سرشناسه : رجبی سگزآبادی ، ابوالقاسم
عنوان و نام پدیدآور : هندسه یازدهم / ابوالقاسم رجبی سگزآبادی
سعید طیبی ، شاهد مشهودی
مشخصات نشر : تهران : انتشارات بین‌المللی گاج ؛ ۱۳۹۷
مشخصات ظاهری : ۱۹۲ ص . مصور .
فروست : این‌کتاب از مجموعه کتاب‌های آس گاج می‌باشد .
بها : ۲۵۰۰۰ تومان
شابک: ۳-۸۲۶-۳۵۹-۶۰۰-۹۷۸
وضعیت فهرست‌نویسی : فیپای مختصر .
شمارهٔ کتابشناسی ملی : ۵۱۳۰۲۹۸

آس
مجموعه کتاب‌های آموزش ساده

[ناشر : انتشارات بین‌المللی گاج]
[مدیر مسئول : مهندس ابوالفضل جوکار]
[معاونت علمی : مهندس محمد جوکار]
[مدیر تألیف : علیرضا مزرعتی]
[واحد پژوهش و برنامه‌ریزی کتاب‌های : آس]
[عنوان کتاب : هندسه یازدهم]
[مؤلفان : ابوالقاسم رجبی سگزآبادی ـ سعید طیبی ـ شاهد مشهودی]
[نظارت بر تألیف :نیلوفر حاجیلو] + [ویرایش علمی :زهرا ساسانی ـ سیده زینب صالحی]
[مدیر واحد فنی و گرافیک : صغری قربانی] + [نظارت بر تایپ و صفحه‌آرایی : محدثه یوسفی]
[صفحه‌آرایی : ساناز عاشقی ـ مریم نایبی ـ فرزانه رجبی] + [اجرا : مهسا هوشیار ـ الناز دارانی ـ لیلا فرجی امین]
[طراح شکل : وحیده معینی ـ ملیکا فدایی] + [کارتونیست : مجید باقرزادگان] + [طراح جلد : منصور سماواتی]
[مدیر چاپ : علی مزرعتی] + [لیتوگرافی ، چاپخانه و صحافی : گاج]
[نوبت چاپ : اول (۱۳۹۷)] + [شمارگان : ۳۰۰۰ نسخه]
[دفتر مرکزی : تهران ، خیابان انقلاب ، بین چهار راه ولیعصر(عج)
و خیابان فلسطین ، شماره ۹۱۹] + [تلفن : ۶۴۲۰ - ۰۲۱]
[سرویس پیام کوتاه (SMS): ۱۰۰۰۴۲۵]
[صندوق پستی : ۳۷۷ ـ ۱۳۱۴۵]
[پایگاه اینترنتی : www.gaj.ir]
[قیمت : ۲۵۰۰۰ تومان]

مقدمه مؤلفان

سخن اوّل

سلام بچه‌ها. از سال ۱۳۹۰ که تغییرات کتاب‌های درسی ابتدایی و بعد متوسطه شروع شد درباره این که کتب دبیرستان و آزمون کنکور بالاخره چه شکلی میشه، حرف‌های زیادی می‌شنیدیم. به‌خصوص شماها که از اولین نسل‌هایی بودین که هر سال با کتاب‌های درسی جدید برخورد می‌کردین! بعضی معلم‌ها از کتاب‌های جدید خیلی راضی هستند و بعضی هم نه! اما آن چیزی که از همه اینا مهمتره اینه که «اصلاً چرا باید درس بخوانیم؟! و این همه دانش‌ها و آموخته‌هامون، کی و کجا قراره به دردمون بخورن؟» خصوصاً سؤال همیشگی‌تون: «ریاضیات به این سختی بالاخره به چه دردی میخوره؟!». البته به‌نظر ما هر دانش‌آموزی که برای این سؤال‌ها جوابی داشته باشه، دیگه درس خوندن براش سخت نیست!

ویژگی‌های بارز کتاب

در تألیف کتب درسی جدید، به کاربردهای علم در زندگی توجه ویژه‌ای شده، طوری که بر روش بیان و مراحل آموزش مفهومی هم تاثیر گذاشته است. اما متأسفانه اکثر کتاب‌های کمک درسی همچنان دارند با همان روش‌های قدیمی و برخلاف اهداف آموزش مفهومی در کتب درسی جدیدالتألیف پیش می‌روند، یعنی با سؤالات و مثال‌های تکراری بیش از حد و نکته‌های حفظی و کلیشه‌ای، به بمباران ذهن خواننده می‌پردازند. در حالی‌که تحولات کتب درسی جدید همسو با پیشرفت‌های آموزشی جهان بوده و نباید در مقابلش ایستادگی کرد! بنابراین ما هم با توجه به خلأ موجود در کتب کمک درسی فعلی کشور و همچنین الگو برداری از روش های کارآمد کتب خودآموز برتر جهان، بر آن شدیم تا نسل جدیدی از کتابهای کمک درسی را منطبق بر آخرین تغییرات محتوای کتب درسی جدید التالیف و رعایت روابط طولی و عرضی در اختیار شما عزیزان قرار دهیم. این سری کتابها، همان طور که می دانید، در واحد تالیف انتشارات بین المللی گاج، نام «آس» به خود گرفت که مخفف «آموزش ساده» است و تمام قابلیت های نسل های قبلی کتب کمک درسی چه برای مطالعه در منزل و چه برای تمرین در مدرسه، یک‌جا در آن‌ها گنجانده شده است. در سری کتاب‌های آس، سعی بر این بوده تا ضمن مطالعه مطالب درسی، شما بتوانید با کشف کاربردهای‌شان در زندگی روزمره، لذت یادگیری واقعی و تفکر خلاق را بچشید. کتاب آموزش ساده «هندسه یازدهم» که اکنون پیش روی شماست، هم از این قاعده مستثنی نیست و مانند کتاب درسی هندسه (۲) رشته ریاضی دارای سه فصل و در هر فصل دارای تعدادی درس است. در ادامه به توضیح ساختار کتاب برای راهنمایی نحوه استفاده از آن می‌پردازیم.

فهرست مطالب

CONTENTS

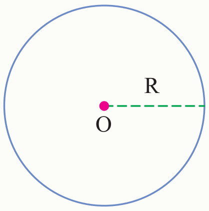
آس | هندسه یازدهم

درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

یادت میاد: در ریاضیات پایهٔ هشتم، با دایره و خواص آن و همچنین زاویه‌های محاطی آشنا شدید و مسائل مختلفی را حل کردید. در هندسهٔ امسال ضمن یادآوری آن مباحث، با دیدگاه دقیق‌تر و به کمک «علم هندسه» به درک خواص بیشتری از دایره دست‌پیدا می‌کنیم.

دایره و تقسیم صفحه

وقتی به یک دایره خیره می‌شویم، به نظر می‌رسد که تمام نقاط روی دایره از یک نقطه‌ای در درون دایره به فاصله یکسان هستند. این کشف، ما را به یک تعریف هندسی از دایره می‌رساند.

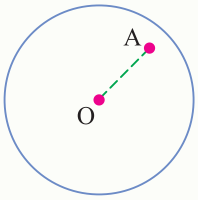


تعریف مجموعه‌ای از نقاط صفحه که همگی از یک نقطهٔ ثابت (به‌نام مرکز) به فاصلهٔ یکسانی (به‌نام شعاع) هستند، را دایره گویند. دایره به مرکز نقطهٔ O و به شعاع R را با نماد $C(O,R)$ اسم‌گذاری می‌کنیم.

در صفحهٔ دایره هر نقطه‌ای را به دلخواه انتخاب کنید، این نقطه درون دایره یا روی دایره یا بیرون دایره قرار دارد؛ یعنی با کشیدن یک دایره در صفحه، آن صفحه به سه زیرمجموعهٔ جدا از هم تقسیم (افراز) می‌شود.

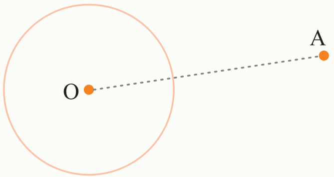
مجموعهٔ نقاط روی دایره همان خود دایره است که فاصلهٔ تمام این نقاط تا مرکز برابر شعاع است، با این توصیف می‌توان دایره را به زبان جبری به‌صورت زیر معرفی کرد:

$$C(O,R)=\{A \mid |OA|=R\}$$



درون دایره: مجموعهٔ نقاطی از صفحهٔ دایره که فاصلهٔ آن‌ها تا مرکز دایره کمتر از شعاع است را درون دایره گویند. و به زبان جبری به‌صورت زیر نمایش می‌دهند:

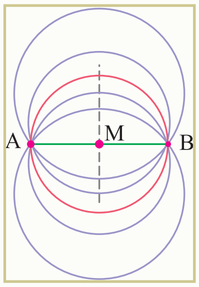
$$\text{درون دایره}=\{A \mid |OA|<R\}$$



بیرون دایره: مجموعهٔ نقاطی از صفحهٔ دایره که فاصلهٔ آن‌ها تا مرکز دایره بیشتر از شعاع است.

$$\text{بیرون دایره}=\{A \mid |OA|>R\}$$

نکته: از دو نقطهٔ متمایز مثل A و B بی‌شمار دایره می‌گذرد که مرکز این دایره‌ها روی عمود منصف خط AB می‌باشد.

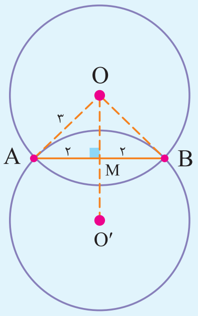


توجه دقت کنید که باتوجه به شکل مقابل کوچک‌ترین دایره‌ای که از B و A عبور می‌کند، دایره‌ای است که AB قطر آن و وسط AB (یعنی M) مرکز آن دایره است. و از طرفی شکل نسبت به AB کاملاً متقارن است.

سـؤال

پاره‌خط $AB=۴$ مفروض است، چند دایره به شعاع ۳ از A و B عبور می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

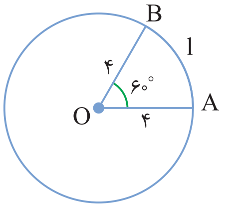


پاسخ ۳ مرکز چنین دایره‌هایی باید بر روی عمودمنصف AB طوری واقع شوند که $|OA|=|OB|=۳$ که در این‌صورت داریم:

$$\overset{\Delta}{AOM}: \widehat{M}=۹۰^\circ \Rightarrow |OM|^۲=|OA|^۲-|AM|^۲=۳^۲-۲^۲=۵ \Rightarrow |OM|=\sqrt{۵}$$

پس دو نقطهٔ O و O'، روی عمودمنصف AB که از AB به فاصله $\sqrt{۵}$ می‌باشند، مرکز دایره‌های مطلوب مسئله هستند.

مثال‌های آموزشی

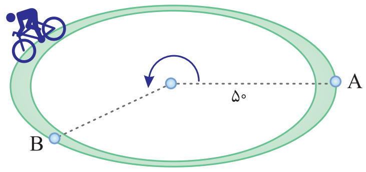


۱) در دایرهٔ $C(O,۴)$ اندازهٔ زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B$ برابر ۶۰° است. طول کمان $\widehat{AB}$ را به‌دست آورید.

پاسخ

$$\frac{\widehat{AB}}{۱۸۰^\circ}=\frac{|\widehat{AB}|}{\pi R}\Rightarrow\frac{۶۰^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{l}{\pi(۴)}\Rightarrow l\simeq ۴/۱۸\,\text{m}$$

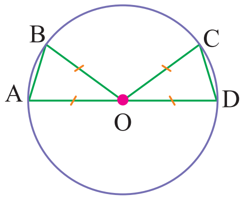
۲) در یک پیست دوچرخه‌سواری دایره‌ای شکل به شعاع ۵۰ متر، دوچرخه‌سواری از نقطهٔ A شروع و مسیری به اندازهٔ ۲۰۰ متر را پیموده و به نقطهٔ B رسیده است. از نگاه ناظری که در مرکز قرار دارد دوچرخه‌سوار کمان مقابل به چه زاویه‌ای را پیموده است؟



پاسخ

$$\frac{\widehat{AB}}{۱۸۰^\circ}=\frac{|\widehat{AB}|}{\pi R}\Rightarrow\frac{\alpha}{۱۸۰^\circ}=\frac{۲۰۰}{\pi(۵۰)}\xrightarrow{\pi=۳}\alpha\cong ۲۴۰^\circ$$

۳) ثابت کنید در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر آن‌ها نیز برابرند و برعکس.



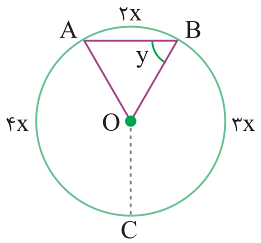
پاسخ

($\Leftarrow$): در دایرهٔ مقابل فرض کنیم $\widehat{AB}=\widehat{CD}$ در این صورت $A\hat{O}B=C\hat{O}D$ پس بنابر حالت (ض‌زض) دو مثلث AOB و COD همنهشت‌اند و در نتیجه $AB=CD$

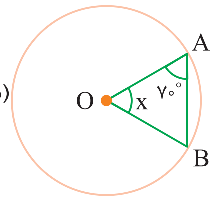
($\Rightarrow$): در دایرهٔ داده شده فرض کنیم $AB=CD$. در این صورت بنابر حالت (ض‌ض‌ض) دو مثلث AOB و COD همنهشت‌اند و در نتیجه $A\hat{O}B=C\hat{O}D$. پس $\widehat{AB}=\widehat{CD}$

۴) در شکل‌های داده شده، مقادیر مجهول را بیابید.

الف)



ب)



پاسخ

الف)

$$۲x+۳x+۴x=۳۶۰^\circ\Rightarrow x=۴۰^\circ\Rightarrow\widehat{AB}=۸۰^\circ\Rightarrow A\hat{O}B=۸۰^\circ$$

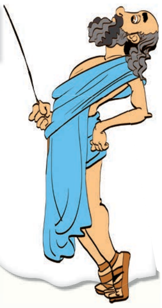
پس در مثلث متساوی‌الساقین AOB داریم:

$$\hat{A}=\hat{B}=y\Rightarrow ۲y+\hat{O}=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۲y+۸۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow y=۵۰^\circ$$

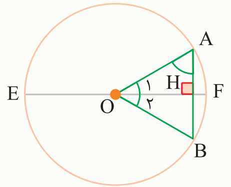
ب)

$$OA=OB\Rightarrow\hat{A}=\hat{B}=۷۰^\circ\Rightarrow x=۱۸۰^\circ-(۷۰^\circ+۷۰^\circ)\Rightarrow x=۴۰^\circ$$

قطرعمود بر وتر



وقتی در مرکز دایرهٔ زیر یعنی نقطهٔ O، فاصلهٔ ما از دو نقطه A و B روی دایره به یک اندازه است (برابر شعاع دایره است) پس روی عمودمنصف وتر AB هستیم!



بنابراین اگر از O (مرکز دایره) به وتر AB عمود کنیم وتر نصف می‌شود و یا اگر به وسط وتر وصل کنیم بر وتر عمود می‌شود!

این نتیجه را می‌توان به صورت یک قضیهٔ دو شرطی بیان کرد.

قضیه در یک دایره قطر بر وتر عمود است اگر و تنها اگر آن را نصف کند.

اثبات: ($\Leftarrow$): با توجه به شکل بالا فرض کنیم قطر EF بر وتر AB عمود باشد. در این صورت:

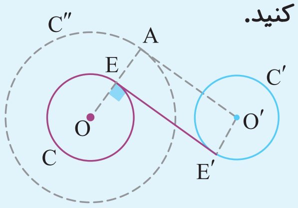
$$\left.\begin{array}{l}OA=OB\\OH=OH\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}}\overset{\Delta}{OAH}\cong\overset{\Delta}{OBH}\Rightarrow AH=BH$$

علاوه بر این نتیجه دیگری که به‌دست می‌آید این است که این قطر کمان‌های نظیر این وتر را نیز نصف می‌کند، زیرا:

$$\hat{O}_۱=\hat{O}_۲\Rightarrow\widehat{AF}=\widehat{BF}\ ,\ \widehat{AE}=\widehat{BE}$$

سؤال

روش رسم مماس مشترک داخلی دو دایرهٔ متخارج $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را نوشته و طول آن را محاسبه کنید.



پاسخ ۱) به مرکز O دایرهٔ C'' را به شعاع $R+R'$ در نظر می‌گیریم.

۲) از O' مماس $O'A$ را بر دایره C'' رسم می‌کنیم.

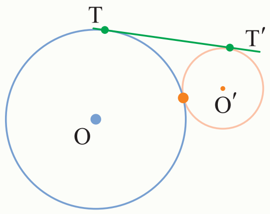
۳) اگر شعاع OA را رسم کنیم دایره C را در نقطه E قطع می‌کند.

حال شعاع $O'E'$، را موازی OA رسم می‌کنیم. چهارضلعی $AEE'O'$ مستطیل است و $\hat{E}=۹۰^\circ$ و $\hat{E'}=۹۰^\circ$ یعنی EE' مماس مشترک دو دایره است و چون دایره‌ها در دو طرف آن هستند پس مماس مشترک درونی (داخلی) است.

۴) چون $AEE'O'$ مستطیل است، پس $EE'=O'A$ و چون $\overset{\Delta}{OAO'}$ قائم‌الزاویه است، پس:

رابطهٔ فیثاغورس: $O'A^۲=OO'^۲-OA^۲ \Rightarrow EE'^۲=d^۲-(R+R')^۲ \Rightarrow EE'=\sqrt{d^۲-(R+R')^۲}$

نتیجه: وقتی دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مماس بیرونی باشند، اندازهٔ قطعهٔ مماس مشترک خارجی آن‌ها از رابطه $TT'=۲\sqrt{RR'}$ به‌دست می‌آید.



اثبات: چون دو دایره مماس بیرونی هستند، پس: $d=OO'=R+R'$ در نتیجه:

$$TT'=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}=\sqrt{(R+R')^۲-(R-R')^۲}=\sqrt{R^۲+۲RR'+R'^۲-R^۲+۲RR'-R'^۲}=\sqrt{۴RR'}=۲\sqrt{RR'}$$

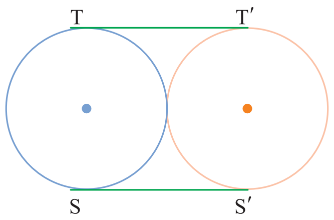
مثال‌های آموزشی

۱) **دو دایره با شعاع‌های ۹ و ۴ مفروض‌اند، اگر اندازهٔ مماس مشترک خارجی آن‌ها ۱۲ باشد، طول خط المرکزین این دو دایره را بیابید.** (امتحان نهایی)

پاسخ

$$TT'=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲} \Rightarrow ۱۲=\sqrt{d^۲-(۹-۴)^۲} \Rightarrow ۱۴۴=d^۲-۲۵ \Rightarrow d=۱۳$$

۲) **در شکل مقابل دو دایره دارای شعاع مساوی R هستند، طول نخی که به دور آن‌ها بسته شده چقدر است؟**



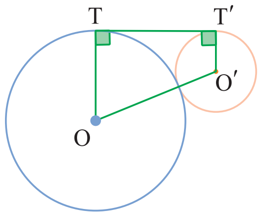
پاسخ

$$\text{طول نخ}=TT'+|\overset{\frown}{TS}|+SS'+|\overset{\frown}{S'T'}|$$

$$=۲\sqrt{R.R}+\frac{۲\pi R}{۲}+۲\sqrt{RR}+\frac{۲\pi R}{۲}$$

$$=۴R+۲\pi R$$

۳) **دو دایره $C(O,۸)$، $C'(O',۲)$ مماس خارج هستند. اگر TT' مماس مشترک بیرونی باشد مساحت چهارضلعی $OO'T'T$ را به‌دست آورید.**

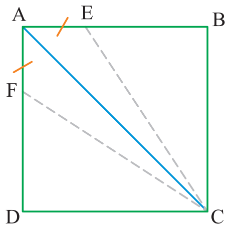


پاسخ چون $OT \parallel O'T'$ این چهارضلعی ذوزنقه است. پس:

$$S=\frac{۱}{۲}TT'(OT+O'T')$$

$$T'T=۲\sqrt{RR'}=۲\sqrt{۲\times۸}=۸$$

$$O'T'=۲\ ،\ OT=۸ \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}(۸)(۲+۸)=۴۰$$



۳) در مربع روبه‌رو $AF = AE$ است با استفاده از بازتاب ثابت کنید، $CE = CF$.

پاسخ چون ABCD مربع است پس قطر AC نیمساز $\hat{A}$ و $\hat{C}$ است.

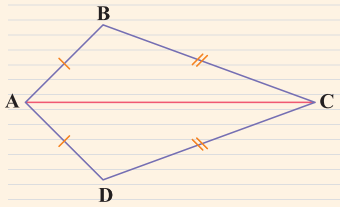
AC را محور بازتاب در نظر می‌گیریم. تحت این بازتاب AD بر AB تصویر می‌شود و چون $AF = AE$ پس F بر E نگاشته می‌شود. به‌طور خلاصه می‌نویسیم:

$$\begin{cases} F \rightarrow E \\ C \rightarrow C \end{cases}$$

پس پاره‌خط CF تصویر پاره‌خط CE تحت این بازتاب است و چون بازتاب ایزومتری (طولپا) است، پس این دو پاره‌خط هم‌اندازه هستند؛ یعنی $CF = CE$.

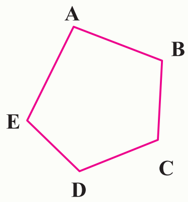
یه تمرین

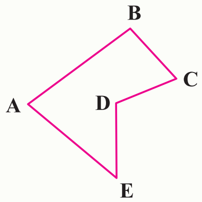
در چهارضلعی روبه‌رو اگر $AB = AD$ و $CB = CD$. با استفاده از بازتاب ثابت کنید $\hat{B} = \hat{D}$. (AC نیمساز نیز هست.)



کاربردهایی از بازتاب (قرینه‌یابی)

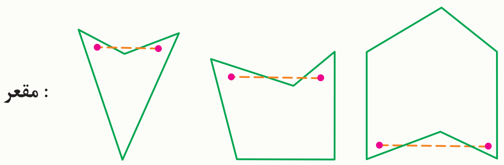
به شکل‌های مقابل توجه کنید. این دو چندضلعی چه فرقی دارند؟

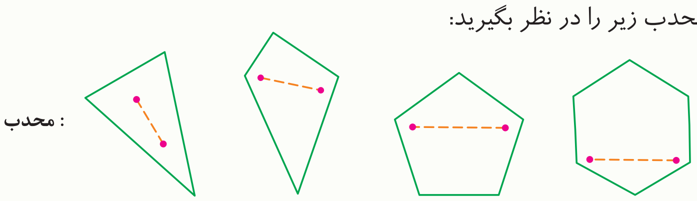




تعریف (چندضلعی محدب): چندضلعی‌ای است که اگر هر دو نقطهٔ درونی آن را به‌هم وصل کنیم پاره خط ایجاد شده تماماً درون چندضلعی باشد.

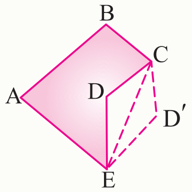
◆ چندضلعی‌های محدب و چندضلعی‌های غیرمحدب زیر را در نظر بگیرید:





با دقت در شکل‌های فوق آیا می‌توانید شباهت‌ها و تفاوت‌هایی بین شش‌ضلعی محدب با مقعر، پنج‌ضلعی محدب با مقعر و ... پیدا کنید؟ چگونه می‌توان یک چندضلعی مقعر را بدون تغییر طول اضلاع به چندضلعی محدب تبدیل کرد؟

به نظر شما بین دو چندضلعی محدب و غیرمحدب که دارای محیط یکسان هستند کدام‌یک مساحت بیشتری دارند؟



به چندضلعی غیرمحدب در شکل روبه‌رو توجه کنید. خط CE را محور بازتاب در نظر گرفته،

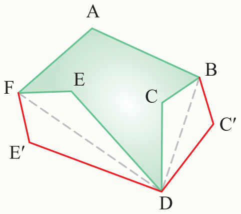
– تصویر نقطه D را تحت این بازتاب رسم کنید تا زاویهٔ D′ به‌دست آید.

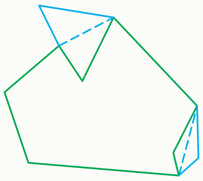
– آیا محیط چهارضلعی محدب ABCD′E با محیط چهارضلعی غیرمحدب اولیه متفاوت است؟ یا محیط آن‌ها یکسان می‌ماند؟

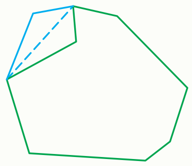
– مساحت کدام چهارضلعی بیشتر است؟

تعریف دو چندضلعی را هم محیط (هم‌پیرامون) گویند هرگاه دارای محیط‌های برابر باشند.

◆ مساحت چند ضلعی‌های غیر محدب را می‌توان با استفاده از بازتاب بدون آن‌که محیط آن تغییر کند، افزایش داد. به چند ضلعی‌های زیر دقت کنید.







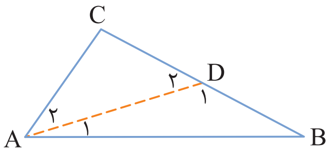
نتیجه: هرگاه یک nضلعی محدب نباشد می‌توان انتظار داشت nضلعی محدبی با ضلع‌های هم‌اندازه با آن و با همان ترتیب ولی با مساحتی بزرگ‌تر قابل رسم باشد که این عمل به کمک تعداد متناهی بازتاب (قرینه‌یابی) مانند مثال فوق امکان‌پذیر است.

بنابراین مساحت مثلث ABC به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$S_{\underset{ABC}{\Delta}}=\frac{۱}{۲}\times BC\times AH=\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۱}{۵}=\frac{۱}{۲۴}$$

---

۸ ۳



$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{C}=۱۸۰^\circ-(۶۰^\circ+۴۵^\circ)=۷۵^\circ$$

از آنجا که AD نیمساز است پس $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲=۳۰^\circ$

در مثلث ADB داریم:

$$\hat{A}_۱+\hat{B}+\hat{D}_۱=۱۸۰^\circ\Rightarrow D_۱=۱۸۰^\circ-(۳۰^\circ+۴۵^\circ)=۱۰۵^\circ \qquad \hat{D}_۱+\hat{D}_۲=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{D}_۲=۱۸۰^\circ-۱۰۵^\circ=۷۵^\circ$$

از قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ABD داریم:

$$\frac{AD}{\sin B}=\frac{BD}{\sin A_۱}\Rightarrow\frac{۱۲}{\sin ۴۵^\circ}=\frac{BD}{\sin ۳۰^\circ}\Rightarrow=\frac{۱۲}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{BD}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow BD=\frac{۱۲\times\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۶\sqrt{۲}$$

از قضیه سینوس‌ها در مثلث ACD داریم:

$$\frac{CD}{\sin A_۲}=\frac{AD}{\sin C}\Rightarrow\frac{CD}{\sin ۳۰^\circ}=\frac{۱۲}{\sin ۷۵^\circ}\Rightarrow\frac{CD}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱۲}{\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۲}}\Rightarrow CD=\frac{۱۲}{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}$$

مساحت مثلث ABC برابر با مجموع مساحت مثلث‌های ACD و ABD است.

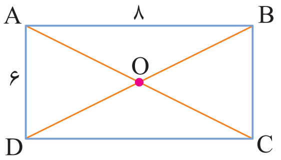
$$S_{\underset{ACD}{\Delta}}=\frac{۱}{۲}\times AD\times CD\times\sin D_۲=\frac{۱}{۲}\times۱۲\times\frac{۱۲}{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}\times\sin ۷۵^\circ=\frac{۱}{\cancel{۲}}\times\overset{۶}{\cancel{۱۲}}\times\frac{\overset{۶}{\cancel{۱۲}}}{\cancel{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}}\times\frac{\cancel{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}}{\underset{۱}{\cancel{۲}}}=۳۶$$

$$S_{\underset{ABD}{\Delta}}=\frac{۱}{۲}\times AD\times BD\times\sin D_۱=\frac{۱}{۲}\times۱۲\times۶\sqrt{۲}\times\sin ۱۰۵^\circ\overset{\sin ۱۰۵^\circ=\sin ۷۵^\circ}{=\!=\!=}\frac{۱}{۲}\times۱۲\times۶\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۲}=۳۶(\sqrt{۳}+۱)$$

$$\Rightarrow S_{\underset{ABC}{\Delta}}=S_{\underset{ACD}{\Delta}}+S_{\underset{ABD}{\Delta}}=۳۶+۳۶(\sqrt{۳}+۱)=۳۶(\sqrt{۳}+۲)$$

---

۹ ۲



از رابطهٔ فیثاغورس، قطر مستطیل را به‌دست آوریم:

$$BD^۲=AB^۲+AD^۲=۸^۲+۶^۲=۶۴+۳۶=۱۰۰\Rightarrow BD=۱۰$$

چون قطرهای مستطیل باهم برابرند پس $AC=۱۰$.

در مستطیل قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند پس $OB=OC=۵$

حال از قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث BOC استفاده می‌کنیم:

$$BC^۲=OB^۲+OC^۲-۲OB.OC.\cos B\hat{O}C\Rightarrow۳۶=۲۵+۲۵-۲\times۵\times۵\times\cos B\hat{O}C\Rightarrow\cos B\hat{O}C=\frac{-۱۴}{-۵۰}=\frac{۱۴}{۵۰}=\frac{۷}{۲۵}$$

---

۱۰ ۲

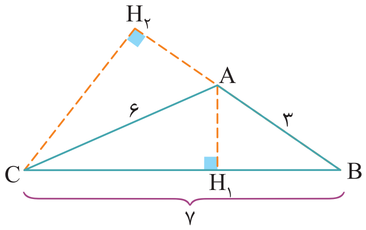
مساحت مثلث را از قضیهٔ هرون به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$P=\frac{۱۵+۱۴+۱۳}{۲}=۲۱$$

$$S=\sqrt{۲۱\times(۲۱-۱۵)\times(۲۱-۱۴)\times(۲۱-۱۳)}=\sqrt{۲۱\times۶\times۷\times۸}=۸۴$$

---

۱۱ ۳



ابتدا از قضیهٔ هرون استفاده می‌کنیم و مساحت مثلث را به‌دست می‌آوریم:

$$P=\frac{۳+۶+۷}{۲}=۸$$

$$S=\sqrt{۸\times(۸-۷)\times(۸-۶)\times(۸-۳)}=\sqrt{۸\times۱\times۲\times۵}=\sqrt{۸۰}=۴\sqrt{۵}$$

و حال برای به‌دست آوردن ارتفاع $AH_۱$ دوباره مساحت مثلث را با استفاده از ارتفاع $AH_۱$ و ضلع BC می‌نویسیم:

$$S=\frac{۱}{۲}\times AH_۱\times BC\Rightarrow۴\sqrt{۵}=\frac{۱}{۲}\times AH_۱\times۷\Rightarrow AH_۱=\frac{۸}{۷}\sqrt{۵}$$