

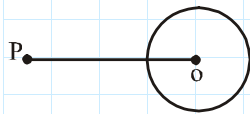
مفاهیم اولیه

تعریف دایره: مجموعه تمام نقاطی از یک صفحه است که از یک نقطه ثابت به نام مرکز، به فاصله ثابتی باشد. این فاصله ثابت را شعاع دایره می‌نامیم. دایره‌ای به مرکز O و شعاع R را با نماد $C(O, R)$ نشان می‌دهیم.

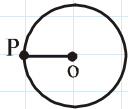
یادآوری: محیط و مساحت دایره $C(O, R)$ به ترتیب برابر با $2\pi R$ و πR^2 است.

وضعیت نقطه با دایره

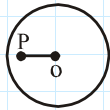
برای بررسی وضعیت نقطه نسبت به دایره $C(O, R)$ ، باید فاصله نقطه P را از مرکز دایره به دست آوریم، داریم:



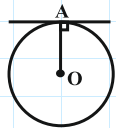
الف) نقطه P خارج دایره قرار دارد. $\Leftrightarrow PO > R$



ب) نقطه P روی دایره قرار دارد. $\Leftrightarrow PO = R$



ج) نقطه P داخل دایره قرار دارد. $\Leftrightarrow PO < R$



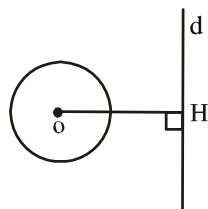
تعریف مماس: خطی که از نقطه A واقع بر دایره می‌گذرد و بر شعاع OA عمود است، خط مماس بر دایره در نقطه A نامیده می‌شود.

بررسی وضعیت خط و دایره: برای بررسی هر خط با یک دایره، فاصله مرکز دایره را از آن خط به دست می‌آوریم و با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم. یک خط و یک دایره، نسبت به هم یکی از سه حالت زیر را دارند:

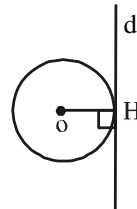
ج) نقطه مشترکی ندارند.

ب) مماس‌اند.

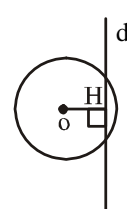
الف) متقاطع‌اند.



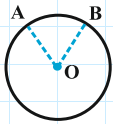
$OH > R$



$OH = R$

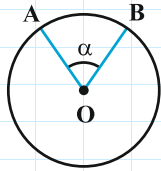


$OH < R$



کمان زاویه مرکزی دایره: زاویه‌ای است که رأس آن مرکز دایره و ضلع‌های آن شعاع‌های دایره‌اند. بنا به قرارداد، اندازه هر زاویه مرکزی، مساوی اندازه کمان مقابل آن است.

$$\widehat{AOB} = \widehat{AB}$$

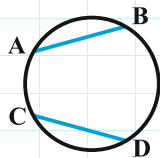


طول کمان و مساحت قطاع: زاویه مرکزی \widehat{AOB} به اندازه α درجه را در دایره $C(O, R)$ در نظر بگیرید:

الف) طول کمان AB برابر است با $\frac{\alpha}{180} R\pi$.

ب) مساحت قطاع AOB برابر است با $\frac{\alpha}{360} \pi R^2$.

تعریف وتر: پاره خطی که دو نقطه متمایز از یک دایره را به هم وصل می‌کند، وتر آن دایره نامیده می‌شود.



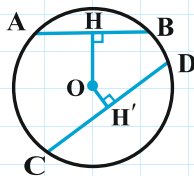
۱) در هر دایره، اگر دو وتر مساوی باشند، کمان‌های متناظر آن‌ها مساوی‌اند و بر عکس.

$$AB = CD \Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

۲) در هر دایره، وتری بزرگ‌تر است که فاصله‌اش از مرکز دایره کم‌تر است و برعکس.

$$AB < CD \Leftrightarrow OH > OH'$$

همچنین اگر فاصله دو وتر از مرکز دایره با هم برابر باشند، طول آن دو وتر با هم برابر است.



۳) در هر دایره، بین دو کمان، کمانی بزرگ‌تر است که وتر مقابل آن بزرگ‌تر است.

$$AB < CD \Leftrightarrow \widehat{AB} < \widehat{CD}$$

۴) در هر دایره قطر عمود بر وتر، وتر و کمان نظیر آن را نصف می‌کند و برعکس.

۵) اگر A نقطه‌ای داخل دایره‌ای به مرکز O باشد، کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطه A، وتری است

که در نقطه A بر OA عمود می‌شود.

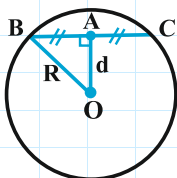
با توجه به شکل مقابل، با به کار بردن قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه OBA می‌توان طول

کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطه A، درون دایره‌ای به شعاع R را به دست آورد:

$$AB = \sqrt{OB^2 - OA^2} \Rightarrow BC = 2\sqrt{R^2 - d^2}$$

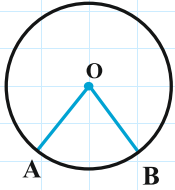
همچنین بلندترین وتر گذرنده از هر نقطه داخل یک دایره همان قطر گذرنده از آن نقطه است

که در دایره‌ای به شعاع R، طول آن برابر با $2R$ است.



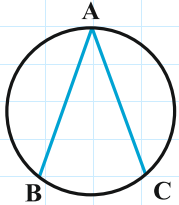
زاویه‌ها در دایره

۱ زاویه مرکزی: اندازه زاویه مرکزی مساوی کمان مقابل آن است.



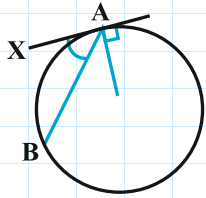
$$\widehat{AOB} = \widehat{AB}$$

۲ زاویه محاطی: زاویه‌ای است که رأس آن روی محیط دایره و ضلع‌های آن وترهایی از دایره‌اند. اندازه زاویه محاطی، مساوی نصف کمان مقابل آن است.



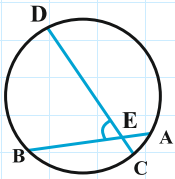
$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{BC}$$

۳ زاویه ظلّی: زاویه‌ای است که رأس آن روی محیط دایره، یک ضلع آن وتر دایره و ضلع دیگرش بر دایره مماس است، اندازه زاویه ظلّی، مساوی با نصف کمان مقابل آن است.



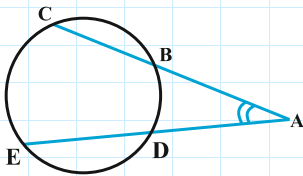
$$\widehat{XAB} = \frac{1}{2} \widehat{AB}$$

۴ زاویه بین دو وتر دایره که در داخل دایره متقاطع‌اند: مساوی با نصف مجموع دو کمان مقابل آن است.

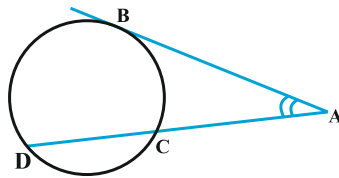


$$\widehat{E} = \frac{1}{2} (\widehat{BD} + \widehat{AC})$$

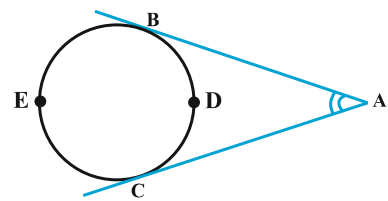
۵ زاویه بین امتداد دو وتر دایره که در خارج دایره متقاطع‌اند: هم‌چنین زاویه بین امتداد یک وتر و یک مماس و نیز زاویه بین دو مماس، مساوی با نصف قدر مطلق تفاضل دو کمان مقابل آن است.



$$\widehat{A} = \frac{1}{2} (\widehat{CE} - \widehat{BD})$$



$$\widehat{A} = \frac{1}{2} (\widehat{BD} - \widehat{BC})$$

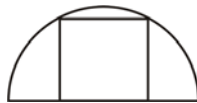


$$\widehat{A} = \frac{1}{2} (\widehat{BEC} - \widehat{BDC})$$

مفاهیم اولیه

۱- در شکل مقابل، شعاع نیم‌دایره $\frac{7}{5}$ سانتی‌متر است، مساحت مربع محاط در نیم دایره چند سانتی‌متر مربع است؟

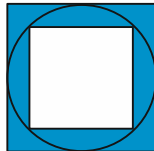
(مرتبط با صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷ کتاب درسی) (سراسری ریاضی - ۷۲)



- ۵۴ (۱)
- ۳۰ (۲)
- ۲۶ (۳)
- ۴۵ (۴)

۲- در شکل زیر، شعاع دایره ۴ سانتی‌متر است، مساحت قسمت هاشورخورده کدام است؟

(مرتبط با صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷ کتاب درسی) (سراسری ریاضی - ۷۴)



- ۲۶ (۱)
- ۲۸ (۲)
- ۳۰ (۳)
- ۳۲ (۴)

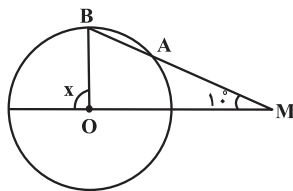
۳- وتر BC در دایره‌ای به مرکز O طوری قرار دارد که اندازه کمان بزرگ‌تر BC، $\frac{1}{4}$ برابر کمان کوچک‌تر BC است. نسبت مساحت دایره به مساحت مثلث OBC چند برابر π است؟

(مرتبط با صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۹۵)

- ۴ (۴)
- $\frac{2}{8}$ (۳)
- $\frac{1}{96}$ (۲)
- $\frac{1}{4}$ (۱)

۴- در شکل زیر، از نقطه M در خارج دایره خطی رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده و $MA = R$ است. اندازه زاویه x کدام است؟ (O مرکز و R شعاع دایره است.)

(مشابه تمرین ۶ صفحه ۱۷ کتاب درسی)



- 20° (۱)
- 30° (۲)
- 40° (۳)
- 60° (۴)

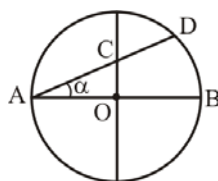
۵- نزدیک‌ترین و دورترین فاصله نقطه A از یک دایره به ترتیب ۸ و ۱۲ است، شعاع این دایره برابر است با:

(مرتبط با صفحه ۱۰ کتاب درسی) (آزاد ریاضی - ۷۶)

- ۴ (۴)
- ۶ (۳)
- ۲ (۲)
- ۳ (۱)

۶- در شکل مقابل، دو قطر دایره عمود بر هم‌اند. نسبت $\frac{CD}{CA}$ برابر با کدام است؟

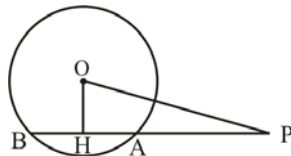
(مرتبط با فعالیت صفحه ۱۳ کتاب درسی) (سراسری ریاضی - ۷۱)



- $2 \sin^2 \alpha$ (۱)
- $2 \cos^2 \alpha$ (۲)
- $\cos 2\alpha$ (۳)
- $\sin 2\alpha$ (۴)

۷- در شکل مقابل، $OH = 1$ ، $HA = \frac{AB}{2} = 3$ و $\hat{OHA} = 90^\circ$. شعاع دایره کدام است؟

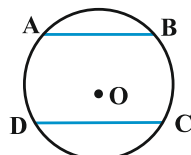
(مرتبط با تمرین ۸ صفحه ۱۷ کتاب درسی) (سراسری ریاضی - ۷۶)



- $\sqrt{13}$ (۱)
- $\sqrt{12}$ (۲)
- $\sqrt{11}$ (۳)
- $\sqrt{10}$ (۴)

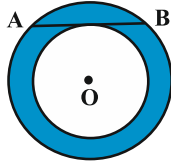
۸- مطابق شکل زیر، در دایره به مرکز O و شعاع ۵ واحد، دو وتر موازی $AB = 6$ و $CD = 8$ در طرفین مرکز دایره رسم شده‌اند. مساحت ذوزنقه ABCD کدام است؟

(تمرین ۸ صفحه ۱۷ کتاب درسی)



- ۵۶ (۱)
- ۴۹ (۲)
- ۴۲ (۳)
- ۲۵ (۴)

- ۹- در شکل زیر، دو دایره هم‌مرکزاند و وتر AB بر دایره کوچک مماس است. اگر اندازه وتر AB برابر ۲۴ سانتی‌متر باشد. مساحت ناحیه بین دو دایره چند سانتی مترمربع است؟



- (۱) 256π
(۲) 144π
(۳) 576π
(۴) 324π

- ۱۰- در دایره $C(O, 8)$ ، اگر $\widehat{AB} = 60^\circ$ ، آن‌گاه فاصله O از وتر AB کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $4\sqrt{3}$ (۳) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

- ۱۱- از نقطه M به فاصله $\frac{R}{2}$ از مرکز دایره $C(O, R)$ وتری در دایره رسم نموده‌ایم، کوتاه‌ترین طول این وتر کدام است؟

(مرتبط با تمرین ۸ صفحه ۱۷ کتاب درسی) (سراسری ریاضی - ۶۵)

- (۱) $\sqrt{3}R$ (۲) $\sqrt{2}R$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}R$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}R$

- ۱۲- در دایره‌ای به شعاع R از نقطه M به فاصله نصف شعاع از مرکز، وتر AC را با کم‌ترین طول و وتر BD را با بیش‌ترین طول رسم کرده‌ایم. مساحت چهارضلعی $ABCD$ چند برابر R^2 است؟

(مرتبط با تمرین ۸ صفحه ۱۷ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۱۹ آذر ۹۵)

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

- ۱۳- چهار نقطه A, B, C, D روی محیط دایره $C(O, R)$ طوری قرار گرفته‌اند که $\widehat{COD} = 120^\circ$ و فاصله مرکز دایره تا وسط وتر AB برابر

(مرتبط با تمرین‌های ۷ و ۸ صفحه ۱۷ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۲۴ دی ۹۵)

- $\frac{AB}{CD}$ است. نسبت $\frac{AB}{CD}$ چند برابر $\sqrt{3}$ است؟
(۱) $0/4$ (۲) $0/5$ (۳) $0/6$ (۴) $0/7$

- ۱۴- دایره‌ای به شعاع ۴ و نقطه M به فاصله یک از مرکز دایره مفروض است. چند وتر داخل دایره می‌توان رسم کرد که طول آن‌ها ۲ باشد و از M

بگذرد؟

(مرتبط با تمرین ۸ صفحه ۱۷ کتاب درسی) (آزاد ریاضی - ۸۴)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) صفر (۴) بی‌شمار

- ۱۵- در یک صفحه، مجموعه مراکز همه دایره‌هایی که از دو خط غیرموازی، وترهای مساوی جدا می‌کند، روی چه شکلی هستند؟

(مرتبط با تمرین ۸ صفحه ۱۷ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۸۵)

- (۱) دو خط عمود برهم (۲) دو خط موازی (۳) یک نقطه (۴) یک خط

- ۱۶- چهارضلعی $ABCD$ محاط در یک دایره است. اگر AB دورترین وتر و BC نزدیک‌ترین وتر نسبت به مرکز این دایره باشند، کدام رابطه بین زاویه‌ها ممکن است برقرار نباشد؟

(مرتبط با تمرین ۸ صفحه ۱۷ کتاب درسی) (سراسری ریاضی - ۹۶)

- (۱) $\widehat{D} > \widehat{C}$ (۲) $\widehat{B} > \widehat{C}$ (۳) $\widehat{A} > \widehat{B}$ (۴) $\widehat{B} > \widehat{D}$

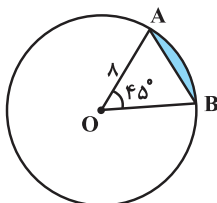
- ۱۷- اندازه کمان دایره‌ای به مرکز O' و به زاویه 45° با اندازه کمان دایره‌ای به مرکز O و زاویه 30° برابر است، نسبت مساحت دایره به مرکز O به دایره

به مرکز O' کدام است؟

(مرتبط با کار در کلاس صفحه ۱۲ کتاب درسی) (سراسری تجربی - ۶۹)

- (۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{5}{9}$ (۳) $\frac{6}{9}$ (۴) $\frac{7}{9}$

(مشابه تمرین ۸ صفحه ۲۳ کتاب درسی)



- ۱۸- در شکل زیر مساحت ناحیه رنگی کدام است؟

- (۱) $16\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\right)$
(۲) $16\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
(۳) $8\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
(۴) $32\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

- ۱۹- در یک دایره به مرکز O ، شعاع OA را به اندازه خود تا نقطه B امتداد می‌دهیم. از نقطه B بر مماس دلخواه دایره عمود BD را فرود می‌آوریم. اگر

(مرتبط با فعالیت صفحه ۱۱ کتاب درسی) (سراسری ریاضی - ۹۴)

$\widehat{ADB} = 34^\circ$ آن‌گاه، زاویه \widehat{OAD} چند درجه است؟

- (۱) ۶۸ (۲) ۷۳ (۳) ۱۰۲ (۴) ۱۴۶

۲۰- خط l بر دایره‌ای به قطر AB مماس است. اگر طول عمودهای AD و BC وارد بر l به ترتیب برابر 12 و 3 باشد، طول پاره خط CD کدام است؟

(مرتبط با فعالیت صفحه ۱۱ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۳ دی ۹۵)

- (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۲۱- در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، نقطه O در امتداد AC مرکز دایره‌ای است که در نقطه B بر ضلع AB مماس است. امتداد BC این دایره را در D قطع کرده است. مثلث OCD چگونه است؟

- (۱) متساوی‌الساقین
(۲) قائم‌الزاویه
(۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین
(۴) غیرمشخص

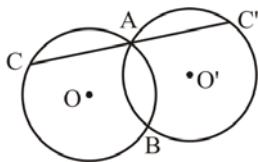
۲۲- دایره $C(O, R)$ ، روی خط d و تری به طول $6\sqrt{2}$ جدا می‌کند. اگر تنها سه نقطه روی دایره C به فاصله ۳ از خط d باشند، R کدام است؟

(مرتبط با فعالیت صفحه ۱۱ کتاب درسی)

- (۱) ۴ (۲) $4/5$ (۳) $3/5$ (۴) ۳

زاویه‌ها در دایره

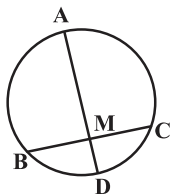
۲۳- در شکل زیر، دو دایره مساوی متقاطع‌اند، قاطع CAC' را رسم می‌کنیم، مثلث CBC' همواره... (مرتبط با فعالیت صفحه ۱۳ کتاب درسی) (آزاد ریاضی - ۸۰)



- (۱) متساوی‌الاضلاع است.
(۲) قائم‌الزاویه است.
(۳) متساوی‌الساقین است.
(۴) قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

۲۴- در شکل زیر D وسط کمان BC و M وسط وتر BC است. اگر $AD = 2BC$ ، آن‌گاه کمان AB چند درجه است؟

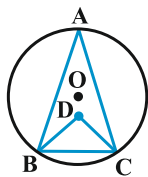
(مرتبط با فعالیت صفحه ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۳ دی ۹۵)



- (۱) ۱۲۰
(۲) ۱۳۵
(۳) ۱۵۰
(۴) ۱۶۵

۲۵- در شکل زیر، نقطه D ، محل تقاطع نیمسازهای دو زاویه B و C است. اگر $\widehat{BDC} = 100^\circ$ ، آن‌گاه کمان BC چند درجه است؟

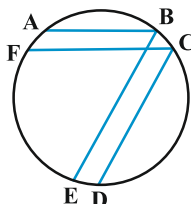
(مرتبط با فعالیت صفحه ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۹۱)



- (۱) ۱۰۰
(۲) ۸۰
(۳) ۶۰
(۴) ۴۰

۲۶- در شکل زیر، اگر $\widehat{AB} = 60^\circ$ ، $\widehat{CD} \parallel BE$ ، $AB \parallel FC$ ، $\widehat{EF} = 110^\circ$ ، آن‌گاه زاویه \widehat{FCD} چند درجه است؟

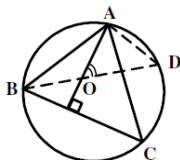
(مرتبط با کار در کلاس صفحه ۱۵ کتاب درسی) (آزاد ریاضی - ۷۷)



- (۱) ۹۰
(۲) ۵۵
(۳) ۷۰
(۴) ۸۰

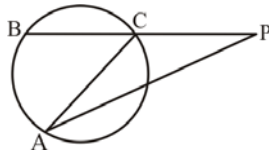
(مرتبط با فعالیت صفحه ۱۳ کتاب درسی) (سراسری ریاضی - ۹۲)

۲۷- در شکل زیر، O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است. زاویه \widehat{AOD} برابر کدام است؟



- (۱) \widehat{OBC}
(۲) \widehat{CAD}
(۳) \widehat{OAC}
(۴) \widehat{ADO}

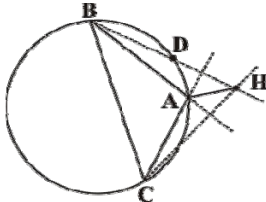
۲۸- در شکل زیر، اگر زاویه $\hat{P} = 32^\circ$ و مثلث ACP متساوی‌الساقین باشد، کمان AB چند درجه است؟ (مرتبط با فعالیت صفحه ۱۵ کتاب درسی) (سراسری تجربی-۶۱)



- (۱) ۶۹
(۲) ۷۴
(۳) ۸۶
(۴) ۱۲۸

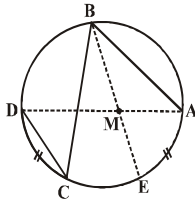
۲۹- در شکل زیر، نقطه H محل تلاقی ارتفاعات مثلث ABC است. زاویه \hat{AHD} ، با کدام زاویه برابر است؟

(مرتبط با فعالیت صفحه ۱۳ کتاب درسی) (سراسری خارج کشور ریاضی-۹۲)



- (۱) \hat{CAB}
(۲) \hat{ABC}
(۳) \hat{ADH}
(۴) \hat{AHC}

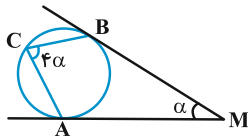
۳۰- در شکل مقابل، $AB = 6$ ، $BC = 8$ ، $CD = 3$ و $\widehat{AE} = \widehat{CD}$ اندازه AM ، کدام است؟ (مرتبط با فعالیت صفحه ۱۳ کتاب درسی) (سراسری خارج کشور ریاضی-۹۳)



- (۱) ۲
(۲) ۲/۲۵
(۳) ۲/۵
(۴) ۲/۷۵

۳۱- در شکل زیر MA و MB بر دایره مماس‌اند و اندازه زوایای M و C به ترتیب برابر α و 4α است. مقدار α چند درجه است؟

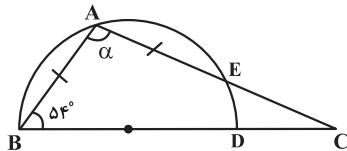
(مرتبط با فعالیت‌های صفحه‌های ۱۱ و ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون-۹۱)



- (۱) ۲۰
(۲) ۲۵
(۳) ۳۰
(۴) ۱۵

(مرتبط با فعالیت صفحه ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون-۸ بیمن ۹۵)

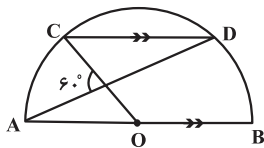
۳۲- در شکل روبه‌رو، $AB = AE$ و BD قطر نیم‌دایره است. زاویه α چند درجه است؟



- (۱) ۱۰۸
(۲) ۱۱۶
(۳) ۱۲۰
(۴) ۱۲۶

(مشابه تمرین ۴ صفحه ۱۷ کتاب درسی)

۳۳- در شکل، O مرکز دایره است و $AB \parallel CD$ است. اندازه کمان CD کدام است؟



- (۱) 60°
(۲) 90°
(۳) 100°
(۴) 120°

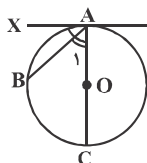
۳۴- سه نقطه A ، B و C را روی محیط دایره‌ای به شعاع R ، طوری در نظر می‌گیریم که $\frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{BC}{\sqrt{3}} = R$ زاویه کوچک‌تر ABC چند درجه است؟

(مرتبط با فعالیت صفحه ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون-۱۸ فروردین ۹۵)

- (۱) ۶۰ (۲) ۴۵ (۳) ۳۰ (۴) ۱۵

(مرتبط با فعالیت صفحه ۱۴ کتاب درسی) (سراسری تجربی-۶۱)

۳۵- در شکل زیر، اندازه زاویه ظلی A برابر 50° است. اندازه کمان BC بر حسب درجه کدام است؟

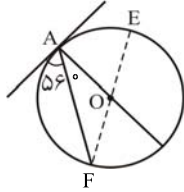


- (۱) ۷۰
(۲) ۷۵
(۳) ۸۰
(۴) ۸۵

۳۶- خط Δ در نقطه T بر دایره ای به قطر AB مماس است. اگر Δ با AB موازی باشد، آن گاه AT با Δ چه زاویه ای می سازد؟
 (مرتبط با فعالیت صفحه ۱۴ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۱۸ فروردین ۹۵)

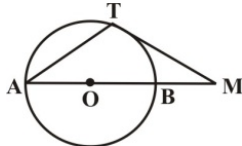
- (۱) 45° (۲) 60° (۳) 75° (۴) 90°

۳۷- در شکل زیر، O مرکز دایره و زاویه ظلی A برابر 56° است. کمان AE چند درجه است؟
 (مرتبط با فعالیت صفحه ۱۴ کتاب درسی) (سراسری ریاضی - ۷۱)



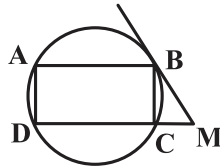
- (۱) 68 (۲) 66 (۳) 64 (۴) 62

۳۸- در شکل زیر، AB قطر دایره و MT بر دایره مماس است. اگر $MT = AT$ ، آن گاه اندازه زاویه A کدام است؟
 (مرتبط با فعالیت صفحه ۱۴ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۹۲)



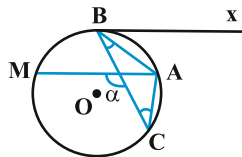
- (۱) 15° (۲) 45° (۳) 60° (۴) 30°

۳۹- در شکل زیر، $ABCD$ مستطیل است. مماس رسم شده از نقطه B بر دایره، امتداد ضلع DC را در نقطه M قطع می کند. اگر $BMC = \alpha$ ، آن گاه زاویه بین دو قطر مستطیل کدام است؟
 (مرتبط با فعالیت صفحه ۱۴ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۷ فروردین ۹۵)



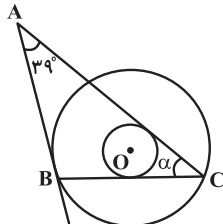
- (۱) α (۲) 2α (۳) $90^\circ - \alpha$ (۴) $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$

۴۰- در شکل زیر، $\hat{ABC} = \hat{ACB} = 30^\circ$ و وتر AM موازی مماس Bx است. زاویه α ، چند درجه است؟
 (مرتبط با فعالیت صفحه ۱۴ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۸۶)



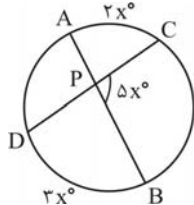
- (۱) 90° (۲) 120° (۳) 130° (۴) 145°

۴۱- دو دایره هم مرکز مطابق شکل مفروض اند. وتر BC در دایره بزرگ تر بر دایره کوچک تر و AB در نقطه B بر دایره بزرگ تر مماس است. اندازه α کدام است؟
 (مرتبط با فعالیت صفحه ۱۵ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۳ دی ۹۵)



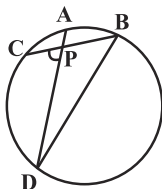
- (۱) 32° (۲) 34° (۳) 30° (۴) 36°

۴۲- در شکل زیر، $\widehat{AC} = 2x^\circ$ ، $\widehat{BD} = 3x^\circ$ و $\widehat{CPB} = 5x^\circ$. مقدار x چند درجه است؟
 (مرتبط با فعالیت صفحه ۱۵ کتاب درسی) (سراسری تجربی - ۷۰)



- (۱) 20° (۲) 24° (۳) 32° (۴) 36°

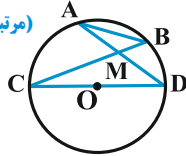
۴۳- در شکل زیر، $\hat{D} = \frac{1}{2}\hat{B}$ ، زاویه \hat{P} چند برابر کمان \widehat{AB} است؟
 (مرتبط با فعالیت صفحه ۱۵ کتاب درسی) (سراسری ریاضی - ۷۵)



- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) 1 (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) 2

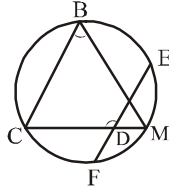
۴۴- در شکل زیر، اگر $AB = R$ یک وتر و CD قطری از دایره باشند، آن‌گاه زاویه حاده M که از برخورد دو وتر AD و BC به دست می‌آید، کدام است؟

(مرتبط با فعالیت صفحه ۱۵ کتاب درسی)



- (۱) 75°
- (۲) 60°
- (۳) 30°
- (۴) 45°

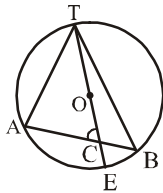
(مرتبط با فعالیت صفحه ۱۵ کتاب درسی) (سراسری ریاضی - ۷۷)



۴۵- در شکل مقابل، M وسط کمان EF است و $\widehat{BC} = 50^\circ$ ، اندازه $\widehat{B} + \widehat{D}$ کدام است؟

- (۱) 160
- (۲) 175
- (۳) 180
- (۴) 230

(مرتبط با فعالیت صفحه ۱۵ کتاب درسی) (سراسری ریاضی - ۸۱)

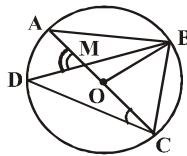


۴۶- در شکل مقابل، O مرکز دایره و $\widehat{A} = 65^\circ$ و $\widehat{B} = 35^\circ$ ، زاویه C کدام است؟

- (۱) 60
- (۲) 61
- (۳) 62
- (۴) 63

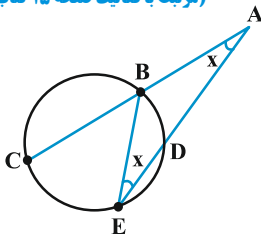
۴۷- در شکل زیر، $\widehat{A\hat{C}D} = 22/5^\circ$ و $\widehat{A\hat{M}D} = 67/5^\circ$ ، اندازه زاویه $O\hat{B}D$ کدام است؟ (O مرکز دایره است.)

(مرتبط با فعالیت صفحه ۱۵ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۸۵)



- (۱) 25°
- (۲) $27/5^\circ$
- (۳) $22/5^\circ$
- (۴) $37/5^\circ$

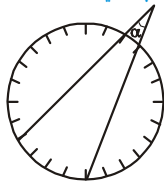
(مرتبط با فعالیت صفحه ۱۵ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۸۴)



۴۸- در شکل مقابل، چه رابطه‌ای بین کمان‌ها وجود دارد؟

- (۱) $\widehat{CE} = \widehat{BD}$
- (۲) $\widehat{CE} = 3\widehat{BD}$
- (۳) $\widehat{CE} = 2\widehat{BD}$
- (۴) $\widehat{CE} = 4\widehat{BD}$

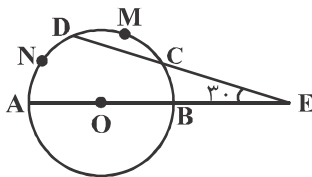
(مرتبط با فعالیت صفحه ۱۵ کتاب درسی) (سراسری ریاضی - ۶۸)



۴۹- در شکل مقابل، دایره به ۲۴ قسمت مساوی تقسیم شده است، زاویه α چند درجه است؟

- (۱) $22/5$
- (۲) 25
- (۳) $27/5$
- (۴) 30

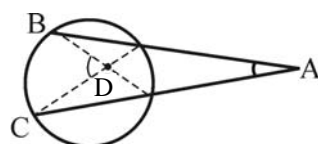
(مرتبط با فعالیت صفحه ۱۵ کتاب درسی) (سراسری ریاضی - ۶۷)



۵۰- در شکل زیر O مرکز دایره، $\widehat{DMC} = 30^\circ$ و $\widehat{E} = 30^\circ$ ، کمان \widehat{AND} چند درجه است؟

- (۱) 85
- (۲) 95
- (۳) 105
- (۴) 115

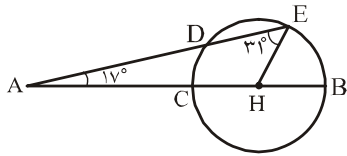
(مشابه تمرین ۲ صفحه ۱۶ کتاب درسی) (سراسری ریاضی - ۸۶)



۵۱- در شکل مقابل، $\widehat{A} = 27^\circ$ و $\widehat{D} = 71^\circ$ کمان BC چند درجه است؟

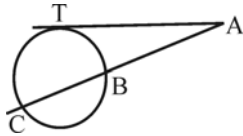
- (۱) 98
- (۲) 100
- (۳) 102
- (۴) 104

۵۲- در شکل زیر، $\hat{A} = 17^\circ$ ، $\hat{E} = 31^\circ$ و H وسط قطر CB است، کمان CD چند درجه است؟ (مشابه تمرین ۶ صفحه ۱۷ کتاب درسی) (سراسری ریاضی - ۶۹)



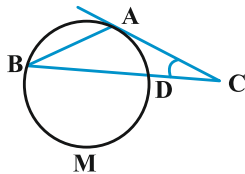
- ۱۴ (۱)
- ۱۹ (۲)
- ۲۲ (۳)
- ۲۴ (۴)

۵۳- در شکل زیر AT مماس و $\widehat{BC} = \widehat{CT} = 2\widehat{BT}$. زاویه A چند درجه است؟ (مرتبط با تمرین ۱ صفحه ۱۶ کتاب درسی) (آزاد ریاضی عصر - ۸۶)



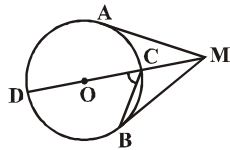
- ۱۸ (۱)
- ۷۲ (۲)
- ۱۴۴ (۴)
- ۳۶ (۳)

۵۴- در شکل زیر، مماس AC با وتر AB از دایره برابند. اگر کمان \widehat{DMB} برابر 222° درجه باشد زاویه C چند درجه است؟ (مرتبط با تمرین ۱ صفحه ۱۶ کتاب درسی) (سراسری خارج کشور ریاضی - ۹۱)



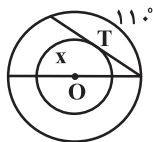
- ۲۱ (۱)
- ۲۲ (۲)
- ۲۳ (۳)
- ۲۴ (۴)

۵۵- در شکل زیر، اگر زاویه بین دو مماس MA و MB برابر 50° باشد، آن گاه زاویه \widehat{OCB} چند درجه است؟ (O مرکز دایره است.) (مرتبط با تمرین ۱ صفحه ۱۶ کتاب درسی)



- ۶۰ (۱)
- ۶۵ (۲)
- ۵۰ (۳)
- ۵۷/۵ (۴)

۵۶- در شکل زیر O مرکز هر دو دایره و T نقطه تماس وتر دایره بزرگ با دایره کوچک است. کمان X چند درجه است؟ (مرتبط با تمرین ۱ صفحه ۱۶ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۲۴ دی ۹۵)



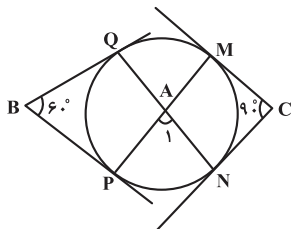
- ۱۱۰ (۱)
- ۱۱۵ (۲)
- ۱۲۰ (۳)
- ۱۲۵ (۴)

۵۷- چهار نقطه A، B، C و D را روی محیط یک دایره در نظر می‌گیریم، اگر طول وترهای AC و BD با شعاع دایره برابر باشد و $\widehat{BDC} = 75^\circ$ ،

آن گاه زاویه بین مماس‌های رسم شده بر دایره از نقاط C و D، چند درجه است؟ (مرتبط با تمرین ۱ صفحه ۱۶ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۷ فروردین ۹۵)

- ۳۰ (۱)
- ۹۰ (۲)
- ۶۰ (۳)
- ۱۲۰ (۴)

۵۸- در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازه زاویه \hat{A}_1 چند درجه است؟ (مشابه تمرین ۳ صفحه ۱۶ کتاب درسی)



- ۶۰ (۱)
- ۷۵ (۲)
- ۹۰ (۳)
- ۱۵۰ (۴)

روابط طولی و سایر ویژگی‌های مماس

از هر نقطه بیرون یک دایره، می‌توان دو مماس بر آن رسم کرد که طول این دو مماس با هم برابر است. در شکل زیر از نقطه M ، مماس‌های MT و MT' بر دایره $C(O, R)$ رسم شده است، داریم:

۱ MO نیمساز زاویه بین دو مماس است.

$$2 \quad MT = MT' = \sqrt{MO^2 - R^2}$$

۳ MO عمود منصف TT' است.

$$4 \quad R^2 = OH \cdot OM$$

$$5 \quad TH^2 = OH \cdot HM \Rightarrow TT'^2 = 4OH \cdot HM$$

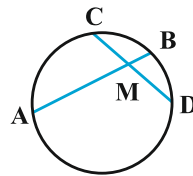
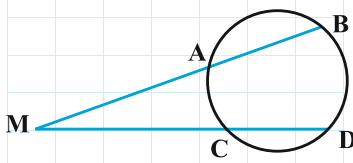
$$6 \quad TT' \cdot OM = 2R \cdot MT$$

۷ اگر زاویه بین دو مماس MT و MT' برابر α باشد، آن‌گاه:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{MT} \quad \text{و} \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{OM}$$

روابط طولی دو وتر متقاطع

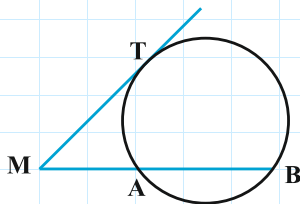
اگر از نقطه M دو قاطع چنان رسم کنیم که یکی از آن‌ها دایره را در A و B و دیگری دایره را در C و D قطع کند، آن‌گاه:



$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

عکس این قضیه هم درست است، یعنی اگر دو پاره خط AB و CD (یا امتدادهای آن‌ها) در نقطه M طوری یک‌دیگر را قطع کنند که $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ ، آن‌گاه چهار نقطه A, B, C, D روی یک دایره واقع‌اند.

روابط طولی مماس و امتداد وتر

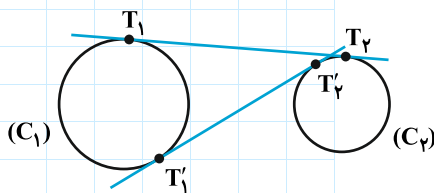


اگر از نقطه M خارج یک دایره، قاطع MAB و مماس MT را بر آن دایره رسم کنیم، آن‌گاه $MT^2 = MA \cdot MB$ ، عکس این قضیه هم درست است، یعنی اگر سه نقطه A, B روی یک خط راست و T خارج این خط طوری واقع باشند که $MT^2 = MA \cdot MB$ ، آن‌گاه دایره‌ای که از سه نقطه A, B, T می‌گذرد، در نقطه T بر MT مماس است.

تعریف مماس مشترک و بررسی وضع دو دایره نسبت به هم

مماس مشترک دو دایره: مماس مشترک دو دایره C_1 و C_2 خطی است که هم بر C_1 و هم بر C_2 مماس باشد. اگر هر دو دایره در یک طرف این خط باشند، آن را مماس مشترک خارجی و اگر دو دایره در طرفین این خط باشند، آن را مماس مشترک داخلی گویند.

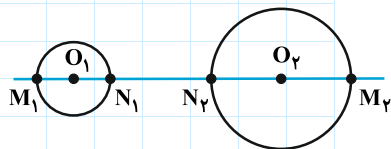
مثلاً در شکل مقابل T_1T_2 مماس مشترک خارجی و $T_1'T_2'$ مماس مشترک داخلی دو دایره C_1 و C_2 است.



اوضاع نسبی دو دایره در صفحه: دو دایره $C_1(O_1, R_1)$ و $C_2(O_2, R_2)$ را در نظر بگیرید. اگر طول خط‌المركزین این دو دایره را d در نظر بگیریم ($O_1O_2 = d$) دو دایره نسبت به هم، یکی از شش وضعیت زیر را دارند:

وضعیت شکل	نوع وضعیت	روابط بین شعاع‌ها و فاصله بین مراکز دو دایره	تعداد مماس‌های مشترک داخلی	تعداد مماس‌های مشترک خارجی
	متخارج	$d > R_1 + R_2$	۲	۲
	مماس خارج	$d = R_1 + R_2$	۱	۲
	مقاطع	$ R_2 - R_1 < d < R_1 + R_2$	صفر	۲
	مماس داخل	$d = R_2 - R_1 $	صفر	۱
	متداخل	$d < R_2 - R_1 $	صفر	صفر
	هم مرکز	$d = 0$	صفر	صفر

نکته: دو دایره متخارج $C_1(O_1, R_1)$ و $C_2(O_2, R_2)$ را مطابق شکل در نظر بگیرید. خط‌المركزین دو دایره را رسم کرده و از دو طرف امتداد می‌دهیم تا هر یک از دو دایره را در دو نقطه، قطع کند، داریم:

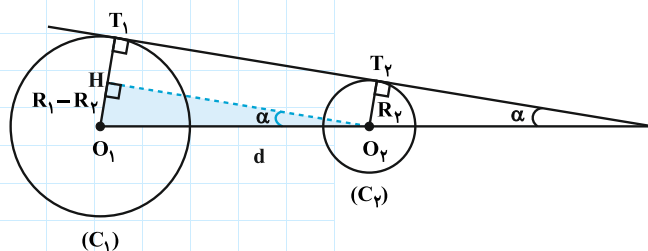


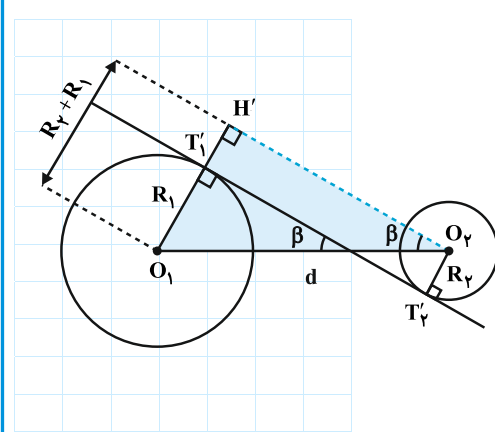
بیش‌ترین فاصله بین نقاط دو دایره C_1 و C_2 : $M_1M_2 = d + (R_1 + R_2)$

کم‌ترین فاصله بین نقاط دو دایره C_1 و C_2 : $N_1N_2 = d - (R_1 + R_2)$

محاسبه طول‌های مماس‌های مشترک دو دایره

۱ برای محاسبه طول مماس مشترک خارجی دو دایره، مطابق شکل، از مرکز دایره کوچک‌تر، عمودی بر شعاع گذرنده از نقطه تماس در دایره بزرگ‌تر رسم می‌کنیم، با به‌کاربردن قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه HO_1O_2 ، طول $O_2H = T_1T_2$ به‌دست می‌آید، هم‌چنین اگر زاویه مماس مشترک خارجی با خط‌المركزین باشد، داریم:





$$T_1T_2 = \sqrt{d^2 - (R_1 - R_2)^2} \text{ و } \sin \alpha = \frac{R_1 - R_2}{d}$$

۲ برای محاسبه طول مماس مشترک داخلی دو دایره، مطابق شکل، از مرکز دایره کوچک‌تر، عمودی بر امتداد شعاع گذرنده از نقطه تماس در دایره بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. با به کار بردن قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه $H'O_1O_2$ ، طول $O_2H' = T_1'T_2'$ به دست می‌آید، هم‌چنین اگر β زاویه مماس مشترک داخلی با خط‌المركزین باشد، داریم:

$$T_1'T_2' = \sqrt{d^2 - (R_1 + R_2)^2} \text{ و } \sin \beta = \frac{R_1 + R_2}{d}$$

رابطه‌های طولی وترها و مماس‌های متقاطع

۵۹- دایره (O, R) و نقطه M را در خارج آن در نظر می‌گیریم. دایره‌ای به قطر OM ، دایره C را در دو نقطه A و B قطع می‌کند، کدام گزینه نادرست است؟

(مرتبط با صفحه ۱۹ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۲۰ اسفند ۹۵)

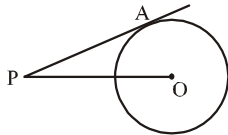
(۲) OM نیمساز زاویه AMB است.

(۱) مثلث OAM متساوی‌الساقین است.

(۴) AB بر OM عمود است.

(۳) MA بر دایره C مماس است.

(مرتبط با صفحه ۱۹ کتاب درسی) (سراسری ریاضی - ۷۶)



۶۰- در شکل مقابل PO برابر ۵ و شعاع دایره برابر واحد است، طول PA کدام است؟

(۱) $6\sqrt{2}$

(۲) $5\sqrt{2}$

(۳) $2\sqrt{5}$

(۴) $2\sqrt{6}$

۶۱- فاصله دورترین نقطه دایره از نقطه P برابر ۹ سانتی‌متر و فاصله P تا مرکز دایره $\frac{13}{4}$ سانتی‌متر است. طول مماس مرسوم از نقطه P بر دایره کدام است؟

(مرتبط با صفحه ۱۹ کتاب درسی) (آزاد ریاضی - ۷۴)

(۱) $3\sqrt{2}$

(۲) ۶

(۳) $\sqrt{13}$

(۴) $\sqrt{6}$

۶۲- کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقطه A از محیط دایره (C) برابر ۵ و ۹ است. طول مماسی که از نقطه A بر دایره رسم شده است، چند برابر شعاع دایره است؟

(مرتبط با صفحه ۱۹ کتاب درسی) (آزاد ریاضی - ۸۹)

(۱) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

(۲) $3\sqrt{5}$

(۳) $6\sqrt{5}$

(۴) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

۶۳- مجموعه همه نقاطی که بتوان از آن نقاط مماس‌هایی به طول L بر دایره مفروض رسم کرد، عبارت است از:

۶۴- در مثلث ABC ($AB = AC$)، دایره‌ای در B و C بر ساق‌ها مماس است. اگر $BC = 6$ و ارتفاع $AH = 4$ باشد، شعاع این دایره، کدام است؟

(مرتبط با کار در کلاس صفحه ۲۰ کتاب درسی) (سراسری خارج کشور ریاضی - ۹۵)

(۱) $3/25$

(۲) $3/5$

(۳) $2/75$

(۴) $4/5$

۶۵- از نقطه M واقع در خارج دایره‌ای به شعاع ۴ واحد، دو مماس MA و MB بر دایره رسم شده است. اگر فاصله نقطه M تا نزدیک‌ترین نقاط دایره $4(\sqrt{2} - 1)$ باشد، فاصله مرکز دایره از وتر AB کدام است؟

(مرتبط با کار در کلاس صفحه ۲۰ کتاب درسی) (سراسری ریاضی - ۸۸)

(۱) $\sqrt{2}$

(۲) ۲

(۳) $2\sqrt{2}$

(۴) ۳

۶۶- دو دایره هم مرکز به شعاع‌های ۴ و ۵ مفروض‌اند. مساحت مستطیلی که در دایره بزرگ محاط بوده و دو ضلع مقابلش بر دایره کوچک‌تر مماس است، کدام است؟

(مرتبط با صفحه ۱۹ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۸۴)

(۱) ۱۲

(۲) ۲۴

(۳) ۴۸

(۴) ۹۶

۶۷- مربع ABCD به ضلع ۴ واحد مفروض است. شعاع دایره گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟

(مرتبط با صفحه ۱۹ کتاب درسی) (سراسری خارج کشور ریاضی - ۹۵)

- (۱) $2/\sqrt{5}$ (۲) $2/\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۳

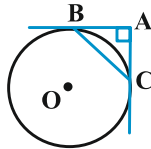
۶۸- از نقطه P دو مماس عمود بر هم بر دایره‌ای به شعاع ۲ رسم شده است، سطح بین دو مماس و محیط دایره کدام است؟

(مرتبط با کار در کلاس صفحه ۲۰ کتاب درسی) (آزاد ریاضی - ۸۱)

- (۱) $4 - \pi$ (۲) $2\pi - 4$ (۳) $4 - \frac{\pi}{2}$ (۴) $2 - \frac{\pi}{2}$

۶۹- مطابق شکل زیر، از نقطه A، دو مماس عمود بر هم بر دایره $C(O, 3\sqrt{2})$ رسم شده است. اندازه وتر BC، کدام است؟

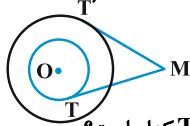
(مرتبط با کار در کلاس صفحه ۲۰ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۸۶)



- (۱) ۵ (۲) $4\sqrt{2}$ (۳) ۶ (۴) $6\sqrt{2}$

۷۰- دو دایره هم مرکز به شعاع‌های R و ۲R مفروض‌اند. مطابق شکل، از نقطه M دو مماس MT و MT' بر دو دایره رسم شده است. قدرمطلق تفاضل

(مرتبط با صفحه ۱۹ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۸۶)



- (۱) $3R^2$ (۲) $2R^2$ (۳) R^2 (۴) $\sqrt{5}R^2$

۷۱- دو خط MT و MT' در نقاط T و T' بر دایره $C(O, 4)$ مماس‌اند. اگر $OM = 8$ ، آنگاه، طول وتر TT' کدام است؟

(مرتبط با صفحه ۱۹ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۸۶)

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{3}$

۷۲- دایره (C) به شعاع ۲ از نقطه A با زاویه 60° رؤیت می‌شود. اگر O مرکز دایره و T نقطه تماس خطی که از A می‌گذرد با دایره باشد، مساحت

(مرتبط با کار در کلاس صفحه ۲۰ کتاب درسی) (آزاد ریاضی - ۸۵)

مثلث AOT کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $8\sqrt{3}$

۷۳- دایره‌ای به شعاع ۶ از نقطه A، به زاویه 120° رؤیت می‌شود. اگر O مرکز دایره و AT مماس بر این دایره باشد، مساحت مثلث OAT کدام است؟

(مرتبط با کار در کلاس صفحه ۲۰ کتاب درسی) (آزاد ریاضی - ۸۹)

- (۱) $6\sqrt{3}$ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) $4\sqrt{3}$ (۴) $12\sqrt{3}$

۷۴- دایره $C(O, \sqrt{3})$ مفروض است. مجموعه همه نقاطی که مماس‌های رسم شده از این نقطه بر دایره C با هم زاویه 60° بسازند، کدام است؟

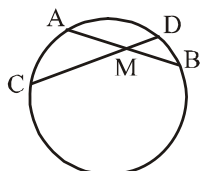
(مرتبط با کار در کلاس صفحه ۲۰ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۸۶)

- (۱) دایره $C'(O, 2\sqrt{3})$ (۲) دایره $C'(O, 4\sqrt{3})$

- (۳) دایره $C'(O, 3)$ (۴) دایره $C'(O, 6)$

(مرتبط با تمرین ۱ صفحه ۲۳ کتاب درسی) (آزاد ریاضی - ۷۶)

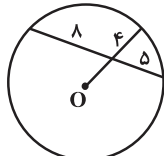
۷۵- در شکل مقابل $MA = 6$ ، $MB = 3$ و $MD = 2/5$ ، طول MC کدام است؟



- (۱) $17/11$ (۲) $6/9$ (۳) ۷ (۴) $7/2$

(مرتبط با تمرین ۱ صفحه ۲۳ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۹۵)

۷۶- در شکل زیر، O مرکز دایره است. شعاع دایره کدام است؟



- (۱) ۷ (۲) $7/5$ (۳) ۸ (۴) $8/5$



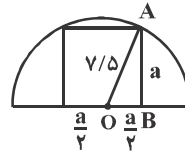
پایخ نامہ



دایره

۱- گزینه «۴»

مطابق شکل، در مثلث قائم‌الزاویه OAB داریم:



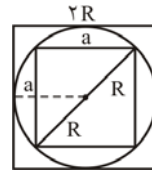
$$a^2 + \frac{a^2}{4} = (y/5)^2 \Rightarrow \frac{5a^2}{4} = (y/5)^2$$

$$a^2 = \frac{4 \times y/5 \times y/5}{5} = \frac{225}{5} = 45$$

مساحت مربع $a^2 = 45$

۲- گزینه «۴»

با توجه به شکل، اگر ضلع مربع کوچک‌تر a باشد، آن‌گاه طبق رابطه فیثاغورس داریم:



$$a^2 + a^2 = 4R^2 \Rightarrow 2a^2 = 64$$

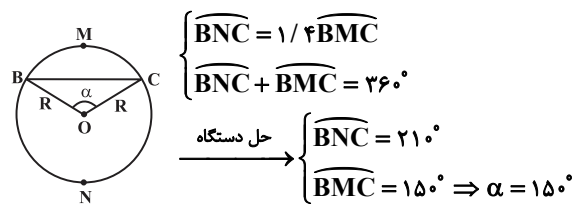
$$مساحت مربع کوچک = a^2 = 32$$

$$مساحت مربع بزرگ = (8)^2 = 64$$

$$سطح هاشور خورده = 64 - 32 = 32$$

۳- گزینه «۴»

طبق فرض می‌دانیم:



$$\widehat{BNC} = 1/4 \widehat{BMC}$$

$$\widehat{BNC} + \widehat{BMC} = 360^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \widehat{BNC} = 210^\circ$$

$$\widehat{BMC} = 150^\circ \Rightarrow \alpha = 150^\circ$$

از سال قبل می‌دانیم:

$$S(\triangle OBC) = \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin \alpha$$

$$\Rightarrow S(\triangle OBC) = \frac{1}{2} R \times R \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} R^2$$

پس نسبت مساحت دایره به مساحت مثلث OBC برابر است با

$$\frac{\pi R^2}{\frac{1}{4} R^2} = 4\pi$$

۴- گزینه «۲»

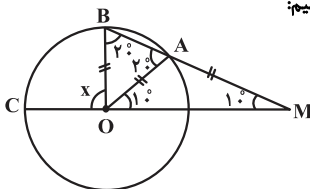
از مرکز دایره به A پاره‌خطی رسم می‌کنیم:

OA برابر شعاع دایره و در نتیجه دو

مثلث OAB و OAM

متساوی‌الساقین هستند، طبق شکل

داریم:



$$\triangle OAM : OA = AM \Rightarrow \hat{AOM} = 10^\circ$$

$$\Rightarrow \text{زاویه خارجی } \hat{BAO} = 10^\circ + 10^\circ = 20^\circ$$

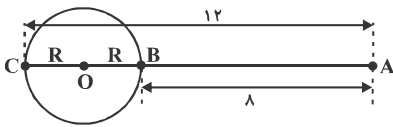
$$\triangle OAB : OB = OA \Rightarrow \hat{OBM} = 20^\circ$$

$$\Rightarrow \text{زاویه خارجی } x = \hat{BOC} = \hat{OBA} + \hat{AMO}$$

$$= 20^\circ + 10^\circ = 30^\circ$$

۵- گزینه «۲»

با توجه به شکل داریم:

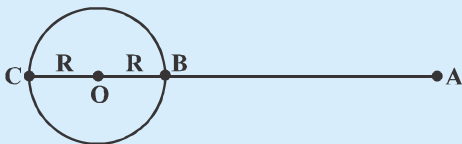


$$BC = 2R = AC - AB$$

$$\Rightarrow BC = 12 - 8 = 4 \Rightarrow R = 2$$

نکته

اگر نقطه A، خارج دایره C(O,R) واقع باشد، مطابق شکل زیر، بیش‌ترین و کم‌ترین فاصله نقطه A از نقاط واقع بر دایره، به ترتیب برابر است با $AC = OA + R$ و $AB = OA - R$.



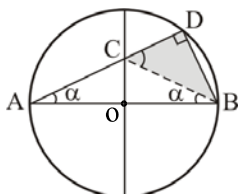
۶- گزینه «۳»

چون دو قطر بر هم عمودند، پس

$\hat{A} = \hat{B} = \alpha$ و $AC = CB$

زاویه C زاویه خارجی مثلث ACB است،

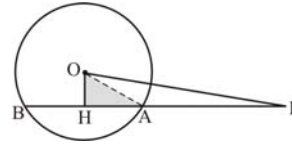
پس: $\hat{C} = 2\alpha$.



$$\triangle CDB : \cos 2\alpha = \frac{CD}{CB} = \frac{CD}{AC}$$

۷- گزینه «۴»

می دانیم که اگر از مرکز یک دایره بر هر وتر آن عمود کنیم، آن را نصف می کند.

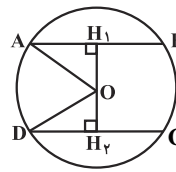


$$HB = HA = \frac{AB}{2} = 3$$

در مثلث قائم الزاویه OHA، بنابر قضیه فیثاغورس داریم:

$$\Delta OHA : \hat{H} = 90^\circ \Rightarrow OA^2 = OH^2 + HA^2 = 1^2 + 3^2 = 10 \\ \Rightarrow OA = R = \sqrt{10}$$

۸- گزینه «۲»



$$OH_1 = \sqrt{OA^2 - AH_1^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2} = 4$$

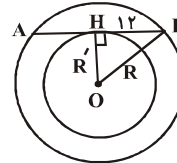
$$OH_2 = \sqrt{OD^2 - DH_2^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2} = 3$$

$$\Rightarrow H_1H_2 = OH_1 + OH_2 = 4 + 3 = 7$$

مساحت ذوزنقه ABCD برابر است با:

$$S_{ABCD} = \frac{H_1H_2 \times (AB + CD)}{2} = \frac{7 \times (6 + 8)}{2} = 49$$

۹- گزینه «۲»



در مثلث قائم الزاویه OHB داریم:

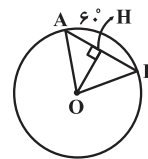
$$R^2 - R'^2 = HB^2$$

$$\Rightarrow R^2 - R'^2 = 144$$

$$\pi R^2 - \pi R'^2 = 144\pi$$

۱۰- گزینه «۲»

مثلث OAB متساوی الاضلاع است $\left. \begin{array}{l} \widehat{AOB} = \widehat{AB} = 60^\circ \\ OA = OB = R = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow$



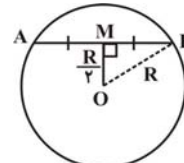
$$\Rightarrow HB = AH = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\Rightarrow OH = \sqrt{OB^2 - HB^2} = 4\sqrt{3}$$

۱۱- گزینه «۱»

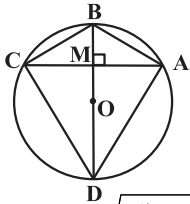
کوتاه ترین وترى که از نقطه M داخل دایره C(O و R) رسم می شود، وترى است که بر MO عمود است. مطابق شکل، چون MO بر AB عمود

است، در نتیجه $AM = MB = \frac{AB}{2}$ داریم:



$$\hat{M} = 90^\circ \Rightarrow MB^2 = OB^2 - MO^2 \\ \Rightarrow \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow \frac{AB^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \\ AB = \sqrt{3}R$$

۱۲- گزینه «۲»



کوچک ترین وتر که از نقطه M در دایره رسم می شود، وترى است که از نقطه M، بر MO یا BD قطر عمود شده باشد، طول این وتر برابر است با:

$$AC = 2\sqrt{R^2 - OM^2} = 2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right) = \sqrt{3}R$$

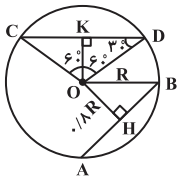
بزرگ ترین وترى که از نقطه M می گذرد، همان قطر BD است.

$$BD = 2R$$

دو قطر چهارضلعی ABCD بر هم عمودند، بنابراین مساحت آن برابر نصف حاصل ضرب دو قطر آن است.

$$S(ABCD) = \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times \sqrt{3}R \times 2R = \sqrt{3}R^2$$

۱۳- گزینه «۱»



مطابق شکل از O به CD عمود می کنیم. داریم:

$$\Delta OKD : KD = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

$$CD = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}R = \sqrt{3}R$$

با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث OHB:

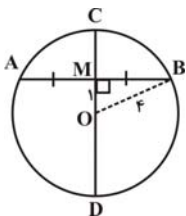
$$BH^2 = R^2 - \left(\frac{0}{\sqrt{3}}R\right)^2 = 0/3R^2 \Rightarrow BH = 0/6R$$

$$\Rightarrow AB = 2 \times 0/6R = 1/2R$$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{1/2R}{\sqrt{3}R} = \frac{1/2\sqrt{3}}{3} = 0/4\sqrt{3}$$

پس:

۱۴- گزینه «۳»



بزرگ ترین وتر، قطر گذرنده از M و کوتاه ترین وتر، وترى مانند AB است که بر MO عمود باشد پس اندازه بزرگ ترین وتر برابر است با $8 = 2 \times 4$ و برای به دست آوردن اندازه کوتاه ترین وتر داریم:

$$\Delta MOB : \hat{M} = 90^\circ \Rightarrow MB^2 = OB^2 - MO^2$$

$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 4^2 - 1 = 15 \Rightarrow AB = 2\sqrt{15}$$

یعنی طول تمام وترهای گذرنده از نقطه M درون این دایره بین $2\sqrt{15}$ و ۸ هستند، پس وترى به طول دو، گذرنده از نقطه M وجود ندارد.