TEST 052 | **اثر تبدیل**

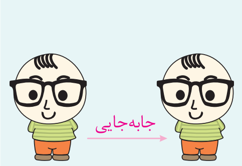
اگر چندضلعی A با تبدیل T به چندضلعی B تصویر شود، آن‌گاه ....

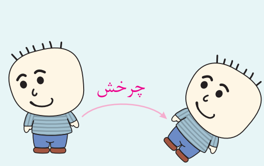
۱) A و B قابل انطباق هستند.
۲) A و B هم‌مساحت هستند.
۳) A و B همنهشت‌اند.
۴) A و B زوایای برابر دارند.

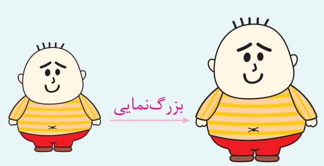
LILIPOOTBOX

تبدیل‌هایی که قرار است بررسی کنیم، می‌توانند سه اثر مهم روی شکل داشته باشند:

شکل را جابه‌جا کنند	شکل را بچرخانند	ابعاد شکل را تغییر دهند



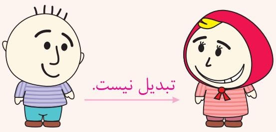




تبدیل‌های مورد بررسی در کتاب درسی ممکن است یک، دو یا هر سه اثر فوق را روی شکل داشته باشند ولی تغییر دیگری روی شکل ایجاد نمی‌کنند.

تبدیل‌های مطرح شده در کتاب درسی ماهیت شکل را تغییر نمی‌دهند. به همین دلیل، در این کتاب نیز فقط همین نوع از تبدیل‌ها مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

در تبدیل‌های مورد بررسی ما، یک دایره به بیضی یا یک مربع به لوزی یا مستطیل و ... تبدیل نمی‌شود و دایره، دایره می‌ماند.



ANALYSE

طبق آنچه گفتیم، تبدیل‌های مورد بررسی ما، امکان بزرگ و کوچک شدن یک شکل را نیز فراهم می‌کنند؛ بنابراین امکان دارد شکلی غیرهمنهشت [در نتیجه غیر هم مساحت] وغیر قابل انطباق بر شکل اولیه ایجاد کنند اما شکل ایجادشده، همواره متشابه با شکل اولیه خواهد بود و زوایای برابری با آن دارد؛ در نتیجه گزینهٔ (۴) صحیح است.

پاسخ گزینهٔ ۴

TEST 053 تبدیل ایزومتری

مربع ABCD با مساحت ۱۲ را به کمک یک تبدیل ایزومتری تصویر کرده‌ایم. محیط شکل حاصل چقدر است؟

۱) $۱۲\sqrt{۲}$ ۲) $۸\sqrt{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۹

LILIPOOTBOX

تبدیلی که طول تمام پاره‌خط‌های صفحه را حفظ می‌کند (تغییر نمی‌دهد) ایزومتری یا طولپا نامیده می‌شود. به عبارت دیگر اگر یک تبدیل ایزومتری روی پاره‌خط AB اثر کند، طول پاره‌خط قبل از تبدیل، با طول این پاره‌خط پس از تبدیل برابر است.

تبدیل ایزومتری اندازه و ابعاد شکل را تغییر نمی‌دهد، به عبارت دیگر در تبدیل ایزومتری شکل و تصویرش همنهشت هستند.

ANALYSE

تصویر مربع به مساحت ۱۲، مربعی به مساحت ۱۲ خواهد بود، بنابراین اگر ضلع مربع تصویر را a فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$a^{۲}=۱۲\Rightarrow a=۲\sqrt{۳}\Rightarrow \text{محیط مربع}=۴a=۴(۲\sqrt{۳})=۸\sqrt{۳}$$

پاسخ گزینهٔ ۲

NOTE

TEST 054 شیب و جهت

سه نقطهٔ A ، B و C در اثر تبدیل T به ترتیب روی نقاط A' ، B' و C' تصویر شده‌اند. اگر $AB \parallel A'B'$ باشد، کدام گزینه الزاماً صحیح است؟

۱) $AC \parallel A'C'$

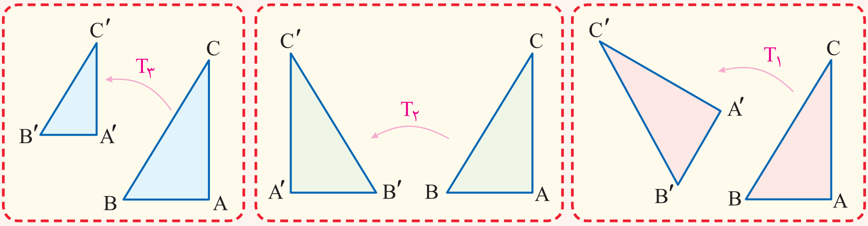
۲) جهت مثلث ABC تحت تبدیل T حفظ می‌شود.

۳) $AB = A'B'$

۴) هیچ‌کدام

LILIPOOTBOX

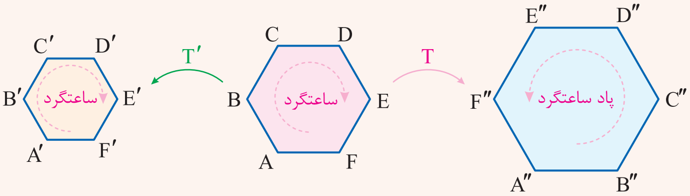
اگر در تبدیل T شیب همهٔ خط‌ها در اثر تبدیل ثابت بماند، تبدیل T را شیب‌پا می‌نامیم، بنابراین در تبدیل شیب‌پا، هر پاره‌خط باید با تصویرش موازی است.



در تبدیل T_1 هیچ کدام از پاره‌خط‌ها با تصویرشان موازی نیستند، پس T_1 شیب‌پا نیست.	در تبدیل T_2 شیب بعضی از خط‌ها ثابت مانده و شیب بعضی از خط‌ها مانند BC عوض شده، پس T_2 شیب‌پا نیست.	در تبدیل T_3 شیب تمام خط‌ها ثابت مانده، پس T_3 شیب‌پا است.

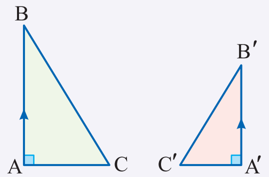
اگر تبدیل T جهت اشکال هندسی را ثابت نگه دارد، تبدیل T را یک تبدیل جهت‌پا می‌نامند. منظور از جهت یک شکل [چندضلعی] ساعتگرد یا پادساعتگرد بودن پیمایش رأس‌های متوالی آن است.

در شکل‌های زیر تبدیل T جهت شکل را عوض کرده است اما تبدیل T' جهت شکل را عوض نکرده است.



ANALYSE

از موازی بودن یک ضلع مثلث ABC با تصویرش نمی‌توان موازی بودن سایر اضلاع را نتیجه گرفت. از طرفی موازی بودن ضلع مثلث و تصویرش ارتباطی با مساوی بودن آن‌ها نیز ندارد. حتی مطابق شکل زیر جهت شکل نیز ارتباطی به اضلاع موازی یا غیرموازی ندارد. پس گزینهٔ (۴) درست است.



پاسخ گزینهٔ ۴

NOTE

درس چهارم
قضیهٔ هرون (محاسبهٔ مساحت مثلث و اندازهٔ ارتفاع‌ها)

TEST 110 رابطهٔ هرون

مساحت مثلثی با اضلاع ۱۱، ۲۵ و ۳۰ چقدر است؟

۱) ۱۱۰
۲) ۱۴۴
۳) ۱۲۰
۴) ۱۳۲

LILIPOOTBOX

اگر a، b و c طول اضلاع مثلث و $p=\frac{a+b+c}{۲}$ نصف محیط مثلث باشد، مساحت مثلث از رابطهٔ زیر که رابطهٔ هرون نامیده می‌شود، به دست می‌آید:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

توجه داشته باشید که در بیشتر مواقع و در مثلث‌هایی که اندازهٔ اضلاع مثلث اعداد رادیکالی نباشد، از رابطهٔ هرون برای محاسبهٔ مساحت مثلث استفاده می‌کنیم.

ANALYSE

ابتدا نصف محیط مثلث را محاسبه می‌کنیم و سپس با استفاده از رابطهٔ هرون، مساحت مثلث را به‌دست می‌آوریم:

$$p=\frac{۱۱+۲۵+۳۰}{۲}=۳۳\Rightarrow S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\Rightarrow S=\sqrt{۳۳(۲۲)(۸)(۳)}$$

$$=\sqrt{۳\times۱۱\times۲\times۱۱\times۲^۳\times۳}=\sqrt{۳^۲\times۱۱^۲\times۲^۴}=۳\times۱۱\times۲^۲=۱۳۲$$

پاسخ گزینهٔ ۴

NOTE

TEST 111 محاسبهٔ مساحت بدون هرون (I)

مساحت مثلثی با اضلاع ۴ ، ۵ و $\sqrt{۲۱}$ چقدر است؟

۱) $۵\sqrt{۳}$ ۲) ۵/۲۵ ۳) $۴\sqrt{۷}$ ۴) ۴/۷۵

LILIPOOTBOX

اگر اندازهٔ حداقل یکی از اضلاع مثلث، عددی رادیکالی (عددی گنگ) باشد، ابتدا قائم‌الزاویه بودن مثلث را با توجه به رابطهٔ فیثاغورس بررسی می‌کنیم:

- اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، آن‌گاه مساحت این مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب اندازهٔ اضلاع زاویهٔ قائمه.
- اگر مثلث قائم‌الزاویه نباشد، ابتدا به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها، مقدار کسینوس زاویهٔ روبه‌رو به ضلعی را که اندازه‌اش عددی رادیکالی است، حساب می‌کنیم. سپس اگر به عنوان مثال، این زاویه، زاویهٔ A باشد، با استفاده از رابطهٔ $\sin^۲ A+\cos^۲ A=۱$ مقدار $\sin A$ را می‌یابیم و در انتها مساحت مثلث را با استفاده از رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آوریم:

$$\boxed{S=\frac{۱}{۲}bc.\sin A}$$

مساحت مثلثی با اضلاع ۷ ، ۹ و $۴\sqrt{۲}$ را بیابید.

این مثلث قائم‌الزاویه است، زیرا $۹^۲=۸۱$ و $(۴\sqrt{۲})^۲+۷^۲=۳۲+۴۹=۸۱$. بنابراین مساحت مثلث برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\times ۷\times ۴\sqrt{۲}=۱۴\sqrt{۲}$$

ANALYSE

ابتدا بررسی می‌کنیم که مثلث قائم‌الزاویه است یا نه:

$$۵^۲=۲۵ \qquad ۴^۲+(\sqrt{۲۱})^۲=۱۶+۲۱=۳۷$$

$۲۵\neq ۳۷$ پس این مثلث قائم‌الزاویه نیست.

در این وضعیت، ابتدا کسینوس زاویهٔ روبه‌رو به ضلع رادیکالی را به دست می‌آوریم تا بتوانیم سینوس آن را حساب کنیم:

$$\cos A=\frac{۵^۲+۴^۲-(\sqrt{۲۱})^۲}{۲\times ۴\times ۵}=\frac{۲۵+۱۶-۲۱}{۴۰}=\frac{۲۰}{۴۰}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \sin A=\sqrt{۱-\cos^۲ A}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

حال می‌توانیم مساحت مثلث را حساب کنیم:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}bc.\sin A=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۵\times \frac{\sqrt{۳}}{۲}=۵\sqrt{۳}$$

پاسخ گزینهٔ ۱

TEST 112 محاسبهٔ مساحت بدون هرون (II)

مساحت مثلثی با اضلاع ۶ ، $\sqrt{۱۰}$ و $\sqrt{۱۰}$ چقدر است؟

۱) ۶

۲) $۳\sqrt{۳}$

۳) ۳

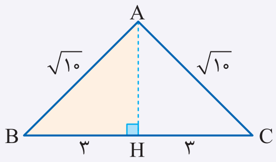
۴) $۲\sqrt{۱۰}$

LILIPOOTBOX

اگر طول دو ضلع از مثلثی برابر باشد (مثلث متساوی‌الساقین باشد) ارتفاع وارد بر قاعده، ضلع مقابل را نصف می‌کند. بنابراین با فیثاغورس می‌توان اندازهٔ ارتفاع را محاسبه و سپس مساحت را حساب کرد. در چنین شرایطی استفاده از رابطهٔ هرون برای محاسبهٔ مساحت مثلث ضرورتی ندارد.

ANALYSE

مثلث داده شده دو ضلع برابر دارد، پس متساوی‌الساقین است و بهتر است ارتفاع آن را رسم کنیم:



$$AH=\sqrt{AB^۲-BH^۲}=\sqrt{۱۰-۹}=۱\Rightarrow S_{ABC}=\frac{۶\times ۱}{۲}=۳$$

پاسخ گزینهٔ ۳

NOTE

TEST 113 هرون در قائم‌الزاویه

طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه برابر ۹ و محیط آن برابر ۲۰ است. مساحت این مثلث چقدر است؟

۱) $۳\sqrt{۱۰}$

۲) ۱۰

۳) $۶\sqrt{۵}$

۴) ۱۸

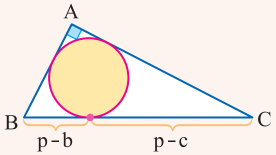
LILIPOOTBOX

در مثلث قائم‌الزاویه رابطهٔ هرون به شکل‌های ساده‌تری نوشته می‌شود.

اگر محیط یک مثلث قائم‌الزاویه و اندازهٔ وترش معلوم باشد، مساحت این مثلث از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید که در آن p نصف محیط و a اندازهٔ وتر است.

$$\boxed{S = p(p-a)}$$

اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، مطابق شکل زیر طول پاره‌خط‌هایی که دایرهٔ محاطی داخلی روی وتر مثلث به وجود می‌آورد معلوم باشد، مساحت این مثلث از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:



$$\boxed{S = (p-b)(p-c)}$$

ANALYSE

در این مثلث قائم‌الزاویه، محیط برابر ۲۰ و اندازهٔ وتر برابر ۹ است. بنابراین:

$$۲p = ۲۰ \Rightarrow p = ۱۰$$

$$\Rightarrow S = p(p-a) = ۱۰ \times (۱۰ - ۹) = ۱۰ \times ۱ = ۱۰$$

پاسخ گزینهٔ ۲

NOTE

TEST 114 | محاسبهٔ اندازهٔ ارتفاع

در مثلثی با اضلاع ۱۱، ۱۳ و ۲۰ طول بلندترین ارتفاع مثلث چقدر است؟

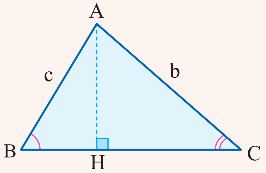
۱) $۱۱\sqrt{۶}$ ۲) ۱۵ ۳) $۱۰\sqrt{۳}$ ۴) ۱۲

LILIPOOT BOX

اگر طول سه ضلع مثلث معلوم باشد و اندازهٔ یکی از ارتفاع‌ها خواسته شده باشد، ابتدا مساحت مثلث را با استفاده از دستور هرون یا روش‌های دیگر حساب می‌کنیم و سپس اندازهٔ هر ارتفاع را از رابطه‌های زیر به دست می‌آوریم:

$$\boxed{h_c=\frac{۲S}{c}} \qquad \boxed{h_b=\frac{۲S}{b}} \qquad \boxed{h_a=\frac{۲S}{a}}$$

در حالتی که اندازهٔ حداقل یک ضلع مثلث عددی رادیکالی بوده و هدف (به عنوان مثال یافتن اندازهٔ ارتفاع نظیر ضلع BC باشد، ابتدا با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها، کسینوس زاویهٔ B یا C را حساب می‌کنیم. سپس سینوس این زاویه را به دست می‌آوریم و در انتها با توجه به شکل، از یکی از دستورهای زیر برای محاسبهٔ اندازهٔ ارتفاع استفاده می‌کنیم:



$$\begin{cases}\sin B=\dfrac{AH}{c}\Rightarrow AH=c\sin B\\[2ex] \sin C=\dfrac{AH}{b}\Rightarrow AH=b\sin C\end{cases}$$

$$\boxed{AH=c\times\sin B=b\times\sin C}$$

ANALYSE

برای محاسبهٔ اندازهٔ ارتفاع، ابتدا مساحت مثلث را به کمک رابطهٔ هرون به دست می‌آوریم:

$$p=\frac{۱۱+۱۳+۲۰}{۲}=۲۲\Rightarrow S=\sqrt{p(p-۱۱)(p-۱۳)(p-۲۰)}=\sqrt{۲۲\times۱۱\times۹\times۲}$$

$$=\sqrt{۲\times۱۱\times۱۱\times۳^۲\times۲}=\sqrt{۲^۲\times۳^۲\times۱۱^۲}=۶۶$$

می‌دانیم که بلندترین ارتفاع مثلث متناظر است با کوچک‌ترین ضلع. بنابراین:

$$h_a=\frac{۲S}{a}\Rightarrow h_a=\frac{۲\times۶۶}{۱۱}=۱۲$$

پاسخ گزینهٔ ۴

115 TEST محاسبهٔ مساحت با معلوم بودن اندازهٔ یک میانه

در مثلث ABC اگر $c=۷$ ، $b=۱۵$ و $m_a=۱۰$ (میانهٔ نظیر BC) باشد، مساحت چقدر است؟

۱) ۲۸

۲) ۳۵

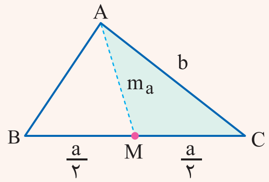
۳) ۴۲

۴) ۵۰

LILIPOOTBOX

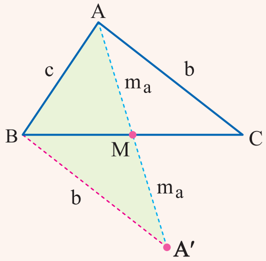
اگر اندازهٔ دو ضلع و یک میانه از مثلث معلوم باشد، در محاسبهٔ مساحت مثلث با یکی از دو حالت زیر مواجه می‌شویم:

طول دو ضلع و اندازهٔ میانهٔ وارد بر یکی از آن‌ها معلوم است. به عنوان مثال اگر طول اضلاع a و b و اندازهٔ میانهٔ m_a داده شده باشد، مطابق شکل طول هر سه ضلع مثلث AMC معلوم و مساحتش قابل محاسبه است. مساحت مثلث AMC نصف مساحت مثلث ABC است. بنابراین:



$$\boxed{S_{ABC}=۲S_{AMC}}$$

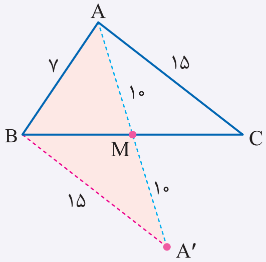
طول دو ضلع و اندازهٔ میانهٔ وارد بر ضلع سوم معلوم است. به عنوان مثال اگر طول اضلاع b و c و اندازهٔ میانهٔ m_a داده شده باشد، مطابق شکل میانه را به اندازهٔ خودش امتداد داده و به یکی از رأس‌ها وصل می‌کنیم. طول هر سه ضلع مثلث ABA' معلوم و مساحتش قابل محاسبه است. مساحت مثلث ABA' با مساحت مثلث ABC برابر است. بنابراین:



$$\boxed{S_{ABC}=S_{ABA'}}$$

ANALYSE

ابتدا میانه را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا به A' برسیم، سپس A' را به B وصل می‌کنیم.
مساحت مثلث ABA' با مساحت مثلث ABC برابر است و می‌توانیم مساحت آن را به کمک رابطهٔ هرون به دست آوریم:



$$p=\frac{۷+۱۵+۲۰}{۲}=۲۱$$

$$S_{ABA'}=\sqrt{p(p-۷)(p-۱۵)(p-۲۰)}=\sqrt{۲۱\times۱۴\times۶\times۱}$$

$$=\sqrt{۳\times۷\times۲\times۷\times۲\times۳}=\sqrt{۲^۲\times۳^۲\times۷^۲}=۲\times۳\times۷=۴۲$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=۴۲$$

پاسخ گزینهٔ ۳

NOTE

TEST 116 محاسبهٔ مساحت با معلوم بودن اندازه‌های دو میانه

مساحت مثلث ABC با معلومات $a=۱۴$ ، $m_a=۹$ و $m_b=۱۲$ چقدر است؟

۱) $۳۶\sqrt{۳}$

۲) $۱۲\sqrt{۱۰}$

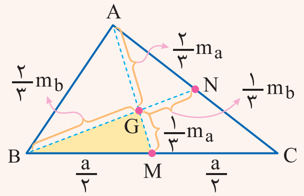
۳) $۱۸\sqrt{۵}$

۴) $۶\sqrt{۱۴}$

LILIPOOTBOX

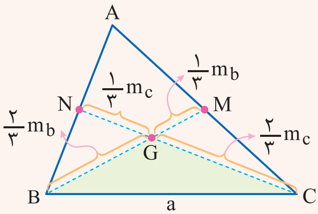
اگر اندازه‌های دو میانه و یک ضلع از مثلثی معلوم باشد، در محاسبهٔ مساحت مثلث، به یکی از دو حالت زیر برمی‌خوریم:

- طول دو میانه و اندازهٔ ضلع نظیر یکی از میانه‌ها معلوم است. به عنوان مثال طول ضلع BC یعنی a و طول دو میانهٔ m_a و m_b معلوم است. مطابق شکل نقطهٔ G (محل همرسی میانه‌ها) هر میانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند. پس طول هر سه ضلع مثلث BGM معلوم و مساحتش قابل محاسبه است. مساحت مثلث BGM، $\frac{۱}{۶}$ مساحت مثلث ABC است. بنابراین:



$$\boxed{S_{ABC}=۶S_{BGM}}$$

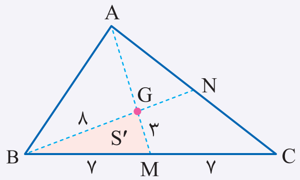
- طول میانه‌های نظیر دو ضلع و اندازهٔ ضلع سوم معلوم است. به عنوان مثال طول ضلع BC یعنی a و طول دو میانهٔ m_b و m_c معلوم است. مطابق شکل نقطهٔ G (محل همرسی میانه‌ها) هر میانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند. یعنی طول هر سه ضلع مثلث BGC معلوم و مساحتش قابل محاسبه است. مساحت مثلث BGC، $\frac{۱}{۳}$ مساحت مثلث ABC است. بنابراین:



$$\boxed{S_{ABC}=۳S_{BGC}}$$

ANALYSE

در این مسئله طول دو میانه و طول ضلع نظیر یکی از آن‌ها معلوم است. در شکل زیر نقطهٔ G محل همرسی میانه‌ها است و داریم:



$$AM=۹\Rightarrow\begin{cases}AG=۶\\GM=۳\end{cases}$$

$$BN=۱۲\Rightarrow\begin{cases}BG=۸\\GN=۴\end{cases}$$

پس طول هر سه ضلع مثلث BGM معلوم است و می‌توانیم با رابطهٔ هرون مساحت آن را به دست آوریم:

$$p=\frac{۳+۷+۸}{۲}=۹\Rightarrow S'=\sqrt{۹(۱)(۲)(۶)}=۶\sqrt{۳}$$

می‌دانیم که مساحت مثلث ABC شش برابر مساحت مثلث BGM است، بنابراین:

$$S_{ABC}=۶S'=۶\times۶\sqrt{۳}=۳۶\sqrt{۳}$$

پاسخ گزینهٔ ۱

NOTE

TEST 117 محاسبهٔ مساحت با معلوم بودن اندازه‌های سه میانه

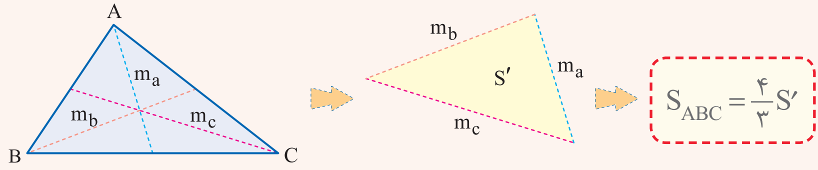
طول میانه‌های مثلثی برابر ۴، ۱۳ و ۱۵ است. مساحت این مثلث چقدر است؟

۱) ۳۶ ۲) ۲۴ ۳) ۴۸ ۴) ۳۲

LILIPOOTBOX

اگر اندازه‌های اضلاع مثلثی با اندازه‌های میانه‌های مثلث ABC برابر باشد، مساحت این مثلث برابر با $\frac{۳}{۴}$ مساحت مثلث ABC است.

اگر اندازهٔ سه میانهٔ یک مثلث داده شده باشد، برای محاسبهٔ مساحت مثلث، میانه‌ها را همانند سه ضلع یک مثلث دیگر در نظر می‌گیریم، سپس به کمک رابطهٔ هرون یا روش‌های دیگر، مساحت این مثلث فرضی را به‌دست می‌آوریم و در انتها عدد حاصل را در $\frac{۴}{۳}$ ضرب می‌کنیم تا مساحت مثلث اصلی به دست آید.



طول سه میانهٔ یک مثلث باید در نامساوی مثلثی صدق کند.

اگر m_a، ۲ و ۳ میانه‌های یک مثلث باشند، آن‌گاه باید داشته باشیم:

$$۳-۲<m_a<۳+۲\Rightarrow ۱<m_a<۵$$

ANALYSE

ابتدا به کمک طول سه میانه، مساحت S' را پیدا می‌کنیم:

$$p=\frac{۴+۱۳+۱۵}{۲}=۱۶\Rightarrow S'=\sqrt{۱۶(۱)(۳)(۱۲)}=\sqrt{۱۶\times۳۶}=۴\times۶=۲۴$$

مساحت مثلث ABC برابر با $\frac{۴}{۳}S'$ است:

$$S_{ABC}=\frac{۴}{۳}S'=\frac{۴}{۳}\times۲۴=۳۲$$

پاسخ گزینهٔ ۴