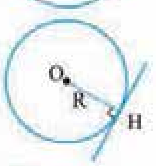
از اشتراک این سه‌تا بازه داریم: $۳ < m < ۱۰$.

اوضاع نسبی خط و دایره

یک خط و دایره سه‌تا حالت می‌توانند داشته باشند:

۱) **متقاطع:** اگر خط دایره را قطع کند به این خط قاطع می‌گویند و در این حالت به خط و دایره متقاطع می‌گویند.

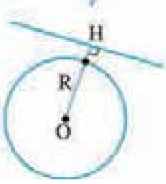
$$OH < R$$



۲) **مماس:** اگر خط و دایره، یک نقطهٔ مشترک داشته باشند، خط و دایره مماس هستند.

اگر از مرکز دایره به نقطهٔ مشترک شعاع بکشیم، این شعاع بر خط مماس عمود می‌شود.

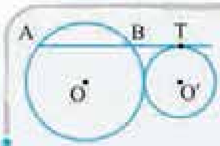
$$OH = R$$

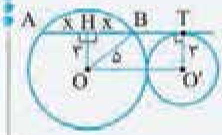


۳) **متخارج:** گاهی خط و دایره کاری با هم ندارند و خط از بیرون دایره عبور می‌کند.

$$OH > R$$

مثال **دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۵ مطابق شکل مماس‌خارج‌اند و امتداد وتر AB در T بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است. محیط مثلث OAB را بیابید.**





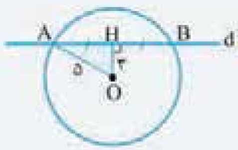
پاسخ $O'T$ بر AT عمود است. از O نیز بر AB عمود می‌کنیم. (قطر عمود بر وتر) می‌دانیم $۳ = OH = O'T$ و داریم:

$$\overset{\Delta}{OHB}: OB^۲ = OH^۲ + (\frac{AB}{۲})^۲ \Rightarrow ۲۵ = ۹ + \frac{AB^۲}{۴} \Rightarrow AB = ۸$$

$$۲P_{\overset{\Delta}{OAB}} = ۵ + ۵ + ۸ = ۱۸$$

تست **خطی به فاصلهٔ ۳ از مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ عبور می‌کند. طول پاره‌خطی که دایره از این خط جدا می‌کند، کدام است؟**

۱) ۴
۲) ۸
۳) $\sqrt{۳۴}$
۴) $۲\sqrt{۳۴}$



پاسخ **گزینهٔ ۲** فاصلهٔ نقطه از خط یعنی عمودی که از آن نقطه بر خط رسم می‌شود پس مطابق شکل $OH = ۳$ است و از طرفی این خط عمود، وتر AB را نصف می‌کند.

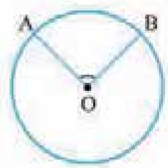
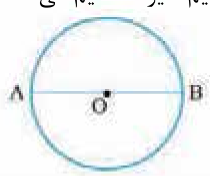
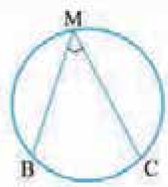
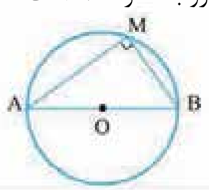
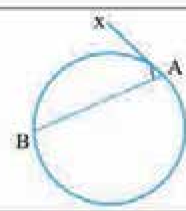
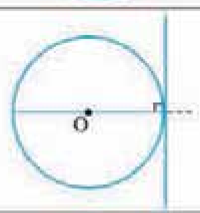
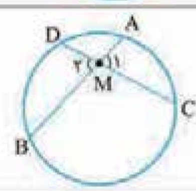
می‌خواهیم طول AB را حساب کنیم، برای این کار از O به A وصل می‌کنیم، OA شعاع است پس $OA = ۵$ حالا در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH قضیهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم:

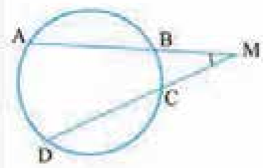
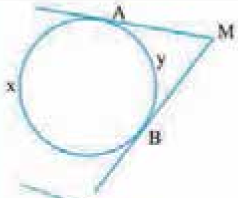
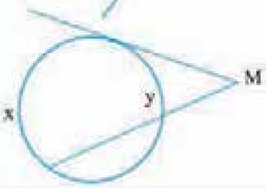
$$\overset{\Delta}{AOH}: \hat{H} = ۹۰^\circ \Rightarrow AO^۲ = OH^۲ + AH^۲ \Rightarrow ۵^۲ = ۳^۲ + AH^۲ \Rightarrow AH^۲ = ۱۶ \Rightarrow AH = ۴$$

پس AB دو برابر AH یعنی $۲ \times ۴ = ۸$ می‌شود.

انواع زاویه‌ها در دایره

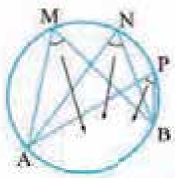
در دایره ۵ مدل زاویه داریم که در جدول زیر آن‌ها را می‌بینید.

اسم	قیافه	اندازه	حالت خاص مهم
زاویهٔ مرکزی		$A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB}$	قطر دایره را به دو نیم دایره تقسیم می‌کند.  $A\hat{O}B = ۱۸۰^\circ$
زاویهٔ محاطی		$B\hat{M}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$	زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر، ۹۰° است.  $\hat{M} = ۹۰^\circ$
زاویهٔ ظلّی		$x\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$	 شعاع دایره در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است.
زاویهٔ وتری داخلی		$\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{۲}$	-

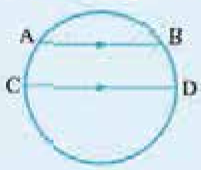
اسم	قیافه	اندازه	حالت خاص مهم
زاویهٔ وتری خارجی		$\hat{M}=\dfrac{\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BC}}{۲}$	۱- حالت خاص $\hat{M}=\dfrac{\overset{\frown}{x}-\overset{\frown}{y}}{۲}$  ۲- حالت خاص $\hat{M}=\dfrac{\overset{\frown}{x}-\overset{\frown}{y}}{۲}$ 

همهٔ زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یک کمان با هم برابرند.

$$\hat{M}=\hat{N}=\hat{P}=\cdots=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$



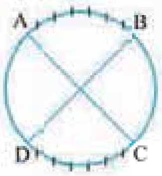
مثال در شکل مقابل، وترهای AB و CD موازی‌اند، ثابت کنید: $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$



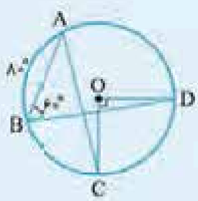
پاسخ از A به D وصل می‌کنیم، مطابق شکل زاویه‌های $\hat{A}_۱$ و $\hat{D}_۱$ با هم برابرند، از طرفی این زاویه‌ها محاطی‌اند، پس می‌توانیم بگوییم که:

$$\begin{cases}\hat{A}_۱=\dfrac{\overset{\frown}{BD}}{۲}\\ \hat{C}_۱=\dfrac{\overset{\frown}{AD}}{۲}\end{cases}\Rightarrow\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}\Rightarrow\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AC}$$

تذکر اگر $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$، الزاماً AB و CD موازی نیستند، نگاه کنید:



تست در شکل مقابل، $\overset{\frown}{AB}=۸۰^\circ$ و $\hat{B}=۶۰^\circ$ است. اندازهٔ $\hat{A}$ کدام است؟



۱) ۲۵° ۲) ۳۰°

۳) ۳۵° ۴) ۲۰°

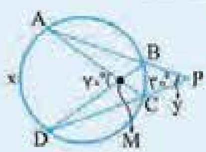
پاسخ **گزینه** وقتی که زاویهٔ مرکزی O برابر ۹۰° باشد، کمان CD هم ۹۰° خواهد بود، $\hat{B}$ زاویهٔ محاطی است پس کمان مقابلش باید دو برابر این زاویه باشد پس $\overset{\frown}{AD}=۱۲۰^\circ$. حالا تکلیف همهٔ کمان‌ها به‌جز $\overset{\frown}{BC}$ مشخص است.

کل دایره ۳۶۰° است پس داریم:

$$\overset{\frown}{BC}=۳۶۰-(۸۰^\circ+۱۲۰^\circ+۹۰^\circ)=۷۰^\circ$$

زاویهٔ A هم که محاطی است و روبه‌رو به همین کمان BC، پس: $\hat{A}=\dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲}=\dfrac{۷۰^\circ}{۲}=۳۵^\circ$

تست در شکل مقابل، y کدام است؟



۱) ۲۰° ۲) ۳۰° ۳) ۴۰° ۴) ۶۰°

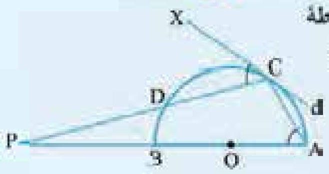
پاسخ **گزینه** زاویهٔ M وتری داخلی است، پس داریم:

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}}{۲}\Rightarrow ۷۰^\circ=\frac{x+۳۰^\circ}{۲}\Rightarrow x+۳۰^\circ=۱۴۰^\circ\Rightarrow x=۱۱۰^\circ$$

زاویهٔ P وتری خارجی است، پس داریم:

$$\hat{P}=\frac{\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BC}}{۲}\Rightarrow y=\frac{۱۱۰^\circ-۳۰^\circ}{۲}=\frac{۸۰^\circ}{۲}=۴۰^\circ$$

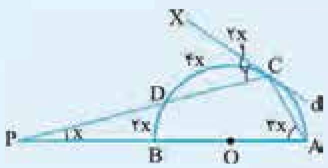
تست در شکل مقابل، امتداد قطر AB و وتر DC یکدیگر را در نقطهٔ P قطع می‌کنند و خط d در نقطهٔ C بر دایره مماس است. اگر $X\hat{C}D = ۲x$ و $\hat{P} = x$ و $\hat{A} = ۳x$ باشد، کمان AC چند درجه است؟



۱) ۸۰° ۲) ۹۰°

۳) ۱۲۰° ۴) ۷۲°

پاسخ **گزینهٔ ۴** زاویهٔ XCD ظلّی است پس وقتی این زاویه ۲x باشد کمان مقابلش یعنی CD باید دو برابر آن باشد، پس: $\overset{\frown}{CD} = ۴x$.



زاویهٔ A محاطی است پس $\overset{\frown}{BC} = ۲\hat{A} = ۶x$ پس کمان BD برابر با ۲x است. حالا سراغ آخرین اطلاعات مسئله برویم، زاویهٔ P وتری خارجی است، پس داریم:

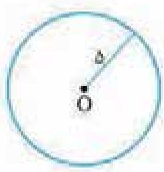
$$\hat{P} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD}}{۲} \Rightarrow x = \frac{\overset{\frown}{AC} - ۲x}{۲} \Rightarrow ۲x = \overset{\frown}{AC} - ۲x \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = ۴x$$

خب سؤال که الکی نگفته قطر AB، حتماً به یک دردی می‌خورد! AB قطر است پس با یک نیم‌دایره روبه‌روایم، یعنی مجموع کمان‌ها نصف یک دایرهٔ کامل یعنی ۱۸۰° است:

$$\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{DC} + \overset{\frown}{AC} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲x + ۴x + ۴x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۰x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۸^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = ۴x = ۴(۱۸^\circ) = ۷۲^\circ$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- دایرهٔ $C(O, ۵)$ و نقاط C, B, A مفروض هستند. اگر $OA = ۵$، $OB = ۳$ و $OC = ۷$ باشند کدام گزینه می‌تواند نادرست باشد؟ *(کتاب درسی)*



۱) نقطهٔ A روی دایره است. ۲) نقطهٔ B درون دایره و نقطهٔ C بیرون دایره است.

۳) فاصلهٔ نقاط B و C بیشتر از شعاع دایره است. ۴) فاصلهٔ نقاط A و B حداکثر ۸ واحد است.

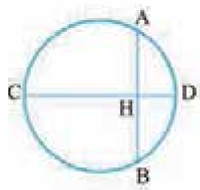
۲- نقطهٔ ثابت A در صفحه مفروض است. تمام نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از A کم‌تر از ۳ سانتی‌متر باشد چه مساحتی از صفحه را پوشش می‌دهند؟

۱) ۳π ۲) ۹π ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۹\pi}{۲}$

۳- نقطهٔ A به فاصلهٔ $۲x - ۵$ از نقطهٔ O قرار دارد. اگر نقطهٔ A درون دایره به شعاع ۵ و مرکز O و بیرون دایره به شعاع ۳ و مرکز O قرار داشته باشد، محدودهٔ x کدام است؟

۱) $۴ < x < ۵$ ۲) $۸ < x < ۱۰$ ۳) $x > ۵$ ۴) $x > ۱۰$

۴- با توجه به شکل مقابل، کدام گزینه نادرست است؟



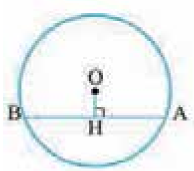
۱) اگر CD قطر دایره باشد نقاط H و D به ترتیب وسط وتر و کمان AB هستند.

۲) اگر نقاط D و H روی عمود منصف وتر AB باشند، CD قطر دایره است.

۳) اگر D وسط کمان AB و H وسط وتر AB باشند، CD قطر دایره است.

۴) اگر CD قطر دایره و D وسط کمان AB باشد، قطر CD عمود منصف وتر AB است.

۵- در شکل مقابل $AB = ۶$، $OH = ۱$ و $O\hat{H}A = ۹۰^\circ$. شعاع دایره چه‌قدر است؟



۱) $\sqrt{۱۳}$ ۲) $\sqrt{۱۲}$

۳) $\sqrt{۱۱}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

۶- در دایرهٔ $C(O, ۵)$ فاصلهٔ وتر AB از مرکز دایره برابر ۳ است. طول وتر AB کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۳ ۴) ۶

۷- در دایره‌ای به شعاع ۲m، وتر $AB = ۴m - ۸$ به فاصلهٔ $m + ۳$ از مرکز دایره قرار دارد. m کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۸- در دایره‌ای به شعاع $۳\sqrt{۲}$ اگر فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دایره ۴ باشد، اندازهٔ کوچک‌ترین وتر گذرنده از A کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹- در دایره‌ای به قطر ۱۰، وتر AB به طول ۸ واحد رسم شده است. نقطهٔ C بر روی دایره متحرک است. بیشترین مساحت مثلث CAB کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۶ ۳) ۴۰ ۴) ۴۸

۱۰- کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر در یک دایره فاصلهٔ دو وتر از مرکز دایره برابر باشد طول این دو وتر یکسان است.

۲) بزرگ‌ترین وتری که از نقطهٔ A درون دایره می‌گذرد، وتری است که بر قطر گذرنده از نقطهٔ A عمود است.

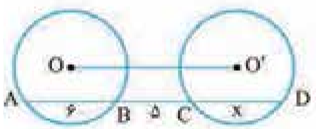
۳) از بین دو وتر در یک دایره، وتری بزرگ‌تر است که به مرکز دایره نزدیک‌تر است.

۴) تمام وترهایی از دایره که طول یکسانی دارند، فاصلهٔ وسطشان از مرکز دایره با هم برابر است.

۱۱- در دایرهٔ $C(O, r)$ طول وترهای AB و CD به ترتیب ۱۰ و ۱۲ است. اگر فاصلهٔ O از وترهای AB و CD به ترتیب $۲x+۶$ و $۵x-۳$ باشد، حدود x کدام است؟

۱) $x<۳$ ۲) $x>۳$ ۳) $۰<x<۳$ ۴) $\frac{۳}{۵}<x<۳$

۱۲- در شکل زیر، شعاع دایره‌ها برابر ۵ است. مطابق شکل، اگر $AD \parallel OO'$ باشد، اندازهٔ CD کدام است؟



۱) ۵ ۲) ۵/۵

۳) ۶ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۱۳- خط Δ دایره‌ای به شعاع $۲\sqrt{۳}$ را قطع می‌کند. اگر زاویهٔ خط مماس بر دایره با خط Δ در نقطهٔ تلاقی برابر با ۳۰ درجه باشد، فاصلهٔ مرکز دایره تا Δ کدام است؟

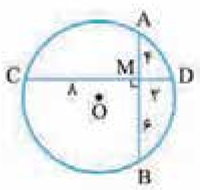
۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{۳}$

۱۴- وسط تمام وترهایی به طول ۱۶ واحد در دایره‌ای به شعاع ۱۰ واحد، روی کدام شکل هستند؟

۱) دایره‌ای به شعاع ۸ ۲) دایره‌ای به شعاع ۶

۳) قسمتی از دایره‌ای به شعاع ۶ ۴) قسمتی از دایره‌ای به شعاع ۸

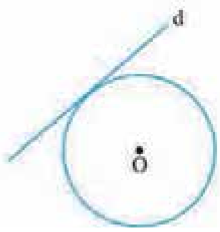
۱۵- در شکل مقابل دو وتر AB و CD برهم عمودند. اندازهٔ شعاع دایره چه‌قدر است؟



۱) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۵\sqrt{۵}}{۲}$

۳) $۵\sqrt{۵}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

۱۶- خط d بر دایرهٔ $C(O, ۵)$ مماس است. اگر فاصلهٔ O از خط d برابر $۲x-۳$ باشد x کدام است؟



۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

۱۷- خط d به فاصلهٔ $۳x-۱$ از مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ قرار دارد. اگر $x>۲$ باشد کدام گزینه درست است؟

۱) ممکن است خط d بر دایره مماس شود. ۲) ممکن است خط d و دایره متقاطع باشند.

۳) خط d و دایره نقطهٔ مشترکی ندارند. ۴) اگر $x<۵$ باشد، خط d دایره را قطع می‌کند.

۱۸- خط d مفروض است. مرکز همهٔ دایره‌هایی که شعاع آن‌ها مقدار ثابت R است و بر این خط مماس هستند روی چه شکلی قرار دارند؟

۱) خطی موازی خط d و به فاصلهٔ R از آن ۲) دو خط موازی خط d و به فاصلهٔ R از آن

۳) خطی عمود بر خط d ۴) دو نقطه به فاصلهٔ R از خط d

۱۹- خط d مفروض است. مرکز همهٔ دایره‌هایی که در نقطهٔ ثابت A روی خط d بر آن مماس هستند، روی چه شکلی قرار دارند؟

۱) یک خط عمود بر خط d ۲) دو خط عمود بر هم که نقطهٔ تلاقی آن‌ها A است.

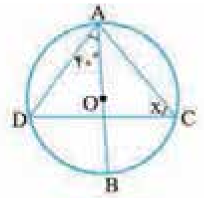
۳) دو خط موازی خط d ۴) یک خط موازی خط d

۲۰- دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۸ واحد، در نقطهٔ A مماس درونی هستند. وتر BC از دایرهٔ بزرگ، موازی خط‌المرکزین و بر دایرهٔ کوچک در نقطهٔ P مماس است. اندازهٔ $PB \times PC$ کدام است؟ *(ریاضی ۹۷)*

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

انواع زاویه‌ها

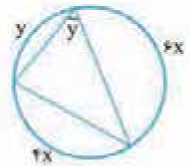
۲۱- در شکل مقابل مقدار x چه‌قدر است؟



۱) 50° ۲) 60°

۳) 70° ۴) 80°

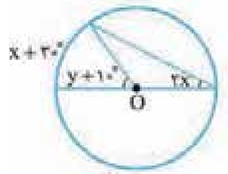
۲۲- در شکل مقابل $x+y$ کدام است؟



۱) 50° ۲) 100°

۳) 80° ۴) 90°

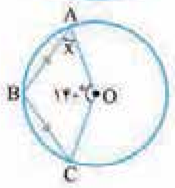
۲۳- در شکل مقابل O مرکز دایره است. مقدار $x+y$ چه‌قدر است؟



۱) 10° ۲) 20°

۳) 30° ۴) 40°

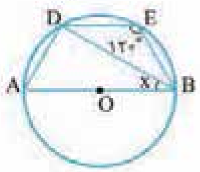
۲۴- در شکل مقابل مقدار x چه‌قدر است؟



۱) 40° ۲) 45°

۳) 50° ۴) 55°

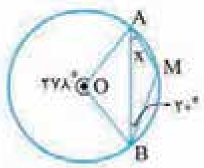
۲۵- در شکل مقابل O مرکز دایره است. مقدار x چه‌قدر است؟



۱) 25° ۲) 40°

۳) 30° ۴) 50°

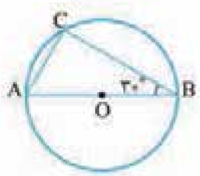
۲۶- با توجه به شکل، اندازهٔ زاویهٔ MAB کدام است؟



۱) 22° ۲) 21°

۳) 24° ۴) 18°

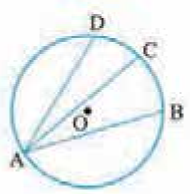
۲۷- در شکل مقابل، AB قطر و $\hat{B} = 30^\circ$ است. اگر شعاع دایره برابر ۶ باشد، اندازهٔ BC کدام است؟



۱) $3\sqrt{3}$ ۲) $6\sqrt{3}$

۳) ۶ ۴) $6\sqrt{2}$

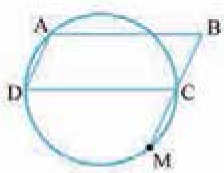
۲۸- در دایره به مرکز O و شعاع ۶۰ واحد مطابق شکل مقابل طول کمان‌های $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{CD}$ به ترتیب 24π و 10π است. نسبت دو زاویهٔ محاطی $B\hat{A}D$ به $D\hat{A}C$ کدام است؟



۱) $\frac{12}{5}$ ۲) $\frac{17}{12}$

۳) $\frac{17}{5}$ ۴) $\frac{17}{24}$

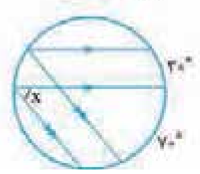
۲۹- در متوازی‌الاضلاع ABCD، دایره‌ای که از رئوس A ، C و D می‌گذرد، امتداد BC را در M قطع می‌کند. اگر $AB = 6$ ، $AD = 3$ و $\hat{A} = 100^\circ$ باشد، فاصلهٔ AM کدام است؟



۱) ۵ ۲) ۶

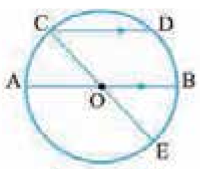
۳) ۷ ۴) ۸

۳۰- در شکل مقابل مقدار x چه‌قدر است؟



۱) 40° ۲) 50°

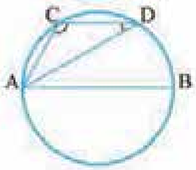
۳) 80° ۴) 100°



۳۱- در شکل روبه‌رو قطر AB و وتر CD موازی‌اند. اگر $D\hat{C}E = ۶۵^\circ$ باشد، کمان BE چند درجه است؟

۱) ۲۵° ۲) $۳۲/۵^\circ$

۳) ۳۵° ۴) ۶۵°



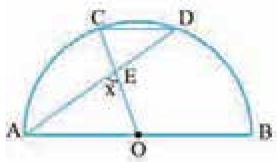
۳۲- مطابق شکل در دایره‌ای به قطر AB، وتر CD موازی قطر AB رسم شده است. اندازهٔ $A\hat{C}D - A\hat{D}C$ کدام است؟

۱) ۳۰° ۲) ۴۵°

۳) ۶۰° ۴) ۹۰°

(کتاب درسی)

۳۳- در شکل زیر، O مرکز نیم‌دایره و $AB \parallel CD$ است. اگر $\overset{\frown}{CD} = ۴۰^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ x کدام است؟

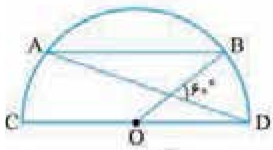


۱) ۷۰°

۲) ۷۵°

۳) ۸۰°

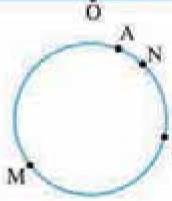
۴) ۸۵°



۳۴- در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره و $AB \parallel CD$ است. اندازهٔ کمان AB کدام است؟

۱) ۷۰° ۲) ۸۰°

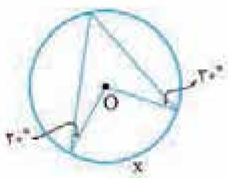
۳) ۹۰° ۴) ۱۰۰°



۳۵- در شکل روبه‌رو $\overset{\frown}{AMB} = ۴\overset{\frown}{ANB}$، کمان $\overset{\frown}{ANB}$ چه کسری از محیط دایره است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$



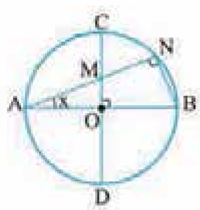
۳۶- در شکل مقابل x کدام است؟

۱) ۵۰°

۲) ۱۰۰°

۳) ۸۰°

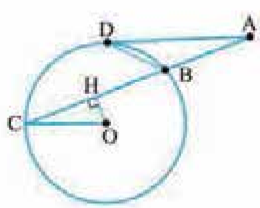
۴) ۹۰°



۳۷- در شکل مقابل دو قطر AB و CD بر هم عمودند. اگر $NM = NB$ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) ۳۰° ۲) $۲۲/۵^\circ$

۳) ۱۵° ۴) ۲۵°



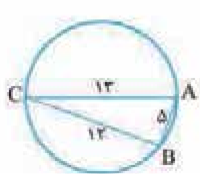
۳۸- در شکل مقابل AD مماس بر دایره به مرکز O و OH عمود بر AC است، اگر $D\hat{B}C = ۲D\hat{C}A$ باشد، زاویهٔ $C\hat{O}H$ چند برابر زاویهٔ $D\hat{A}C$ است؟ (ریاضی ۹۷)

۱) ۲/۵

۲) ۳

۳) ۳/۵

۴) ۴

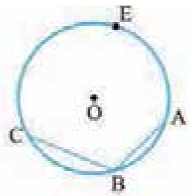


۳۹- در دایره مقابل، $AB = ۵$، $BC = ۱۲$ و $AC = ۱۳$ است. اندازهٔ کمان AC کدام است؟

۱) ۱۸۰° ۲) ۱۵۰°

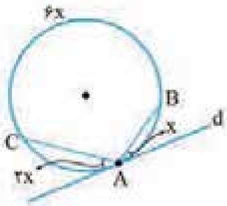
۳) ۱۲۰° ۴) ۹۰°

۴۰- در دایرهٔ $C(O, ۲)$، $AB = ۲$ و $BC = ۲\sqrt{۲}$ است. اندازهٔ کمان AEC کدام است؟



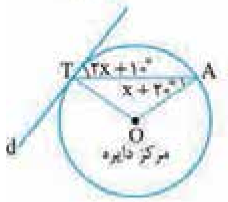
۱) ۲۲۵°
۲) ۲۳۰°
۳) ۱۹۰°
۴) ۲۱۰°

۴۱- در شکل مقابل خط d بر دایره مماس است. x چند درجه است؟



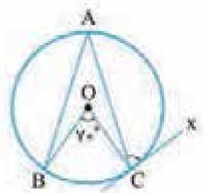
۱) ۱۰°
۲) ۲۰°
۳) ۳۰°
۴) ۴۰°

۴۲- در شکل مقابل خط d بر دایره مماس است. مقدار x چه‌قدر است؟



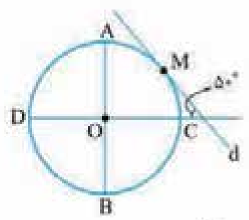
۱) ۲۰°
۲) ۲۵°
۳) ۳۰°
۴) ۳۵°

۴۳- در شکل مقابل، $AB = AC$ و $B\hat{O}C = ۷۰^\circ$ است. زاویهٔ ظلّی ACx چند درجه است؟



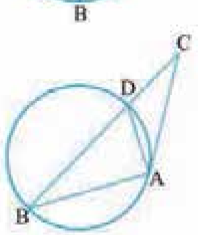
۱) $۶۲/۵^\circ$
۲) ۶۵°
۳) $۶۷/۵^\circ$
۴) $۷۲/۵^\circ$

۴۴- در شکل مقابل قطرهای AB و CD بر هم عمود و خط d بر دایره مماس است. اندازهٔ زاویهٔ MOA کدام است؟



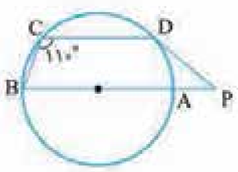
۱) ۶۰°
۲) ۶۵°
۳) ۵۰°
۴) ۵۵°

۴۵- در شکل مقابل، AC بر دایره مماس بوده و $AB = AC = ۶$. اگر محیط مثلث ABD برابر ۱۶ باشد، اندازهٔ BC کدام است؟



۱) ۸
۲) ۱۲
۳) ۹
۴) ۱۰

۴۶- در شکل داده‌شده اگر AB قطر دایره و $\hat{C} = ۱۱۰^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ P چه‌قدر است؟ (PD مماس بر دایره است.)

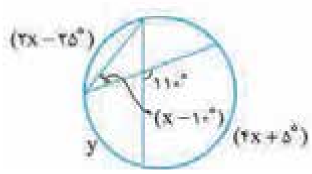


۱) ۵۰°
۲) ۶۰°
۳) ۴۵°
۴) ۵۵°

۴۷- در شکل مقابل x چند درجه است؟

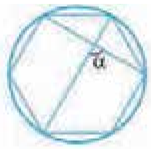
۱) ۱۰°
۲) ۱۵°
۳) ۲۰°
۴) ۲۵°

۴۸- با توجه به شکل مقابل، مقدار $y - x$ کدام است؟



۱) ۲۰°
۲) ۳۰°
۳) ۴۰°
۴) ۵۰°

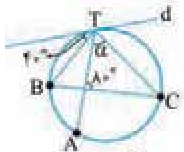
۴۹- در شکل مقابل ۶ ضلعی، منتظم است. α چند درجه است؟



۱) ۹۰° ۲) ۱۲۰°

۳) ۱۰۵° ۴) ۱۳۰°

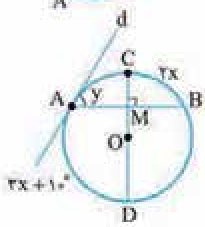
۵۰- در شکل مقابل، اندازهٔ زاویهٔ α کدام است؟ (خط d بر دایره مماس است.)



۱) ۶۰° ۲) ۵۰°

۳) ۴۰° ۴) ۳۰°

۵۱- در شکل مقابل مقدار y کدام است؟ (O مرکز دایره و d بر دایره مماس است.)



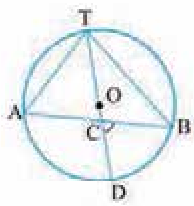
۱) ۳۴°

۲) ۴۲°

۳) ۵۶°

۴) ۶۸°

۵۲- در شکل، O مرکز دایره و $\hat{A} = ۶۵^\circ$ و $\hat{B} = ۳۵^\circ$ زاویهٔ C چند درجه است؟ (ریاضی ۸۱)



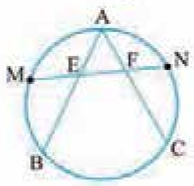
۱) ۶۰°

۲) ۶۱°

۳) ۶۲°

۴) ۶۳°

۵۳- در شکل مقابل، M وسط کمان AB و N وسط کمان AC است. کدام گزینه درست است؟



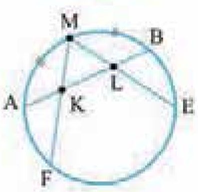
۱) $AE = EB$

۲) $AF = FC$

۳) $AB = AC$

۴) $AE = AF$

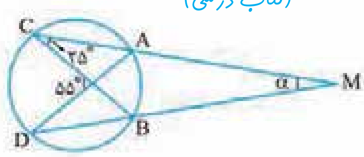
۵۴- در شکل مقابل، M وسط کمان AB است، مجموع $F\hat{K}L + L\hat{E}F$ چند درجه است؟



۱) ۹۰ ۲) ۱۸۰

۳) ۱۳۵ ۴) ۱۵۰

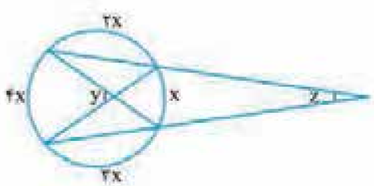
۵۵- در شکل مقابل، اندازهٔ α چند درجه است؟ (کتاب درسی)



۱) ۵° ۲) ۱۰°

۳) ۲۰° ۴) ۲۰°

۵۶- در شکل مقابل، مقدار $x + y + z$ چه‌قدر است؟



۱) ۱۸۰° ۲) ۱۷۰°

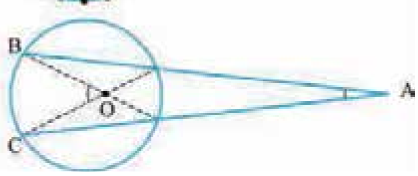
۳) ۱۶۰° ۴) ۱۵۰°

۵۷- فاصلهٔ هر دو نقطهٔ متوالی روی دایره با هم برابر است. زاویه α چند درجه است؟

۱) $۲۲/۵^\circ$ ۲) ۲۵°

۳) $۲۷/۵^\circ$ ۴) ۳۰°

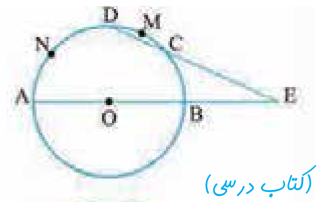
۵۸- در شکل مقابل $\hat{A} = ۲۷^\circ$ و $\hat{O} = ۷۱^\circ$، کمان BC چند درجه است؟



۱) ۹۸° ۲) ۱۰۰°

۳) ۱۰۲° ۴) ۱۰۴°

۵۹- O مرکز دایره، $\widehat{DMC} = ۳۰^\circ$ و $\hat{E} = ۳۰^\circ$، مقدار $\widehat{AND}$ کدام است؟

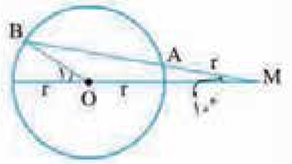


۱) ۸۵° ۲) ۹۵°

۳) ۱۰۵° ۴) ۱۱۵°

(کتاب درسی)

۶۰- در شکل MA برابر شعاع دایره است. اندازهٔ زاویهٔ O_1 چند درجه است؟



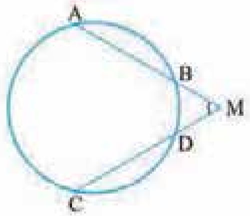
۱) ۲۰°

۲) ۲۵°

۳) ۳۰°

۴) ۳۵°

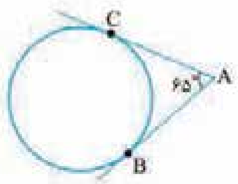
۶۱- در شکل روبه‌رو، AB = CD است. هرگاه $\hat{M} = ۶۰^\circ$ باشد اندازهٔ کمان ACD چه‌قدر است؟



۱) ۲۲۰° ۲) ۲۴۰°

۳) ۲۶۰° ۴) ۲۸۰°

۶۲- در شکل مقابل $\hat{A} = ۶۵^\circ$، کمان بزرگ‌تر BC کدام است؟



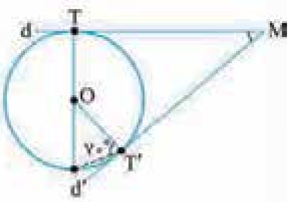
۱) ۲۳۵°

۲) ۲۴۵°

۳) ۲۵۵°

۴) ۲۶۵°

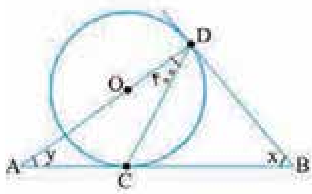
۶۳- در شکل مقابل O مرکز دایره و خطوط d و d' مماس بر دایره هستند. مقدار زاویهٔ M کدام است؟



۱) ۴۰° ۲) ۵۰°

۳) ۶۰° ۴) ۷۰°

۶۴- در شکل مقابل O مرکز دایره و نقاط C و D محل مماس‌شدن خطوط بر دایره هستند. مقدار $x - y$ کدام است؟

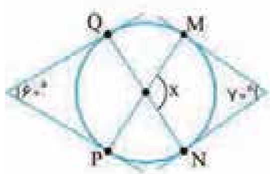


۱) ۸۰° ۲) ۸۵°

۳) ۷۰° ۴) ۷۵°

(کتاب درسی)

۶۵- در شکل مقابل x چند درجه است؟



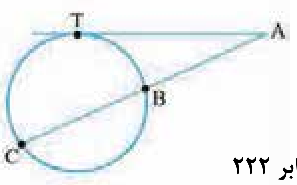
۱) ۱۰۵

۲) ۱۱۰

۳) ۱۱۵

۴) ۱۲۰

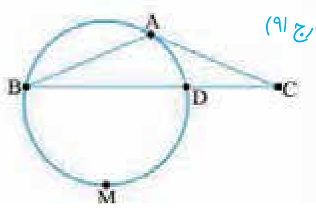
۶۶- در شکل، AT مماس و $\widehat{BC} = \widehat{CT} = ۲\widehat{BT}$، زاویهٔ A چند درجه است؟



۱) ۱۸° ۲) ۷۲°

۳) ۳۶° ۴) ۱۴۴°

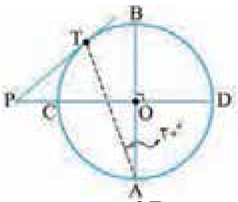
۶۷- در شکل مقابل، طول مماس AC بر دایره با طول وتر AB از دایره برابر است. اگر کمان DMB برابر ۲۲۲ درجه باشد، زاویهٔ C چند درجه است؟ (ریاضی خارج ۹۱)



۱) ۲۱° ۲) ۲۲°

۳) ۲۳° ۴) ۲۴°

۶۸- در شکل مقابل $\hat{A} = ۲۰^\circ$ و PT بر دایره مماس است. زاویهٔ P چند درجه است؟



۱) ۲۰° ۲) ۳۰°
۳) ۴۰° ۴) ۵۰°

۶۹- در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$) نقطهٔ O در امتداد AC مرکز دایره‌ای است که در نقطهٔ B بر ضلع AB مماس است و امتداد BC را در نقطهٔ D قطع کرده است. مثلث OCD چگونه است؟ (ریاضی ۹۴)

۱) متساوی‌الساقین ۲) قائم‌الزاویه ۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ۴) غیر مشخص

۷۰- دو خط $d_۱$ و $d_۲$ متقاطع‌اند. چند دایره می‌توان رسم کرد که شعاع آن‌ها ۲، مرکزشان روی خط $d_۱$ و بر خط $d_۲$ مماس باشند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۷۱- دو خط $d_۱$ و $d_۲$ موازی‌اند. مرکز همهٔ دایره‌هایی که بر این دو خط مماس هستند، روی چه شکلی قرار دارند؟

۱) دو خط موازی با خط $d_۱$ و $d_۲$ ۲) یک خط عمود بر خط $d_۱$ و $d_۲$
۳) یک خط موازی با خط $d_۱$ و $d_۲$ ۴) سه خط موازی با خط $d_۱$ و $d_۲$

۷۲- دو خط متقاطع $d_۱$ و $d_۲$ مفروض‌اند که نقطهٔ A محل تلاقی آن‌ها است. مرکز همهٔ دایره‌هایی که بر هر دو خط $d_۱$ و $d_۲$ مماس‌اند، روی چه شکلی هستند؟

۱) دو خط موازی ۲) یک خط گذرنده از نقطهٔ A
۳) دو خط عمود بر هم که نقطهٔ A محل تلاقی آن‌ها است ۴) چهار خط دوبه‌دو موازی

۷۳- نقاط A و B مفروض‌اند. مرکز همهٔ دایره‌هایی که از این دو نقطه عبور می‌کنند، روی چه شکلی هستند؟

۱) خطی موازی پاره‌خط AB ۲) دو خط عمود بر پاره‌خط AB که از نقاط A و B عبور می‌کنند.
۳) عمودمنصف پاره‌خط AB ۴) دو خط موازی پاره‌خط AB

۷۴- از دو نقطه به فاصلهٔ ۵ چند دایره می‌گذرد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۷۵- از دو نقطه به فاصلهٔ ۵ چند دایره به شعاع ۳ عبور می‌کند؟

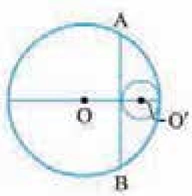
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۷۶- از دو سر پاره‌خط $AB = ۴$ فقط یک دایره به شعاع $۴m - ۲$ عبور می کند، چند مقدار صحیح برای m وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

سری Z

۷۷- مطابق شکل دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۴ مماس‌داخل‌اند. اگر پاره‌خط AB کوتاه‌ترین وتری از دایرهٔ بزرگ‌تر باشد که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است. اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AB}$ چند درجه است؟

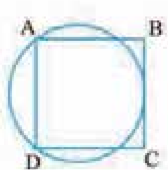


۱) ۱۲۰
۲) ۱۳۵
۳) ۱۵۰
۴) ۱۶۰

۷۸- در یک مستطیل به ابعاد ۲۶ و ۱۲، دو نیم‌دایره به قطر طول مستطیل، اضلاع مستطیل را در چهار نقطه قطع می‌کنند. مساحت چهارضلعی حاصل از این چهار نقطه کدام است؟

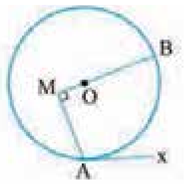
۱) ۱۰۰ ۲) ۱۱۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۱۰

۷۹- مربع ABCD به ضلع ۸ مفروض است. شعاع دایره‌ای که از دو رأس A و D می‌گذرد و بر ضلع BC مماس است کدام است؟



۱) ۴ ۲) $۴\sqrt{۲}$
۳) $\frac{۸\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) ۵

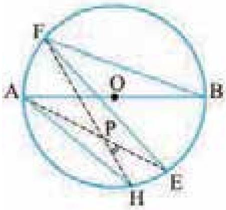
۸۰- در شکل مقابل $x\hat{A}M = ۱۲۰^\circ$ است. کمان **AB** چه کسری از محیط دایره است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

۸۱- در شکل **AB** قطری از دایره و $AH \parallel EF$ است، اگر $F\hat{B}A = ۲۰^\circ$ در این صورت زاویهٔ **HPE** برابر است با:



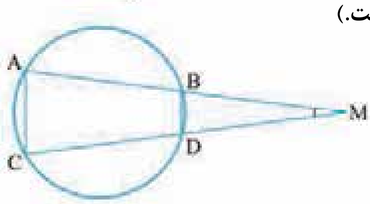
۱) ۲۵°

۲) ۳۰°

۳) ۳۵°

۴) ۴۰°

۸۲- در شکل، $AC = \sqrt{۲}R$ و $BD = R$ ، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ **M** برابر است با: (**R** شعاع دایره است.)



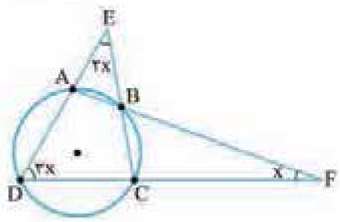
۱) ۱۵°

۲) ۳۰°

۳) ۴۵°

۴) ۶۰°

۸۳- در شکل مقابل، **x** چند درجه است؟



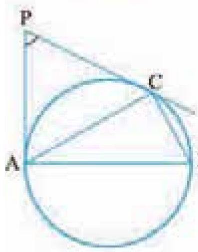
۱) ۱۵°

۲) ۲۰°

۳) ۲۵°

۴) ۳۰°

۸۴- در شکل مقابل $BC = ۱$ ، $AC = \sqrt{۳}$ و $AB = ۲$ است. زاویهٔ **P** کدام است؟



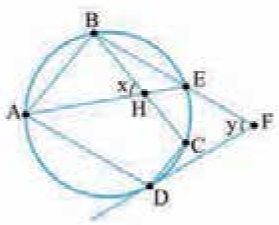
۱) ۲۵°

۲) ۳۰°

۳) ۴۰°

۴) ۶۰°

۸۵- در شکل زیر، **DF** بر دایره مماس است. اگر $AB \parallel DC$ ، $AD \parallel BF$ ، $\overset{\frown}{AB} = ۸۰^\circ$ و $\overset{\frown}{CD} = ۴۰^\circ$ باشد مقدار $x - y$ کدام است؟



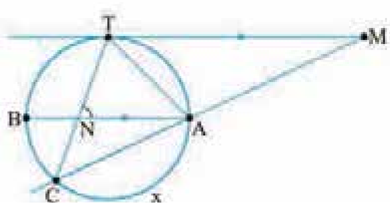
۱) ۲۰°

۲) ۳۰°

۳) ۴۰°

۴) صفر

۸۶- در شکل زیر **MT** مماس بر دایره و **AB** موازی **MT** است. اگر $\hat{M} = ۲۵^\circ$ و $A\hat{N}T = ۸۰^\circ$ باشد، کمان **AC** چند درجه است؟



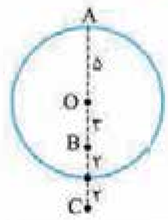
۱) ۱۱۰°

۲) ۱۰۰°

۳) ۱۲۰°

۴) ۹۰°

۱- گزینهٔ ۴ فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز برابر شعاع دایره است، پس A روی دایره نشسته است. فاصلهٔ B و C از مرکز به ترتیب کم‌تر و بیشتر از شعاع است و این یعنی B داخل و C خارج دایره هستند. برای این‌که ببینید (۳) چرا غلط است و (۴) چرا درست به این شکل نگاه کنید.

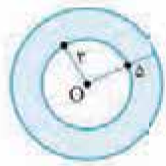


$$\text{حداکثر فاصلهٔ A از B} = ۵+۳=۸$$

$$BC = ۲+۲ = ۴ < ۵$$

۲- گزینهٔ ۲ این نقاط درون دایره‌ای به شعاع ۳ قرار می‌گیرند. پس باید مساحت این دایره را پیدا کنیم که می‌شود ۹π.

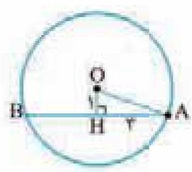
۳- گزینهٔ ۱ باید فاصلهٔ نقطهٔ A از O بیشتر از ۳ و کم‌تر از ۵ باشد:



$$۳ < ۲x - ۵ < ۵$$
$$\Rightarrow ۸ < ۲x < ۱۰$$
$$\Rightarrow ۴ < x < ۵$$

۴- گزینهٔ ۱ حواستان باشد هر قطری از وسط وتر و کمان AB عبور نمی‌کند. باید این قطر بر وتر عمود باشد تا از وسط وتر و کمان آن عبور کند.

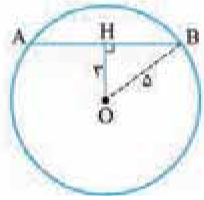
۵- گزینهٔ ۴ می‌دانیم در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر را نصف می‌کند، پس طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OHA داریم:



$$\overset{\Delta}{OHA}: OA^۲ = OH^۲ + AH^۲$$
$$\Rightarrow OA^۲ = ۱^۲ + ۳^۲$$
$$\Rightarrow OA = \sqrt{۱۰}$$

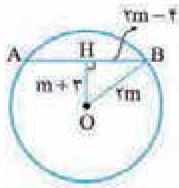
۶- گزینهٔ ۲ خب کافی است این شکل را بکشیم و در مثلث BHO فیثاغورس بنویسیم:

$$OH^۲ + BH^۲ = BO^۲$$
$$\Rightarrow ۳^۲ + BH^۲ = ۵^۲ \Rightarrow BH = ۴$$



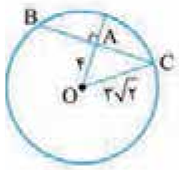
پس طول وتر AB می‌شود $۲\times ۴ = ۸$.

۷- گزینهٔ ۱ با توجه به این‌که می‌دانیم در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر را نصف می‌کند، طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OHB داریم:



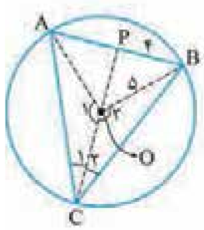
$$\overset{\Delta}{OHB}: OB^۲ = OH^۲ + BH^۲$$
$$\Rightarrow (۲m)^۲ = (m+۳)^۲ + (۲m-۴)^۲$$
$$\Rightarrow ۴m^۲ = m^۲ + ۶m + ۹ + ۴m^۲ - ۱۶m + ۱۶$$
$$\Rightarrow m^۲ - ۱۰m + ۲۵ = ۰ \Rightarrow (m-۵)^۲ = ۰ \Rightarrow m = ۵$$

۸- گزینهٔ ۱ می‌دانیم کوچک‌ترین وتر گذرنده از A، نقطه‌ای درون دایره، وتری عمود بر شعاع OA می‌باشد و قطر عمود بر هر وتر، آن وتر را نصف می‌کند، بنابراین داریم:



$$\overset{\Delta}{OAC}\ \text{قائم الزاویه} \Rightarrow OC^۲ = OA^۲ + AC^۲$$
$$\Rightarrow (۳\sqrt{۲})^۲ = ۴^۲ + AC^۲ \Rightarrow AC = \sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow BC = ۲AC = ۲\sqrt{۲}$$

۹- گزینهٔ ۱ بیشترین مقدار مساحت زمانی به دست می‌آید که زاویهٔ C در دورترین فاصله از AB قرار بگیرد. این مقدار زمانی به دست می‌آید که مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد. در این حالت ارتفاع CP، نیمساز و میانه نیز هست. در مثلث OBP ابتدا اندازهٔ OP را به دست می‌آوریم:



$$OP^۲ = OB^۲ - PB^۲$$
$$= ۵^۲ - ۴^۲ = ۹ \Rightarrow OP = ۳$$

در نتیجه ارتفاع CP برابر است با:

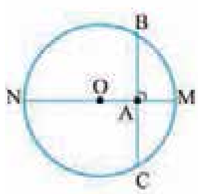
$$CP = CO + OP = ۵ + ۳ = ۸$$

مساحت مثلث در بیشترین حالت برابر است با: $S = \frac{۸\times ۸}{۲} = ۳۲$

۱۰- گزینهٔ ۲ (۱) بزرگ‌ترین وتری که از هر نقطه می‌گذرد، می‌شود قطر گذرنده از آن‌جا.

(۲) کوچک‌ترین وتری که از هر نقطه می‌گذرد، می‌شود وتر عمود بر قطر گذرنده از آن‌جا.

در این شکل کوتاه‌ترین و بلندترین وتر گذرنده از نقطهٔ A به ترتیب وتر BC و قطر MN هستند.



۱۱- گزینه یادتان باشد هر وتری که بزرگ‌تر باشد به مرکز نزدیک‌تر است. پس در این‌جا باید $۵x-۳<۲x+۶$ باشد که نتیجه‌اش می‌شود $x<۳$.

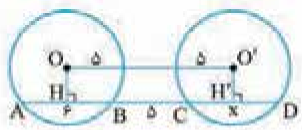
صبر کنید، عجله نکنید! فاصله عددی نامنفی است، پس:

$$۲x+۶\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۳$$

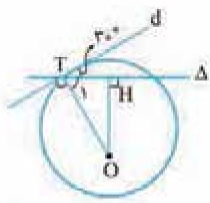
$$۵x-۳\geq ۰ \Rightarrow x\geq \frac{۳}{۵}$$

حالا باید از سه نامساوی به دست آمده اشتراک بگیریم که می‌رسیم به: $\frac{۳}{۵}<x<۳$.

۱۲- گزینه OO' و AD موازی هستند، پس مرکز دو دایره فاصلهٔ یکسانی از وترهای AB و CD دارند. این یعنی طول این دو وتر یکسان است و در نتیجه $x=۶$.



۱۳- گزینه می‌دانیم شعاع دایره در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است. پس در مثلث TOH داریم:

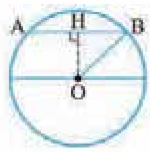


$$\overset{\triangle}{TOH}: H\hat{T}O=۶۰^\circ \Rightarrow \sin\hat{T}_۱=\frac{OH}{OT}$$

$$\Rightarrow \sin ۶۰^\circ=\frac{OH}{۲\sqrt{۳}} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{OH}{۲\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow OH=۳$$

۱۴- گزینه از نقطهٔ O بر وتر AB عمود می‌کنیم تا مثلث OHB تشکیل شود. با توجه به رابطهٔ فیثاغورس داریم:

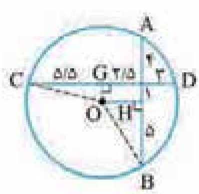


$$\overset{\triangle}{OHB}: OB^۲=OH^۲+HB^۲$$

$$\xrightarrow[OB=R=۱۰]{HB=۸} ۱۰^۲=OH^۲+۸^۲ \Rightarrow OH=۶$$

پس فاصلهٔ وسط این وترها از مرکز دایره مقدار ثابت ۶ می‌باشد؛ در نتیجه مکان هندسی این نقاط، دایره‌ای به شعاع ۶ و به مرکز O است.

۱۵- گزینه یک چیزی برایتان بگویم که خیالتان راحت شود. هرگاه سؤالی داشتیم که به طول وتر و شعاع دایره مربوط بود از مرکز بر وتر عمود رسم کنید. دقت کنید که این عمود درست می‌خورد به وسط وتر. با این حساب یک چنین شکلی و چنین اندازه‌هایی داریم. حالا کافی است در مثلث BHO یا CGO فیثاغورس بنویسیم. فرقی ندارد:



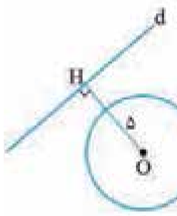
$$\overset{\triangle}{BHO}: OH^۲+BH^۲=BO^۲$$

$$\Rightarrow (\frac{۵}{۲})^۲+۵^۲=r^۲$$

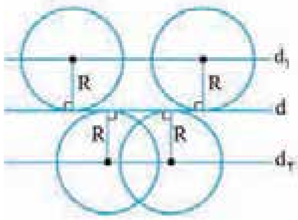
$$\Rightarrow r=\sqrt{\frac{۱۲۵}{۴}}=\frac{۵\sqrt{۵}}{۲}$$

۱۶- گزینه فاصلهٔ یک خط از مرکز دایره‌ای که بر آن مماس است می‌شود همان شعاع دایره. پس معادلهٔ $۲x-۳=۵$ را داریم که می‌رسیم به $x=۴$.

۱۷- گزینه $x>۲$ است، پس $۳x>۶$ و $۳x-۱>۵$ می‌شود. این یعنی فاصلهٔ خط d از مرکز دایره بیشتر از شعاع است. در نتیجه خط d دایره را قطع نمی‌کند.

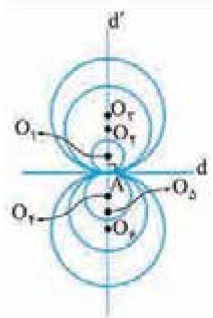


۱۸- گزینه دایره‌ای که بر خط d مماس باشد باید فاصلهٔ مرکزش تا خط d برابر R باشد. به این شکل نگاه کنید.

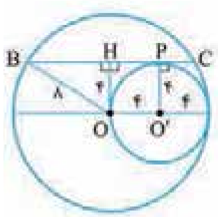


مرکز دایره‌های مماس روی دو خط $d_۱$ و $d_۲$ افتاده‌اند که با خط d موازی‌اند و فاصله‌شان از خط d همان R است.

۱۹- گزینه وقتی خط d بر دایره‌ای در نقطهٔ A مماس باشد، بر شعاع گذرنده از نقطهٔ A عمود است. پس مرکز این دایره‌ها روی خطی عمود بر خط d قرار می‌گیرند که از نقطهٔ A عبور می‌کند. (خط d')



۲۰- گزینه شکل را رسم می‌کنیم و از مرکز دایره عمود OH را بر وتر BC رسم می‌کنیم که می‌دانیم OH وتر BC را نصف می‌کند، شعاع $O'P$ را در دایره کوچک‌تر هم می‌کشیم که بر خط مماس بر این دایره عمود شود، در نتیجه:



مربع $\Leftarrow$ چهارضلعی $HPO'O$

$\Rightarrow PH=۴$

در $\overset{\triangle}{OBH}$: $BH=\sqrt{۶۴-۱۶}=۴\sqrt{۳}$

قطر عمود بر وتر $OH \Rightarrow BH=HC=۴\sqrt{۳}$

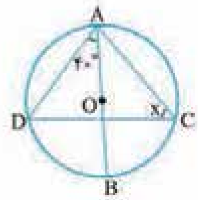
$$PC=HC-HP=۴\sqrt{۳}-۴$$

$$PB=BH+HP=۴\sqrt{۳}+۴$$

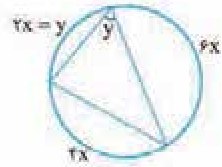
$$PC\times PB=(۴\sqrt{۳}-۴)(۴\sqrt{۳}+۴)$$

$$=۱۶\times ۳-۱۶\times ۱=۱۶\times ۲=۳۲$$

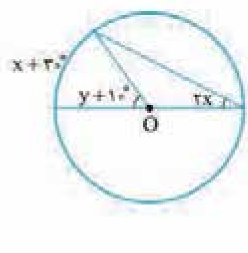
۲۱- گزینهٔ زاویهٔ محاطی ۴۰°ای که داده‌شده به ما می‌گوید $\overset{\frown}{DB} = ۸۰^\circ$. پس $\overset{\frown}{AD} = ۱۰۰^\circ$ (چرا؟) و این یعنی: $\hat{x} = \frac{۱۰۰^\circ}{۲} = ۵۰^\circ$.



۲۲- گزینهٔ زاویهٔ محاطیِ y به ما می‌گوید که $y = \frac{۴x}{۲} = ۲x$.
پس کمانِ y را می‌نویسیم ۲x و این یعنی $۲x + ۴x + ۶x = ۳۶۰^\circ$. در نتیجه $x = ۳۰^\circ$. بنابراین $x + y = ۹۰^\circ$ است.



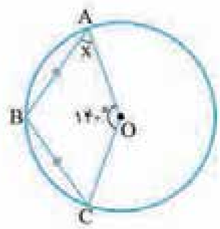
۲۳- گزینهٔ ۲x زاویهٔ محاطی و $y + ۱۰^\circ$ زاویهٔ مرکزی است. پس:



$$\begin{cases} ۲x = \frac{x + ۳۰^\circ}{۲} \Rightarrow ۴x = x + ۳۰^\circ \\ \Rightarrow x = ۱۰^\circ \\ y + ۱۰^\circ = x + ۳۰^\circ \\ \xrightarrow{x = ۱۰^\circ} y = ۳۰^\circ \end{cases}$$

حالا $x + y$ را می‌خواهیم که می‌شود ۴۰°.

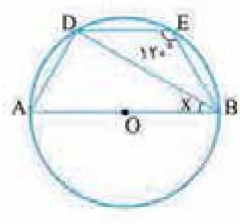
۲۴- گزینهٔ به خاطر زاویهٔ مرکزی O می‌توانیم بگوییم $\overset{\frown}{ABC} = ۱۴۰^\circ$ و این یعنی کمان بزرگ‌تر AC می‌شود $۳۶۰^\circ - ۱۴۰^\circ = ۲۲۰^\circ$.



پس زاویهٔ محاطی B برابر با $\frac{۲۲۰^\circ}{۲} = ۱۱۰^\circ$ است. حالا دقت کنید که $\hat{A} = \hat{C} = x$ (چرا؟) و در چهارضلعی ABCO داریم:

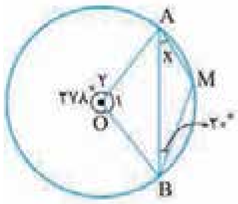
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{O} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۲x + ۲۵۰^\circ = ۳۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۲x = ۱۱۰^\circ \Rightarrow x = ۵۵^\circ$$

۲۵- گزینهٔ با توجه به این‌که اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر با نصف اندازهٔ کمان مقابلش است، داریم:



$$\hat{E} = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{DAB} = ۲۴۰^\circ$$
$$\overset{\frown}{DAB} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AD}$$
$$\xrightarrow{\overset{\frown}{AB} = ۱۸۰^\circ} ۲۴۰^\circ = ۱۸۰^\circ + \overset{\frown}{AD}$$
$$\Rightarrow \overset{\frown}{AD} = ۶۰^\circ$$
$$\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} = \frac{۶۰^\circ}{۲} = ۳۰^\circ$$

۲۶- گزینهٔ می‌دانیم اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر با نصف اندازهٔ کمان مقابلش است. بنابراین داریم:



$$\hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ = ۳۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۲۷۸^\circ + \hat{O}_۱ = ۳۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{O}_۱ = ۸۲^\circ$$

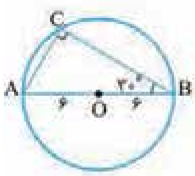
$$\hat{O}_۱ = \overset{\frown}{AMB} \xrightarrow{\hat{O}_۱ = ۸۲^\circ} \overset{\frown}{AMB} = ۸۲^\circ \quad (۱)$$

$$\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AM}}{۲} \xrightarrow{\hat{B} = ۲۰^\circ} ۲۰^\circ = \frac{\overset{\frown}{AM}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AM} = ۴۰^\circ \quad (۲)$$

با استفاده از رابطهٔ (۱) و (۲) داریم:

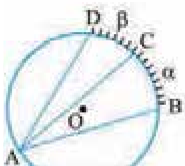
$$\overset{\frown}{AMB} = \overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{MB}$$
$$\Rightarrow ۸۲^\circ = ۴۰^\circ + \overset{\frown}{MB} \Rightarrow \overset{\frown}{MB} = ۴۲^\circ$$
$$x = \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{MB}}{۲} = \frac{۴۲^\circ}{۲} = ۲۱^\circ$$

۲۷- گزینهٔ مثلث ABC در رأس C قائمه است زیرا زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر قائمه است. داریم:



$$\cos ۳۰^\circ = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BC}{۱۲}$$
$$\Rightarrow BC = ۶\sqrt{۳}$$

۲۸- گزینهٔ از رابطهٔ شعاع×زاویهٔ مرکزی = طول کمان که در درس حسابان می‌خوانید، داریم:

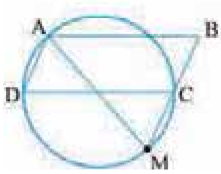


$$\text{طول } \overset{\frown}{BC} = \frac{\alpha}{۳۶۰^\circ} \times ۲\pi \times ۶۰ = ۲۴\pi$$
$$\Rightarrow \alpha = ۷۲^\circ$$
$$\text{طول } \overset{\frown}{DC} = \frac{\beta}{۳۶۰^\circ} \times ۲\pi \times ۶۰ = ۱۰\pi \Rightarrow \beta = ۳۰^\circ$$

حالا نسبت زاویه‌ها را حساب می‌کنیم:

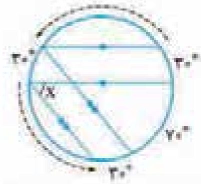
$$\frac{B\hat{A}D}{D\hat{A}C} = \frac{\frac{\alpha + \beta}{۲}}{\frac{\beta}{۲}} = \frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{۱۰۲}{۳۰} = \frac{۳۴}{۱۰} = \frac{۱۷}{۵}$$

۲۹- گزینهٔ بیاید M را به A وصل کنیم تا ببینیم چه خبر است. خب قبول دارید که $\hat{D} = \hat{M}$ است؟ چون هر دو می‌شوند $\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}$. از طرفی $\hat{B} = \hat{D}$ است (متوازی‌الاضلاع که یادتان هست؟!)



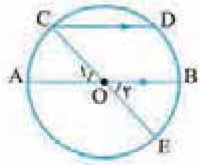
پس $\hat{M} = \hat{B}$ می‌شود و این یعنی مثلث ABM متساوی‌الساقین است بنابراین $AM = AB = ۶$.

۳۰- گزینهٔ کمان‌های بین دو وتر موازی برابر هستند. پس شکل این‌طوری می‌شود و



$x=\frac{70^\circ+30^\circ}{2}=50^\circ$.

۳۱- گزینهٔ با توجه به این‌که زوایای O_1 و O_2 متقابل به رأس و زوایای مرکزی می‌باشند $(\hat{O}_1=\hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AC}=\widehat{BE})$ می‌دانیم در یک دایره، کمان‌های محصور بین دو وتر موازی، با هم برابرند. بنابراین داریم:



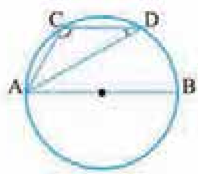
$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC}=\widehat{BD}$$

$$\xrightarrow{\widehat{AC}=\widehat{BE}} \widehat{BE}=\widehat{BD}$$

$$D\hat{C}E=\frac{\widehat{DE}}{2} \xrightarrow{D\hat{C}E=65^\circ} \widehat{DE}=130^\circ$$

$$2\widehat{BE}=130^\circ \Rightarrow \widehat{BE}=65^\circ$$

۳۲- گزینهٔ می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی در یک دایره، با هم برابرند. بنابراین داریم:



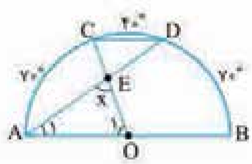
$$CD \parallel AB \Rightarrow \widehat{AC}=\widehat{BD}$$

$$\Rightarrow A\hat{C}D-A\hat{D}C=\frac{\widehat{DBA}}{2}-\frac{\widehat{AC}}{2}=\frac{\widehat{BD}+\widehat{AB}-\widehat{AC}}{2}$$

با توجه به تساوی دو کمان $\widehat{AC}$ و $\widehat{BD}$ خواهیم داشت:

$$A\hat{C}D-A\hat{D}C=\frac{\widehat{AB}}{2}=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$$

۳۳- گزینهٔ $CD \parallel AB$ است و این یعنی $\widehat{AC}=\widehat{BD}$. از طرفی مجموع کمان‌های نیم‌دایره 180° است و این یعنی باید $\widehat{AC}=\widehat{BD}=70^\circ$ باشد، چون $\widehat{CD}=40^\circ$ بود حالا زوایای A_1 و O_1 در دستان شما است:



$$\hat{A}_1=\frac{\widehat{BD}}{2}=\frac{70^\circ}{2}=35^\circ, \hat{O}_1=70^\circ$$

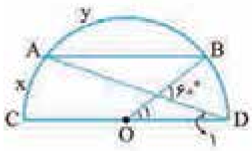
پس می‌توانیم زاویهٔ x را پیدا کنیم:

$$x+\hat{A}_1+\hat{O}_1=180^\circ \Rightarrow x=75^\circ$$

۳۴- گزینهٔ کمان‌ها را این‌طوری نام‌گذاری می‌کنیم. دقت کنید که $AB \parallel CD$ است و این یعنی $\widehat{AC}=\widehat{BD}$. حالا این روابط را داریم:

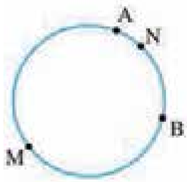
$x+x+y=180^\circ$ (مجموع کمان‌های نیم‌دایره)

$\hat{O}_1+\hat{D}_1=60^\circ$ (زاویهٔ خارجی مثلث)



$\hat{O}_1$ زاویهٔ مرکزی و $\hat{D}_1$ زاویهٔ محاطی است، پس $\hat{O}_1=x$ و $\hat{D}_1=\frac{x}{2}$. در نتیجه $x+\frac{x}{2}=60^\circ$ که نتیجه‌اش $x=40^\circ$ است. حالا به راحتی می‌رسیم به $y=100^\circ$.

۳۵- گزینهٔ می‌دانیم مجموع کمان‌های یک دایره برابر با 360° می‌باشد، بنابراین داریم:



$$\begin{cases}\widehat{AMB}=4\widehat{ANB}\\ \widehat{AMB}+\widehat{ANB}=360^\circ\end{cases}$$

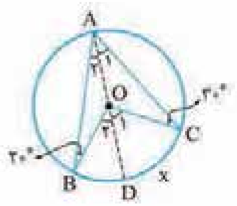
$$\Rightarrow 4\widehat{ANB}+\widehat{ANB}=360^\circ \Rightarrow \widehat{ANB}=\frac{360^\circ}{5}=72^\circ$$

$$\frac{\widehat{ANB}}{\text{محیط دایره}}=\frac{72^\circ}{360^\circ}=\frac{1}{5}$$

دقت کنید که البته نیازی به محاسبهٔ مقدار $\widehat{ANB}$ نبود، زیرا با کمک خواص تناسب این نسبت به سادگی محاسبه می‌شود:

$$\frac{\widehat{ANB}}{\widehat{AMB}}=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\widehat{ANB}}{\widehat{AMB}+\widehat{ANB}}=\frac{1}{5}$$

۳۶- گزینهٔ از نقطهٔ O به A وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ D قطع کند. با توجه به این‌که مثلث‌های OAC و OAB متساوی‌الساقین‌اند، داریم:



$$\overset{\Delta}{AOB}: \hat{A}_2=\hat{B} \Rightarrow \hat{A}_2=20^\circ$$

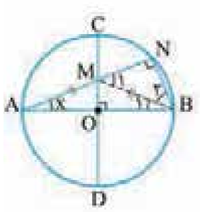
$$\overset{\Delta}{AOC}: \hat{A}_1=\hat{C} \Rightarrow \hat{A}_1=30^\circ$$

$\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ به ترتیب زوایای خارجی مثلث‌های AOC و OAB می‌باشند، پس:

$$\hat{O}_1=\hat{A}_1+\hat{C} \Rightarrow \hat{O}_1=60^\circ, \hat{O}_2=\hat{A}_2+\hat{B} \Rightarrow \hat{O}_2=40^\circ$$

$$x=\widehat{BDC}=\widehat{BD}+\widehat{CD} \xrightarrow[\hat{O}_2=\widehat{BD}]{\hat{O}_1=\widehat{CD}} \hat{x}=100^\circ$$

۳۷- گزینهٔ از M به B وصل می‌کنیم، زاویهٔ N روبه‌رو به قطر AB بوده، پس برابر ۹۰ درجه است، در نتیجه $\hat{M}_1=\hat{B}_2=45^\circ$ خواهد بود.



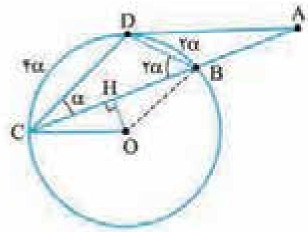
از طرفی چون M بر روی عمود منصف AB است از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است، در نتیجه $MA=MB$ و در واقع $\hat{B}_1=x$ است. $\hat{M}_1$ زاویهٔ خارجی مثلث AMB است، بنابراین داریم:

$$\hat{M}_1=x+\hat{B}_1 \xrightarrow{\hat{B}_1=x} \hat{M}_1=2x=45^\circ \Rightarrow x=22/5^\circ$$

۳۸- گزینه نقطهٔ D را به C و B را به O وصل می‌کنیم. حالا با نام‌گذاری شکل را قشنگ‌تر می‌بینیم کمان BD روبه‌روی زاویه α است، پس $\widehat{BD}=۲\alpha$ و به همین شکل می‌توانیم بگوییم $\widehat{CD}=۲\times D\hat{B}C=۴\alpha$. حالا با توجه به اینکه OH بر BC عمود است باید گفت: $C\hat{O}H=\frac{۱}{۲}\times C\hat{O}B=۳\alpha$، زیرا $C\hat{O}B=\widehat{BC}$.

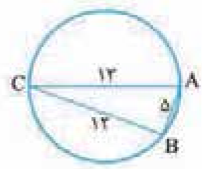
پیداکردن زاویهٔ A هم که کاری ندارد: $\hat{A}=\frac{\widehat{DC}-\widehat{DB}}{۲}=\alpha$

دیگه بقیه‌اش را خودتان بگویید بی‌زحمت.



۳۹- گزینه در مثلث ABC بین اضلاع رابطهٔ فیثاغورس برقرار است: $۱۳^۲=۵^۲+۱۲^۲$

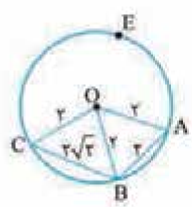
پس مثلث ABC قائم‌الزاویه است و این یعنی $\hat{B}=۹۰^\circ$ و در نتیجهٔ آن $\widehat{AC}=۱۸۰^\circ$.



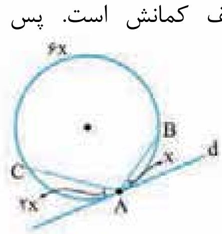
۴۰- گزینه بیایید نقطهٔ O را به سه نقطهٔ A، B و C وصل کنیم. مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است چون هر سه ضلع آن برابر ۲ هستند. در مثلث OBC هم رابطهٔ فیثاغورس برقرار است، چون $(۲\sqrt{۲})^۲=۲^۲+۲^۲$. در نتیجه:

$C\hat{O}A=۹۰^\circ+۶۰^\circ=۱۵۰^\circ$

این یعنی اندازهٔ کمان ABC می‌شود ۱۵۰°، پس $\widehat{AEC}=۳۶۰^\circ-۱۵۰^\circ=۲۱۰^\circ$.



۴۱- گزینه هر زاویهٔ ظلی نصف کمانش است. پس $\widehat{AB}=۲x$ و $\widehat{AC}=۴x$. حالا می‌توانیم بگوییم $۶x+۴x+۲x=۳۶۰^\circ$ (مجموع کمان‌ها در دایره) که این یعنی $x=۳۰^\circ$.



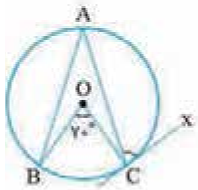
۴۲- گزینه مثلث OTA متساوی‌الساقین است $(OT=OA=R)$ و این یعنی $O\hat{T}A=\hat{A}=x+۲۰^\circ$. حالا می‌دانیم که شعاعِ OT بر خط مماس عمود است. در نتیجه به $(۲x+۱۰^\circ)+(x+۲۰^\circ)=۹۰^\circ$ می‌رسیم که می‌شود $x=۲۰^\circ$.

۴۳- گزینه مجموع کمان‌های ایجادشده در دایره برابر با ۳۶۰° است.

$$\widehat{AB}+\widehat{AC}+\widehat{BC}=۳۶۰^\circ \xrightarrow{\hat{O}=\widehat{BC}=۷۰^\circ} \widehat{AB}+\widehat{AC}=۲۹۰^\circ$$

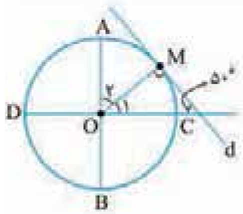
با توجه به این‌که کمان‌های نظیر دو وتر مساوی در یک دایره، با هم برابرند، بنابراین داریم:

$$AB=AC \Rightarrow \widehat{AB}=\widehat{AC}=\frac{۲۹۰^\circ}{۲}=۱۴۵^\circ$$



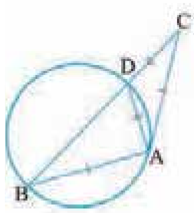
می‌دانیم اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر با نصف اندازهٔ کمان مقابلش است، لذا خواهیم داشت: $A\hat{C}x=\frac{\widehat{AC}}{۲}=\frac{۱۴۵^\circ}{۲}=۷۲/۵^\circ$

۴۴- گزینه کافی است O را به M وصل کنیم که OM بر d عمود می‌شود. پس $\hat{O}_۱=۴۰^\circ$ و در نتیجه $\hat{O}_۲=۵۰^\circ$ می‌شود.



۴۵- گزینه می‌دانیم اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی و محاطی برابر با نصف اندازهٔ کمان مقابل است. بنابراین داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}: AB=AC\Rightarrow \hat{B}=\hat{C}\xrightarrow{\hat{B}=\frac{\widehat{AD}}{۲}}\hat{B}=\hat{C}=\frac{\widehat{AD}}{۲}\quad (۱)$$



$$C\hat{A}D=\frac{\widehat{AD}}{۲}\xrightarrow{(۱)} C\hat{A}D=\hat{C}$$

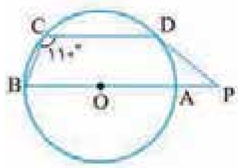
$$\Rightarrow AD=CD$$

$$\overset{\Delta}{ABD}: AB+AD+BD=۱۶$$

$$\xrightarrow{AC=۶,\ AD=CD} ۶+CD+BD=۱۶$$

$$\Rightarrow CD+BD=BC=۱۰$$

۴۶- گزینه می‌دانیم اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر با نصف اندازهٔ کمان مقابلش است. داریم:



$$\hat{C}=\frac{\widehat{DAB}}{۲}\Rightarrow ۱۱۰^\circ=\frac{\widehat{DAB}}{۲}$$

$$\Rightarrow \widehat{DAB}=۲۲۰^\circ$$

$$\widehat{DAB}=\widehat{AB}+\widehat{AD}\xrightarrow{\widehat{AB}=۱۸۰^\circ}۲۲۰^\circ=۱۸۰^\circ+\widehat{AD}$$

$$\Rightarrow \widehat{AD}=۴۰^\circ\Rightarrow\widehat{BD}=۱۸۰^\circ-۴۰^\circ=۱۴۰^\circ$$

با توجه به این‌که زاویهٔ بین مماس و امتداد یک وتر، برابر با نصف تفاضل کمان‌های روبه‌رو به آن است، لذا خواهیم داشت:

$$\hat{P}=\frac{\widehat{BCD}-\widehat{AD}}{۲}=\frac{۱۴۰^\circ-۴۰^\circ}{۲}=۵۰^\circ$$

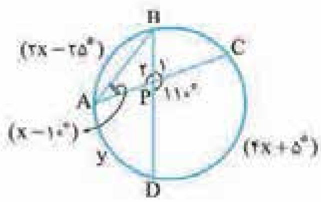
۴۷- گزینهٔ ۱ یک زاویهٔ وتری داخلی داریم. پس راحت فرمولش را می‌نویسیم:

$$۴x - ۱۰^\circ = \frac{۳x + ۱۰^\circ + ۲x}{۲}$$
$$\Rightarrow ۸x - ۲۰^\circ = ۵x + ۱۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۳x = ۳۰^\circ \Rightarrow x = ۱۰^\circ$$

۴۸- گزینهٔ ۳ می‌دانیم زاویهٔ بین دو وتر متقاطع، برابر با نصف مجموع اندازهٔ کمان‌های مقابلش است. بنابراین داریم:

$$\hat{P}_۲ = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{۲} = \frac{(۲x - ۲۵) + (۴x + ۵)}{۲} = ۱۱۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۶x - ۲۰^\circ = ۲۲۰^\circ \Rightarrow x = ۴۰^\circ$$

پس:



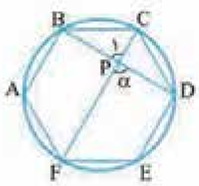
$$A = x - ۱۰^\circ = ۳۰^\circ$$
$$\Rightarrow \widehat{BC} = ۶۰^\circ$$

زاویهٔ $P_۱$ مجانب زاویهٔ $P_۲$ است. پس: $P_۱ = ۱۸۰^\circ - ۱۱۰^\circ = ۷۰^\circ$

طبق رابطهٔ زاویهٔ بین دو وتر متقاطع داریم:

$$P_۱ = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{۲} \Rightarrow ۷۰ = \frac{y + ۶۰}{۲}$$
$$\Rightarrow y = ۸۰^\circ \Rightarrow y - x = ۴۰^\circ$$

۴۹- گزینهٔ ۱ می‌دانیم کمان‌های نظیر دو وتر مساوی در یک دایره با هم برابرند. بنابراین همهٔ کمان‌های نظیر اضلاع شش‌ضلعی منتظم با هم برابر و ۶۰° هستند.

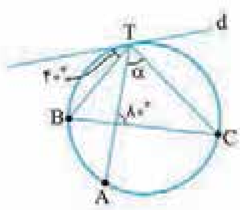


طبق رابطهٔ محاسبهٔ زاویهٔ بین دو وتر متقاطع داریم:

$$\alpha = \frac{\widehat{DF} + \widehat{BC}}{۲} = \frac{۱۲۰^\circ + ۶۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ$$

۵۰- گزینهٔ ۱ زاویهٔ ظلی داده‌شده به ما می‌گوید $\widehat{BT} = ۸۰^\circ$.

حالا یک زاویهٔ وتری داخلی داریم که نتیجه‌اش می‌شود:

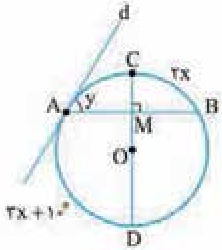


$$\frac{\widehat{AB} + \widehat{CT}}{۲} = ۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{CT} = ۱۶۰^\circ$$

بنابراین کمان AC می‌شود ۱۲۰°، چون مجموع کمان‌های دایره ۳۶۰° است.

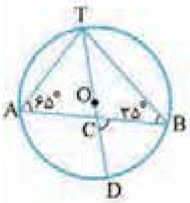
حالا زاویهٔ α را می‌خواهیم که هست $\frac{\widehat{AC}}{۲}$ یعنی ۶۰°.

۵۱- گزینهٔ ۴ زاویهٔ وتری M به ما می‌گوید که $(۳x + ۱۰^\circ) + ۲x = ۱۸۰^\circ$ یعنی $x = ۳۴^\circ$. حالا زاویهٔ ظلی y را می‌خواهیم که می‌شود $\frac{\widehat{ACB}}{۲}$ یعنی $۲x = ۶۸^\circ$.



حواستان باشد که قطر CD بر وتر AB عمود است و این یعنی $\widehat{CB}$ نصف $\widehat{ACB}$ است.

۵۲- گزینهٔ ۱ اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی با نصف اندازهٔ کمان مقابلش برابر است، بنابراین داریم:

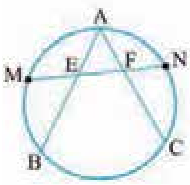


$$\begin{cases} \hat{B} = \frac{\widehat{AT}}{۲} = ۳۵^\circ \Rightarrow \widehat{AT} = ۷۰^\circ \\ \hat{A} = \frac{\widehat{BT}}{۲} = ۶۵^\circ \Rightarrow \widehat{BT} = ۱۳۰^\circ \\ \xrightarrow{\widehat{BT} + \widehat{BD} = ۱۸۰^\circ} \widehat{BD} = ۵۰^\circ \end{cases}$$

می‌دانیم اندازهٔ زاویهٔ بین دو وتر متقاطع، برابر با نصف مجموع اندازهٔ کمان‌های مقابلش است. لذا خواهیم داشت:

$$\hat{C} = \frac{\widehat{BD} + \widehat{AT}}{۲} = \frac{۷۰^\circ + ۵۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ$$

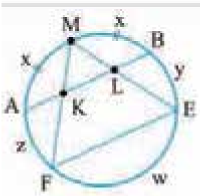
۵۳- گزینهٔ ۴ به دو زاویهٔ وتری E و F توجه کنید:



$$A\hat{E}F = \frac{\widehat{AN} + \widehat{MB}}{۲}$$
$$A\hat{F}E = \frac{\widehat{AM} + \widehat{NC}}{۲}$$

حالا با توجه به M و N که وسط کمان‌ها هستند متوجه می‌شویم که $\widehat{AN} = \widehat{NC}$ و $\widehat{AM} = \widehat{MB}$ و این یعنی $A\hat{E}F = A\hat{F}E$. پس مثلث AEF متساوی‌الساقین است و در نتیجه $AE = AF$.

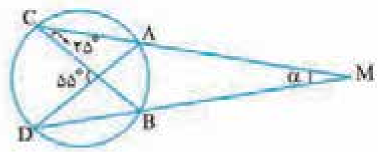
۵۴- گزینهٔ ۲ کافی است از E به F وصل کنید و زاویه‌ها را بنویسیم:



$$F\hat{K}L = \frac{\widehat{x} + \widehat{y} + \widehat{w}}{۲}$$
$$+\ L\hat{E}F = \frac{\widehat{x} + \widehat{z}}{۲}$$

$$F\hat{K}L + L\hat{E}F = \frac{۲\widehat{x} + \widehat{y} + \widehat{w} + \widehat{z}}{۲} = \frac{۳۶۰}{۲} = ۱۸۰$$

۵۵- گزینهٔ یک زاویهٔ وتری داخلی و یک زاویهٔ وتری خارجی داریم. بیایید فرمول‌هایشان را بنویسیم:



$$\begin{cases} ۵۵^\circ = \dfrac{\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{AB}}{۲} \\ \alpha = \dfrac{\overset{\frown}{CD}-\overset{\frown}{AB}}{۲} \end{cases}$$

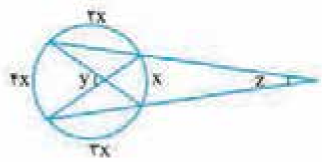
حالا به زاویهٔ $\hat{C}=۲۵^\circ$ نگاه کنید که به ما می‌گوید $\overset{\frown}{AB}=۵۰^\circ$.

پس: $۵۵^\circ = \dfrac{\overset{\frown}{CD}+۵۰^\circ}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{CD}=۶۰^\circ$

خب دیگر به راحتی α به دست می‌آید که می‌شود $\dfrac{۶۰^\circ-۵۰^\circ}{۲}=۵^\circ$

۵۶- گزینهٔ قبل از هر چیز بیایید x را به دست بیاوریم که کار راحتی است: $۲x+۴x+۳x+x=۳۶۰^\circ$ پس $x=۳۶^\circ$.

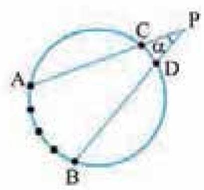
حالا راحت y و z به دست می‌آیند:



$$\begin{cases} y=\dfrac{۴x+x}{۲}=\dfrac{۵x}{۲}=۹۰^\circ \\ z=\dfrac{۴x-x}{۲}=\dfrac{۳x}{۲}=۵۴^\circ \end{cases}$$

تست از ما $x+y+z$ را خواسته که می‌شود ۱۸۰°.

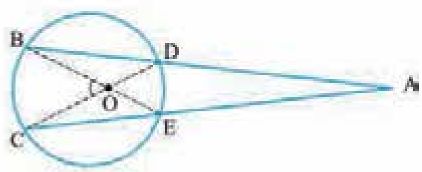
۵۷- گزینهٔ با توجه به این‌که اندازهٔ کمان‌های ایجادشده با هم برابر است، می‌توان گفت که اندازهٔ هر یک از آن‌ها برابر $\dfrac{۳۶۰^\circ}{۱۸}=۲۰^\circ$ می‌باشد، بنابراین خواهیم داشت:



$$\begin{cases} \overset{\frown}{AB}=۴\times\dfrac{۳۶۰^\circ}{۱۸}=۸۰^\circ \\ \overset{\frown}{CD}=\dfrac{۳۶۰^\circ}{۱۸}=۲۰^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha=\dfrac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CD}}{۲}=\dfrac{۸۰^\circ-۲۰^\circ}{۲}=۳۰^\circ$$

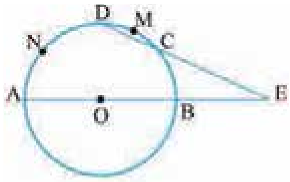
۵۸- گزینهٔ با توجه به روابط محاسبهٔ زاویهٔ بین دو وتر و امتداد دو وتر خواهیم داشت:



$$\begin{cases} \hat{A}=\dfrac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{DE}}{۲} \Rightarrow ۲۷^\circ=\dfrac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{DE}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{DE}=۵۴^\circ \\ \hat{O}=\dfrac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{DE}}{۲} \Rightarrow ۷۱^\circ=\dfrac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{DE}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{DE}=۱۴۲^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BC}=\dfrac{۱۴۲^\circ+۵۴^\circ}{۲}=\dfrac{۱۹۶^\circ}{۲}=۹۸^\circ$$

۵۹- گزینهٔ می‌دانیم اندازهٔ زاویهٔ بین امتداد دو وتر، برابر با نصف تفاضل کمان‌های روبه‌رو به آن است، بنابراین:



$$\begin{cases} \hat{E}=\dfrac{\overset{\frown}{AND}-\overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow ۳۰^\circ=\dfrac{\overset{\frown}{AND}-\overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AND}-\overset{\frown}{BC}=۶۰^\circ \\ \overset{\frown}{AND}+\overset{\frown}{DMC}+\overset{\frown}{BC}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\overset{\frown}{DMC}=۳۰^\circ} \overset{\frown}{AND}+\overset{\frown}{BC}=۱۵۰^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AND}=\dfrac{۶۰^\circ+۱۵۰^\circ}{۲}=\dfrac{۲۱۰^\circ}{۲}=۱۰۵^\circ$$

۶۰- گزینهٔ این‌جا باید O را به A وصل کنیم تا چیزهای زیادی گیرمان بیاید:

(۱) مثلث AOM متساوی‌الساقین است:

$AM=AO=r \Rightarrow \hat{O}_۳=\hat{M}=۱۰^\circ$

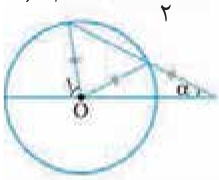
(۲) زاویهٔ $\hat{O}_۳$ مرکزی است، پس: $\overset{\frown}{AD}=\hat{O}_۳=۱۰^\circ$

(۳) زاویهٔ M وتری خارجی است. پس: $\hat{M}=\dfrac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AD}}{۲}$

$$\Rightarrow ۱۰^\circ=\dfrac{\overset{\frown}{BC}-۱۰^\circ}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BC}=۳۰^\circ$$

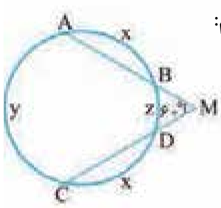
در نتیجه زاویهٔ $\hat{O}_۱$ هم می‌شود ۳۰°.

همیشه در شکل مقابل فرمول $\hat{O}_۱=۳\alpha$ را داریم.



۶۱- گزینهٔ $AB=CD$ است و این یعنی $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$

بیایید کمان‌ها را این‌طوری نام‌گذاری کنیم:



حالا به کمک زاویهٔ M می‌نویسیم:

$$\hat{M}=\dfrac{y-z}{۲}=۶۰^\circ \Rightarrow y-z=۱۲۰^\circ$$

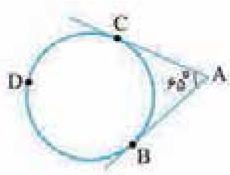
$$\Rightarrow z=y-۱۲۰^\circ$$

برویم سراغ همهٔ کمان‌های دایره یعنی فرمول $۲x+y+z=۳۶۰^\circ$.

پس $۲x+y+y-۱۲۰^\circ=۳۶۰^\circ$ و این یعنی $۲x+۲y=۴۸۰^\circ$.

تست از ما کمان ACD را می‌خواهد که می‌شود $x+y$ یعنی ۲۴۰°.

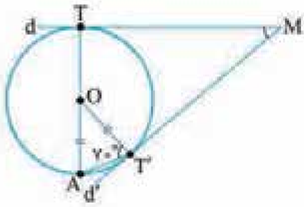
۶۲- گزینهٔ می‌دانیم اندازهٔ زاویهٔ بین دو مماس رسم‌شده بر یک دایره، برابر با نصف تفاضل اندازهٔ کمان‌های روبه‌رو آن است، بنابراین خواهیم داشت:



$$\begin{cases} \overset{\frown}{BDC}+\overset{\frown}{BC}=۳۶۰^\circ \\ \hat{A}=\dfrac{\overset{\frown}{BDC}-\overset{\frown}{BC}}{۲}=۶۵^\circ \\ \Rightarrow \overset{\frown}{BDC}-\overset{\frown}{BC}=۱۳۰^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BDC}=\dfrac{۳۶۰^\circ+۱۳۰^\circ}{۲}=۲۴۵^\circ$$

۶۳- گزینهٔ ۱ زاویهٔ M را می‌خواهیم که به خاطر فرمولش می‌شود:



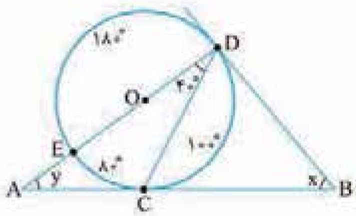
$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{TAT'}-\overset{\frown}{TT'}}{۲}$$

حالا دوتا نکته:

۱ مثلث OAT' متساوی‌الساقین $(OA=OT')$ است و این یعنی $\hat{A}=۷۰^\circ$، پس $\overset{\frown}{TT'}=۱۴۰^\circ$.

۲ کمان $\overset{\frown}{TAT'}$ مساوی است با $\overset{\frown}{TA}+\overset{\frown}{AT'}$. کمان TA که ۱۸۰° است و کمان AT' می‌شود $۱۸۰^\circ-۱۴۰^\circ=۴۰^\circ$ در نتیجه $\overset{\frown}{TAT'}=۲۲۰^\circ$. بنابراین زاویهٔ M برابر می‌شود با $\frac{۲۲۰^\circ-۱۴۰^\circ}{۲}=۴۰^\circ$.

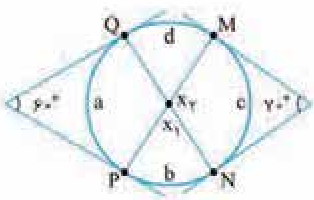
۶۴- گزینهٔ ۳ با توجه به قطر DE و زاویهٔ $\hat{D}=۴۰^\circ$ می‌توانیم کمان‌ها را این‌طوری عدد گذاری کنیم.



حالا x و y را می‌خواهیم:

$$\begin{cases}x=\frac{\overset{\frown}{DEC}-\overset{\frown}{DC}}{۲}=\frac{۲۶۰^\circ-۱۰۰^\circ}{۲}=۸۰^\circ\\ y=\frac{\overset{\frown}{DC}-\overset{\frown}{EC}}{۲}=\frac{۱۰۰^\circ-۸۰^\circ}{۲}=۱۰^\circ\end{cases}\Rightarrow x-y=۷۰^\circ$$

۶۵- گزینهٔ ۳ بیایید برای راحتی اندازهٔ کمان‌ها را این‌طوری بنویسیم و بعدش برویم سراغ فرمول‌ها:

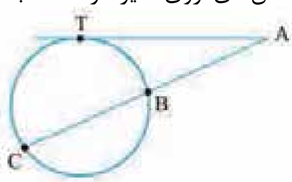


$$\begin{cases}۱)\ x_۱=\frac{b+d}{۲}\\ ۲)\ ۶۰^\circ=\frac{b+c+d-a}{۲}\\ ۳)\ ۷۰^\circ=\frac{a+b+d-c}{۲}\end{cases}$$

اگر رابطهٔ ۲ و ۳ را جمع کنیم می‌رسیم به $b+d=۱۳۰^\circ$ پس $x_۱$ می‌شود ۶۵° و $x_۲$ مکمل آن یعنی ۱۱۵° است.

در این جور شکل‌ها $x_۱$ میانگین دو زاویهٔ داده شده است. (اینجا $\frac{۶۰^\circ+۷۰^\circ}{۲}$)

۶۶- گزینهٔ ۳ ابتدا اندازهٔ کمان‌های روی دایره را محاسبه می‌کنیم:

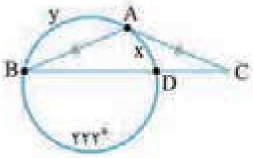


$$\overset{\frown}{BT}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CT}=۳۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow \overset{\frown}{BT}+۲\overset{\frown}{BT}+۲\overset{\frown}{BT}=۳۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۵\overset{\frown}{BT}=۳۶۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{BT}=\frac{۳۶۰^\circ}{۵}=۷۲^\circ$$

با توجه به این‌که زاویهٔ بین مماس و امتداد یک وتر، برابر نصف تفاضل کمان‌های روبه‌رو به آن است، لذا خواهیم داشت:

$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{CT}-\overset{\frown}{BT}}{۲}=\frac{۲\overset{\frown}{BT}-\overset{\frown}{BT}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{BT}}{۲}=\frac{۷۲^\circ}{۲}=۳۶^\circ$$

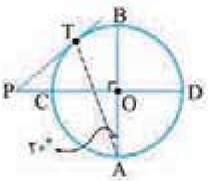
۶۷- گزینهٔ ۳ دقت کنید‌که مثلث ABC متساوی‌الساقین یعنی $\hat{B}=\hat{C}$ است. پس:



$$\frac{y-x}{۲}=\frac{x}{۲}\Rightarrow y=۲x$$

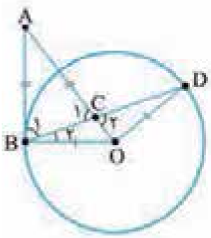
از طرفی $y+x=۱۳۸^\circ$ است. پس $۳x=۱۳۸^\circ$ یعنی $x=۴۶^\circ$ می‌شود. حالا سوال $\hat{C}$ را خواسته که با $\hat{B}$ برابر است و می‌شود $\frac{x}{۲}=۲۳^\circ$.

۶۸- گزینهٔ ۳ می‌دانیم اندازهٔ زاویهٔ بین امتداد دو وتر، برابر با نصف تفاضل کمان‌های روبه‌روی آن است. بنابراین داریم:



$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BT}}{۲}=۲۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{BT}=۴۰^\circ$$
$$\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{BT}+\overset{\frown}{CT}=۱۸۰^\circ$$
$$\xrightarrow[\overset{\frown}{BD}=\hat{O}=۹۰^\circ]{\overset{\frown}{BT}=۴۰^\circ}۹۰^\circ+۴۰^\circ+\overset{\frown}{CT}=۱۸۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{CT}=۵۰^\circ$$
$$\hat{P}=\frac{\overset{\frown}{DT}-\overset{\frown}{CT}}{۲}=\frac{۱۳۰^\circ-۵۰^\circ}{۲}=۴۰^\circ$$

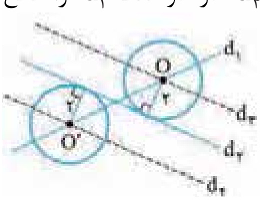
۶۹- گزینهٔ ۲ بیایید شکل سوال را بکشیم که این‌طوری می‌شود:



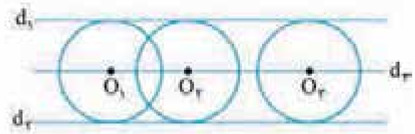
دایره بر ضلع AB عمود است و این یعنی $\hat{B}_۱+\hat{B}_۲$ برابر ۹۰° است. از طرفی مثلث ABC متساوی‌الساقین است و این یعنی $\hat{B}_۱=\hat{C}_۱$ زوایای $C_۱$ و $C_۲$ هم که متقابل به رأس هستند، پس $\hat{C}_۱=\hat{C}_۲$.

این‌ها را که کنار هم قرار دهیم می‌رسیم به $\hat{B}_۲+\hat{C}_۲=۹۰^\circ$ حالا برویم سراغ مثلث BOD که آن هم متساوی‌الساقین است (چرا؟) در نتیجه $\hat{B}_۲=\hat{D}$ بنابراین در نهایت $\hat{D}+\hat{C}_۲$ می شود ۹۰° و این یعنی مثلث OCD قائم‌الزاویه است.

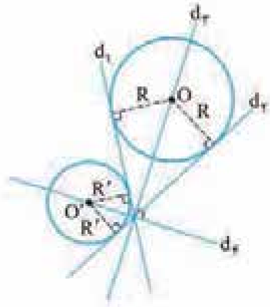
۷۰- گزینهٔ ۳ مرکز دایره‌هایی که به شعاع ۲ بر خط $d_۲$ مماس هستند روی خط $d_۳$ و $d_۴$ می‌نشینند که موازی $d_۲$ و به فاصلهٔ ۲ از آن هستند. حالا $d_۳$ و $d_۴$ در دو نقطه $d_۱$ را قطع می‌کنند که مرکز همان دایره‌های دلخواه ما هستند (نقاط O و O')



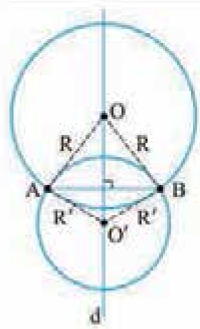
۷۱- گزینه چه بگوییم بهتر از این شکل!



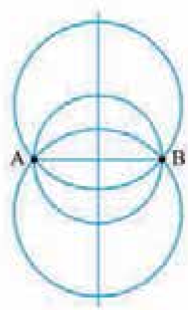
۷۲- گزینه مرکز دایره‌ای که به هر دو خط d_1 و d_2 مماس باشد از این دو خط به یک فاصله است. پس مرکز چنین دایره‌ای باید روی نیمساز زاویه‌های بین d_1 و d_2 باشد. حواستان باشد که این دو نیمساز بر هم عمودند (چرا؟)



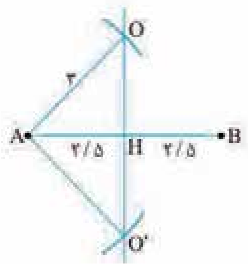
۷۳- گزینه مرکز دایره‌ای که از نقاط A و B عبور کند از این دو نقطه به یک فاصله است. این یعنی روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.



۷۴- گزینه اگر نقطه‌ای مثل O پیدا کنیم که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد و سپس دایره‌ای به مرکز O و شعاع AO رسم کنیم می‌رسیم به دایره‌ای که از A و B می‌گذرد. حالا چند نقطه داریم که از A و B به یک فاصله باشند؟ بله، بی‌شمار نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط AB پیدا می‌شود. پس بی‌شمار دایره پیدا می‌شود که از نقاط A و B عبور کند.



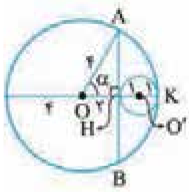
۷۵- گزینه فرض کنیم نقاط A و B به فاصله ۵ هستند و می‌خواهیم دایره‌ای بکشیم که از A و B عبور کند و شعاعش ۳ باشد. مرکز این دایره باید روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد (چرا؟) پس این عمودمنصف را رسم می‌کنیم. حالا کمانی به شعاع ۳ و مرکز A می‌زنیم تا عمودمنصف را در نقاط O و O' قطع کند. این دو نقطه همان مرکز دایره‌های ما هستند. بنابراین دایره‌هایی به شعاع ۳ و مرکز O و O' جواب این مسئله هستند.



۷۶- گزینه با توجه به این‌که مرکز دایره روی عمودمنصف پاره‌خط AB واقع است و فقط یک دایره از این دو نقطه می‌گذرد، می‌توان نتیجه گرفت که مرکز آن نقطهٔ O وسط AB می‌باشد؛ بنابراین داریم:

$$OB = OA = R = \frac{AB}{۲} \Rightarrow ۴m - ۲ = ۲ \Rightarrow m = ۱$$

۷۷- گزینه چون پاره‌خط AB بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است، پس شعاع OH بر آن عمود است، در نتیجه در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH داریم:



$$\cos\alpha = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha = ۶۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{AK} = \overset{\frown}{BK} = ۶۰^\circ$$

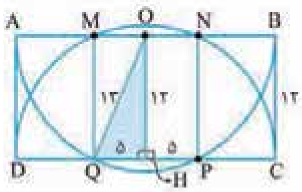
$$\overset{\frown}{AB} = ۱۲۰^\circ$$

۷۸- گزینه قطر نیم‌دایره برابر ۲۶ است، پس شعاع آن‌ها ۱۳ است، پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHQ داریم:

OQ=شعاع دایره=۱۳   OH=ضلع مستطیل=۱۲

و طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$\overset{\Delta}{OHQ} \text{ در: } HQ = \sqrt{۱۳^۲ - ۱۲^۲} = ۵$$



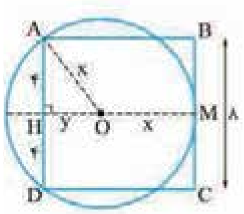
$$QP = ۲ \times ۵ = ۱۰$$

$$S_{MNPQ} = ۱۰ \times ۱۲ = ۱۲۰$$

۷۹- گزینه بیایید مرکز دایره را بگذاریم O. O را به A وصل می‌کنیم و قطری که بر AD و BC عمود باشد را می‌کشیم. حالا با فیثاغورس در مثلث AHO می‌رسیم به:

$$AH^۲ + OH^۲ = AO^۲ \Rightarrow ۴^۲ + y^۲ = x^۲ \Rightarrow y = \sqrt{x^۲ - ۱۶}$$

قبول دارید که x + y می‌شود یک ضلع مربع؟ (به HM نگاه کنید)



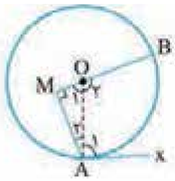
در نتیجه:

$$x + \sqrt{x^۲ - ۱۶} = ۸$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^۲ - ۱۶} = ۸ - x$$
$$\Rightarrow x^۲ - ۱۶ = ۶۴ - ۱۶x + x^۲$$
$$\Rightarrow ۱۶x = ۸۰ \Rightarrow x = ۵$$

۸۰- گزینه از نقطهٔ O به A وصل می‌کنیم. با توجه به این‌که شعاع دایره در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است، داریم:

$$\overset{\Delta}{AOM} : x\hat{A}M = \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲$$

$$\xrightarrow{\hat{A}_۱ = O\hat{A}x = ۹۰^\circ} ۱۲۰^\circ = ۹۰^\circ + \hat{A}_۲ \Rightarrow \hat{A}_۲ = ۳۰^\circ$$



$\overset{\Delta}{AOM} = \hat{O}_۱ = ۹۰^\circ - \hat{A}_۲$

$= ۹۰^\circ - ۳۰^\circ = ۶۰^\circ$

زاویه‌های $O_۱$ و $O_۲$ مجانب یکدیگرند. پس:

$O_۲ = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$

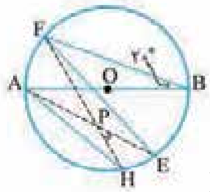
$\hat{O}_۲$ زاویهٔ مرکزی است. در نتیجه: $\hat{O}_۲ = \widehat{AB} = ۱۲۰^\circ$

$$\frac{AB}{۳۶۰^\circ} = \frac{۱۲۰^\circ}{۳۶۰^\circ} = \frac{۱}{۳}$$

۸۱- گزینه

در یک دایره، کمان‌های محصور بین دو وتر موازی، با هم برابرند. بنابراین داریم: $\hat{B} = \frac{\widehat{AF}}{۲} \Rightarrow \widehat{AF} = ۴۰^\circ$

$AH \parallel EF \Rightarrow \widehat{AF} = \widehat{HE} = ۴۰^\circ$

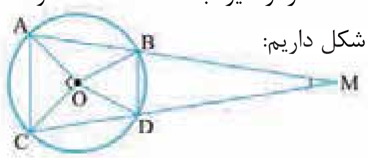


می‌دانیم اندازهٔ زاویهٔ بین دو وتر متقاطع، برابر نصف مجموع اندازهٔ کمان‌های مقابلش است، لذا خواهیم داشت:

$$H\hat{P}E = \frac{\widehat{AF}+\widehat{HE}}{۲} = \frac{۴۰^\circ+۴۰^\circ}{۲} = ۴۰^\circ$$

۸۲- گزینه

از نقطهٔ O مرکز دایره به نقاط A، B، C و D وصل می‌کنیم. با توجه به شکل داریم:



$\overset{\Delta}{OBD}: OB = OD = BD$

$\Rightarrow B\hat{O}D = ۶۰^\circ \xrightarrow{B\hat{O}D = \widehat{BD}} \widehat{BD} = ۶۰^\circ$

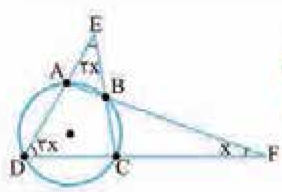
$\overset{\Delta}{OAC}: \begin{cases} OA = OC = R \\ AC = \sqrt{۲}R \end{cases} \xrightarrow{AC^۲ = OA^۲ + OC^۲}$

$A\hat{O}C = ۹۰^\circ \xrightarrow{A\hat{O}C = \widehat{AC}} \widehat{AC} = ۹۰^\circ$

می‌دانیم اندازهٔ زاویهٔ بین امتداد دو وتر، برابر با نصف تفاضل کمان‌های مقابلش است، لذا خواهیم داشت:

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AC}-\widehat{BD}}{۲} = \frac{۹۰^\circ - ۶۰^\circ}{۲} = ۱۵^\circ$$

۸۳- گزینه



۱ $\hat{D} = ۳x \Rightarrow \widehat{AB}+\widehat{BC} = ۶x$

۲ $\hat{E} = ۲x \Rightarrow \widehat{DC}-\widehat{AB} = ۴x$

۳ $\hat{F} = x \Rightarrow \widehat{AD}-\widehat{BC} = ۲x$

حالا اگر سه رابطه را جمع بزنیم می‌رسیم به:

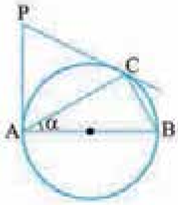
۴ $\widehat{AD}+\widehat{DC} = ۱۲x$

خب بیایید روابط ۱ و ۴ را جمع کنیم تا همهٔ کمان‌های دایره جمع شوند:

$$\widehat{AD}+\widehat{DC}+\widehat{AB}+\widehat{BC} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۱۸x = ۳۶۰ \Rightarrow x = ۲۰^\circ$$

۸۴- گزینه

عکس قضیهٔ فیثاغورس برای مثلث ABC برقرار است، می‌توان نتیجه گرفت:



$\overset{\Delta}{ABC}: AB^۲ = BC^۲ + AC^۲$

$\Rightarrow \hat{C} = ۹۰^\circ \xrightarrow{\hat{C} = \frac{\widehat{AB}}{۲}} \widehat{AB} = ۱۸۰^\circ$

$\sin\hat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۳۰^\circ \xrightarrow{\hat{A}=\frac{\widehat{BC}}{۲}} \widehat{BC} = ۶۰^\circ$

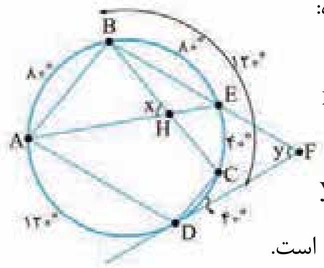
پس: $\widehat{AC} = ۱۲۰^\circ$ و $\widehat{ABC} = ۱۸۰^\circ + ۶۰^\circ = ۲۴۰^\circ$

حال طبق رابطهٔ محاسبهٔ زاویهٔ بین دو وتر خواهیم داشت:

$$\hat{P} = \frac{\widehat{ABC}-\widehat{AC}}{۲} \Rightarrow \hat{P} = \frac{۲۴۰^\circ - ۱۲۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ$$

۸۵- گزینه

از ظاهر شلوغ شکل نترسید. سؤال در واقع همهٔ کمان‌ها را به ما داده! این طوری که $\widehat{CD} = ۴۰^\circ$ و $\widehat{AB} = ۸۰^\circ$. پس $\widehat{AD}+\widehat{BC} = ۲۴۰^\circ$. حالا $AB \parallel CD$ است که این یعنی $\widehat{AD} = \widehat{BC} = ۱۲۰^\circ$. BE و AD هم موازی‌اند که نتیجهٔ آن می‌شود $\widehat{AB} = \widehat{ED} = ۸۰^\circ$. پس $\widehat{EC} = ۴۰^\circ$ و $\widehat{BE} = ۸۰^\circ$. بیایید برویم سراغ زوایای خواسته‌شده:

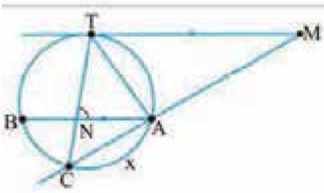


$$x = \frac{\widehat{AB}+\widehat{CE}}{۲} = ۶۰^\circ$$

$$y = \frac{\widehat{BAD}-\widehat{DCE}}{۲} = ۶۰^\circ$$

بنابراین $x = y$ و $x - y = ۰$ است.

۸۶- گزینه



در یک دایره کمان‌های محصور بین یک وتر و مماس موازی با آن، با هم برابرند.

$AB \parallel TM \Rightarrow \widehat{BT} = \widehat{AT}$

حال با توجه به روابط مربوط به محاسبهٔ زاویهٔ بین دو وتر و امتداد دو وتر داریم:

$\hat{M} = \frac{\widehat{CBT}-\widehat{AT}}{۲}$

$\xrightarrow{\widehat{CBT}=\widehat{BC}+\widehat{BT}} ۲۵^\circ = \frac{\widehat{BC}+\cancel{\widehat{BT}}-\cancel{\widehat{AT}}}{۲}$

$\xrightarrow{\widehat{BT}=\widehat{AT}} ۲۵^\circ = \frac{\widehat{BC}}{۲} \Rightarrow \widehat{BC} = ۵۰^\circ$

$A\hat{N}T = \frac{\widehat{BC}+\widehat{AT}}{۲} \Rightarrow ۸۰^\circ = \frac{۵۰^\circ+\widehat{AT}}{۲}$

$\Rightarrow ۱۶۰^\circ = ۵۰^\circ + \widehat{AT} \Rightarrow \widehat{AT} = ۱۱۰^\circ$

مجموع کمان‌های یک دایره برابر ۳۶۰ می‌باشد، لذا خواهیم داشت:

$\widehat{AT}+\widehat{BT}+\widehat{BC}+\widehat{AC} = ۳۶۰^\circ$

$\xrightarrow{\widehat{BT}=\widehat{AT}} ۱۱۰^\circ + ۱۱۰^\circ + ۵۰^\circ + \widehat{AC} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = ۹۰^\circ$