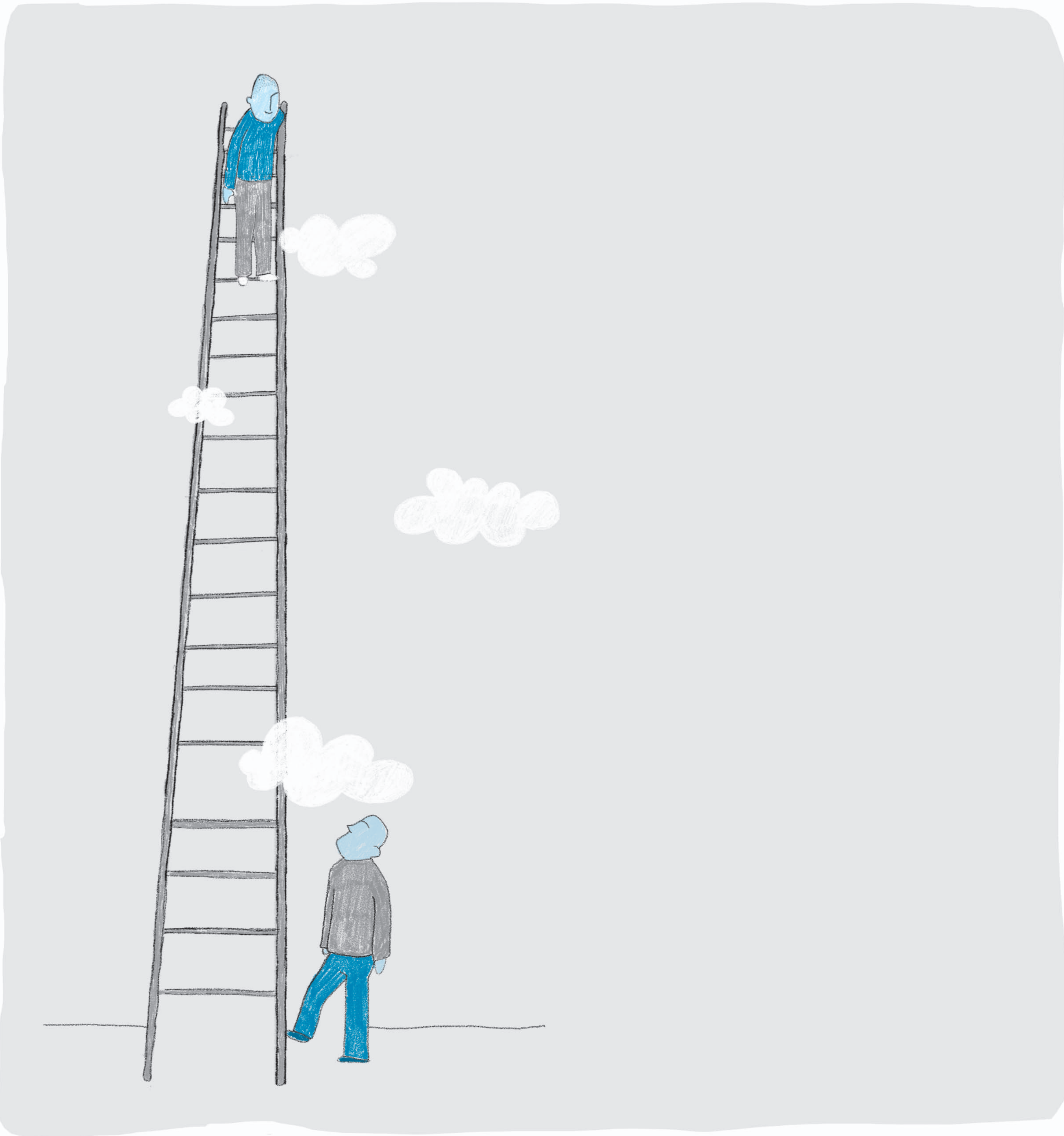
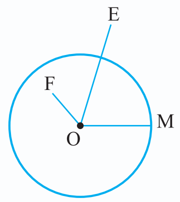
فصل ۱ دایره



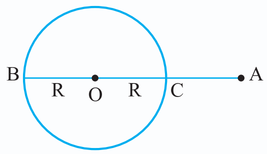
مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

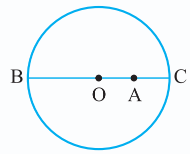
۱ در صفحه، یک نقطه نسبت به دایره یکی از وضعیت‌های زیر را دارد:

$$\begin{cases} OM = R \Leftrightarrow \text{M روی دایره} \\ OE > R \Leftrightarrow \text{E بیرون دایره} \\ OF < R \Leftrightarrow \text{F درون دایره} \end{cases}$$

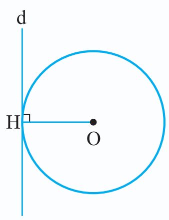


۲ دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایرهٔ $E(O,R)$ از نقطهٔ A با وصل‌کردن نقطهٔ A به مرکز دایره و تقاطع خط حاصل با دایره، به دست می‌آید و با فرض $OA = d$ داریم $AC = |d - R|$ ، $AB = d + R$.

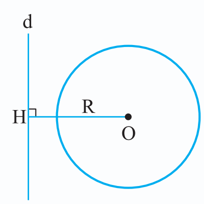




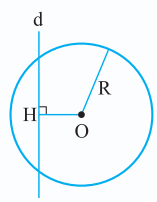
۳ خط مماس بر شعاع نقطهٔ تماس، عمود است و بالعکس خط عمود بر انتهای شعاع، بر دایره مماس است.



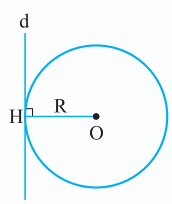
۴ **وضعیت خط و دایره:** دایرهٔ $C(O,R)$ و خط d را در صفحه در نظر می‌گیریم. در این صورت دایرهٔ (C) و خط d یکی از وضعیت‌های زیر را نسبت به یکدیگر دارند.



خط و دایره نقطهٔ اشتراکی ندارند.$(OH > R)$



خط و دایره متقاطع‌اند.$(OH < R)$



خط و دایره مماس‌اند.$(OH = R)$

تست **اگر فاصلهٔ نقاط M و N تا مرکز دایره $C(O,R)$ ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ - ۵Rx + ۲R^۲ = ۰$، باشد، آن‌گاه این نقاط نسبت به دایره چگونه‌اند؟**

۱) هر دو بیرون دایره واقع‌اند.
۲) یکی روی دایره، دیگری بیرون آن واقع است.
۳) هر دو درون دایره‌اند.
۴) یکی درون و دیگری بیرون دایره قرار دارد.

پاسخ **گزینهٔ «۴»**

$$۲x^۲ - ۵Rx + ۲R^۲ = ۰ \Rightarrow (۲x - R)(x - ۲R) = ۰ \Rightarrow x = \frac{R}{۲} \text{ یا } x = ۲R$$

پس فاصلهٔ یکی از نقاط کم‌تر و دیگری بیشتر از شعاع دایره است و این یعنی یک نقطه داخل و دیگری بیرون دایره قرار دارد.

تست **دورترین و نزدیک‌ترین فاصلهٔ یک نقطهٔ ثابت از نقاط یک دایره به ترتیب ۱۳ و ۵ است. مساحت دایره کدام است؟**

۱) ۹π
۲) ۱۶π
۳) ۲۵π
۴) ۴π

پاسخ **گزینهٔ «۲»** فرض کنیم نقطه خارج دایره باشد. در این صورت داریم:

$$\begin{cases} d + R = ۱۳ \\ d - R = ۵ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲d = ۱۸ \Rightarrow d = ۹ \ , \ R = ۱۳ - ۹ = ۴ \qquad S = \pi R^۲ = \pi \times ۴^۲ = ۱۶\pi$$

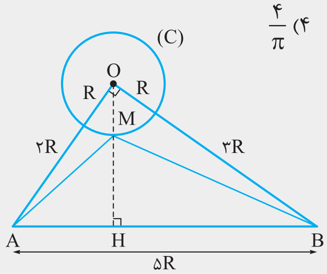
اگر نقطه داخل دایره باشد، داریم:

$$\begin{cases} d + R = ۱۳ \\ R - d = ۵ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲R = ۱۸ \Rightarrow R = ۹ \ , \ d = ۴ \qquad S = \pi R^۲ = \pi \times ۹^۲ = ۸۱\pi$$

۵ زاویهٔ مرکزی: زاویه‌ای که رأس آن مرکز دایره باشد.

تست دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض است. نقاط A و B از مرکز دایره به ترتیب به فاصله‌های $۳R$ و $۴R$ قرار دارند. اگر فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B برابر $۵R$ و M نقطه‌ای روی دایره باشد، آن‌گاه کم‌ترین مساحت مثلث ABM چه کسری از مساحت دایره است؟

۱) $\frac{۳}{\pi}$ ۲) $\frac{۷}{۲\pi}$ ۳) $\frac{۵}{۲\pi}$ ۴) $\frac{۴}{\pi}$

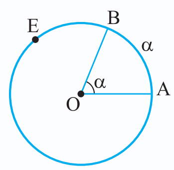


پاسخ گزینهٔ «۲» نقاط A و B خارج دایره قرار دارند و مثلث AOB قائم‌الزاویه است. مساحت مثلث ABM وقتی کم‌ترین است که ارتفاع MH در آن کم‌ترین مقدار را داشته باشد و این وضعیت بـرای نقطـهٔ M وقتی حاصل می‌شود که از O عمود OH را بر خط شامل AB رسم کنیم در این صورت محل تقـاطع این عمود و دایره جای نقطهٔ M است و در این حالت مثلث AMB کم‌ترین مساحت را دارد و مقدار آن بـه شرح زیر به دست می‌آید:

$$S_{(AOB)}=\frac{۱}{۲}OH\times AB=\frac{۱}{۲}OA\times OB \Rightarrow OH=\frac{۳R\times ۴R}{۵R}=۲/۴\,R$$

$$MH=OH-OM=۲/۴R-R=۱/۴\,R \qquad \frac{S_{(ABM)}}{S_{\text{دایره}}}=\frac{\frac{۱}{۲}MH\times AB}{\pi R^{۲}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times ۱/۴R\times ۵R}{\pi R^{۲}}=\frac{۷}{۲\pi}$$

۶ اندازهٔ زاویهٔ مرکزی: اندازهٔ زاویه مرکزی برحسب درجه برابر اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن برحسب درجـه مـی‌باشـد و بـه شعاع دایره بستگی ندارد.

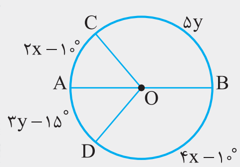


$$\widehat{AEB}=۳۶۰^\circ-\widehat{AB}=۳۶۰^\circ-\alpha$$

۷ طول کمان وقتی که اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به آن α درجه باشد برابر $L=\frac{\alpha}{۳۶۰}(۲\pi R)=\frac{\pi R\alpha}{۱۸۰}$ می‌باشد.

تست در شکل مقابل، O مرکز دایره و AB قطر آن است. اندازهٔ زاویهٔ $C\hat{O}D$ کدام است؟

۱) ۱۱۵° ۲) ۱۱۰° ۳) ۱۲۰° ۴) ۱۱۶°



پاسخ گزینهٔ «۱»

$$\begin{cases}\widehat{AC}+\widehat{BC}=۱۸۰^\circ\\ \widehat{AD}+\widehat{BD}=۱۸۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲x-۱۰^\circ+۵y=۱۸۰^\circ\\ ۳y-۱۵^\circ+۴x-۱۰^\circ=۱۸۰^\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲x+۵y=۱۹۰^\circ\\ ۳y+۴x=۲۰۵^\circ\end{cases}$$

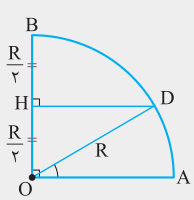
$$-۱۰y+۳y=-۳۸۰^\circ+۲۰۵^\circ \Rightarrow -۷y=-۱۷۵^\circ \Rightarrow y=۲۵^\circ$$

$$۲x+۵y=۱۹۰^\circ \Rightarrow ۲x+۵\times ۲۵^\circ=۱۹۰^\circ \Rightarrow ۲x=۶۵^\circ \Rightarrow x=۳۲/۵^\circ$$

$$C\hat{O}D=\widehat{CD}=\widehat{AC}+\widehat{AD}=۲x-۱۰^\circ+۳y-۱۵^\circ=۶۵^\circ-۱۰^\circ+۷۵^\circ-۱۵^\circ=۱۱۵^\circ$$

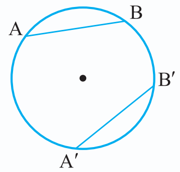
تست در یک ربع دایره با شعاع‌های عمود بر هم OA و OB، عمودمنصف شعاع OB، کمان ربع دایره را در نقطهٔ D قطـع مـی‌کنـد. اندازهٔ کمان AD کدام است؟

۱) ۱۵° ۲) ۴۵° ۳) ۳۰° ۴) ۳۶°



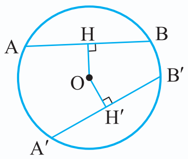
پاسخ گزینهٔ «۳» مثلث OHD قائم‌الزاویه است و یک ضلع آن نـصف وتـر آن اسـت $OH=\frac{OD}{۲}$، پـس انـدازهٔ زوایای حادهٔ آن ۳۰° و ۶۰° می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$H\hat{O}D=۶۰^\circ \Rightarrow A\hat{O}D=۹۰^\circ-۶۰^\circ=۳۰^\circ \Rightarrow \widehat{AD}=۳۰^\circ$$



۸ دو وتر در یک دایره (یا دو دایره با شعاع‌های مساوی) برابرند اگر و تنها اگر کمان‌های نظیر آن‌ها برابر باشند.

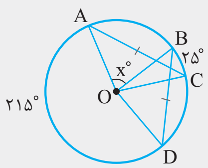
$$AB = A'B' \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$$



۹ دو وتر در یک دایره (یا دو دایره با شعاع‌های مساوی) برابرند اگر و تنها اگر فاصلهٔ مرکز دایره از آن‌ها برابر باشد.

$$AB = A'B' \Leftrightarrow OH = OH'$$

تست **در شکل روبه‌رو O مرکز دایره است و داریم $\overset{\frown}{BC} = ۲۵^\circ$، کمان بزرگ $\overset{\frown}{AD}$ برابـر ۲۱۵° و $AC = BD$. مقدار x کدام است؟**



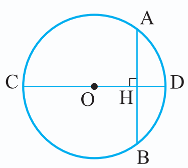
۱) ۸۰°
۲) ۵۰°
۳) ۶۰°
۴) ۳۰°

پاسخ **گزینهٔ «۳»**

$$AC = BD \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AD} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۲\overset{\frown}{AB} + ۲۵^\circ + ۲۱۵^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$$

زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB} \Rightarrow x = ۶۰^\circ$



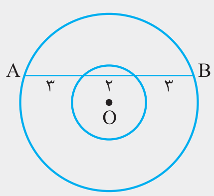
۱۰ قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن را نصف می‌کند.

$$CD \perp AB \Rightarrow AH = BH \,,\, \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD} \,,\, \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$$

۱۱ در هر دایره، قطری از آن وتری را که قطر نیست نصف کند، بر آن وتر عمود است و کمان‌های نظیر آن را نصف می‌کند.

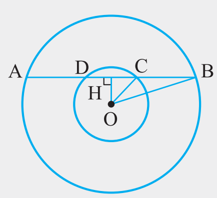
۱۲ در هر دایره قطری از دایره که یک سر آن وسط کمان نظیر یک وتر باشد، بر آن وتر عمود است و آن را نصف می‌کند.

تست **در شکل مقابل، دو دایره هم‌مرکز هستند، با توجه به شکل، مساحت ناحیهٔ بین دو دایره کدام است؟**



۱) ۱۶π
۲) ۱۲π
۳) ۱۸π
۴) ۱۵π

پاسخ **گزینهٔ «۴»** از مرکز دایره بر وتر AB خطی عمود رسم می‌کنیم. وترهای AB و CD هر دو نصف می‌شوند، پس $CH = DH = ۱$ و $AH = BH = ۴$. شعاع دایره‌ها را به ترتیب $OB = R$ و $OC = r$ می‌نامیم، بنا به قضیهٔ فیثاغورس داریم:

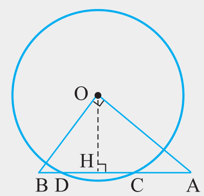


$$\begin{cases} OB^۲ = OH^۲ + BH^۲ \\ OC^۲ = OH^۲ + CH^۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} OB^۲ - OC^۲ = BH^۲ - CH^۲ \Rightarrow R^۲ - r^۲ = ۴^۲ - ۱^۲ = ۱۶ - ۱ = ۱۵$$

$$\text{مساحت بین دو دایره} = \pi R^۲ - \pi r^۲ = \pi(R^۲ - r^۲) = ۱۵\pi$$

تست **در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB $(\hat{O} = ۹۰^\circ)$ دایره‌ای به مرکز O وتر AB را در نقطهٔ C و D قطع می‌کند. اگـر $BD = ۲$، $CD = ۸$ و $AC = ۴$ باشد، آن‌گاه مساحت مثلث AOB کدام است؟**

۱) $۲۴\sqrt{۲}$
۲) $۲۴\sqrt{۳}$
۳) $۲۸\sqrt{۲}$
۴) $۲۸\sqrt{۳}$

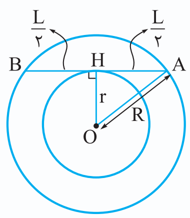


پاسخ **گزینهٔ «۴»** عمود OH وتر CD را نصف می‌کند در نتیجه $CH=DH=۴$ و با توجه به $BD=۲$ و $AC=۴$ نتیجه می‌شود $BH=BD+DH=۲+۴=۶$ و $AH=CH+AC=۴+۴=۸$.

اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB، ارتفاع وارد بر وتر، واسطهٔ هندسی دو پاره‌خطی است که روی وتر پدید می‌آورد. لذا داریم:

$$OH^۲=AH\times BH=۸\times۶=۴۸ \Rightarrow OH=۴\sqrt{۳}$$

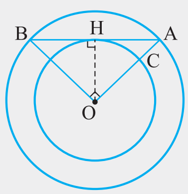
$$S_{(AOB)}=\frac{۱}{۲}OH\times AB=\frac{۱}{۲}\times۴\sqrt{۳}\times(۲+۸+۴)=۲\sqrt{۳}\times۱۴=۲۸\sqrt{۳}$$



۱۳ همهٔ وترهایی به طول L در دایرهٔ $C(O,R)$، وسطشان روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $r=\frac{\sqrt{۴R^۲-L^۲}}{۲}$ قرار دارد و بالعکس، اگر وتری بر این دایره مماس شود، آن‌گاه در نقطهٔ تماس نصف می‌شود و طول آن برابر L است.

تست **دایره‌ای به شعاع ۱۲ مفروض است. وسط همهٔ وترهایی که زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان آن‌ها قائمه است، روی یک شکل قرار دارند، کم‌ترین فاصلهٔ نقاط این شکل و دایره کدام است؟**

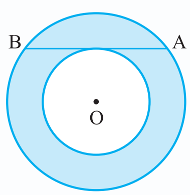
۱) $۶-۳\sqrt{۲}$ ۲) $۶\sqrt{۲}-۶$ ۳) $۱۲\sqrt{۲}-۱۲$ ۴) $۱۲-۶\sqrt{۲}$



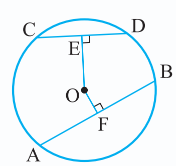
پاسخ **گزینهٔ «۴»** فرض کنیم AB یکی از وترهایی باشد که زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان آن قائمه است $(\hat{AOB}=۹۰^\circ)$ چون $OA=OB$ است، پس مثلث AOB قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، پس داریم:

$$OA^۲+OB^۲=AB^۲ \Rightarrow AB^۲=۱۲^۲+۱۲^۲=۲\times۱۲^۲ \Rightarrow AB=۱۲\sqrt{۲}$$

عمود OH وتر AB را نصف می‌کند $AH=BH=۶\sqrt{۲}$ و چون در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH میانهٔ نظیر وتر، نصف وتر است؛ پس $OH=\frac{AB}{۲}=۶\sqrt{۲}$. بنابراین وسط همهٔ وترهای AB روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $۶\sqrt{۲}$ قرار دارد که مطابق شکل فوق کم‌ترین فاصلهٔ دو دایره $AC=۱۲-۶\sqrt{۲}$ است.

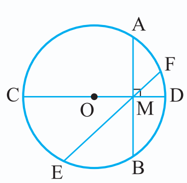


نکته اگر دو دایره، هم‌مرکز باشند و وتر AB از دایرهٔ بزرگ بر دایرهٔ کوچک مماس باشد، آن‌گاه مساحت بین دو دایره برابر است با: $\frac{\pi AB^۲}{۴}$



۱۴ از دو وتر نابرابر در یک دایره (یا دو دایره به شعاع‌های مساوی) آن که بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است و بالعکس.

$$AB>CD \Leftrightarrow OF<OE$$

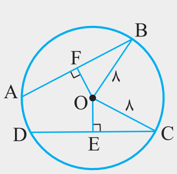


۱۵ کوتاه‌ترین وتر در یک دایره، که از نقطه‌ای داخل دایره رسم می‌شود، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه، عمود است.

$$AB\le EF\le CD$$

تست **در دایرهٔ $C(O,۸)$ اندازهٔ وترهای AB و CD به ترتیب $۴x+۶$ و $۲x+۸$ است که x عددی صحیح است. اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا وتر CD بیشتر از فاصلهٔ آن تا وتر AB باشد، آن‌گاه فاصلهٔ مرکز دایره تا وتر CD کدام است؟**

۱) $\sqrt{۷}$ ۲) $۲\sqrt{۷}$ ۳) $\sqrt{۱۵}$ ۴) $\sqrt{۳۰}$



پاسخ **گزینهٔ «۲»**

$$(\text{فرض})\ OE>OF \Rightarrow CD<AB \Rightarrow ۲x+۸<۴x+۶ \Rightarrow ۱<x$$

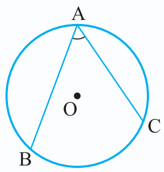
از طرفی شعاع دایره ۸ است و در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ OCE و OBF داریم:

$$\begin{cases} BF < OB \\ CE < OC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AB}{۲} < ۸ \\ \frac{CD}{۲} < ۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x + ۳ < ۸ \\ x + ۴ < ۸ \end{cases} \Rightarrow x < \frac{۵}{۲}$$

بنابراین $۱ < x < \frac{۵}{۲}$ و چون x عددی صحیح است، نتیجه می‌شود $x = ۲$ و داریم:

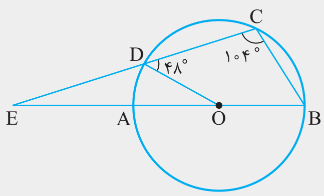
$$CE = \frac{CD}{۲} = \frac{۲x + ۸}{۲} = x + ۴ = ۶$$

$$OC^۲ = OE^۲ + CE^۲ \Rightarrow ۸^۲ = OE^۲ + ۶^۲ \Rightarrow OE^۲ = ۶۴ - ۳۶ = ۲۸ \Rightarrow OE = \sqrt{۲۸} = ۲\sqrt{۷}$$



۱۶ زاویهٔ محاطی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن دو وتر از دایره باشند. اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر است با، نصف اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن $(\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲})$.

تست در شکل زیر، O مرکز دایره و AB قطر آن است. امتداد وتر CD امتداد قطر AB را در نقطهٔ E قطع می‌کند. اگر $O\hat{D}C = ۴۸^\circ$ و $\hat{C} = ۱۰۴^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ $\hat{E}$ کدام است؟



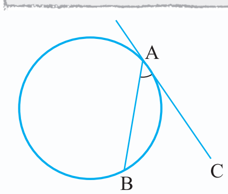
۱) ۱۸°
۲) ۲۲°
۳) ۱۶°
۴) ۲۰°

پاسخ **گزینهٔ «۴»** زاویهٔ C محاطی است، پس داریم:

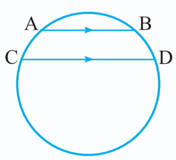
$$\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BAD}}{۲} \Rightarrow ۱۰۴^\circ = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow ۲۰۸^\circ = ۱۸۰^\circ + \overset{\frown}{AD} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = ۲۸^\circ \Rightarrow A\hat{O}D = ۲۸^\circ$$

در مثلث ODE، زاویهٔ $O\hat{D}C$ خارجی است، در نتیجه:

$$O\hat{D}C = \hat{E} + A\hat{O}D \Rightarrow ۴۸^\circ = \hat{E} + ۲۸^\circ \Rightarrow \hat{E} = ۲۰^\circ$$

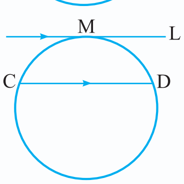


۱۷ زاویهٔ ظلی: زاویه‌ای که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن وتری از دایره و ضلع دیگر آن مماس بر دایره است. اندازهٔ هر زاویه ظلی برابر است با نصف اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن $(\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲})$.



۱۸ اندازه‌های کمان‌های محصور بین دو وتر موازی با هم برابرند.

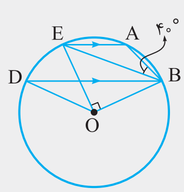
$$AB \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$$



۱۹ اگر خط L در نقطهٔ M بر دایره مماس باشد و وتر CD موازی L باشد، داریم:

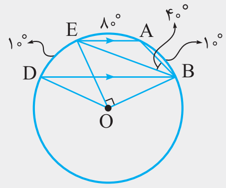
$$\overset{\frown}{CM} = \overset{\frown}{DM}$$

تست دایره‌ای به مرکز O مفروض است. دو وتر موازی AE و BD از این دایره در یک طرف O قرار دارند به طوری که $A\hat{B}E = ۴۰^\circ$ و $B\hat{O}E = ۹۰^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ BOD چند درجه است؟



۱) ۱۰۰°
۲) ۱۲۰°
۳) ۱۱۵°
۴) ۱۳۰°

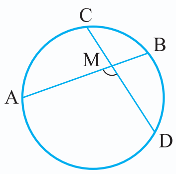
پاسخ **گزینهٔ «۱»** چون $AE \parallel BD$، پس $\widehat{AB}=\widehat{DE}$ و داریم:



$$B\hat{O}E=۹۰^\circ \Rightarrow \widehat{AE}+\widehat{AB}=۹۰^\circ \Rightarrow ۲\times۴۰^\circ+\widehat{AB}=۹۰^\circ \Rightarrow \widehat{AB}=۱۰^\circ$$

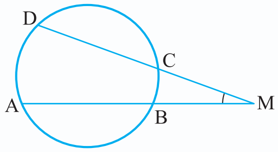
$$B\hat{O}D=\widehat{AB}+\widehat{AE}+\widehat{DE}=۱۰^\circ+۸۰^\circ+۱۰^\circ=۱۰۰^\circ$$

۲۰ زاویهٔ بین دو وتر برابر است با:



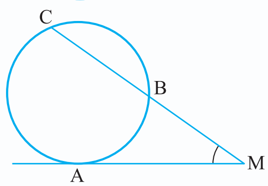
$$\hat{M}=\frac{\widehat{AD}+\widehat{BC}}{۲}$$

۲۱ زاویهٔ بین امتداد دو وتر برابر است با:



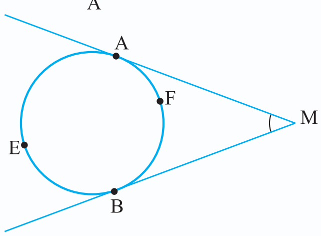
$$\hat{M}=\frac{\widehat{AD}-\widehat{BC}}{۲}$$

۲۲ زاویهٔ بین خط مماس و امتداد وتر برابر است با:



$$\hat{M}=\frac{\widehat{AC}-\widehat{AB}}{۲}$$

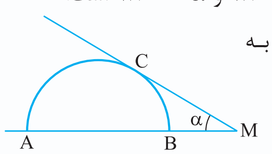
۲۳ زاویهٔ بین دو خط مماس برابر است با:



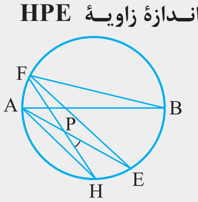
$$\hat{M}=\frac{\widehat{AEB}-\widehat{AFB}}{۲}$$

۲۴ اگر زاویهٔ بین دو مماس، $\hat{M}=\alpha$ باشد (شکل فوق)، آن‌گاه اندازهٔ کمان‌های AEB و AFB به ترتیب $۱۸۰^\circ+\alpha$ و $۱۸۰^\circ-\alpha$ است.

۲۵ اگر زاویهٔ بین مماس و امتداد قطر نیم‌دایره برابر $\hat{M}=\alpha$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ کمان‌های BC و AC به ترتیب $۹۰^\circ-\alpha$ و $۹۰^\circ+\alpha$ است.



تست **در شکل، AB قطری از دایره است و وتر AH با وتر EF موازی است. اگر $F\hat{B}A=۲۰^\circ$، در این صورت اندازهٔ زاویهٔ HPE کدام است؟**



۱) ۴۰° ۲) ۳۵°

۳) ۳۰° ۴) ۲۵°

پاسخ **گزینهٔ «۱»**

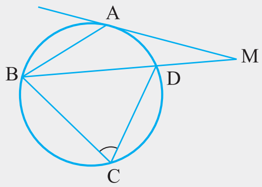
$$AH \parallel EF \Rightarrow \widehat{HE}=\widehat{AF} \quad (۱)$$

$H\hat{P}E$ زاویهٔ برخورد دو وتر AE و FH است. $H\hat{P}E \Rightarrow H\hat{P}E=\dfrac{\widehat{AF}+\widehat{HE}}{۲} \quad (۲)$

$$(۱),(۲) \Rightarrow H\hat{P}E=\frac{\widehat{AF}+\widehat{AF}}{۲}=\widehat{AF}$$

زاویهٔ محاطی $\hat{B}=\dfrac{\widehat{AF}}{۲} \Rightarrow ۲۰^\circ=\dfrac{\widehat{AF}}{۲} \Rightarrow \widehat{AF}=۴۰^\circ \Rightarrow H\hat{P}E=\widehat{AF}=۴۰^\circ$

تست در شکل روبه‌رو، $MA = AB$ و MA بر دایره، مماس است. اگر $\hat{M} = ۲۵^\circ$، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ C چند درجه است؟



۱) ۵۰° ۲) ۷۵°
۳) ۶۰° ۴) ۸۵°

پاسخ گزینهٔ «۲»

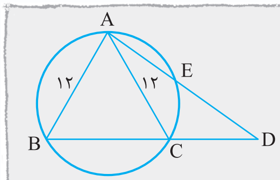
$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AD} = ۲ \times ۲۵^\circ = ۵۰^\circ \quad (۱)$$

$$MA = AB \Rightarrow A\hat{B}D = \hat{M} = ۲۵^\circ \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} = ۲۵^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = ۵۰^\circ \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۵۰^\circ + \overset{\frown}{AD} = ۵۰^\circ + ۵۰^\circ = ۱۰۰^\circ$$

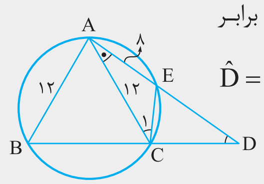
زاویهٔ محاطی $\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BAD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AD}}{۲} = \frac{۱۰۰^\circ + ۵۰^\circ}{۲} = \frac{۱۵۰^\circ}{۲} = ۷۵^\circ$

تست در دایرهٔ مقابل، طول دو وتر AB و AC برابر ۱۲ است. نقطهٔ D روی امتداد وتر BC چنان قرار دارد که AD دایره را در E قطع می‌کند و $AE = ۸$ می‌باشد. اندازهٔ DE کدام است؟



۱) ۸ ۲) ۹
۳) ۱۰ ۴) ۱۱

پاسخ گزینهٔ «۳» C را به E وصل می‌کنیم. چون دو وتر AB و AC برابرند پس کمان‌های آن‌ها نیز برابر است $(\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC})$. داریم:



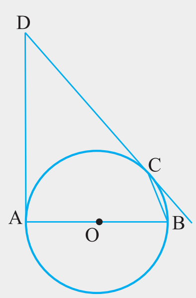
$$\hat{D} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CE}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{CE}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AE}}{۲}$$

اما زاویهٔ $\hat{C}_۱$ محاطی است، پس $\hat{C}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AE}}{۲}$ و در نتیجه $\hat{D} = \hat{C}_۱$ می‌شود و داریم:

$$(C\hat{A}E = C\hat{A}D, \hat{C}_۱ = \hat{D}) \Rightarrow \overset{\Delta}{ACE} \sim \overset{\Delta}{ADC} \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{۱۲}{۸ + DE} = \frac{۸}{۱۲}$$

$$\Rightarrow ۶۴ + ۸DE = ۱۴۴ \Rightarrow DE = \frac{۱۴۴ - ۶۴}{۸} = \frac{۸۰}{۸} = ۱۰$$

تست در شکل مقابل، AB قطر دایره و DA و DC به ترتیب در نقاط A و C بر دایره مماس‌اند. اگر اندازهٔ زاویهٔ ظلی C برابر ۳۵° باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ D کدام است؟

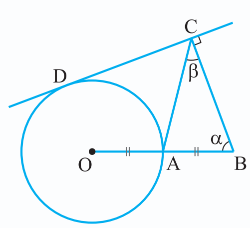


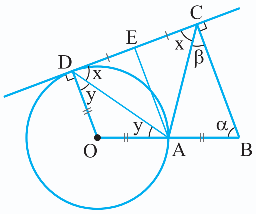
۱) ۶۰°
۲) ۷۰°
۳) ۷۵°
۴) ۶۵°

پاسخ گزینهٔ «۲» زاویهٔ ظلی C برابر ۳۵° است، پس اندازهٔ کمان روبه‌رو به آن $\overset{\frown}{BC} = ۷۰^\circ$ است و داریم:

$$\overset{\frown}{AC} = ۱۸۰^\circ - \overset{\frown}{BC} = ۱۸۰^\circ - ۷۰^\circ = ۱۱۰^\circ \qquad \hat{D} = ۱۸۰^\circ - \overset{\frown}{AC} = ۱۸۰^\circ - ۱۱۰^\circ = ۷۰^\circ$$

مثال در شکل مقابل، شعاع OA از دایره‌ای به مرکز O را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ B امتداد داده‌ایم. سپس مماس دلخواهی در نقطهٔ D بر دایره رسم می‌کنیم و از B بر آن عمود BC را رسم می‌کنیم. ثابت کنید $\alpha = ۲\beta$.





پاسخ A را به E وسط ساق CD در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه OBCD وصل می‌کنیم، پس AE پاره‌خط میانگین ذوزنقه است. لذا با قاعده‌های ذوزنقه موازی است و در نتیجه AE بر CD عمود و نهایتاً AE عمودمنصف CD است که نتیجه می‌دهد مثلث ACD متساوی‌الساقین می‌باشد $(AD=AC)$ و می‌توان نوشت:

$$x=۹۰^\circ-\beta \Rightarrow y=۹۰^\circ-x=۹۰^\circ-(۹۰^\circ-\beta)=\beta$$

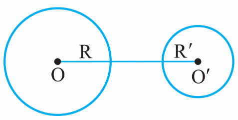
$$D\hat{A}C=۱۸۰^\circ-x-x=۱۸۰^\circ-۲x=۱۸۰^\circ-۲(۹۰^\circ-\beta)=۲\beta$$

زاویهٔ خارجی مثلث ABC $\ O\hat{A}C \Rightarrow O\hat{A}C=\beta+\alpha \Rightarrow O\hat{A}D+D\hat{A}C=\beta+\alpha \Rightarrow \beta+۲\beta=\beta+\alpha \Rightarrow \alpha=۲\beta$

۲۶ وضع دو دایره نسبت به هم: دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ با فرض $R>R'$ و $OO'=d$ به صورت زیر دسته‌بندی می‌شوند.

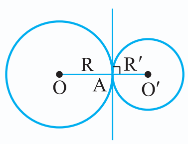
۱- دو دایرهٔ برون هم (دو دایرهٔ متخارج)

$$d>R+R'$$



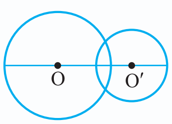
۲- دو دایرهٔ مماس برون (مماس‌خارج)

$$d=R+R'$$



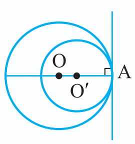
نکته نقطهٔ تماس دو دایره و مراکز آن‌ها روی یک خط واقع‌اند، زیرا شعاع‌های OA و $O'A$ بر خط مماس در نقطهٔ A عمودند.

۳- دو دایرهٔ متقاطع



$$R-R'<d<R+R'$$

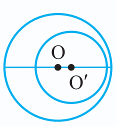
۴- دو دایره مماس درون



$$d=R-R'$$

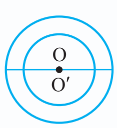
نکته نقطهٔ تماس دو دایره و مراکز آن‌ها روی یک خط واقع‌اند، زیرا شعاع‌های OA و $O'A$ بر خط مماس در نقطهٔ A عمودند.

۵- دو دایرهٔ متداخل



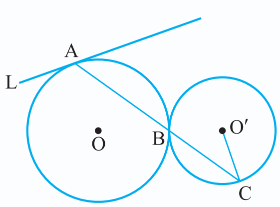
$$d<R-R'$$

۶- دایره‌های هم‌مرکز

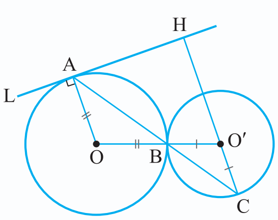


$$d=۰$$

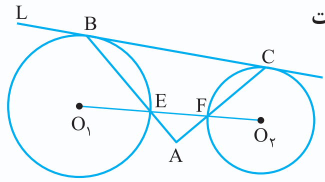
مثال **در شکل مقابل، دو دایره در نقطهٔ B مماس خارج‌اند و خط L در نقطهٔ A بر دایره به مرکز O مماس است. اگر امتداد AB، دایره به مرکز O' را در نقطهٔ C قطع کند، ثابت کنید امتداد $O'C$ بر خط L عمود است.**



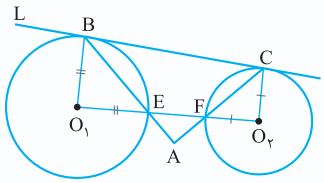
پاسخ خط مماس بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس، عمود است، پس $OA\perp L$. از طرفی، دو مثلث متساوی‌الساقین AOB و $BO'C$ متشابه‌اند زیرا $O'\hat{B}C=O\hat{B}A$. پس $O\hat{A}C=A\hat{C}H$ و این یعنی CH با OA موازی و در نتیجه بر خط L عمود است.



مثال **در شکل مقابل، دو دایره متخارج هستند و خط L بر هر دو دایره مماس است. ثابت کنید $AB \perp AC$.**



پاسخ فرض کنیم $O_۱\hat{B}E = \alpha$ و $O_۲\hat{C}F = \beta$، در این صورت با توجه به مثلث‌های متساوی‌الساقین $O_۱BE$ و $O_۲CF$ داریم:



$$B\hat{O}_۱E = ۱۸۰^\circ - \alpha - \alpha = ۱۸۰^\circ - ۲\alpha$$

$$C\hat{O}_۲F = ۱۸۰^\circ - \beta - \beta = ۱۸۰^\circ - ۲\beta$$

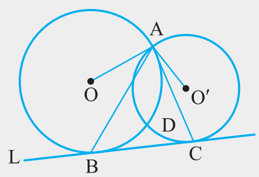
اما $O_۱B$ و $O_۲C$ هر دو بر خط L عمودند، زیرا شعاع نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است. پس داریم:

$$O_۱B \| O_۲C \Rightarrow B\hat{O}_۱E + C\hat{O}_۲F = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۸۰^\circ - ۲\alpha + ۱۸۰^\circ - ۲\beta = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = ۹۰^\circ$$

$$A\hat{E}F = O_۱\hat{E}B = O_۱\hat{B}E = \alpha \ , \ A\hat{F}E = O_۲\hat{F}C = O_۲\hat{C}F = \beta$$

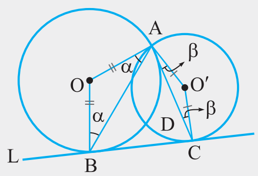
$$\hat{A} + A\hat{E}F + A\hat{F}E = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} + \underbrace{\alpha + \beta}_{۹۰^\circ} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۹۰^\circ \Rightarrow AB \perp AC$$

تست **در شکل روبه‌رو، خط L بر دو دایرهٔ متقاطع در نقاط A و D، مماس است. اگر $O\hat{A}O' = ۱۴۸^\circ$ باشد، آن‌گاه مجموع اندازه‌های کمان‌های $\overset{\frown}{ADC}$ و $\overset{\frown}{ADB}$ چند درجه است؟**



۱) ۲۰۰°
۲) ۲۱۲°
۳) ۲۴۸°
۴) ۲۰۲°

پاسخ **گزینهٔ «۲»** با توجه به مثلث‌های متساوی‌الساقین، زوایا مطابق شکل می‌شود و داریم:



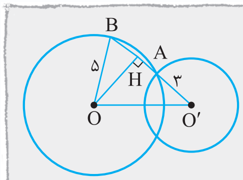
$$A\hat{C}B = ۹۰^\circ - \beta \ , \ A\hat{B}C = ۹۰^\circ - \alpha$$

$$B\hat{A}C + ۹۰^\circ - \beta + ۹۰^\circ - \alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow B\hat{A}C = \beta + \alpha$$

$$O\hat{A}O' = \alpha + \beta + B\hat{A}C \Rightarrow ۱۴۸^\circ = \alpha + \beta + \alpha + \beta \Rightarrow \alpha + \beta = ۷۴^\circ$$

$$\overset{\frown}{ADB} + \overset{\frown}{ADC} = A\hat{O}B + A\hat{O'}C = ۱۸۰^\circ - ۲\alpha + ۱۸۰^\circ - ۲\beta = ۳۶۰^\circ - ۲(\alpha + \beta) = ۳۶۰^\circ - ۱۴۸^\circ = ۲۱۲^\circ$$

تست **دو دایرهٔ متقاطع $C(O,۵)$ و $C'(O',۳)$ مفروض‌اند. به ازای بیشترین مقدار صحیح OO'، خطی که از O' و نقطهٔ تقاطع دو دایره می‌گذرد، وتری با کدام طول در دایرهٔ بزرگ‌تر ایجاد می‌کند؟**



۱) $۴/۵$
۲) $۵/۵$
۳) ۵
۴) ۶

پاسخ **گزینهٔ «۳»** از متقاطع‌بودن دو دایره نتیجه می‌شود $۲ < OO' < ۸$ و بیشترین مقدار صحیح OO' برابر ۷ است. مطابق شکل، AB وتر مطلوب است، پس داریم:

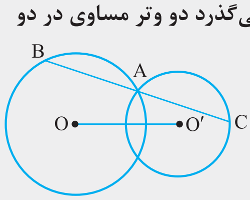
$$OO'^۲ = \underline{OH^۲} + O'H^۲ \Rightarrow OO'^۲ = \underline{OB^۲ - BH^۲} + O'H^۲$$

فیثاغورس

عمود OH وتر AB را نصف می‌کند پس $AH = BH = x$ و داریم:

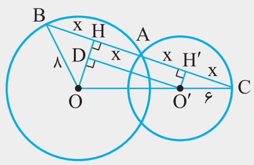
$$۷^۲ = ۵^۲ - x^۲ + (۳ + x)^۲ \Rightarrow ۴۹ = ۲۵ - x^۲ + ۶x + x^۲ + ۹ \Rightarrow ۶x = ۱۵ \Rightarrow x = \frac{۵}{۲} \ , \ AB = ۲AH = ۲x = ۵$$

تست **مطابق شکل دو دایره به شعاع‌های ۶ و ۸ در نقطهٔ A متقاطع‌اند و $OO' = ۱۲$. اگر خطی که از A می‌گذرد دو وتر مساوی در دو دایره ایجاد کند $(AB = AC)$، آن‌گاه طول این وترها کدام است؟**



۱) $\sqrt{۱۲۰}$
۲) $\sqrt{۱۳۰}$
۳) $\sqrt{۱۴۰}$
۴) $\sqrt{۱۱۰}$

پاسخ گزینهٔ «۲» با فرض $AB = AC = ۲x$، مطابق شکل داریم:



$$OH^۲ = OB^۲ - BH^۲ = ۸^۲ - x^۲ \Rightarrow OH = \sqrt{۶۴ - x^۲}$$

$$O'H'^۲ = O'C^۲ - CH'^۲ = ۶^۲ - x^۲ \Rightarrow O'H' = \sqrt{۳۶ - x^۲}$$

$$O'D = HH' = AH + AH' = x + x = ۲x$$

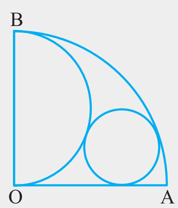
$$OO'^۲ = OD^۲ + O'D^۲ \Rightarrow OO'^۲ = (OH - O'H')^۲ + O'D^۲ \Rightarrow (\sqrt{۶۴ - x^۲} - \sqrt{۳۶ - x^۲})^۲ + (۲x)^۲ = ۱۲^۲$$

$$\xrightarrow{x^۲ = t} ۶۴ - t + ۳۶ - t - ۲\sqrt{۶۴ - t}\sqrt{۳۶ - t} + ۴t = ۱۴۴ \Rightarrow \sqrt{۶۴ - t}\sqrt{۳۶ - t} = t - ۲۲$$

$$\Rightarrow ۶۴ \times ۳۶ - ۱۰۰t + t^۲ = t^۲ - ۴۴t + ۲۲^۲ \Rightarrow ۵۶t = ۲۳۰۴ - ۴۸۴ = ۱۸۲۰ \Rightarrow t = \frac{۱۸۲۰}{۵۶} = ۳۲/۵$$

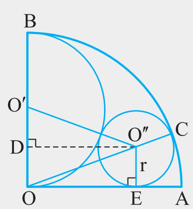
$$x^۲ = ۳۲/۵ \Rightarrow AB^۲ = ۴x^۲ = ۴ \times ۳۲/۵ = ۱۳۰ \Rightarrow AB = \sqrt{۱۳۰}$$

تست **ربع دایره به شعاع‌های عمود بر هم OA و OB مفروض است، نیم‌دایره‌ای به قطر OB داخل آن رسم می‌کنیم. اگر دایره‌ای بر OA و ربع دایره و نیم‌دایره مماس باشد، آن‌گاه شعاع این دایره چه کسری از شعاع ربع دایره است؟**



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$



پاسخ گزینهٔ «۲» شعاع ربع دایره و شعاع دایره را به ترتیب R و r در نظر می‌گیریم. نیم‌دایره و دایره مماس‌خارج هستند پس $O'O'' = \frac{R}{۲} + r$. ربع دایره و دایره در نقطهٔ C مماس‌داخل هستند پس $OO'' = R - r$. در مثلث $O'O''O$ ارتفاع $O''D$ را رسم می‌کنیم، داریم:

$$OD = O''E = r \ , \ O'D = OO' - OD = \frac{R}{۲} - r$$

حال به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های $O'O''D$ و $OO''D$ داریم:

$$O''D^۲ = O'O''^۲ - O'D^۲ = OO''^۲ - OD^۲ \Rightarrow (\frac{R}{۲} + r)^۲ - (\frac{R}{۲} - r)^۲ = (R - r)^۲ - r^۲ \Rightarrow R \times ۲r = R \times (R - r - r)$$

$$\Rightarrow ۲r = R - ۲r \Rightarrow R = ۴r \Rightarrow r = \frac{R}{۴}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

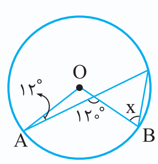
زاویهٔ مرکزی، خط مماس بر دایره

۱- اگر فاصلهٔ نقاط E و F تا مرکز دایرهٔ $C(O, R)$ ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲ - ۷Rx + ۴R^۲ = ۰$ باشد، آن‌گاه این نقاط نسبت به دایره چگونه‌اند؟

۱) هر دو بیرون دایره قرار دارند. ۲) یکی روی دایره و دیگری بیرون آن قرار دارد.

۳) هر دو درون دایره واقع‌اند. ۴) یکی روی دایره و دیگری درون آن قرار دارد.

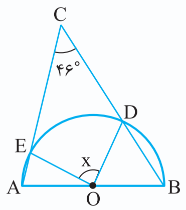
۲- در شکل مقابل، O مرکز دایره است. مقدار x کدام است؟



۱) ۶۴° ۲) ۶۶°

۳) ۶۰° ۴) ۵۸°

۳- در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره است. مقدار x کدام است؟



۱) ۸۴°

۲) ۹۲°

۳) ۸۶°

۴) ۸۸°

۴- نقاط $A_{۱}, A_{۲}, A_{۳}, \dots, A_{۱۰}$، دایره‌ای به مرکز O و شعاع R را به ده قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. اگر $A_{۱}A_{۴} = b$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ ضلع ده‌ضلعی منتظم $A_{۱}A_{۲}\dots A_{۱۰}$ کدام است؟

۱) $b - R$ ۲) $b^{۲} - R^{۲}$ ۳) $R + \frac{b}{۲}$ ۴) $b - ۲R$

۵- در مثلث متساوی‌الساقین ABC، دایره‌ای مرکزش روی قاعدهٔ مثلث، در رأس A بر ضلع AC مماس و از رأس B می‌گذرد. ساق مثلث چند برابر شعاع دایره است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}+۱$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۶- مربع ABCD به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایرهٔ گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور۹۵)

۱) ۲/۲۵ ۲) ۲/۵ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۳

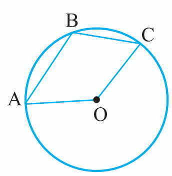
۷- مربع ABCD به ضلع $۲+\sqrt{۲}$ واحد مفروض است. شعاع دایرهٔ گذرا بر رأس D و مماس بر دو ضلع AB و BC کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $۲-\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}-۱$

۸- در نیم‌دایره‌ای به قطر AB، وتر CD چنان قرار دارد که $\widehat{BC} = ۴۷^\circ$ و $AB = ۲CD$. اندازهٔ زاویهٔ AOD چند درجه است؟

۱) ۶۷° ۲) ۵۳° ۳) ۷۳° ۴) ۸۴°

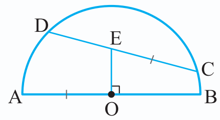
۹- در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره، $\hat{A} = ۵۳^\circ$ و $\hat{C} = ۴۷^\circ$ است. اندازهٔ زاویهٔ AOC کدام است؟



۱) ۱۵۰° ۲) ۱۶۰°

۳) ۱۲۰° ۴) ۱۴۰°

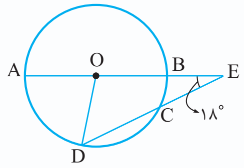
۱۰- در شکل زیر، O مرکز نیم‌دایره و $OA = CE$ است. اگر اندازهٔ کمان BC برابر ۱۵° باشد، آن‌گاه اندازهٔ کمان $\widehat{AD}$ چند درجه است؟



۱) ۳۰° ۲) ۶۰°

۳) ۴۵° ۴) ۵۰°

۱۱- در دایره زیر، اندازهٔ پاره‌خط CE با طول شعاع دایره برابر است. اگر $\hat{E} = ۱۸^\circ$ و O مرکز دایره باشد، اندازهٔ کمان AD چند درجه است؟



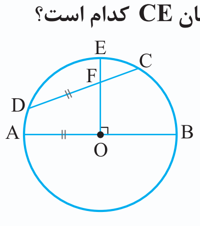
۱) ۴۵°

۲) ۴۸°

۳) ۵۴°

۴) ۷۲°

۱۲- در شکل زیر، شعاع OE بر قطر AB عمود است. اگر اندازهٔ کمان AD برابر ۲۰° و $DF = OA$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ کمان CE کدام است؟



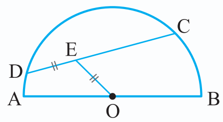
۱) ۳۰°

۲) ۴۵°

۳) ۵۰°

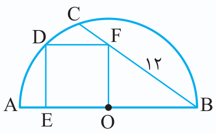
۴) ۵۵°

۱۳- در نیم‌دایره مقابل، $OE = DE$ و قطر AB دو برابر طول پاره‌خط CE است. اندازهٔ کمان CD چند درجه است؟



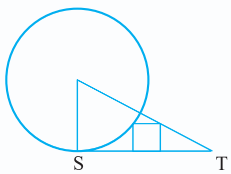
۱) °۱۲۰ ۲) °۱۰۸ ۳) °۱۰۵ ۴) °۹۰

۱۴- مطابق شکل، O مرکز نیم‌دایره و چهارضلعی $OEDF$ مربع است. اگر $BF = ۱۲$ باشد، آن‌گاه ضلع مربع کدام است؟



۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

۱۵- در شکل مقابل، شعاع دایره ۵ و ضلع مربع ۲ است. اندازهٔ مماس TS کدام است؟

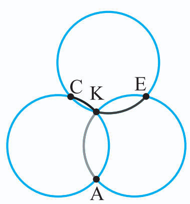


۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

۱۶- دو سر قطر نیم‌دایره‌ای روی دو ضلع قائم یک مثلث قائم‌الزاویه قرار دارد و موازی وتر مثلث می‌باشد. هم‌چنین وتر مثلث، مماس بر نیم‌دایره است. اگر اندازهٔ اضلاع قائم مثلث ۳ و ۴ باشد، طول شعاع نیم‌دایره کدام است؟

۱) $\frac{۶۰}{۴۹}$ ۲) $\frac{۶۰}{۴۸}$ ۳) $\frac{۶۰}{۴۷}$ ۴) $\frac{۶۰}{۴۶}$

۱۷- سه دایره به شعاع‌های مساوی از نقطهٔ K می‌گذرند و دوبه‌دو متقاطع‌اند. حاصل $\widehat{AK}+\widehat{KE}+\widehat{CK}$ کدام است؟



۱) °۹۰
۲) °۱۲۰
۳) °۱۸۰
۴) °۲۷۰

۱۸- در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$، نقطهٔ O در امتداد AC مرکز دایره‌ای است که در نقطهٔ B بر ضلع AB مماس است. امتداد BC این دایره را در D قطع کرده است، مثلث OCD چگونه است؟ *(سراسری ریاضی ۹۴)*

۱) متساوی‌الساقین ۲) قائم‌الزاویه ۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ۴) غیرمشخص

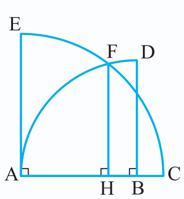
۱۹- در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC\ ,\ \hat{A} = ۴۰^\circ)$، دایره‌ای به مرکز B و شعاع BC، ساق AC را در E و ساق AB را در D قطع می‌کند. اندازهٔ زاویهٔ ADE کدام است؟

۱) °۱۰۰ ۲) °۱۰۵ ۳) °۱۰۸ ۴) °۱۱۰

۲۰- در یک ربع دایره، OA و OB دو شعاع عمود بر هم هستند و نقطهٔ C روی کمان آن، چنان قرار دارد که $BC = ۲$ و $AC = ۶\sqrt{۲}$ است، شعاع ربع دایره کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۵\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۶}$ ۴) ۸

۲۱- در شکل مقابل، دو ربع دایره به شعاع‌های $AB = ۲۵$ و $AC = ۳۰$ رسم شده است. طول پاره‌خط HF کدام است؟



۱) ۲۱
۲) ۲۲
۳) ۲۳
۴) ۲۴

۲۲- در مثلث ABC، $\hat{A} = ۴۵^\circ$، $BC = ۱۲$، نیم‌دایره‌ای به قطر BC ضلع AB را در D و ضلع AC را در E قطع می‌کند، طول پاره‌خط DE کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $۶\sqrt{۲}$ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۸\sqrt{۲}$

۲۳- در یک ربع دایره OA و OB دو شعاع عمود بر هم هستند. نقطهٔ D روی شعاع OA چنان است که $OD = ۱۵$ و $DA = ۵$ و نقطهٔ C روی کمان ربع دایره چنان قرار دارد که $B\hat{C}D = ۹۰^\circ$ است. طول پاره‌خط CD کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

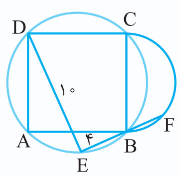
۲۴- در نیم‌دایره‌ای به قطر AB ، وتر CD موازی AB است و C به A نزدیک‌تر است. اگر $CD = ۱$ و $AC = ۶$ باشد، آن‌گاه شعاع نیم‌دایره کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۵- در مثلث ABC ، $\hat{B} = ۲\hat{A}$. نیم‌دایره‌ای به قطر BC ضلع AB را در E و ضلع AC را در D قطع می‌کند به طوری که $CD = ۲$ و $AD = ۶$ است. طول پاره‌خط DE کدام است؟

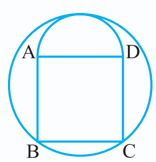
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۶- در شکل زیر، دایره‌ای از رأس‌های مربع ABCD می‌گذرد. نیم‌دایره‌ای به قطر BC را رسم می‌کنیم. نقطهٔ E روی دایره چنان است که $DE = ۱۰$ و $BE = ۴$ ، امتداد BE نیم‌دایره را در نقطهٔ F قطع می‌کند. طول پاره‌خط BF کدام است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

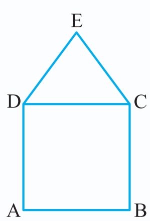
۲۷- در شکل روبه‌رو، ABCD مربعی به ضلع واحد و نیم‌دایره به قطر AD می‌باشد. دایره‌ای از رأس های B و C گذشته و بر نیم‌دایره مماس است. شعاع این دایره کدام است؟



۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۲۸- در شکل مقابل، ABCD مربعی به ضلع یک و مثلث DEC متساوی‌الاضلاع است. شعاع دایره‌ای که از نقاط A، B و E می‌گذرد، کدام است؟

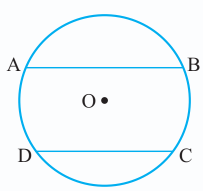


۱) ۱ ۲) $\sqrt{۳}$

۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

وترهای مساوی، قطر عمود بر وتر، وترهای نامساوی

۲۹- مطابق شکل، در دایره‌ای به مرکز O، دو وتر AB و CD موازی‌اند و فاصلهٔ آن‌ها برابر ۵ است، اگر $AB = ۱۶$ و $CD = ۱۴$ ، آن‌گاه مساحت دایره کدام است؟



۱) ۶۵π ۲) ۶۸π

۳) $\frac{۱۱۳\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۲۲۵\pi}{۴}$

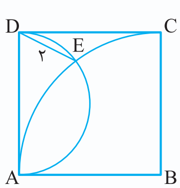
۳۰- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$) دایره‌ای به مرکز A و شعاع AB وتر مثلث را در D و ضلع AC را در E قطع می‌کند. اگر $BD = ۱۸$ و $CD = ۷$ باشد، آن‌گاه طول پاره‌خط CE کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳۱- امتداد یک وتر به طول ۶ در یک نیم‌دایره، امتداد قطر نیم‌دایره را قطع می‌کند و با آن زاویهٔ ۴۵° می‌سازد. اگر طول پاره‌خطی که بین نیم‌دایره و نقطهٔ تقاطع با قطر پدید می‌آید، برابر یک باشد، آن‌گاه طول قطر نیم‌دایره کدام است؟

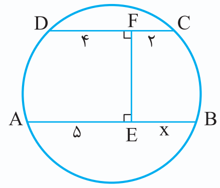
۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۳۲- مطابق شکل، در مربع ABCD ، نیم‌دایره و ربع دایره در نقطهٔ E متقاطع‌اند و $DE = ۲$. مساحت مربع کدام است؟



۱) ۱۸
۲) ۱۵
۳) ۱۶
۴) ۲۰

۳۳- در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟



۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

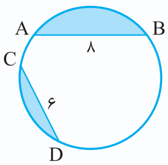
۳۴- دو وتر متقاطع با طول‌های برابر، زاویهٔ ۶۰° با یکدیگر می‌سازند و طول پاره‌خط‌هایی که روی یکدیگر پدید می‌آورند ۲ و ۸ می‌باشد. شعاع دایره کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۷}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۳۰}$

۳۵- شعاع‌های دو دایرهٔ هم‌مرکز ۳ و ۵ است. از نقطهٔ A روی دایرهٔ بزرگ‌تر، دو وتر AE و AF را مماس بر دایرهٔ کوچک‌تر رسم می‌کنیم. اندازهٔ EF کدام است؟

۱) ۸/۱ ۲) ۹/۶ ۳) ۶/۴ ۴) ۷/۲

۳۶- در شکل روبه‌رو، مجموع اندازه‌های کمان‌های AB و CD برابر ۱۸۰° است. اگر $AB = ۸$ و $CD = ۶$ باشد، آن‌گاه مجموع مساحت‌های نواحی رنگی، کدام است؟



۱) $۱۰\pi - ۱۲$ ۲) $\frac{۲۵\pi}{۲} - ۸$

۳) $۱۰\pi - ۱۶$ ۴) $\frac{۲۵\pi}{۲} - ۲۴$

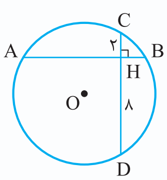
۳۷- در یک دایره، نقطهٔ C روی وتر AB آن را به دو پاره‌خط به طول‌های ۲ و ۱۴ سانتی‌متری تقسیم کرده است. اگر فاصلهٔ این نقطه تا مرکز دایره ۱۰ سانتی‌متر باشد، آن‌گاه مساحت دایره کدام است؟

۱) ۷۲π ۲) ۱۲۸π ۳) ۶۴π ۴) ۱۰۸π

۳۸- فاصلهٔ وسط کمان نظیر وتر به طول ۲۴ در یک دایره از انتهای این وتر برابر ۱۳ است. فاصلهٔ دورترین نقطهٔ دایره از انتهای این وتر کدام است؟

۱) ۲۸/۸ ۲) ۲۱/۲ ۳) ۳۳/۸ ۴) ۳۲/۵

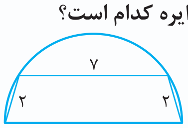
۳۹- در شکل مقابل، O مرکز دایره است و دو وتر AB و CD بر هم عمودند، اگر $CH = ۲$، $DH = ۸$ و شعاع دایره $r = ۳\sqrt{۵}$ باشد، اندازهٔ وتر AB کدام است؟



۱) ۱۱ ۲) ۸

۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۴۰- مطابق شکل، یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین با قاعدهٔ کوچک ۷ و ساق‌های ۲ در یک نیم‌دایره محاط شده است. قطر نیم‌دایره کدام است؟



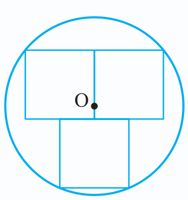
۱) ۱۶ ۲) ۱۲

۳) ۱۰ ۴) ۸

۴۱- ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی با قاعده‌های ۱۲ و ۱۶ در یک دایره به شعاع ۱۰، محاط است. اگر مرکز دایره خارج ذوزنقه باشد. آن‌گاه مساحت ذوزنقه کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۵۶ ۳) ۲۷ ۴) ۵۴

۴۲- در شکل مقابل، O مرکز دایره است و مربع‌ها به ضلع ۱۶ سانتی‌مترند. مساحت دایره چند برابر π است؟



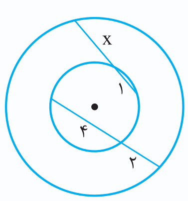
۱) ۴۲۵

۲) ۳۶۱

۳) ۴۴۱

۴) ۴۷۵

۴۳- در شکل مقابل، دو دایره هم‌مرکزند. با توجه به اندازه‌های داده‌شده x کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

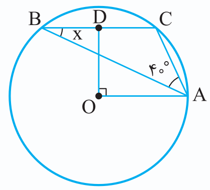
۴۴- دو دایره هم‌مرکزند. وتری به طول $2\sqrt{3}$ از دایرهٔ بزرگ بر دایرهٔ کوچک مماس است و وتری به طول ۶، دایرهٔ کوچک را قطع می‌کند. طول وتر ایجادشده در دایرهٔ کوچک کدام است؟

۱) $2\sqrt{7}$ ۲) $2\sqrt{6}$ ۳) ۵ ۴) ۴

۴۵- دو دایره هم‌مرکزند. اندازهٔ وتری از دایرهٔ بزرگ‌تر که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است ۳۲ می‌باشد. اگر کم‌ترین فاصلهٔ نقاط روی دو دایره ۸ باشد، آن‌گاه شعاع دایرهٔ کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۱۴

۴۶- در شکل مقابل، O مرکز دایره و D وسط وتر BC است. x کدام است؟



۱) ۵۰
۲) ۴۵
۳) ۲۵
۴) ۲۰

۴۷- دایره‌ای به شعاع ۱۰ و وتر AB از آن مفروض‌اند. دورترین نقطهٔ دایره از این وتر با طول وتر برابر است. فاصلهٔ مرکز دایره از این وتر کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۴۸- در مثلث ABC ، $AC > AB$ و O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC و M پای میانهٔ رأس A است. اگر $A\hat{O}M = 90^\circ$ و $\hat{A} = 20^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ $\hat{B}$ چند درجه است؟

۱) 100° ۲) 115° ۳) 125° ۴) 120°

۴۹- در مثلث ABC ، O مرکز دایرهٔ محیطی و D و M به ترتیب پای نیمساز و میانهٔ رأس A می‌باشند. AD را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی را در A' قطع کند. می‌دانیم AM میانهٔ رأس A در مثلث $AA'O$ است، زاویهٔ A چند درجه است؟

۱) 45° ۲) 30° ۳) 60° ۴) 90°

۵۰- نقطهٔ ثابت M در دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۳، به فاصلهٔ $2\sqrt{2}$ از مرکز دایره قرار دارد. وتر دلخواه EF از M می‌گذرد، کم‌ترین محیط مثلث EOF کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۵۱- دو دایره به مرکز A و شعاع‌های ۵ و ۷ مفروض‌اند. با فرض $AB = 5$ ، اگر C نقطه‌ای روی دایرهٔ بزرگ‌تر باشد به طوری که اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{C}B$ ماکسیمم باشد، آن‌گاه مساحت مثلث ABC کدام است؟

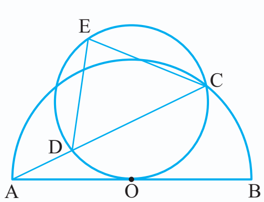
۱) $5\sqrt{6}$ ۲) $\frac{35}{3}$ ۳) $\frac{35}{4}$ ۴) $6\sqrt{5}$

زاویهٔ محاطی و ظلی و زاویهٔ برخورد وترها

۵۲- در مثلث ABC ، $\hat{B} = 70^\circ$ ، $\hat{C} = 30^\circ$ است. اگر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث و D نقطهٔ وسط کمان نظیر ضلع BC باشد، آن‌گاه زاویهٔ AOD چند درجه است؟

۱) 120° ۲) 140° ۳) 150° ۴) 130°

۵۳- در شکل زیر، دایره در نقطهٔ O بر مرکز نیم‌دایره با قطر BA، مماس است. اگر اندازهٔ زاویهٔ A برابر 26° باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ E چند درجه است؟



۱) ۷۴
۲) ۸۴
۳) ۷۸
۴) ۸۰

۵۴- در مثلث ABC ، $\hat{A} = 72^\circ$ ، دایرهٔ محیطی مثلث را رسم می‌کنیم. وسط کمان‌های نظیر اضلاع AB و AC را به ترتیب E و D می‌نامیم. زاویهٔ بین دو وتر DE و AC در این دایره چند درجه است؟

۱) 48° ۲) 50° ۳) 44° ۴) 54°

۵۵- در دایره‌ای به قطر AB ، نقطهٔ M روی دایره قرار دارد، به طوری که $M\hat{A}B = 50^\circ$ ، اندازهٔ زاویهٔ ظلی که رأس آن، نقطهٔ M است، چند درجه است؟

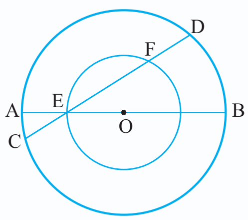
۱) 25° ۲) 45° ۳) 40° ۴) 30°

۵۶- در مثلث متساوی‌الساقین ABC، $(AB = AC)$ خط‌های مماس بر دایرهٔ محیطی مثلث در نقاط A و B، یکدیگر را با زاویهٔ ۵۰° قطع می‌کنند. اندازهٔ زاویهٔ رأس مثلث چند درجه است؟

۱) ۳۵° ۲) ۴۰° ۳) ۴۵° ۴) ۵۰°

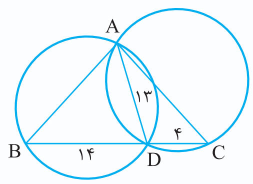
۵۷- زاویهٔ محاطی $B\hat{A}C =$ ۳۸° در یک دایره مفروض است. دو خط مماس بر دایره در نقاط B و C با چه زاویه‌ای متقاطع‌اند؟

۱) ۱۰۸° ۲) ۱۲۰° ۳) ۱۰۵° ۴) ۱۰۴°



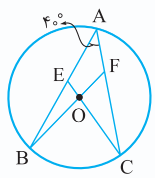
۵۸- در دو دایرهٔ هم‌مرکز، قطر AB دایرهٔ کوچک را در نقطهٔ E قطع کرده است. وتر CD در دایرهٔ بزرگ از E می‌گذرد و دایرهٔ کوچک را در F قطع می‌کند به طوری که $\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{EF} =$ ۱۰۴° . اندازهٔ کمان BD چند درجه است؟

۱) ۸۴
۲) ۸۶
۳) ۸۲
۴) ۷۶



۵۹- در شکل مقابل، دو دایره مساوی‌اند و $CD =$ ۴، $AD =$ ۱۳ و $BD =$ ۱۴ . مساحت مثلث ABC کدام است؟

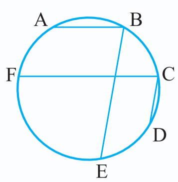
۱) ۹۶
۲) ۷۲
۳) ۱۲۸
۴) ۱۰۸



۶۰- در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره و $\hat{A} =$ ۴۰° است، حاصل $B\hat{E}C + B\hat{F}C$ چند درجه است؟

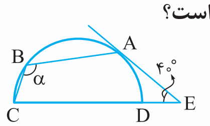
۱) ۸۰° ۲) ۱۲۰
۳) ۱۶۰ ۴) ۲۰۰

۶۱- در شکل زیر، اگر $AB \parallel FC$ ، $CD \parallel BE$ و $\overset{\frown}{AB} =$ ۶۰° ، $\overset{\frown}{CD} =$ ۴۰° و $\overset{\frown}{EF} =$ ۱۱۰° باشد، آن‌گاه زاویهٔ $F\hat{C}D$ چند درجه است؟



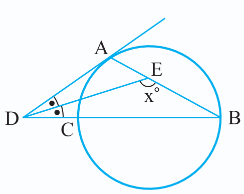
۱) ۹۰°
۲) ۵۵°
۳) ۷۰°
۴) ۸۰°

۶۲- در شکل زیر، E روی امتداد قطر CD قرار دارد. اگر EA بر نیم‌دایره مماس باشد و $\hat{E} =$ ۴۰° ، آن‌گاه مقدار α کدام است؟

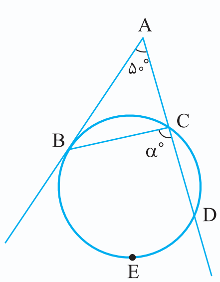


۱) ۱۰۵° ۲) ۱۱۰°
۳) ۱۱۵° ۴) ۱۲۰°

۶۳- در شکل زیر، BC قطر دایره و AD بر دایره مماس است. اگر DE نیمساز زاویهٔ $\hat{D}$ باشد، مقدار x کدام است؟



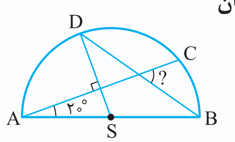
۱) ۱۰۵°
۲) ۱۲۰°
۳) ۱۳۵°
۴) ۱۳۰°



۶۴- در شکل روبه‌رو، $\hat{A} =$ ۵۰° و AB بر دایره مماس است. اگر $\overset{\frown}{BED} =$ ۲$\overset{\frown}{CD}$ ، آن‌گاه α کدام است؟

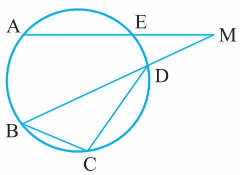
۱) ۱۰۲°
۲) ۸۴°
۳) ۹۲°
۴) ۷۴°

۶۵- AB قطر نیم‌دایره‌ای به مرکز S است. اگر $\hat{A} = ۲۰^\circ$ و $AC \perp DS$، آن‌گاه اندازهٔ زاویه‌ای که با علامت سؤال نشان داده شده، کدام است؟



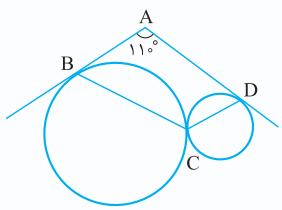
۱) ۴۵°
۲) ۵۵°
۳) ۶۰°
۴) ۷۲°

۶۶- در دایرهٔ روبه‌رو، $\widehat{AE} = (۴x)^\circ$، $\hat{M} = \widehat{DE} = x^\circ$ و $B\hat{C}D = ۱۰۰^\circ$. مقدار x کدام است؟



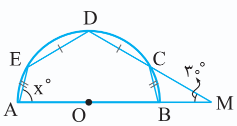
۱) ۱۵
۲) ۲۴
۳) ۳۶
۴) ۲۵

۶۷- مطابق شکل، دو دایره در نقطهٔ C مماس خارج‌اند و AB و AD بر دو دایره مماس‌اند. اگر $\hat{A} = ۱۱۰^\circ$، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ BCD چند درجه است؟



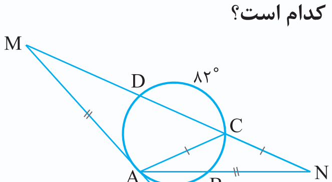
۱) ۱۳۵°
۲) ۱۲۵°
۳) ۱۲۰°
۴) ۱۳۰°

۶۸- در شکل روبه‌رو، AB قطر نیم‌دایره و $AE = BC$، $CD = ED$ و $\hat{M} = ۳۰^\circ$ است. مقدار x کدام است؟



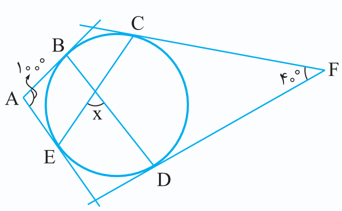
۱) ۶۰°
۲) ۷۵°
۳) ۸۰°
۴) ۶۵°

۶۹- در شکل زیر، $\widehat{CD} = ۸۲^\circ$، $AC = CN$، $AM = AN$ و MA بر دایره مماس است. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{M}$ کدام است؟



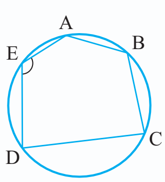
۱) $۳۳/۶^\circ$
۲) $۲۵/۶^\circ$
۳) $۳۲/۱^\circ$
۴) $۲۷/۸^\circ$

۷۰- در شکل زیر، از نقاط A و F بر دایره مماس رسم شده است. اگر $\hat{A} = ۱۰۰^\circ$ و $\hat{F} = ۴۰^\circ$ آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ برخورد دو وتر BD و CE کدام است؟



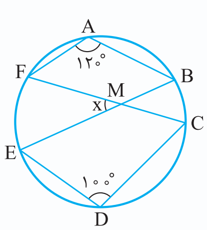
۱) ۷۰°
۲) ۶۰°
۳) ۸۰°
۴) ۵۰°

۷۱- در شکل مقابل، $\frac{AB}{۱} = \frac{BC}{\sqrt{۲}} = \frac{CD}{\sqrt{۳}} = R$ (R شعاع دایره است.)، اندازهٔ زاویهٔ E چند درجه است؟



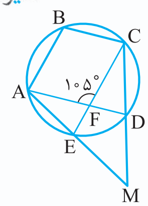
۱) ۱۲۰°
۲) ۱۳۵°
۳) ۱۱۰°
۴) ۱۵۰°

۷۲- در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟



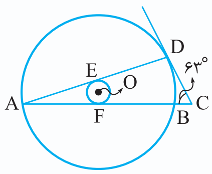
۱) ۳۰°
۲) ۴۵°
۳) ۳۵°
۴) ۴۰°

۷۳- در شکل مقابل، $ABCF$ متوازی‌الاضلاع است. اندازهٔ زاویهٔ M چند درجه است؟



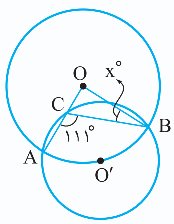
۱) ۳۰
۲) ۴۰
۳) ۴۵
۴) ۳۵

۷۴- در شکل مقابل، دو دایره هم‌مرکز و اضلاع زاویهٔ A بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس‌اند و مماس بر دایره در نقطهٔ D، یک ضلع زاویهٔ A را با زاویهٔ ۶۳° قطع می‌کند. اندازهٔ زاویهٔ A کدام است؟



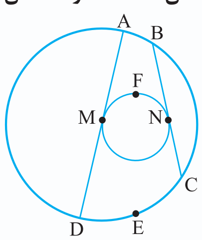
۱) ۱۲°
۲) ۱۰°
۳) ۱۵°
۴) ۱۸°

۷۵- در شکل زیر، O مرکز دایرهٔ بزرگ است و O' مرکز دایرهٔ کوچک، روی دایرهٔ بزرگ قرار دارد. مقدار x کدام است؟



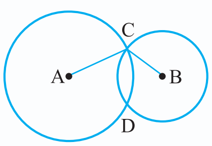
۱) ۲۶°
۲) ۲۷°
۳) ۲۸°
۴) ۲۹°

۷۶- در شکل زیر، وترهای BC و AD از دایرهٔ بزرگ بر دایرهٔ کوچک مماس‌اند. اگر $\widehat{MFN} = ۱۵۴°$ و $\widehat{DEC} = ۷۰°$، آن‌گاه اندازهٔ کمان کوچک $\widehat{AB}$ چند درجه است؟



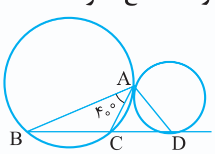
۱) ۱۵°
۲) ۱۶°
۳) ۱۷°
۴) ۱۸°

۷۷- در شکل زیر، دو دایره به مراکز A و B در نقاط C و D متقاطع‌اند. اگر $A\hat{C}B = ۱۵۰°$ باشد، آن‌گاه مجموع اندازه‌های کمان‌های کوچک CD در دو دایره کدام است؟



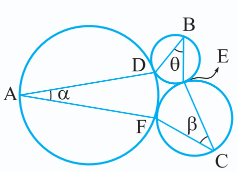
۱) ۴۵°
۲) ۳۰°
۳) ۶۰°
۴) ۷۵°

۷۸- در شکل زیر، دو دایره، مماس خارج‌اند و خط مماس بر دایرهٔ کوچک در نقطهٔ D، دایرهٔ بزرگ را در نقاط B و C قطع کرده است. اگر $B\hat{A}C = ۴۰°$، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ CAD کدام است؟



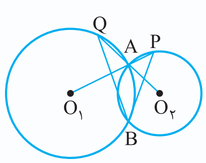
۱) ۶۰°
۲) ۷۰°
۳) ۵۰°
۴) ۸۰°

۷۹- در شکل مقابل، دایره‌ها دوبه‌دو بر هم مماس‌اند. حاصل $\alpha + \beta + \theta$ کدام است؟



۱) ۴۵°
۲) ۹۰°
۳) ۱۲۰°
۴) ۱۸۰°

۸۰- مطابق شکل، دو دایره در نقاط A و B متقاطع‌اند. اگر $P\hat{A}Q = ۱۱۰°$، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ PBQ چند درجه است؟

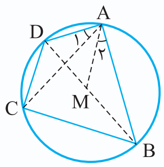


۱) ۳۰°
۲) ۳۵°
۳) ۴۰°
۴) ۴۵°

۸۱- دو دایرهٔ متقاطع در نقطهٔ A مشترک‌اند. خط گذرا بر A دو دایرهٔ مفروض را در دو نقطهٔ B و C قطع می‌کند. مماس‌ها بر هر دایره در B و C در نقطهٔ M متقاطع‌اند. در مثلث MBC با چرخش خط قاطع، کدام جزء ثابت می‌ماند؟ *(سراسری ریاضی خارج کشور ۹۴)*

۱) MA ‏ ۲) محیط ‏ ۳) مساحت ‏ ۴) زاویهٔ $B\hat{M}C$

۸۲- در شکل زیر، $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. حاصل $AD.BC$ برابر کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۹۳)*



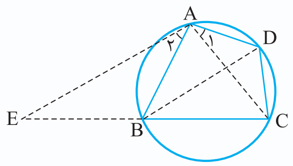
۱) $DM.AC$

۲) $BM.AC$

۳) $AB.CD$

۴) $BD.BM$

۸۳- در شکل مقابل، $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$، حاصل $BD.AC$ کدام است؟



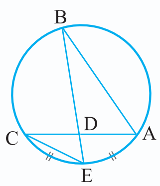
۱) $AD.CE$

۲) $AE.CD$

۳) $AE.BC$

۴) $CD.CE$

۸۴- در شکل روبه‌رو، $AB = ۶$ ، $BE = ۸$ ، $AD = ۲/۴$ و $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{CE}$، اندازهٔ CE کدام است؟



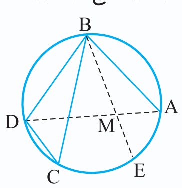
۱) ۳/۶

۲) ۳/۲

۳) ۳/۸

۴) ۳

۸۵- در شکل زیر، $AB = ۶$ ، $BC = ۸$ ، $CD = ۳$ و $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{CD}$. اندازهٔ AM کدام است؟ *(سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۳)*



۱) ۲

۲) ۲/۲۵

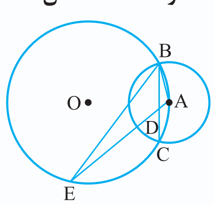
۳) ۲/۵

۴) ۲/۷۵

۸۶- دو دایرهٔ مساوی C و C' به شعاع ۲، مماس خارج‌اند. دایرهٔ C'' با کوچک‌ترین قطر بر هر دو دایرهٔ C و C' مماس داخل می‌باشد. اندازهٔ وتری از دایرهٔ C'' که بر هر دو دایرهٔ C و C' مماس است، کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ‏ ۲) ۴ ‏ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ‏ ۴) ۶

۸۷- دو دایره به مرکزهای A و O در نقاط B و C متقاطع‌اند و مرکز دایرهٔ کوچک روی دایرهٔ بزرگ قرار دارد. اگر $AD = ۴$ و $DE = ۱۲$، آن‌گاه شعاع دایرهٔ کوچک کدام است؟



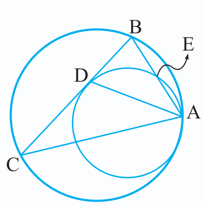
۱) ۹

۲) ۸

۳) ۶

۴) ۱۲

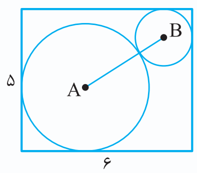
۸۸- در شکل مقابل، دو دایره در نقطهٔ A، مماس‌داخل هستند و وتر BC در نقطهٔ D بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس می‌باشد. اگر $AC = b$ و $AE = m$ باشد، آن‌گاه طول پاره خط AD کدام است؟



۱) $\frac{b+m}{۲}$ ‏ ۲) $\sqrt{bm}$

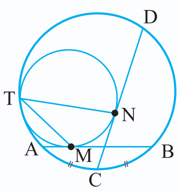
۳) $\frac{b+۲m}{۳}$ ‏ ۴) $۲\sqrt{bm}$

۸۹- در شکل مقابل، ابعاد مستطیل ۵ و ۶ و شعاع دایره به مرکز B برابر یک است و دو دایره مماس خارج‌اند و بر اضلاع مستطیل مماس‌اند. شعاع دایرهٔ بزرگ کدام است؟



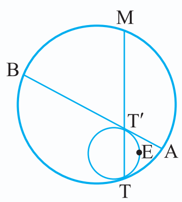
۱) $۱۰-۲\sqrt{۱۵}$
۲) $۲\sqrt{۱۵}-۵$
۳) $۱۲-۲\sqrt{۱۵}$
۴) $۵-\sqrt{۱۵}$

۹۰- چهار نقطهٔ A، B، C و D طوری روی دایرهٔ بزرگ قرار دارند که $\widehat{AB}=\widehat{BD}=۲\widehat{AC}=۶۰^\circ$. دایرهٔ کوچک‌تر در نقطهٔ T بر دایرهٔ بزرگ‌تر و در نقاط M و N بر وترهای AB و CD مماس است. اندازهٔ زاویهٔ MTN کدام است؟



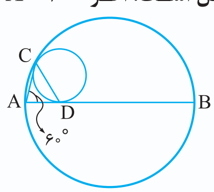
۱) ۳۰°
۲) $۲۲/۵^\circ$
۳) $۲۷/۵^\circ$
۴) ۱۵°

۹۱- دو دایرهٔ C و C' در نقطهٔ T مماس داخل‌اند و وتر AB از دایرهٔ C در نقطهٔ T' بر دایرهٔ C' مماس است. اگر امتداد TT'، دایرهٔ C را در نقطهٔ M قطع کند، با فرض این‌که $\widehat{AT}=۸۰^\circ$ و $\widehat{TET'}=۱۲۰^\circ$ باشد، اندازهٔ کمان $\widehat{AM}$ چند درجه است؟



۱) ۳۰°
۲) ۳۵°
۳) ۴۵°
۴) ۴۰°

۹۲- در شکل زیر، AB قطر دایرهٔ بزرگ و دایرهٔ کوچک بر AB در نقطهٔ D مماس و با دایرهٔ بزرگ در نقطهٔ C مماس‌داخل است. اگر $\hat{A}=۶۰^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ BDC چند درجه است؟



۱) ۱۳۵°
۲) ۱۲۰°
۳) ۱۰۵°
۴) ۱۰۸°

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

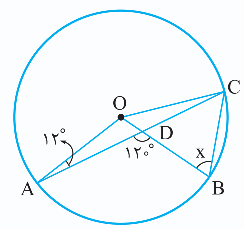
۱- گزینه۲

$$۳x^۲ - ۷Rx + ۴R^۲ = ۰ \Rightarrow (x-R)(۳x-۴R) = ۰$$

$$\Rightarrow x = R \text{ یا } x = \frac{۴R}{۳}$$

بنابراین یکی از نقاط روی دایره و دیگری بیرون آن قرار دارد.

۲- گزینه۲ O را به C وصل می‌کنیم، مثلث OAC متساوی‌الساقین است $(OA = OC)$، پس $O\hat{C}A = ۱۲^\circ$ و در مثلث OCD داریم:



$$۱۲^\circ + ۱۲۰^\circ + B\hat{O}C = ۱۸۰^\circ$$

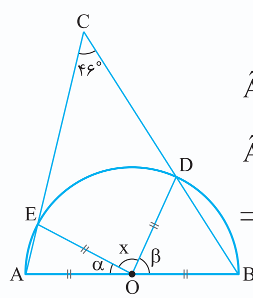
$$\Rightarrow B\hat{O}C = ۴۸^\circ$$

$$OB = OC \Rightarrow O\hat{C}B = \hat{B} = x$$

و نهایتاً در مثلث OBC داریم:

$$x + x + ۴۸^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲x = ۱۳۲^\circ \Rightarrow x = ۶۶^\circ$$

۳- گزینه۴ **روش اول** در مثلث‌های متساوی‌الساقین AOE و DOB داریم:



$$\hat{A} = \frac{۱۸۰^\circ - \alpha}{۲} \quad , \quad \hat{B} = \frac{۱۸۰^\circ - \beta}{۲}$$

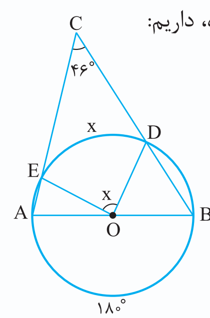
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{۱۸۰^\circ - \alpha}{۲} + \frac{۱۸۰^\circ - \beta}{۲} + ۴۶^\circ = ۱۸۰^\circ$$

$$۳۶۰^\circ - \alpha - \beta + ۹۲^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = ۹۲^\circ$$

$$\alpha + \beta + x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۸۰^\circ - ۹۲^\circ = ۸۸^\circ$$

روش دوم $D\hat{O}E$ زاویهٔ مرکزی است، پس اندازهٔ کمان DE برابر x است، اما بنا به زاویهٔ تقاطع امتداد دو وتر دایره، داریم:

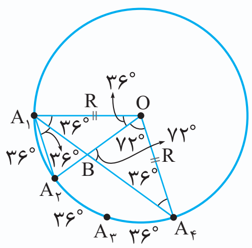


$$\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{DE}}{۲} \Rightarrow ۴۶^\circ = \frac{۱۸۰^\circ - x}{۲}$$

$$x = ۱۸۰^\circ - ۲ \times ۴۶^\circ = ۱۸۰^\circ - ۹۲^\circ = ۸۸^\circ$$

۴- گزینه۱ مثلث $A_۱OA_۴$ متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس ۱۰۸° است، پس $O\hat{A}_۴A_۱ = O\hat{A}_۱A_۴ = ۳۶^\circ$. از طرفی در مثلث متساوی‌الساقین $OA_۱A_۲$ اندازهٔ زاویهٔ رأس ۳۶° است.

پس $O\hat{A}_۱A_۲ = ۷۲^\circ$ و در نتیجه $A_۲\hat{A}_۱A_۴ = ۳۶^\circ$ و اندازهٔ زوایا مطابق شکل می‌شود:

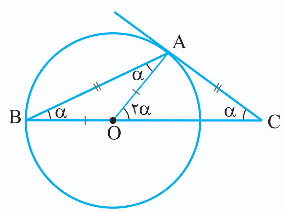


$$A_۱A_۴ = A_۱B + A_۴B$$

$$\Rightarrow b = A_۱A_۲ + OA_۴$$

$$\Rightarrow A_۱A_۲ = b - R$$

۵- گزینه۳ با فرض $\hat{B} = \hat{C} = \alpha$ در مثلث متساوی‌الساقین AOB بنا به زاویهٔ خارجی، داریم $A\hat{O}C = ۲\alpha$. شعاع گذرنده بر نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است پس $O\hat{A}C = ۹۰^\circ$ و داریم:



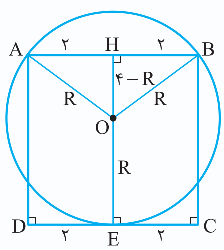
$$\alpha + ۲\alpha = ۹۰^\circ \Rightarrow ۳\alpha = ۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = ۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} OA = \frac{OC}{۲} \\ AC = \frac{\sqrt{۳}}{۲}OC \end{cases}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۲ \times OA = \sqrt{۳}\,OA$$

۶- گزینه۲ مرکز دایره روی عمودمنصف AB که همان عمودمنصف CD است، قرار دارد. در مثلث قائم‌الزاویه AOH داریم:



$$OA^۲ = AH^۲ + OH^۲$$

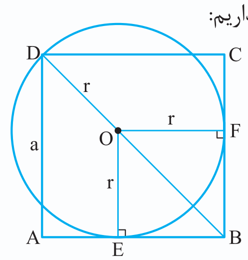
$$\Rightarrow R^۲ = ۲^۲ + (۴-R)^۲$$

$$\Rightarrow R^۲ = ۴ + ۱۶ - ۸R + R^۲$$

$$\Rightarrow ۸R = ۲۰$$

$$\Rightarrow R = \frac{۲۰}{۸} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

۷- گزینه۱ مرکز دایره روی قطر مربع قرار دارد، زیرا O از دو ضلع AB و BC به یک فاصله است. چهارضلعی BEOF مربع است و قطر آن برابر است با $OB = r\sqrt{۲}$ و داریم:



$$BD = OB + OD$$

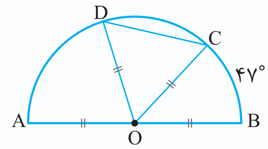
$$\Rightarrow a\sqrt{۲} = r\sqrt{۲} + r$$

$$\Rightarrow r = \frac{a\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+۱}$$

$$\Rightarrow r = a\sqrt{۲}(\sqrt{۲}-۱)$$

$$= a(۲-\sqrt{۲}) = (۲+\sqrt{۲})(۲-\sqrt{۲}) = ۴ - ۲ = ۲$$

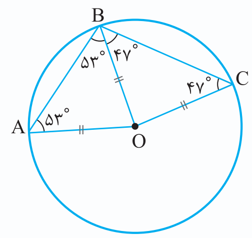
۸- گزینه۲ بنا به فرض $AB = ۲CD$ در نتیجه $OD = OC = CD$، یعنی مثلث OCD متساوی‌الاضلاع است. پس $\overset{\frown}{CD} = ۶۰^\circ$ و داریم:



$$\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{BC} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ - ۴۷^\circ = ۷۳^\circ$$

$$A\hat{O}D = \overset{\frown}{AD} = ۷۳^\circ$$

۹- گزینه۲ شعاع OB را رسم می‌کنیم، در چهارضلعی $ABCO$ داریم:

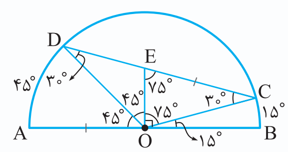


$$A\hat{O}C + ۵۳^\circ + ۵۳^\circ + ۴۷^\circ + ۴۷^\circ = ۳۶۰^\circ$$

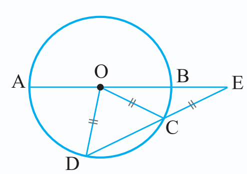
$$\Rightarrow A\hat{O}C = ۱۶۰^\circ$$

۱۰- گزینه۳ زاویهٔ مرکزی BOC برابر ۱۵° است، پس $C\hat{O}E = ۷۵^\circ$. چون مثلث OCE متساوی‌الساقین است دو زاویهٔ دیگر آن ۷۵° و ۳۰° می‌شود، به دلیل متساوی‌الساقین بودن مثلث COD، داریم: $\hat{D} = ۳۰^\circ$ و $D\hat{O}E = ۷۵^\circ - ۳۰^\circ = ۴۵^\circ$

نهایتاً $\overset{\frown}{AD} = A\hat{O}D = ۹۰^\circ - ۴۵^\circ = ۴۵^\circ$.



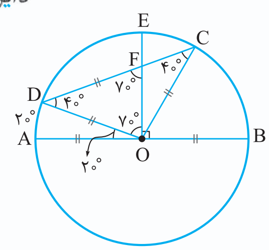
۱۱- گزینه۳ بنا به فرض، CE با شعاع دایره برابر است، شعاع OC را رسم می‌کنیم، مثلث OCE متساوی‌الساقین است پس $E\hat{O}C = \hat{E} = ۱۸^\circ$ و بنا به زاویهٔ خارجی داریم: $O\hat{C}D = ۳۶^\circ$.



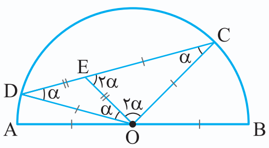
اما مثلث OCD متساوی‌الساقین است پس $\hat{D} = ۳۶^\circ$ و نهایتاً به کمک زاویهٔ خارجی در مثلث DOE داریم:

$$A\hat{O}D = \hat{D} + O\hat{E}D = ۳۶^\circ + ۱۸^\circ = ۵۴^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = ۵۴^\circ$$

۱۲- گزینه۱ زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}D$ برابر ۲۰° است پس $D\hat{O}E = ۷۰^\circ$ و در مثلث متساوی‌الساقین ODF دو زاویهٔ دیگر ۷۰° و ۴۰° است. مثلث ODC متساوی‌الساقین است پس $\hat{C} = ۴۰^\circ$ و بنا به زاویهٔ خارجی در مثلث OFC نتیجه می‌شود $C\hat{O}E = ۳۰^\circ$ و در نتیجه $\overset{\frown}{CE} = ۳۰^\circ$.



۱۳- گزینه۲ بنا به فرض $OE = DE$ و $AB = ۲CE$ است پس $CE = OC = OD$. اگر $\hat{D} = \alpha$، آن‌گاه زوایا برحسب α مطابق شکل زیر می‌شود. در نتیجه:

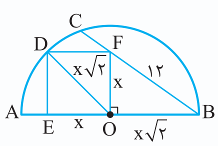


$$\alpha + ۲\alpha + ۲\alpha = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۵\alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۶^\circ$$

$$C\hat{O}D = ۳\alpha = ۳ \times ۳۶^\circ = ۱۰۸^\circ \xrightarrow[\text{مرکزی}]{\text{زاویهٔ}} \overset{\frown}{CD} = ۱۰۸^\circ$$

۱۴- گزینه۴ قطر مربع همان شعاع دایره است، اگر ضلع مربع را x فرض کنیم، داریم: $OD = OB = x\sqrt{۲}$ و در نتیجه:

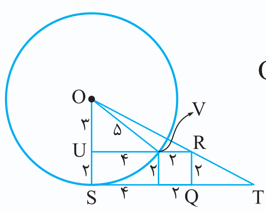


$$۱۲^۲ = x^۲ + (x\sqrt{۲})^۲$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ = ۱۲^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۴۸ \Rightarrow x = ۴\sqrt{۳}$$

۱۵- گزینه۳ مطابق شکل $OU = OS - US = ۵ - ۲ = ۳$ و در مثلث قائم‌الزاویه OUV نتیجه می‌شود $UV = ۴$ و به کمک قضیهٔ تالس یا تشابه داریم:

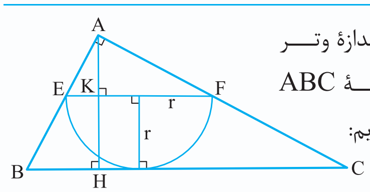


$$\overset{\Delta}{OUR} \sim \overset{\Delta}{OST} \Rightarrow \frac{OU}{OS} = \frac{UR}{TS}$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۴+۲}{TS}$$

$$\Rightarrow TS = \frac{۳۰}{۳} = ۱۰$$

۱۶- گزینه۱ اندازهٔ وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC برابر $BC = ۵$ است و داریم:



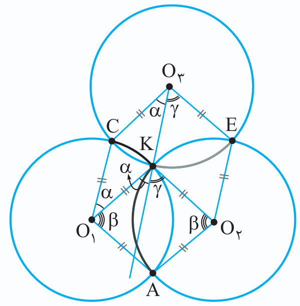
$$S_{(ABC)} = \frac{۱}{۲}AH \times BC = \frac{۱}{۲}AB \times AC \Rightarrow AH = \frac{۳ \times ۴}{۵} = \frac{۱۲}{۵}$$

$$\overset{\Delta}{AEF} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{AK}{AH} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{AH - KH}{AH} = \frac{EF}{BC}$$

$$\frac{\frac{۱۲}{۵} - r}{\frac{۱۲}{۵}} = \frac{۲r}{۵} \Rightarrow \frac{۱۲ - ۵r}{۱۲} = \frac{۲r}{۵}$$

$$\Rightarrow ۶۰ - ۲۵r = ۲۴r \Rightarrow r = \frac{۶۰}{۴۹}$$

-۱۷ گزینه۳ مطابق شکل چهارضلعی‌های O_1KO_3C، O_2KO_3E و O_1KO_2A همگی لوزی هستند، در نتیجه:



$$O_1\hat{K}O_2=\alpha+\gamma$$

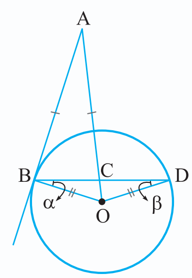
$$O_1\hat{K}O_2+K\hat{O}_2A=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha+\gamma+\beta=۱۸۰^\circ$$

و با توجه به این‌که α و β و γ زوایای مرکزی‌اند، نتیجه می‌شود:

$$\overset{\frown}{CK}+\overset{\frown}{KE}+\overset{\frown}{AK}=۱۸۰^\circ$$

-۱۸ گزینه۲ در مثلث متساوی‌الساقین OBD داریم $\alpha=\beta$. AB بر دایره مماس است، پس زاویهٔ ABO قائمه است که نتیجه می‌دهد $A\hat{B}C=۹۰^\circ-\alpha$ اما مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس می‌توان نوشت:

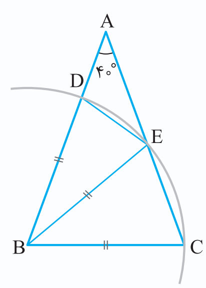


$$A\hat{C}B=A\hat{B}C=۹۰^\circ-\alpha \Rightarrow O\hat{C}D=۹۰^\circ-\alpha$$

$$\overset{\Delta}{OCD}: O\hat{C}D+O\hat{D}C+C\hat{O}D=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۹۰^\circ-\alpha+\underbrace{\beta}_{\alpha}+C\hat{O}D=۱۸۰^\circ \Rightarrow C\hat{O}D=۹۰^\circ$$

-۱۹ گزینه۲ مثلث ABC متساوی‌الساقین است $(AB=AC)$. داریم:



$$\hat{C}=\frac{۱۸۰^\circ-۴۰^\circ}{۲}=۷۰^\circ$$

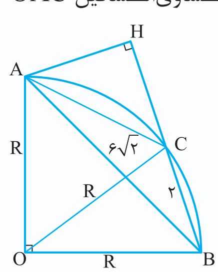
$$BC=BE \Rightarrow B\hat{E}C=\hat{C}=۷۰^\circ$$

زاویهٔ خارجی $B\hat{E}C=E\hat{B}A+\hat{A}\Rightarrow E\hat{B}A=۷۰^\circ-۴۰^\circ=۳۰^\circ$

$$BE=BD \Rightarrow B\hat{D}E=\frac{۱۸۰^\circ-۳۰^\circ}{۲}=۷۵^\circ$$

$$A\hat{D}E=۱۸۰^\circ-B\hat{D}E=۱۸۰^\circ-۷۵^\circ=۱۰۵^\circ$$

-۲۰ گزینه۲ در مثلث‌های متساوی‌الساقین OAC و OBC داریم:



$$A\hat{C}B=O\hat{C}A+O\hat{C}B$$

$$=\frac{۱۸۰^\circ-A\hat{O}C}{۲}+\frac{۱۸۰^\circ-B\hat{O}C}{۲}$$

$$=\frac{۳۶۰^\circ-۹۰^\circ}{۲}=۱۳۵^\circ$$

$$\Rightarrow A\hat{C}H=۴۵^\circ \Rightarrow C\hat{A}H=۴۵^\circ \Rightarrow AH=CH$$

$$AH^۲+CH^۲=AC^۲ \Rightarrow ۲AH^۲=۲CH^۲=(۶\sqrt{۲})^۲$$

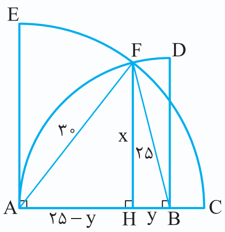
$$\Rightarrow AH=CH=۶$$

$$AB^۲=AH^۲+BH^۲=۶^۲+(۶+۲)^۲=۶^۲+۸^۲=۱۰^۲$$

$$\Rightarrow AB=۱۰$$

$$AB^۲=R^۲+R^۲ \Rightarrow ۱۰^۲=۲R^۲ \Rightarrow R=\frac{۱۰}{\sqrt{۲}}=۵\sqrt{۲}$$

-۲۱ گزینه٤



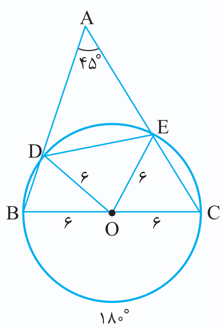
$$\begin{cases} x^۲+(۲۵-y)^۲=۳۰^۲ \\ x^۲+y^۲=۲۵^۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} (۲۵-y)^۲-y^۲=۳۰^۲-۲۵^۲$$

$$\Rightarrow (۲۵-y+y)(۲۵-y-y)=(۳۰-۲۵)(۳۰+۲۵)$$

$$\Rightarrow ۲۵(۲۵-۲y)=۵\times ۵۵ \Rightarrow ۲۵-۲y=۱۱ \Rightarrow y=۷$$

$$x^۲+۷^۲=۲۵^۲ \Rightarrow x^۲=۲۵^۲-۷^۲=۲۴^۲ \Rightarrow x=۲۴$$

-۲۲ گزینه۲



$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{DE}}{۲}$$

$$\Rightarrow ۴۵^\circ=\frac{۱۸۰^\circ-\overset{\frown}{DE}}{۲}$$

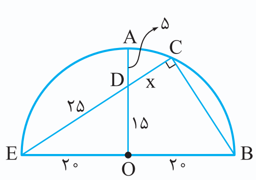
$$\Rightarrow \overset{\frown}{DE}=۱۸۰^\circ-۹۰^\circ=۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow D\hat{O}E=۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow DE^۲=OE^۲+OD^۲$$

$$\Rightarrow DE^۲=۶^۲+۶^۲=۲\times ۶^۲ \Rightarrow DE=۶\sqrt{۲}$$

-۲۳ گزینه۱ ربع دایره را به صورت نیم‌دایره به قطر BE رسم می‌کنیم. چون زاویهٔ C قائمه است، پس امتداد ضلع CD از انتهای قطر BE، یعنی نقطهٔ E می‌گذرد. شعاع ربع دایره برابر $OA=۱۵+۵=۲۰$ است. بنا به قضیهٔ فیثاغورس داریم: $DE=\sqrt{۲۰^۲+۱۵^۲}=۲۵$ و دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ODE و CBE متشابه‌اند:

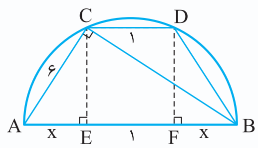


$$\overset{\Delta}{ODE}\sim\overset{\Delta}{CBE} \Rightarrow \frac{DE}{BE}=\frac{OE}{CE}$$

$$\Rightarrow \frac{۲۵}{۴۰}=\frac{۲۰}{CE} \Rightarrow CE=\frac{۸۰۰}{۲۵}=۳۲$$

$$\Rightarrow DE+CD=۳۲ \Rightarrow ۲۵+x=۳۲ \Rightarrow x=۷$$

۲۴- گزینهٔ۲ چون $AB \parallel CD$ است، پس $BD = AC = 6$ و ذوزنقهٔ ABDC متساوی‌الساقین است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC بنا به روابط طولی داریم:



$$AC^2 = AE \times AB$$

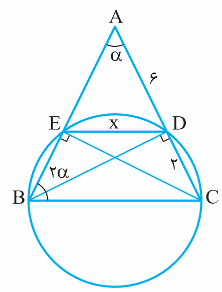
$$\Rightarrow 6^2 = x \times (x+1+x)$$

$$\Rightarrow 2x^2 + x - 36 = 0 \Rightarrow (x-4)(2x+9) = 0$$

$$\xrightarrow{x>0} x = 4 \Rightarrow AB = 2x+1 = 9$$

پس شعاع دایره ۴/۵ است.

۲۵- گزینهٔ۳ می‌دانیم در مثلثی که یک زاویه، دو برابر زاویهٔ دیگر باشد $(\hat{B} = 2\hat{A})$ آن‌گاه ضلع روبه‌رو به زاویهٔ دو برابر واسطهٔ هندسی مجموع دو ضلع دیگر و ضلع روبه‌رو به زاویه نصف است.



پس می‌توان نوشت:

$$AC^2 = (AB+BC) \times BC \Rightarrow 8^2 = (c+a) \times a$$

در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BDC و ADB داریم:

$$BD^2 = BC^2 - CD^2 = AB^2 - AD^2 \Rightarrow a^2 - 2^2 = c^2 - 6^2$$

$$\Rightarrow c^2 - a^2 = 36 - 4 = 32$$

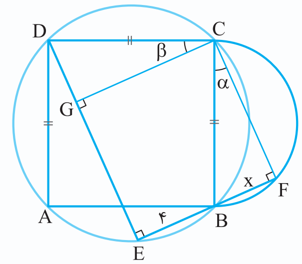
$$\begin{cases} c^2 - a^2 = 32 \\ a \times (c+a) = 64 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{c-a}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2c - 2a = a \Rightarrow 2c = 3a \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{2}{3}$$

اما اگر در مثلث ABC دو ارتفاع BD و CE رسم شود، آن‌گاه مثلث ADE با مثلث ABC متشابه است و داریم:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{6}{c} \Rightarrow x = \frac{6a}{c} = 6 \times \frac{2}{3} = 4$$

۲۶- گزینهٔ۲ زاویهٔ DEB روبه‌رو به قطر BD در دایره است، پس قائمه است.



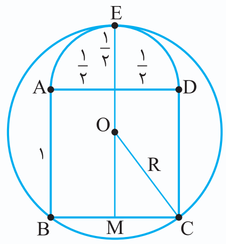
هم‌چنین زاویهٔ F نیز قائمه است. عمود CG را رسم می‌کنیم. دو زاویهٔ α و β برابرند، زیرا زوایای GCF و BCD قائمه هستند.

پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ CDG و CBF به حالت یک ضلع و زاویهٔ حادهٔ مجاور آن همنهشت‌اند. در نتیجه CG = CF و این یعنی، چهارضلعی EFCG مربع است و GD = BF = x و داریم:

$$GE = EF \Rightarrow DE - GD = BE + BF$$

$$\Rightarrow 10 - x = 4 + x \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

۲۷- گزینهٔ۱ مرکز دایره از نقاط B و C به یک فاصله است، پس روی عمودمنصف ضلع BC قرار دارد. ME برابر ضلع مربع به علاوهٔ قطر نیم‌دایره است، یعنی:



$$OM = ME - OE = \frac{3}{2} - R$$

$$OC^2 = OM^2 + MC^2$$

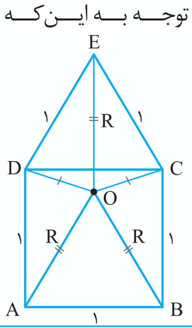
$$\Rightarrow R^2 = (\frac{3}{2} - R)^2 + (\frac{1}{2})^2$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{9}{4} - 3R + R^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow R = \frac{5}{6}$$

۲۸- گزینهٔ۱ مرکز دایره‌ای که از نقاط A، B و E می‌گذرد، روی عمودمنصف AB قرار دارد، پس OC = OD. دو مثلث OEC و OBC به حالت (ض‌ض‌ض) همنهشت‌اند، در نتیجه

$$O\hat{C}E = O\hat{C}B = \frac{90^\circ + 60^\circ}{2} = 75^\circ$$

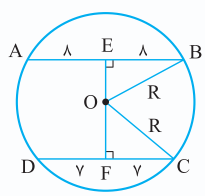
و با توجه به این‌که $D\hat{E}O = O\hat{E}C = 30^\circ$، نتیجه می‌شود:



$$D\hat{O}E = C\hat{O}E = 75^\circ$$

پس مثلث‌های OCE، ODE، ODA و OCB همنهشت و متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس ۳۰° هستند، در نتیجه R = ۱ است.

۲۹- گزینهٔ۱ فرض کنیم OE = x، در این صورت OF = ۵ − x است و داریم:



$$OB^2 = BE^2 + OE^2$$

$$OC^2 = OF^2 + CF^2$$

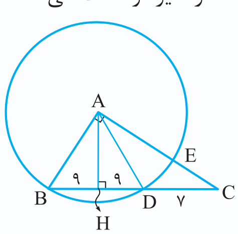
$$\xrightarrow{OB=OC=R} 8^2 + x^2 = (5-x)^2 + 7^2$$

$$\Rightarrow 64 + x^2 = 25 + x^2 - 10x + 49$$

$$10x = 10 \Rightarrow x = 1$$

$$S_{\text{دایره}} = \pi R^2 = \pi(64 + x^2) = \pi(64+1) = 65\pi$$

۳۰- گزینهٔ۲ ارتفاع AH وتر BD در دایره را نصف می‌کند، داریم:



$$AB^2 = BH \times BC$$

$$= 9 \times (18+7) = 9 \times 25$$

$$\Rightarrow AB = 3 \times 5 = 15$$

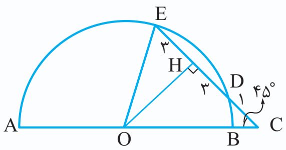
$$AC^2 = CH \times BC$$

$$= (9+7)(18+7) = 16 \times 25 \Rightarrow AC = 4 \times 5 = 20$$

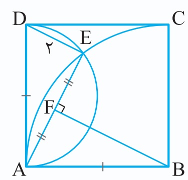
$$CE = AC - AE = AC - AB = 20 - 15 = 5$$

۳۱- گزینه۴ عمود OH وتر DE را نصف می‌کند در نتیجه $CH = CD + DH = ۱ + ۳ = ۴$. مثلث OCH قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، پس $OH = CH = ۴$ و نهایتاً در مثلث قائم‌الزاویه OHE داریم:

$AB = ۱۰ , OE = ۵$



۳۲- گزینه۴ عمود BF بر وتر AE در ربع دایره، آن را نصف می‌کند. زاویهٔ AED قائمه است و دو زاویهٔ $B\hat{A}F$ و $A\hat{D}E$ هر دو متمم $D\hat{A}E$ هستند پس برابرند. بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AFB و DEA به حالت برابری وتر و یک زاویهٔ حاده همنهشت‌اند در نتیجه:

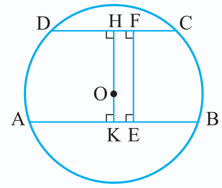


$AF = DE = ۲ \Rightarrow EF = ۲ \Rightarrow AE = ۴$

$AD^۲ = DE^۲ + AE^۲ = ۲^۲ + ۴^۲ = ۲۰$

$\Rightarrow S_{\text{مربع}} = ۲۰$

۳۳- گزینه۲ دو وتر AB و CD موازی‌اند. از مرکز دایره بر آن‌ها عمود رسم می‌کنیم، این وترها نصف می‌شوند.



$AB = AE + BE = ۵ + x$

$\Rightarrow AK = BK = \frac{۵ + x}{۲}$

$CD = DF + CF = ۴ + ۲ = ۶ \Rightarrow CH = DH = \frac{۶}{۲} = ۳$

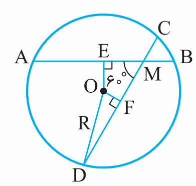
چهارضلعی KEFH مستطیل است، پس:

$KE = HF \Rightarrow BK - BE = CH - CF$

$\Rightarrow \frac{۵ + x}{۲} - x = ۳ - ۲ = ۱ \Rightarrow \frac{۵ - x}{۲} = ۱$

$\Rightarrow ۵ - x = ۲ \Rightarrow x = ۳$

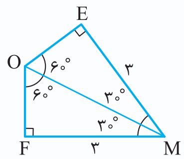
۳۴- گزینه۱ بنا به فرض، زاویهٔ بین دو وتر برابر AB و CD برابر ۶۰°، $MB = MC = ۲$ و $MA = MD = ۸$ است. عمودهای OE و OF را رسم می‌کنیم. دو وتر نصف می‌شوند و داریم:



$MF = MD - DF$

$= ۸ - \frac{۸ + ۲}{۲} = ۸ - ۵ = ۳$

حال O را به M وصل می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OMF و OME همنهشت‌اند و داریم:



$MF = \frac{\sqrt{۳}}{۲} OM \Rightarrow ۳ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times OM$

$\Rightarrow OM = ۲\sqrt{۳}$

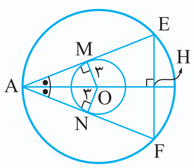
$OF = \frac{OM}{۲} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}$

و نهایتاً در مثلث قائم‌الزاویهٔ ODF، داریم:

$R^۲ = OF^۲ + DF^۲ = (\sqrt{۳})^۲ + ۵^۲ = ۳ + ۲۵ = ۲۸$

$\Rightarrow R = ۲\sqrt{۷}$

۳۵- گزینه۲ طول دو وتر AE و AF برابر است، زیرا فاصلهٔ مرکز دایره از آن‌ها برابر می‌باشد $(OM = ON = ۳)$ و با توجه به $OA = ۵$ از قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود:



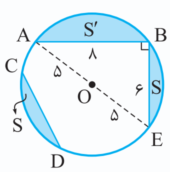
$AM = AN = ۴ \Rightarrow AE = AF = ۸$

$\overset{\Delta}{OAM} \sim \overset{\Delta}{EAH} \Rightarrow \frac{OM}{EH} = \frac{OA}{AE}$

$\Rightarrow \frac{۳}{EH} = \frac{۵}{۸}$

$EH = \frac{۲۴}{۵} = ۴/۸ \Rightarrow EF = ۲EH = ۲ \times ۴/۸ = ۹/۶$

۳۶- گزینه۴ وتر BE را مساوی وتر CD رسم می‌کنیم. مساحت قطعات نظیر وترهای BE و CD برابر است، مقدار آن‌ها را S و مساحت قطعهٔ نظیر وتر AB را S' می‌نامیم، داریم:



$$\left.\begin{aligned} &\widehat{AB} + \widehat{BE} = \widehat{AB} + \widehat{CD} \\ &(\text{فرض})\ \widehat{AB} + \widehat{CD} = ۱۸۰^\circ \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{BE} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{AE} = ۱۸۰^\circ$

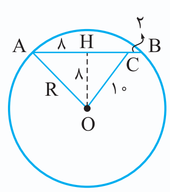
پس AE قطر دایره است و بنا به قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$AE^۲ = ۸^۲ + ۶^۲ = ۱۰^۲ \Rightarrow AE = ۱۰$

$S + S' = (\text{مساحت نیم‌دایره}) - (\text{مساحت مثلث } ABE)$

$\Rightarrow S + S' = \frac{\pi \times ۵^۲}{۲} - \frac{۶ \times ۸}{۲} = \frac{۲۵\pi}{۲} - ۲۴$

۳۷- گزینه۲ عمود OH وتر AB را نصف می‌کند چون $AB = ۱۶$ است، نتیجه می‌شود $AH = BH = ۸$ و $CH = ۸ - ۲ = ۶$.



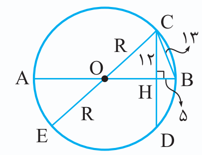
در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCH داریم:

$OH^۲ = OC^۲ - CH^۲ = ۱۰^۲ - ۶^۲ = ۸^۲ \Rightarrow OH = ۸$

$$R^{۲} = ۸^{۲} + ۸^{۲} = ۲\times ۸^{۲} \Rightarrow R = ۸\sqrt{۲}$$

در نتیجه: مساحت دایره $= \pi R^{۲} = ۱۲۸\pi$

۳۸- گزینه۳ بنا به فرض $CD = ۲۴$ پس $CH = DH = ۱۲$ و $BC = ۱۳$ است. دورترین نقطهٔ دایره از انتهای وتر CD با وصل یکی از دو انتها به مرکز دایره به دست می‌آید (CE قطر دایره) داریم:



$$BH^{۲} = BC^{۲} - CH^{۲} = ۱۳^{۲} - ۱۲^{۲} = ۲۵ \Rightarrow BH = ۵$$

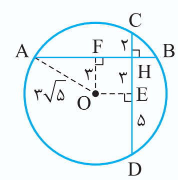
$$OH = OB - BH = R - ۵$$

$$OC^{۲} = OH^{۲} + CH^{۲} \Rightarrow R^{۲} = (R-۵)^{۲} + ۱۲^{۲}$$

$$\Rightarrow R^{۲} = R^{۲} - ۱۰R + ۲۵ + ۱۴۴ \Rightarrow ۱۰R = ۱۶۹$$

$$\Rightarrow R = ۱۶/۹ \Rightarrow CE = ۲R = ۲\times ۱۶/۹ = ۳۳/۸$$

۳۹- گزینه۴ بنا به فرض $CH = ۲$ و $DH = ۸$ است، از مرکز دایره به دو وتر عمود می‌کنیم. چهارضلعی OEHF مستطیل است و داریم:



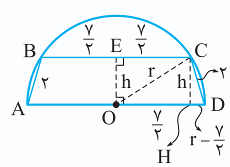
$$HE = DH - DE = ۸ - \frac{۸+۲}{۲} = ۸ - ۵ = ۳ \Rightarrow OF = ۳$$

$$OA^{۲} = AF^{۲} + OF^{۲} \Rightarrow (۳\sqrt{۵})^{۲} = AF^{۲} + ۳^{۲}$$

$$\Rightarrow ۴۵ = AF^{۲} + ۹ \Rightarrow AF^{۲} = ۳۶ \Rightarrow AF = ۶$$

$$\Rightarrow AB = ۲AF = ۱۲$$

۴۰- گزینه۴ در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ OCE و DCH داریم:



$$\begin{cases} OC^{۲} = OE^{۲} + CE^{۲} \\ CD^{۲} = CH^{۲} + DH^{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^{۲} = h^{۲} + (\frac{۷}{۲})^{۲} \\ ۲^{۲} = h^{۲} + (r - \frac{۷}{۲})^{۲} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{-} r^{۲} - ۴ = (\frac{۷}{۲})^{۲} - (r-\frac{۷}{۲})^{۲}$$

$$\Rightarrow r^{۲} - ۴ = (\frac{۷}{۲} + r - \frac{۷}{۲})(\frac{۷}{۲} - r + \frac{۷}{۲})$$

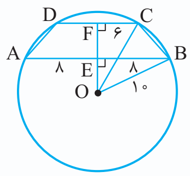
$$\Rightarrow r^{۲} - ۴ = r(۷-r) \Rightarrow r^{۲} - ۴ = ۷r - r^{۲}$$

$$\Rightarrow ۲r^{۲} - ۷r - ۴ = ۰ \Rightarrow r = \frac{۷\pm\sqrt{۴۹+۳۲}}{۴}$$

$$\Rightarrow r = \frac{۷\pm\sqrt{۸۱}}{۴} = \frac{۷\pm ۹}{۴}$$

$$\xrightarrow{r>۰} r = \frac{۷+۹}{۴} = \frac{۱۶}{۴} = ۴ \Rightarrow AD = ۲r = ۸$$

۴۱- گزینه۱ قطر عمود بر AB بر CD نیز عمود است و هر دو وتر را نصف می‌کند. داریم:



$$\overset{\Delta}{OBE}: OE^{۲} + BE^{۲} = OB^{۲}$$

$$\Rightarrow OE^{۲} = ۱۰^{۲} - ۸^{۲} = ۳۶$$

$$\Rightarrow OE = ۶$$

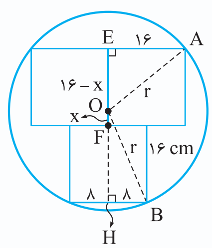
$$\overset{\Delta}{OCF}: OF^{۲} + CF^{۲} = OC^{۲}$$

$$\Rightarrow OF^{۲} = ۱۰^{۲} - ۶^{۲} = ۶۴ \Rightarrow OF = ۸$$

$$EF = OF - OE = ۸ - ۶ = ۲$$

$$S_{(ABCD)} = \frac{۱}{۲} EF\times(AB+CD) = \frac{۱}{۲}\times ۲\times(۱۶+۱۲) = ۲۸$$

۴۲- گزینه۱ فرض کنیم $OF = x$ باشد، در این صورت $OE = ۱۶-x$ و $OH = ۱۶+x$ است. در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ OAE و OBH داریم:



$$\begin{cases} r^{۲} = ۱۶^{۲} + (۱۶-x)^{۲} \\ r^{۲} = ۸^{۲} + (۱۶+x)^{۲} \end{cases}$$

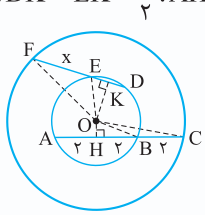
$$\Rightarrow ۱۶^{۲} + (۱۶-x)^{۲} = ۸^{۲} + (۱۶+x)^{۲}$$

$$\Rightarrow ۱۶^{۲} + ۱۶^{۲} - ۳۲x + x^{۲} = ۸^{۲} + ۱۶^{۲} + ۳۲x + x^{۲}$$

$$\Rightarrow ۶۴x = ۱۶^{۲} - ۸^{۲} = ۸\times ۲۴ \Rightarrow ۸x = ۲۴ \Rightarrow x = ۳$$

$$S_{\text{دایره}} = \pi r^{۲} = \pi(۸^{۲} + (۱۶+۳)^{۲}) = \pi(۶۴ + ۳۶۱) = ۴۲۵\pi$$

۴۳- گزینه۳ از مرکز دایره‌ها بر وترهای AB و DE عمود می‌کنیم. دو وتر نصف می‌شود: $AH = BH = ۲$، $DK = EK = \frac{۱}{۲}$.



شعاع دایره‌های کوچک و بزرگ را به ترتیب r و R می‌نامیم، داریم:

$$OH^{۲} = OB^{۲} - BH^{۲} = OC^{۲} - CH^{۲}$$

$$\Rightarrow r^{۲} - ۲^{۲} = R^{۲} - ۴^{۲}$$

$$OK^{۲} = OE^{۲} - EK^{۲} = OF^{۲} - KF^{۲}$$

$$\Rightarrow r^{۲} - (\frac{۱}{۲})^{۲} = R^{۲} - (x + \frac{۱}{۲})^{۲}$$

از تفاضل دو تساوی فوق داریم:

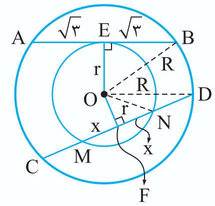
$$۲^{۲} - (\frac{۱}{۲})^{۲} = ۴^{۲} - (x+\frac{۱}{۲})^{۲} \Rightarrow ۴ - \frac{۱}{۴} = ۱۶ - (x+\frac{۱}{۲})^{۲}$$

$$\Rightarrow (x+\frac{۱}{۲})^{۲} = ۱۲ + \frac{۱}{۴} = \frac{۴۹}{۴} \Rightarrow x + \frac{۱}{۲} = \pm\frac{۷}{۲}$$

$$\xrightarrow{x>۰} x = \frac{۷}{۲} - \frac{۱}{۲} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

۴۴- گزینه۲ از مرکز دایره‌ها بر دو وتر AB و CD عمود رسم می‌کنیم، این وترها در دو دایره نصف می‌شوند:

$MF = NF = x\ ,\ CF = DF = ۳\ ،\ AE = BE = \sqrt{۳}$



$OB^۲ = OE^۲ + BE^۲$

$\Rightarrow R^۲ = r^۲ + (\sqrt{۳})^۲ = r^۲ + ۳\ (۱)$

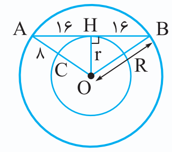
$OF^۲ = OD^۲ - DF^۲ = ON^۲ - NF^۲$

$\Rightarrow R^۲ - ۳^۲ = r^۲ - x^۲ \quad (۲)$

$(۱),(۲) \Rightarrow r^۲ + ۳ - ۳^۲ = r^۲ - x^۲$

$\Rightarrow x^۲ = ۹ - ۳ = ۶ \Rightarrow x = \sqrt{۶} \qquad MN = ۲x = ۲\sqrt{۶}$

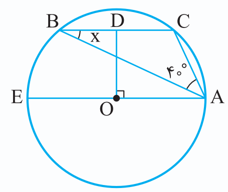
۴۵- گزینه۲



$\begin{cases} R^۲ - r^۲ = ۱۶^۲ \\ R - r = ۸ \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} R + r = \frac{۱۶\times۱۶}{۸} = ۳۲$

$\begin{cases} R + r = ۳۲ \\ R - r = ۸ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۲r = ۲۴ \Rightarrow r = ۱۲$

۴۶- گزینه۳ چون D وسط وتر BC است، پس OD بر BC عمود است در نتیجه وتر BC با شعاع OA موازی است. OA را امتداد می‌دهیم تا قطر AE پدید آید.



$AE \| BC \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BE}$

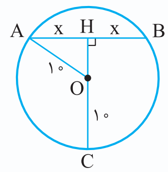
$B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۲\times۴۰^\circ = ۸۰^\circ$

$\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{BE} = ۱۸۰^\circ$

$\Rightarrow ۲\overset{\frown}{AC} + ۸۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = ۵۰^\circ$

زاویهٔ محاطی $\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \Rightarrow x = \frac{۵۰^\circ}{۲} = ۲۵^\circ$

۴۷- گزینه۲ C دورترین نقطهٔ دایره از وتر AB است. بنا به فرض $AB = CH$ می‌باشد، فرض کنیم $AH = x$ باشد. داریم:



$OH = CH - OC$

$= AB - OC = ۲x - ۱۰$

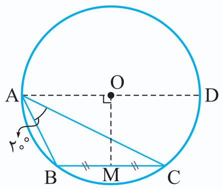
$OA^۲ = AH^۲ + OH^۲$

$\Rightarrow ۱۰^۲ = x^۲ + (۲x - ۱۰)^۲$

$\Rightarrow ۱۰۰ = ۵x^۲ - ۴۰x + ۱۰۰ \Rightarrow ۵x^۲ - ۴۰x = ۰$

$\Rightarrow x = \frac{۴۰}{۵} = ۸ \quad ، \quad OH = ۲\times۸ - ۱۰ = ۶$

۴۸- گزینه۳ چون M وسط BC است، پس OM بر BC عمود است، لذا $OA \| BC$. OA را امتداد می‌دهیم تا قطر AD ایجاد شود:



$AD \| BC \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

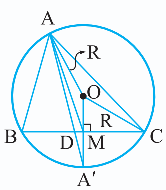
$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۲\times۲۰^\circ = ۴۰^\circ$

$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\overset{\frown}{CD} + ۴۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = ۷۰^\circ$

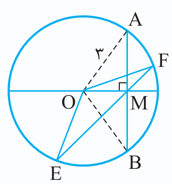
$\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{ADC}}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ + ۷۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ + ۳۵^\circ = ۱۲۵^\circ$

۴۹- گزینه۲ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث است، پس اگر M وسط BC باشد، OM بر آن عمود است و کمان نظیر BC را نصف می‌کند $(\overset{\frown}{A'B} = \overset{\frown}{A'C})$ و نیمساز زاویهٔ A یعنی AD امتدادش از نقطهٔ A' می‌گذرد. اگر در مثلث AOA'، AM میانهٔ OA' باشد در این صورت $OM = MA'$ می‌شود، یعنی شعاع OA' نصف می‌شود.

پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMC، $OM = \frac{OC}{۲}$ است که نتیجه می‌دهد زاویهٔ $O\hat{C}M = ۳۰^\circ$ و $M\hat{O}C = ۶۰^\circ$، بنابراین $\overset{\frown}{A'C} = ۶۰^\circ$ و $\overset{\frown}{BC} = ۱۲۰^\circ$ و نهایتاً: $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = ۶۰^\circ$



۵۰- گزینه۲ محیط مثلث EOF وقتی کم‌ترین است که ضلع EF در آن کوچک‌ترین باشد، کم‌ترین طول EF، وتر AB است که بر قطر گذرنده از M عمود است.



بنا به فرض $OM = ۲\sqrt{۲}$ و شعاع دایره ۳ است، پس می‌توان نوشت:

$OA^۲ = OM^۲ + MA^۲ \Rightarrow ۳^۲ = (۲\sqrt{۲})^۲ + MA^۲$

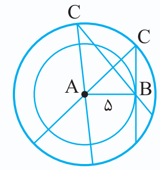
$\Rightarrow MA^۲ = ۹ - ۸ = ۱ \Rightarrow MA = ۱$

کم‌ترین محیط $\overset{\Delta}{EOF} =$ محیط $\overset{\Delta}{AOB} = OA + OB + AB$

$= ۳ + ۳ + ۲\times۱ = ۶ + ۲ = ۸$

۵۱- گزینه۱ یک ضلع زاویهٔ ACB همواره قطری در دایرهٔ بزرگ و ضلع دیگر آن وتری از این دایره است. هر چه‌قدر این وتر از مرکز دایره دورتر باشد، اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{C}B$ بزرگ‌تر است و ماکسیمم

فاصلهٔ این وتر تا مرکز دایره وقتی است که BC بر AB عمود باشد، داریم:



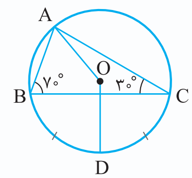
$$BC^2 + AB^2 = AC^2$$

$$\Rightarrow BC^2 + 5^2 = 7^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = 49 - 25 = 24 \Rightarrow BC = 2\sqrt{6}$$

$$S_{(ABC)} = \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{1}{2} \times 5 \times 2\sqrt{6} = 5\sqrt{6}$$

۵۲- گزینه۲



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

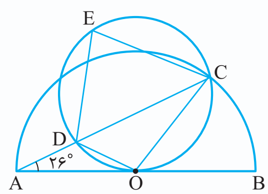
$$\Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - 30^\circ - 70^\circ = 80^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 160^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = 80^\circ$$

$$\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$$

زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}D = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BD} = 60^\circ + 80^\circ = 140^\circ$

۵۳- گزینه۳ O را به C و D وصل می‌کنیم. زاویهٔ A در نیم‌دایره، محاطی است، پس داریم:



$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 2 \times 26^\circ = 52^\circ$$

$$\Rightarrow B\hat{O}C = 52^\circ$$

اما زاویهٔ $B\hat{O}C$ در دایره، زاویهٔ ظلی است، پس می‌توان نوشت:

$$B\hat{O}C = \frac{\overset{\frown}{OC}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{OC} = 52^\circ \times 2 = 104^\circ$$

بنا به زاویهٔ بین امتداد وتر و مماس بر دایره داریم:

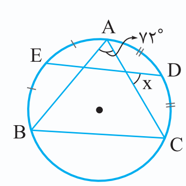
$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{OC} - \overset{\frown}{OD}}{2} \Rightarrow 26^\circ \times 2 = 104^\circ - \overset{\frown}{OD}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{OD} = 104^\circ - 52^\circ = 52^\circ$$

و نهایتاً اندازهٔ زاویهٔ محاطی E برابر است با:

$$\hat{E} = \frac{\overset{\frown}{COD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{OD} + \overset{\frown}{OC}}{2} = \frac{52^\circ + 104^\circ}{2} = 26^\circ + 52^\circ = 78^\circ$$

۵۴- گزینه۴



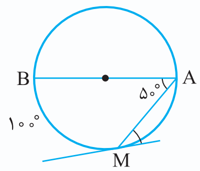
$$x = \frac{\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AE}}{2} = \frac{\frac{\overset{\frown}{AC}}{2} + \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{AB}}{4}$$

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 2 \times 72^\circ = 144^\circ$$

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = 360^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC} = 360^\circ - 144^\circ = 216^\circ$$

بنابراین: $x = \frac{216^\circ}{4} = 54^\circ$

۵۵- گزینه۳

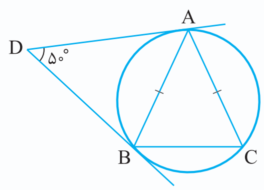


محاطی $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BM}}{2}$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BM} = 2 \times 50^\circ = 100^\circ$$

ظلی $\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AM}}{2} \Rightarrow \hat{M} = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$

۵۶- گزینه۴



$$\overset{\frown}{AB} = 180^\circ - \hat{D}$$

$$= 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

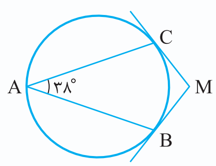
$$AB = AC$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} = 130^\circ$$

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = 360^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 360^\circ - 2 \times 130^\circ = 100^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$$

۵۷- گزینه۴



$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

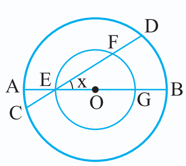
$$\Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 2 \times 38^\circ = 76^\circ$$

$$\hat{M} = 180^\circ - \overset{\frown}{BC} = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$$

۵۸- گزینه۴ بنا به زاویهٔ وترهای متقاطع AB و CD در دایرهٔ بزرگ داریم:

$$x = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{2}$$

اما در دایرهٔ کوچک بنا به زاویهٔ محاطی داریم:



$$x = \frac{\overset{\frown}{GF}}{2} = \frac{180^\circ - \overset{\frown}{EF}}{2}$$

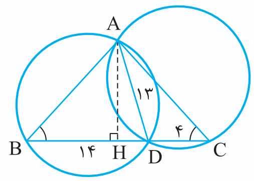
پس از تساوی‌های فوق نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{180^\circ - \overset{\frown}{EF}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = 180^\circ - (\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{EF})$$

اما بنا به فرض $\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{EF} = 104^\circ$ پس نهایتاً داریم:

$$\overset{\frown}{BD} = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ$$

۵۹- گزینه۴ چون دو دایره مساوی‌اند. کمان کوچک $\overset{\frown}{AD}$ در هر دو دایره هم‌اندازه است، پس $\hat{B}=\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}$ یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین است.
با رسم ارتفاع AH داریم:

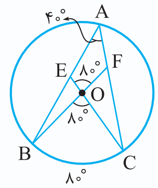


$$BC=۱۸ \Rightarrow BH=CH=۹ \Rightarrow DH=CH-CD=۹-۴=۵$$

$$AH^۲=AD^۲-DH^۲=۱۳^۲-۵^۲=۱۲^۲ \Rightarrow AH=۱۲$$

$$S(ABC)=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}\times ۱۲\times ۱۸=۱۰۸$$

۶۰- گزینه۲ زاویهٔ A محاطی است، پس $\overset{\frown}{BC}=۲\hat{A}=۸۰^\circ$ و در نتیجه $B\hat{O}C=۸۰^\circ$ و $E\hat{O}F=۸۰^\circ$ داریم:



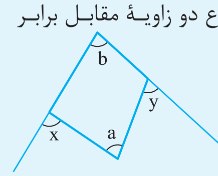
$$B\hat{E}C+B\hat{F}C=\hat{A}+E\hat{O}F$$

$$\Rightarrow B\hat{E}C+B\hat{F}C=۴۰^\circ+۸۰^\circ=۱۲۰^\circ$$

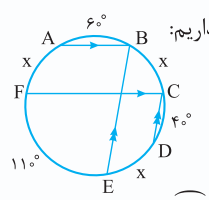
برای اثبات تساوی فوق کافی است O را به A وصل کنیم و از زاویهٔ خارجی در مثلث استفاده کنیم.

یادآوری در هر چهارضلعی محدب، مجموع دو زاویهٔ مقابل برابر مجموع دو زاویهٔ خارجی دیگر است.

$$\Rightarrow a+b=x+y$$



۶۱- گزینه۴ فرض کنیم $AF=x$، بنا به وترهای موازی نتیجه می‌شود $DE=BC=AF=x$.
مفروضات مسئله روی شکل آورده شده است، داریم:



$$x+۶۰^\circ+x+۴۰^\circ+x+۱۱۰^\circ=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۳x=۱۵۰^\circ \Rightarrow x=۵۰^\circ$$

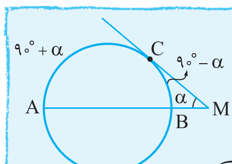
$$\text{محاطی } F\hat{C}D=\frac{\overset{\frown}{DF}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{EF}}{۲}=\frac{x+۱۱۰^\circ}{۲}$$

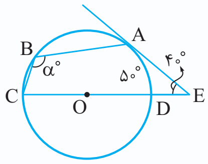
$$=\frac{۵۰^\circ+۱۱۰^\circ}{۲}=\frac{۱۶۰^\circ}{۲}=۸۰^\circ$$

۶۲- گزینه۳

نکتهٔ کلیدی MC بر دایره مماس و AB قطر دایره است. با فرض $\hat{M}=\alpha$ داریم:

$$\overset{\frown}{BC}=۹۰^\circ-\alpha\ ,\ \overset{\frown}{AC}=۹۰^\circ+\alpha$$



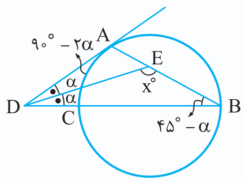


$$\overset{\frown}{AD}=۹۰^\circ-۴۰^\circ=۵۰^\circ$$

$$\text{محاطی } A\hat{B}C=\alpha=\frac{۱۸۰^\circ+\overset{\frown}{AD}}{۲}$$

$$=\frac{۱۸۰^\circ+۵۰^\circ}{۲}=۱۱۵^\circ$$

۶۳- گزینه۳

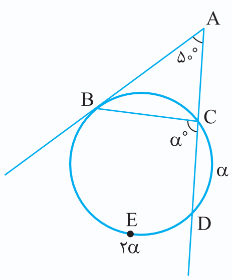


$$\overset{\frown}{AC}=۹۰^\circ-\hat{D}=۹۰^\circ-۲\alpha$$

$$\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}=۴۵^\circ-\alpha$$

$$\overset{\Delta}{BDE}: x+\alpha+۴۵^\circ-\alpha=۱۸۰^\circ \Rightarrow x=۱۳۵^\circ$$

۶۴- گزینه۳ در این پرسش داریم:



$$B\hat{E}D=۲\alpha$$

$$\Rightarrow ۲\overset{\frown}{CD}=۲\alpha \Rightarrow \overset{\frown}{CD}=\alpha$$

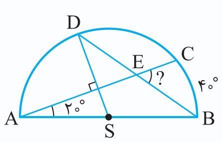
$$\overset{\frown}{BC}=۳۶۰^\circ-۲\alpha-\alpha=۳۶۰^\circ-۳\alpha$$

$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BED}-\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

$$\Rightarrow ۵۰^\circ=\frac{۲\alpha-(۳۶۰^\circ-۳\alpha)}{۲}$$

$$\Rightarrow ۵\alpha=۴۶۰^\circ \Rightarrow \alpha=۹۲^\circ$$

۶۵- گزینه۲ قطر شامل DS بر وتر AC عمود است، پس AC و کمان نظیر آن را نصف می‌کند. $(\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD})$



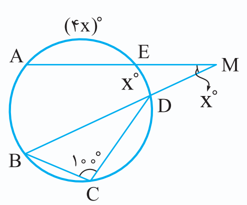
$$\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BC}=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۲\overset{\frown}{AD}+۴۰^\circ=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AD}=۷۰^\circ$$

$$B\hat{E}C=\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AD}}{۲}=\frac{۴۰^\circ+۷۰^\circ}{۲}=۵۵^\circ$$

۶۶- گزینه۴



$$B\hat{C}D=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{DE}}{۲}$$

$$\Rightarrow ۱۰۰^\circ=\frac{\overset{\frown}{AB}+۴x+x}{۲}$$

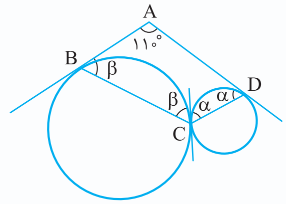
$$\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=۲۰۰^\circ-۵x$$

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{DE}}{۲} \Rightarrow x=\frac{۲۰۰^\circ-۵x-x}{۲} \Rightarrow ۸x=۲۰۰^\circ$$

$$\Rightarrow x=۲۵^\circ$$

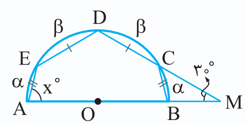
۶۷- گزینه۲ مماس مشترک دو دایره را در نقطهٔ C رسم می‌کنیم. در نقطهٔ C دو زاویهٔ ظلی پدید می‌آید که هر کدام با زوایای

ظلی $\hat{B}$ و $\hat{D}$ برابرند، زیرا کمان‌های روبه‌رو به آن‌ها یکسان است. در چهارضلعی ABCD داریم:



$$\alpha+\beta+\alpha+\beta+110^\circ=360^\circ$$
$$\Rightarrow 2(\alpha+\beta)=250^\circ$$
$$\Rightarrow B\hat{C}D=125^\circ$$
$$\Rightarrow \alpha+\beta=125^\circ$$

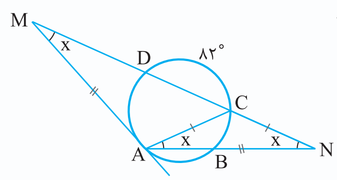
۶۸- گزینهٔ۲ کمان‌های نظیر وترهای مساوی برابرند، پس $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BC}=\alpha$ و $\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{CD}=\beta$. بنا به زاویهٔ محاطی داریم:



$$\hat{A}=\frac{\alpha+2\beta}{2}$$
$$\Rightarrow x=\frac{\alpha+2\beta}{2}$$

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AED}-\overset{\frown}{BC}}{2}\Rightarrow 30^\circ=\frac{\alpha+\beta-\alpha}{2}\Rightarrow \beta=60^\circ$$
$$\alpha+\beta+\beta+\alpha=180^\circ\Rightarrow 2\alpha+120^\circ=180^\circ$$
$$\Rightarrow 2\alpha=60^\circ\Rightarrow \alpha=30^\circ$$
$$x=\frac{2\beta+\alpha}{2}=\frac{120^\circ+30^\circ}{2}=75^\circ$$

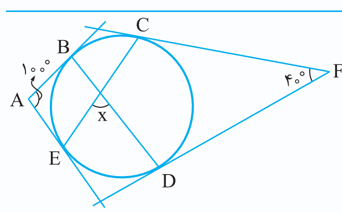
۶۹- گزینهٔ۴ فرض کنیم $\hat{M}=x$. با توجه به $AM=AN$، داریم: $\hat{N}=x$



در مثلث متساوی‌الساقین ACN نتیجه می‌شود $N\hat{A}C=x$. داریم:

$$N\hat{A}C=x\Rightarrow B\hat{A}C=x\Rightarrow \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}=x\Rightarrow \overset{\frown}{BC}=2x$$
$$\hat{N}=\frac{\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BC}}{2}\Rightarrow x=\frac{\overset{\frown}{AD}-2x}{2}\Rightarrow \overset{\frown}{AD}=4x$$
$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{ABC}-\overset{\frown}{AD}}{2}\Rightarrow x=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AD}}{2}$$
$$\Rightarrow x=\frac{\overset{\frown}{AB}+2x-4x}{2}\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=4x$$
$$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{AD}=360^\circ\Rightarrow 4x+2x+82^\circ+4x=360^\circ$$
$$\Rightarrow 10x=360^\circ-82^\circ=278\Rightarrow x=27/8^\circ$$

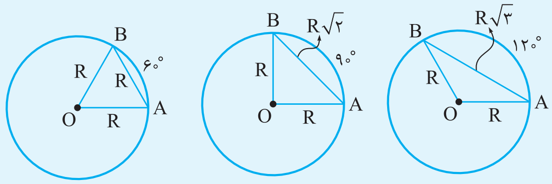
۷۰- گزینهٔ۱



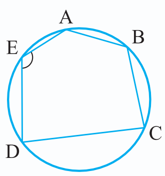
$$\overset{\frown}{BE}=180^\circ-\hat{A}=180^\circ-100^\circ=80^\circ$$
$$\overset{\frown}{CD}=180^\circ-\hat{F}=180^\circ-40^\circ=140^\circ$$
$$\xrightarrow{+}\ \overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{CD}=220^\circ$$
$$\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{BC}=360^\circ-(\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{CD})=360^\circ-220^\circ=140^\circ$$
$$x=\frac{\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{BC}}{2}=\frac{140^\circ}{2}=70^\circ$$

۷۱- گزینهٔ۲

نکتهٔ کلیدی در دایره به شعاع R اگر اندازهٔ وتر AB برابر R یا $R\sqrt{2}$ یا $R\sqrt{3}$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AB}$ به ترتیب برابر 60° یا 90° یا 120° است و برعکس.

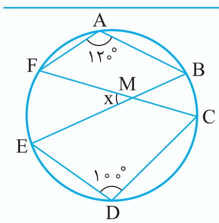


با توجه به نکتهٔ فوق و فرض $AB=R$، $BC=R\sqrt{2}$ و $CD=R\sqrt{3}$، نتیجه می‌شود: $\overset{\frown}{AB}=60^\circ$، $\overset{\frown}{BC}=90^\circ$ و $\overset{\frown}{CD}=120^\circ$ و نهایتاً داریم:



$$\hat{E}=\frac{\overset{\frown}{ABD}}{2}=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}}{2}$$
$$=\frac{60^\circ+90^\circ+120^\circ}{2}=\frac{270^\circ}{2}=135^\circ$$

۷۲- گزینهٔ۴

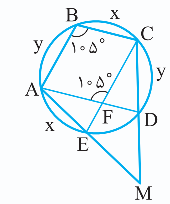


$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BDF}}{2}=\frac{\overset{\frown}{CDE}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{EF}}{2}$$
$$\Rightarrow \overset{\frown}{CDE}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{EF}=2\times120^\circ=240^\circ$$
$$\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{EAC}}{2}=\frac{\overset{\frown}{BAF}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{EF}}{2}$$
$$\Rightarrow \overset{\frown}{BAF}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{EF}=2\times100^\circ=200^\circ$$

از جمع دو تساوی فوق داریم:

$$\overset{\frown}{CDE}+\overset{\frown}{BAF}+2(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{EF})=440^\circ$$
$$\Rightarrow 360^\circ-(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{EF})+2(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{EF})=440^\circ$$
$$\Rightarrow \overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{EF}=440^\circ-360^\circ=80^\circ$$
$$\Rightarrow x=\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{EF}}{2}=\frac{80^\circ}{2}=40^\circ$$

۷۳- گزینه۳



$$AB \parallel CE \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AE} = x$$

$$BC \parallel AD \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD} = y$$

$ABCF$ متوازی‌الاضلاع است. $\Rightarrow \hat{ABC} = \hat{AFC} = 105^\circ$

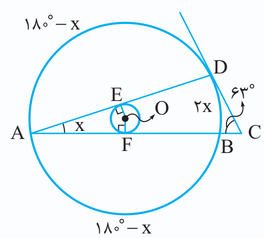
$$\Rightarrow \frac{\widehat{AEC}}{2} = 105^\circ \Rightarrow \widehat{AEC} = 210^\circ$$

$$\widehat{ABC} = 360^\circ - \widehat{AEC} = 360^\circ - 210^\circ = 150^\circ \Rightarrow x + y = 150^\circ$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{ABC} - \widehat{DE}}{2} = \frac{x + y - (360^\circ - x - y - x - y)}{2}$$

$$= \frac{3(x+y) - 360^\circ}{2} = \frac{450^\circ - 360^\circ}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

۷۴- گزینه۴ چون $OE = OF$ (شعاع‌های دایرهٔ کوچک)، پس مرکز دایرهٔ بزرگ از دو وتر AB و AD به یک فاصله است، لذا طول این دو وتر و در نتیجه کمان‌های نظیر آن‌ها برابرند ($AB = AD$ ، $\widehat{AB} = \widehat{AD}$).



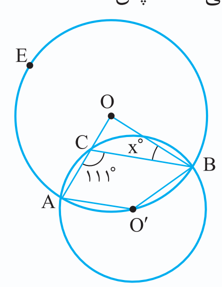
با فرض $\hat{A} = x$ و خاصیت زاویهٔ محاطی، $\widehat{BD} = 2x$ می‌شود، در نتیجه $\widehat{AD} = \widehat{AB} = \frac{360^\circ - 2x}{2} = 180^\circ - x$ و داریم:

$$\hat{C} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BD}}{2} \Rightarrow 63^\circ = \frac{180^\circ - x - 2x}{2}$$

$$\Rightarrow 180^\circ - 3x = 126^\circ \Rightarrow 3x = 54^\circ \Rightarrow x = 18^\circ$$

۷۵- گزینه۲ نقطهٔ O' را به A و B وصل می‌کنیم.

زاویهٔ $\hat{ACB} = 111^\circ$ در دایرهٔ کوچک محاطی است، پس:



$$\hat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} = 2 \times 111^\circ = 222^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ACB} = 360^\circ - 222^\circ = 138^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{زاویهٔ مرکزی}} \hat{AO'B} = 138^\circ$$

از طرفی $\hat{AO'B}$ در دایرهٔ بزرگ محاطی است، پس:

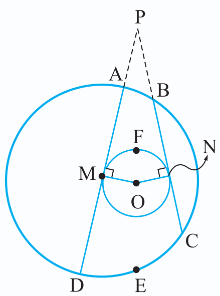
$$\hat{AO'B} = \frac{\widehat{AEB}}{2} \Rightarrow \widehat{AEB} = 2 \times 138^\circ = 276^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AO'B} = 360^\circ - 276^\circ = 84^\circ \xrightarrow{\text{زاویهٔ مرکزی}} \hat{AOB} = 84^\circ$$

و نهایتاً به کمک زاویهٔ خارجی در مثلث BOC داریم:

$$\hat{ACB} = \hat{AOB} + \hat{OBC} \Rightarrow 111^\circ = 84^\circ + x \Rightarrow x = 27^\circ$$

۷۶- گزینه۴ نقطهٔ تلاقی امتداد وترهای BC و AD را P می‌نامیم و داریم:



$$\widehat{MFN} = 154^\circ \Rightarrow \hat{MON} = 154^\circ$$

$$\hat{p} = 180 - \hat{MON}$$

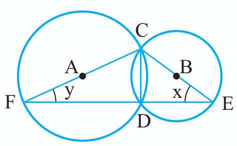
$$= 180^\circ - 154^\circ = 26^\circ$$

$$\hat{P} = \frac{\widehat{CED} - \widehat{AB}}{2}$$

$$\Rightarrow 26^\circ = \frac{70^\circ - \widehat{AB}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} = 70^\circ - 52^\circ = 18^\circ$$

۷۷- گزینه۳ CE قطر دایرهٔ کوچک، پس $\hat{CDE} = 90^\circ$ با استدلال مشابه داریم: $\hat{CDF} = 90^\circ$، پس DE و DF روی یک امتدادند، بنا به فرض $\hat{ACB} = 150^\circ$

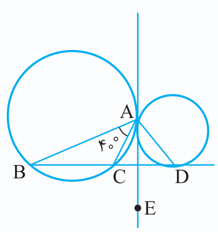


در نتیجه در مثلث CEF اندازهٔ یک زاویهٔ آن $\hat{FCE} = 150^\circ$ است.

با فرض $\hat{E} = x$ و $\hat{F} = y$ اندازهٔ مجموع کمان‌های CD در دو دایره $2x + 2y$ است و داریم: $x + y = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$

$$CD \text{ اندازهٔ مجموع کمان‌های} = 2(x + y) = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$$

۷۸- گزینه۲ در نقطهٔ A مماس مشترک دو دایره را رسم می‌کنیم:



$$(\text{ظلی } \hat{CAE} = \frac{\widehat{AC}}{2} \ , \ \hat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2}) \Rightarrow \hat{CAE} = \hat{B} \qquad (1)$$

$$(\text{ظلی } \hat{DAE} = \frac{\widehat{AD}}{2} \ , \ \text{ظلی } \hat{D} = \frac{\widehat{AD}}{2}) \Rightarrow \hat{DAE} = \hat{D} \qquad (2)$$

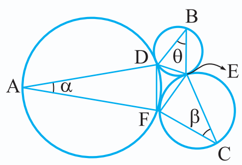
$$\overset{\Delta}{ABD}: \hat{B} + \hat{D} + \hat{BAD} = 180^\circ \xrightarrow{(1),(2)}$$

$$\underbrace{\hat{CAE} + \hat{DAE}}_{\hat{CAD}} + 40^\circ + \hat{CAD} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2\hat{CAD} = 140^\circ \Rightarrow \hat{CAD} = 70^\circ$$

۷۹- **گزینه۲** فرض کنید در نقطهٔ D مماس مشترک دو دایره را رسم کنیم، در این صورت در این نقطه دو زاویهٔ ظلی پدید می‌آید که یکی در دایرهٔ بزرگ‌تر با زاویهٔ محاطی به اندازهٔ α برابر است و دیگری با زاویهٔ محاطی θ در دایرهٔ کوچک‌تر برابر است، یعنی $F\hat{D}E=\alpha+\theta$. با استدلال مشابه داریم: $D\hat{F}E=\alpha+\beta$ و $D\hat{E}F=\theta+\beta$ و داریم:

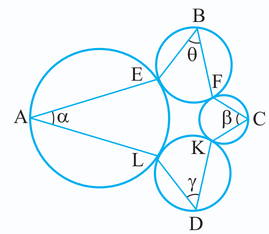
$$\overset{\Delta}{DEF}: F\hat{D}E+D\hat{F}E+D\hat{E}F=۱۸۰^\circ$$



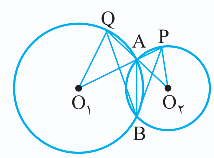
$$\Rightarrow \alpha+\theta+\alpha+\beta+\theta+\beta=۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow \alpha+\beta+\theta=۹۰^\circ$$

نکته اگر چهار دایره مطابق شکل روبه‌رو دوبه‌دو بر هم مماس باشند، آن‌گاه داریم:

$$\alpha+\beta+\theta+\gamma=۱۸۰^\circ$$



۸۰- **گزینه۳** وتر مشترک AB و شعاع‌های $O_۱Q$ و $O_۲P$ را رسم می‌کنیم، فرض کنیم $A\hat{B}Q=x$ و $A\hat{B}P=y$ در این صورت بنا به زاویهٔ محاطی و مرکزی داریم:



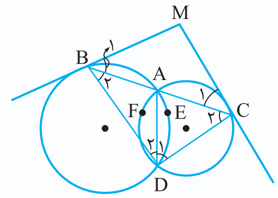
$$A\hat{O}_۱Q=\overset{\frown}{AQ}=۲A\hat{B}Q=۲x$$
$$A\hat{O}_۲P=\overset{\frown}{AP}=۲A\hat{B}P=۲y$$

در مثلث‌های متساوی‌الساقین $AO_۱Q$ و $AO_۲P$ می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{aligned}O_۱\hat{A}Q&=\frac{۱۸۰^\circ-A\hat{O}_۱Q}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ-۲x}{۲}=۹۰^\circ-x\\ O_۲\hat{A}P&=\frac{۱۸۰^\circ-A\hat{O}_۲P}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ-۲y}{۲}=۹۰^\circ-y\end{aligned}\right\}$$

$$\xrightarrow{+} O_۱\hat{A}Q+O_۲\hat{A}P=۱۸۰^\circ-x-y$$
$$O_۱\hat{A}Q+O_۲\hat{A}P+P\hat{A}Q+O_۱\hat{A}O_۲=۳۶۰^\circ$$
$$\xrightarrow{O_۱\hat{A}O_۲=P\hat{A}Q=۱۱۰^\circ} ۱۸۰^\circ-x-y+۱۱۰^\circ+۱۱۰^\circ=۳۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow x+y=۲۲۰^\circ-۱۸۰^\circ=۴۰^\circ \Rightarrow P\hat{B}Q=۴۰^\circ$$

۸۱- **گزینه۴** وتر مشترک AD و پاره‌خط‌های BD و CD را رسم می‌کنیم، داریم:



$$\left.\begin{aligned}&(\hat{B}_۱=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\ \text{ظلی}\ ,\ \hat{D}_۲=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\ \text{محاطی}) \Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{D}_۲\\ &(\hat{C}_۱=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}\ \text{ظلی}\ ,\ \hat{D}_۱=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}\ \text{محاطی}) \Rightarrow \hat{C}_۱=\hat{D}_۱\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \hat{B}_۱+\hat{C}_۱=\hat{D}_۱+\hat{D}_۲=B\hat{D}C \quad (۱)$$

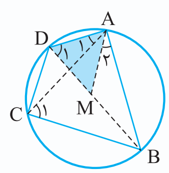
اما در مثلث‌های BMC و BDC داریم:

$$B\hat{M}C+\hat{B}_۱+\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱+\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ-B\hat{M}C \quad (۲)$$
$$B\hat{D}C+\hat{B}_۲+\hat{C}_۲=۱۸۰^\circ \Rightarrow B\hat{D}C=۱۸۰^\circ-\hat{B}_۲-\hat{C}_۲ \quad (۳)$$
$$(۱),(۲),(۳) \Rightarrow ۱۸۰^\circ-B\hat{M}C=۱۸۰^\circ-\hat{B}_۲-\hat{C}_۲$$
$$\Rightarrow B\hat{M}C=\hat{B}_۲+\hat{C}_۲=\frac{\overset{\frown}{AED}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{AFD}}{۲}$$

کمان‌های $\overset{\frown}{AED}$ و $\overset{\frown}{AFD}$ دارای مقدار ثابتی هستند، زیرا دو دایره معلوم‌اند. بنابراین اندازهٔ زاویهٔ $B\hat{M}C$ با تغییر قاطع در نقطهٔ A همواره ثابت می‌ماند.

۸۲- **گزینه۱**

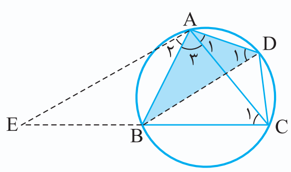
$$\left.\begin{aligned}&(\hat{D}_۱=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\text{محاطی},\hat{C}_۱=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\text{محاطی})\Rightarrow \hat{D}_۱=\hat{C}_۱\\ &(\text{فرض})\hat{A}_۱=\hat{A}_۲\Rightarrow \hat{A}_۱+C\hat{A}M=C\hat{A}M+\hat{A}_۲\\ &\Rightarrow D\hat{A}M=C\hat{A}B\end{aligned}\right\}$$



$$\Rightarrow \overset{\Delta}{ADM}\sim\overset{\Delta}{ACB}$$
$$\Rightarrow \frac{AD}{AC}=\frac{DM}{BC}\Rightarrow AD.BC=AC.DM$$

۸۳- **گزینه۱**

$$\left.\begin{aligned}&(\hat{D}_۱=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\text{محاطی},\hat{C}_۱=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\text{محاطی})\Rightarrow \hat{D}_۱=\hat{C}_۱\\ &(\text{فرض})\hat{A}_۱=\hat{A}_۲ \Rightarrow \hat{A}_۱+\hat{A}_۳=\hat{A}_۳+\hat{A}_۲ \Rightarrow B\hat{A}D=E\hat{A}C\end{aligned}\right\}$$



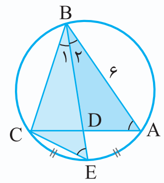
$$\overset{\Delta}{ABD}\sim\overset{\Delta}{AEC}$$
$$\Rightarrow \frac{BD}{CE}=\frac{AD}{AC}$$
$$\Rightarrow BD.AC=AD.CE$$

۸۴- **گزینه۲** وتر BC را رسم می‌کنیم دو زاویهٔ $\hat{B}_۱$ و $\hat{B}_۲$ محاطی و روبه‌رو به کمان‌های مساوی CE و AE هستند، پس $\hat{B}_۱=\hat{B}_۲$ و داریم:

$$(\hat{E}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}\ ,\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}) \Rightarrow \hat{E}=\hat{A}$$

$$(\hat{E}=\hat{A}\ ,\hat{B}_۱=\hat{B}_۲) \Rightarrow \overset{\Delta}{BCE}\sim\overset{\Delta}{BDA} \Rightarrow \frac{CE}{AD}=\frac{BE}{AB}$$

اما بنا به فرض $AB = ۶$، $AD = ۲/۴$ و $BE = ۸$ است، در نتیجه داریم:



$$CE = \frac{AD \times BE}{AB} = \frac{۲/۴ \times ۸}{۶} = ۳/۲$$

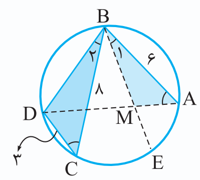
۸۵- گزینه۲

$$(\hat{B}_۱ = \frac{\widehat{AE}}{۲}, \hat{B}_۲ = \frac{\widehat{CD}}{۲}) \xrightarrow{\widehat{AE}=\widehat{CD}} \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲$$

$$(\hat{A} = \frac{\widehat{BD}}{۲}, \hat{C} = \frac{\widehat{BD}}{۲}) \Rightarrow \hat{A} = \hat{C}$$

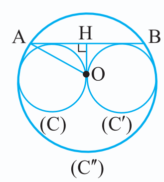
$$\Rightarrow \overset{\Delta}{ABM} \sim \overset{\Delta}{CBD} \Rightarrow \frac{AM}{CD} = \frac{AB}{BC}$$

اما بنا به فرض $AB = ۶$، $BC = ۸$ و $CD = ۳$، در نتیجه داریم:



$$AM = \frac{CD \times AB}{BC} = \frac{۳ \times ۶}{۸} = \frac{۱۸}{۸} = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$$

۸۶- گزینه۱ شعاع دایرهٔ C'' برابر ۴ است $(OA = ۴)$، زیرا شعاع دایره‌های کوچک برابر ۲ می‌باشد، پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH داریم:



$$OA^۲ = OH^۲ + AH^۲$$

$$\Rightarrow AH^۲ = ۴^۲ - ۲^۲ = ۱۶ - ۴ = ۱۲$$

$$\Rightarrow AH = ۲\sqrt{۳}$$

$$AB = ۲AH = ۴\sqrt{۳}$$

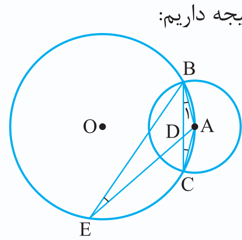
۸۷- گزینه۲ A را به C وصل می‌کنیم. AB و AC شعاع‌های دایره به مرکز A هستند، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است و در نتیجه $\hat{B}_۱ = \hat{C}$ و داریم:

$$\hat{C} = \frac{\widehat{AB}}{۲}, \hat{E} = \frac{\widehat{AB}}{۲} \Rightarrow \hat{C} = \hat{E} \xrightarrow{\hat{B}_۱ = \hat{C}} \hat{B}_۱ = \hat{E}$$

$$(B\hat{A}D = B\hat{A}E, \hat{B}_۱ = \hat{E}) \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{AEB}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^۲ = AE.AD$$

بنا به فرض $AD = ۴$، $DE = ۱۲$، در نتیجه داریم:



$$AB^۲ = (AD + DE) \times AD$$

$$= (۴ + ۱۲) \times ۴ = ۱۶ \times ۴$$

$$\Rightarrow AB = ۴ \times ۲ = ۸$$

۸۸- گزینه۲ اولاً ثابت می‌کنیم در این شکل همواره AD نیمساز زاویهٔ $B\hat{A}C$ است. مماس مشترک دو دایره را در نقطهٔ A رسم می‌کنیم. در مثلث ADC بنا به زاویهٔ خارجی داریم:

$$A\hat{D}B = \hat{C} + \hat{A}_۲$$

دو زاویهٔ $A\hat{D}B$ و $D\hat{A}F$ در دایرهٔ کوچک، ظلی هستند و کمان روبه‌روی آن‌ها $\widehat{AED}$ است، پس این دو زاویه برابرند و می‌توان نوشت:

$$A\hat{D}B = D\hat{A}F = \hat{A}_۱ + B\hat{A}F \qquad (۱)$$

اما در دایرهٔ بزرگ زاویهٔ $\hat{C}$ محاطی و زاویهٔ $B\hat{A}F$ ظلی هستند و هر دو روبه‌رو به کمان $\widehat{AB}$ می‌باشند، پس برابرند در نتیجه می‌توان نوشت:

$$A\hat{D}B = \hat{C} + \hat{A}_۲ \qquad (۲)$$

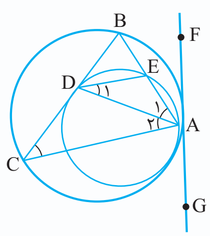
$$(۱),(۲) \Rightarrow \hat{C} + \hat{A}_۲ = \hat{A}_۱ + B\hat{A}F \xrightarrow{\hat{C} = B\hat{A}F}$$

$\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ نیمساز زاویهٔ $B\hat{A}C$ است AD

ثانیاً با فرض $AE = m$ و $AC = b$ می‌خواهیم طول AD را حساب کنیم به همین جهت D را به E وصل می‌کنیم.

در دایرهٔ کوچک، $\hat{D}_۱$ زاویهٔ محاطی و $E\hat{A}F$ زاویهٔ ظلی و روبه‌رو به کمان $\widehat{AE}$ هستند، پس برابرند. $(\hat{D}_۱ = E\hat{A}F)$

اما $E\hat{A}F$ همان زاویهٔ $B\hat{A}F$ است که با زاویهٔ $\hat{C}$ برابر است، لذا $\hat{D}_۱ = \hat{C}$. پس می‌توان نوشت:



$$(\hat{D}_۱ = \hat{C} \text{ و } \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲)$$

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{AED} \sim \overset{\Delta}{ADC}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC}$$

$$\Rightarrow AD^۲ = AE \cdot AC = m \times b \Rightarrow AD = \sqrt{bm}$$

۸۹- گزینه۱ با توجه به شکل داریم:

$$BH + r + ۱ = ۶ \Rightarrow BH = ۵ - r$$

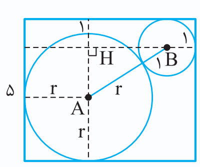
$$AH + r + ۱ = ۵ \Rightarrow AH = ۴ - r$$

$$\overset{\Delta}{ABH}: AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ \Rightarrow (r+۱)^۲ = (۴-r)^۲ + (۵-r)^۲$$

$$\Rightarrow r^۲ + ۲r + ۱ = r^۲ - ۸r + ۱۶ + r^۲ - ۱۰r + ۲۵$$

$$\Rightarrow r^۲ - ۲۰r + ۴۰ = ۰ \Rightarrow r = ۱۰ \pm \sqrt{۶۰} = ۱۰ \pm ۲\sqrt{۱۵}$$

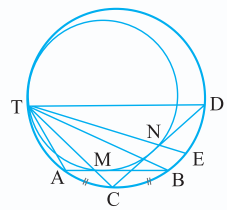
جواب $r = ۱۰ + ۲\sqrt{۱۵}$ قابل‌قبول نیست، زیرا از ۴ بیشتر است که منفی‌بودن AH را موجب می‌شود پس جواب قابل‌قبول $r = ۱۰ - ۲\sqrt{۱۵}$ است.



۹۰- گزینه۲ در پرسش (۹۰) ثابت کردیم TM نیمساز زاویهٔ ATB است، پس امتداد TM قطعاً از وسط کمان AB یعنی نقطهٔ C می‌گذرد. هم‌چنین TN نیمساز زاویه $C\hat{T}D$ است، پس امتداد TNاز وسط کمان CD یعنی نقطهٔ E می‌گذرد و داریم:

$$M\hat{T}N=C\hat{T}E=\frac{\overset{\frown}{CE}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{CD}}{۴}=\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BD}}{۴}$$

اما بنا به فرض $\overset{\frown}{BC}=۳۰^\circ$ و $\overset{\frown}{BD}=۶۰^\circ$ است، در نتیجه:



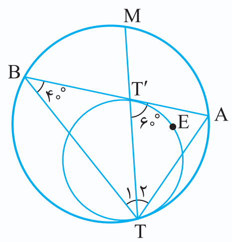
$$M\hat{T}N=\frac{۳۰^\circ+۶۰^\circ}{۴}=\frac{۹۰^\circ}{۴}=۲۲/۵^\circ$$

۹۱- گزینه۴ در پرسش (۹۰) ثابت کردیم TT' نیمساز زاویهٔ $A\hat{T}B$ است، پس امتداد TT' از وسط کمان $\overset{\frown}{AB}$ می‌گذرد، یعنی نقطهٔ M وسط کمان $\overset{\frown}{AB}$ است. اما در دایرهٔ کوچک زاویهٔ $A\hat{T'}T$ ظلی است، پس:

$$A\hat{T'}T=\frac{\overset{\frown}{TET'}}{۲}=\frac{۱۲۰^\circ}{۲}=۶۰^\circ$$

از طرفی در دایرهٔ بزرگ $\hat{B}$ زاویهٔ محاطی است، پس:

$$\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AT}}{۲}=\frac{۸۰^\circ}{۲}=۴۰^\circ$$



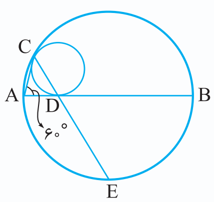
در نتیجه بنا به زاویهٔ خارجی $T_۱=۲۰^\circ$ و $\hat{T}_۲=۲۰^\circ$ می‌شود و نهایتاً داریم:

$$\hat{T}_۲=۲۰^\circ \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{AM}}{۲}=۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AM}=۴۰^\circ$$

۹۲- گزینه۳ امتداد CD از وسط کمان AB می‌گذرد (به پرسش ۹۰ رجوع شود)؛ در نتیجه اندازهٔ زاویهٔ محاطی $\hat{C}$ برابر است با:

$$\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{۹۰^\circ}{۲}=۴۵^\circ$$ و نهایتاً داریم:



$$B\hat{D}C=\hat{A}+\hat{C}$$

$$=۶۰^\circ+۴۵^\circ=۱۰۵^\circ$$