فصل

ترسیم‌های هندسی و استدلال

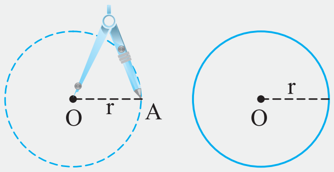
فصل اول

ترسیم‌های هندسی و استدلال

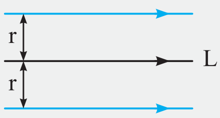
درسنامهٔ ۱

فاصله‌های مشخص در صفحه

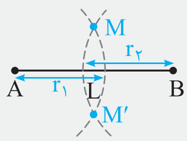
① برای پیدا کردن نقاطی از صفحه که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ معلوم r هستند، کافی است دایره‌ای به مرکز O و شعاع r رسم کنیم:



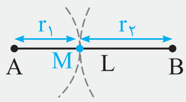
② برای پیدا کردن نقاطی از صفحه که از خط L به فاصلهٔ معلوم r هستند، کافی است دو خط به موازات L و به فاصلهٔ r در طرفین L رسم کنیم:



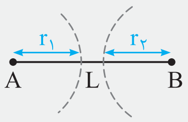
نکته: اگر در مسأله‌ای دنبال نقاطی هستیم که دارای دو ویژگی می‌باشند، باید نقاط مطلوب هر ویژگی را جداگانه رسم کنیم، آن‌گاه محل تلاقی آن‌ها، در صورت وجود، جواب مسأله است. مثلاً اگر دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ L از هم قرار داشته باشند، برای پیدا کردن نقاطی که به فاصلهٔ r_1 از A و به فاصلهٔ r_2 از B باشند، کافی است یک بار به مرکز A و به شعاع r_1 و بار دیگر به مرکز B و شعاع r_2، دایره‌ای رسم کنیم. محل برخورد این دو دایره، در صورت وجود، نقاط مطلوب را مشخص می‌کند.



$r_1 + r_2 > L \Rightarrow$ دو نقطه

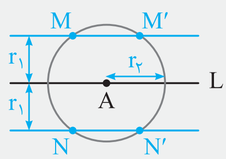


$r_1 + r_2 = L \Rightarrow$ یک نقطه

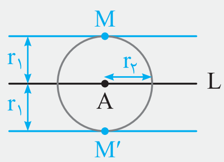


$r_1 + r_2 < L \Rightarrow$ صفر نقطه

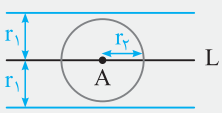
یا مثلاً اگر نقطهٔ A روی خط L باشد و بخواهیم نقاطی را پیدا کنیم که به فاصلهٔ r_1 از خط L و به فاصلهٔ r_2 از نقطهٔ A باشند، کافی است دو خط به موازات L و به فاصلهٔ r_1 از L در طرفین L درنظر بگیریم. سپس دایره‌ای به مرکز A و شعاع r_2 رسم کنیم. محل برخورد دایره و دو خط مفروض در صورت وجود، نقاط مطلوب را مشخص می‌کند.



$r_2 > r_1 \Rightarrow$ چهار نقطه



$r_2 = r_1 \Rightarrow$ دو نقطه



$r_2 < r_1 \Rightarrow$ صفر نقطه

۱- نقطهٔ ثابت A در صفحه مفروض است. نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از A بیشتر از ۳ و کم‌تر از ۵ می‌باشند، چگونه‌اند؟

۱) روی دایره‌ای به شعاع ۴ و مرکز A قرار دارند.
۲) در ناحیه‌ای به مساحت 16π قرار دارند.
۳) چهار نقطه با این شرایط وجود دارد.
۴) روی دو دایره به مرکز A و شعاع‌های ۳ و ۵ قرار دارند.

۲- مرکز تمام دایره‌هایی به شعاع ۲ که در یک صفحه قرار دارند و از نقطهٔ ثابت A می‌گذرند، چگونه‌اند؟

۱) روی دو خط راست گذرا از A می‌باشند.
۲) روی دو خط راست و به فاصلهٔ ۴ از هم قرار دارند.
۳) روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ قرار دارند.
۴) روی دو دایره به مرکز A و شعاع‌های ۲ و ۴ قرار دارند.

۳- دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۵ از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ ۳ واحد از A و به فاصلهٔ ۲ واحد از B قرار داشته باشد؟

۱) ۱
۲) صفر
۳) ۲
۴) بی‌شمار

۴- دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۶ واحد از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ ۲ واحد از هر کدام از نقاط A و B باشد؟

۱) ۱ ۲) صفر
۳) بی‌شمار ۴) ۲

۵- دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۵ از هم واقع‌اند. دو نقطهٔ M و M' به فاصلهٔ ۳ از A و m از B قرار دارند. چند مقدار صحیح برای m وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۷

۶- دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۴ از هم قرار دارند. فقط یک نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ ۳ از A و $2a-1$ از B قرار دارد. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱ یا ۴

۷- نقاط A و B به فاصلهٔ ۵ از هم قرار دارند. نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ ۳ و ۴ از این نقاط می‌باشند را معلوم کرده و از آن‌ها به A و B وصل می‌کنیم. مجموع مساحت شکل‌های حاصل کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۱۸

۸- روی محیط یک مربع، m نقطه وجود دارد که از مرکز مربع به فاصلهٔ معلوم L می‌باشند، m کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۸
۳) ۲ ۴) ۱

۹- روی محیط مربعی به ضلع ۲ واحد، دو نقطه وجود دارد که به فاصلهٔ ۲/۵ واحد از یک رأس مربع قرار دارند. فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس مربع تا هر یک از این نقاط کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱۰- نقطهٔ M درون مربع ABCD به ضلع ۴ قرار دارد. اگر نقاط A و B و وسط ضلع CD از نقطهٔ M به یک فاصله باشند، فاصلهٔ M تا مرکز مربع کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲/۵

۱۱- مربع ABCD به ضلع ۳ مفروض است. چند نقطه روی محیط مربع ABCD وجود دارد که فاصله‌اش از قطر AC برابر $\frac{\pi}{۲}$ باشد؟

۱) ۴ ۲) ۲
۳) ۱ ۴) صفر

۱۲- نقطهٔ O روی خط L قرار دارد. نقاطی از صفحه که از نقطهٔ O به فاصلهٔ $\sqrt{۲}$ و از خط L به فاصلهٔ m می‌باشند، رأس‌های یک مربع هستند. m کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۱

۱۳- نقطهٔ A روی خط d و نقطهٔ B خارج خط d و به فاصلهٔ ۴ از خط d قرار دارند. اگر نقاط C و D روی خط d به‌گونه‌ای باشند که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ A برابر ۳ و از نقطهٔ B برابر m باشد، m کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۱۴- نقطهٔ A و خط d مفروض‌اند. حداکثر چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۵ و از خط d به فاصلهٔ ۲/۵ می‌باشند؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵- دو خط موازی d و d' به فاصلهٔ ۲ از هم در صفحه مفروض‌اند. نقطهٔ A در صفحه به گونه‌ای است که روی این دو خط قرار ندارد. اگر سه نقطه روی این دو خط باشند که به فاصلهٔ ۳ از نقطهٔ A باشند، مجموع فاصله‌های نقطهٔ A تا این دو خط کدام است؟

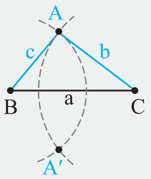
۱) ۱ ۲) ۵
۳) ۴ ۴) این وضعیت امکان ندارد.

۱۶- نقطهٔ A خارج خط d مفروض است. اگر سه نقطه در صفحه وجود داشته باشند که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ و از خط d به فاصلهٔ ۲ باشند، چند نقطه روی خط d وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۱ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۴

درسنامهٔ ۲

رسم مثلث (۱)



① رسم مثلث با معلوم بودن سه ضلع

اگر a ، b و c اندازهٔ اضلاع مثلث ABC باشند، برای رسم آن ابتدا پاره‌خط $BC = a$ را رسم می‌کنیم. سپس یک بار به مرکز C و شعاع b و بار دیگر به مرکز B و شعاع c دایره‌ای رسم می‌کنیم. محل تلاقی این دو دایره، رأس A از مثلث ABC است.

نکته: همان‌طور که می‌بینید دو دایره همدیگر را در دو نقطهٔ A و A' قطع می‌کنند اما مثلث $A'BC$ با مثلث ABC هیچ فرقی ندارد و در واقع یکی هستند. به قول معروف این دو مثلث هم‌نهشت می‌باشند. به‌طور کلی **با معلوماتی که دو مثلث هم‌نهشت می‌شوند (ض‌ض‌ض ـ ض‌زض ـ زض‌ز) بیشتر از یک مثلث منحصر به فرد نمی‌توان رسم کرد.**

شرط وجود مثلث: سه عدد حقیقی مثبت a ، b و c داده شده‌اند. اگر هر یک از این عددها از مجموع دو عدد دیگر کوچک‌تر باشد، آن‌گاه مثلثی وجود دارد که اضلاع آن a ، b و c هستند. مثلاً مثلثی وجود دارد که طول اضلاع آن ۱۰، ۱۷ و ۱۲ باشد، زیرا:

$$۱۰ < ۱۷ + ۱۲ \quad , \quad ۱۷ < ۱۲ + ۱۰ \quad , \quad ۱۲ < ۱۷ + ۱۰$$

توجه: اگر اندازه‌های داده شده، عددی معلوم باشند (پارامتری نباشند) فقط کافی است بزرگ‌ترین عدد از مجموع دو عدد دیگر کوچک‌تر باشد. چون اگر این نامساوی برقرار باشد، مطمئناً دو نامساوی دیگر نیز برقرار هستند. مثلاً چون $۱۷ < ۱۲ + ۱۰$ می‌باشد، پس مثلثی با اضلاع ۱۰، ۱۷ و ۱۲ وجود دارد.

۱۷- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای وتر آن مشخص است. با معلوم بودن اندازهٔ کدام جزء دیگر، این مثلث قابل رسم نیست؟

۱) ارتفاع وارد بر وتر ۲) ارتفاع وارد بر ضلع قائم ۳) میانهٔ وارد بر وتر ۴) میانهٔ وارد بر ضلع قائم

۱۸- کدام دسته از اعداد زیر می‌تواند سه ضلع یک مثلث باشد؟

۱) ۷,۵,۳ ۲) ۶,۳,۲ ۳) ۳,۲,۱ ۴) ۴,۳,۱

۱۹- در مثلث ABC، $b = ۱۲$ و $c = ۵$ است. حدود ضلع BC کدام است؟

۱) $a < ۱۷$ ۲) $۷ < a < ۱۷$ ۳) $۱۰ < a < ۱۷$ ۴) $۵ < a < ۱۵$

۲۰- در مثلث ABC طول اضلاع $2x$، $x - ۱$ و ۱۷ می‌باشد. x چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۲۱- در بین مثلث‌هایی با اضلاع ۳/۵، ۶ و $5x + ۱$ که اندازهٔ محیط آن‌ها مقداری صحیح است، بیشترین مقدار محیط برابر چند می‌باشد؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

۲۲- مثلثی با اضلاع ۲، ۵ و $2x - ۱$ که x در آن عددی صحیح می‌باشد، چگونه است؟

۱) قائم‌الزاویه ۲) متساوی‌الساقین ۳) نامشخص ۴) قابل رسم نیست.

۲۳- سه پاره‌خط به طول‌های $4x - ۴$، $x + ۷$ و $6x$ اضلاع مثلثی هستند، مقادیر x به کدام صورت است؟

۱) $\frac{۱۱}{۹} < x < ۳$ ۲) $\frac{۵}{۳} < x < ۳$ ۳) $۲ < x < ۳$ ۴) $\frac{۱۱}{۹} < x < ۴$

۲۴- اگر برای رسم مثلثی با اضلاع $x + ۱$، $2x + ۴$ و $4x - ۳$ حدود x به‌صورت $\alpha < x < \beta$ باشد، مقدار $\frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۵- به ازای چند x صحیح، مثلث ABC به اضلاع ۸، $4x - ۱$ و $2x + ۳$ و مثلث $A'B'C'$ به اضلاع $3x - ۲$، $2x + ۵$ و ۴ هر دو قابل رسم هستند؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۳

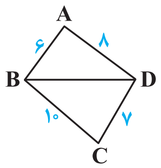
۲۶- محیط مثلثی برابر ۲۴ می‌باشد. کدام گزینهٔ زیر نمی‌تواند طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث باشد؟

۱) ۱۰/۵ ۲) ۹ ۳) ۱۳ ۴) ۱۰

۲۷- محیط یک مثلث متساوی‌الساقین برابر ۱۶ می‌باشد. طول ساق مثلث چند مقدار صحیح می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۸- در چهارضلعی شکل مقابل، طول قطر BD چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟



۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۲۹- با معلومات a و h_c و دانستن زاویهٔ B چند مثلث ناهم‌نهشت می‌توان رسم کرد؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) صفر یا بی‌شمار

۳۰- چند مثلث ABC با معلوم بودن $b=۴$، $c=۷$ و $\hat{A}=۶۰^\circ$ می‌توان رسم کرد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۱- چند مثلث ABC با معلوم بودن $b=۴$، $\hat{B}=۶۰^\circ$ و $\hat{C}=۷۵^\circ$ قابل رسم است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۲- چند مثلث می‌توان رسم کرد که دو زاویهٔ آن ۳۵° و ۴۵° و یک ضلع آن ۸ باشد؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۳

۳۳- با معلومات $AB=۶$، $AC=۶$ و $\hat{B}=۴۵^\circ$ چند مثلث مشخص می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۳۴- در رسم مثلث ABC با معلوم بودن $a=۵$، $h_b=۴$ و $h_a=۶$، تعداد جواب‌های غیرهم‌نهشت کدام است؟

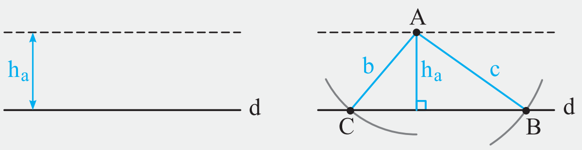
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) صفر

درسنامهٔ ۳

رسم مثلث (۲)

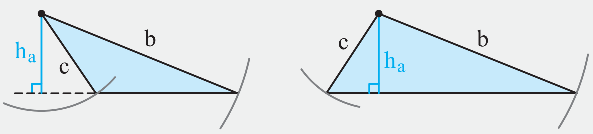
۴) رسم مثلث با معلوم بودن دو ضلع و ارتفاع وارد بر ضلع سوم

اگر b و c دو ضلع مثلث و h_a ارتفاع وارد بر ضلع a در مثلث ABC داده شده باشند، ابتدا خط d را رسم می‌کنیم، چون فاصلهٔ رأس A از ضلع BC برابر h_a می‌باشد، پس A روی خطی به موازات d و به فاصلهٔ h_a از آن است. روی این خط نقطهٔ دلخواه A را معلوم می‌کنیم. حال به مرکز A، یک بار به شعاع b و بار دیگر به شعاع c یک کمان رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطهٔ C و B قطع کنند. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC، مثلث مطلوب است.

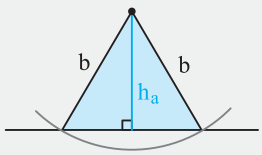


با توجه به اندازه‌های b، c و h_a یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد:

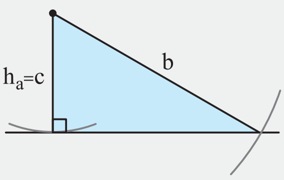
الف) اگر $b \neq c$ باشد، چون $h_a < b$ و $h_a < c$ می‌باشد، دو مثلث حاصل می‌شود که یکی حاده‌الزاویه و دیگری منفرجه‌الزاویه است:



ب) اگر $b=c$ و $h_a < b = c$ باشد، یک مثلث متساوی‌الساقین قابل رسم است:



پ) اگر $b \neq c$ و h_a برابر ضلع کوچک‌تر باشد، یک مثلث قائم‌الزاویه قابل رسم است:



غیر از موارد فوق، هیچ مثلثی قابل رسم نیست.

۳۵- در رسم مثلث ABC با معلومات $c=۶$، $b=۱۰$ و $h_a=۴$ چند مثلث قابل رسم است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) بیش از ۲

۳۶- در رسم مثلث ABC با معلومات $a=۳$، $b=۱$ و $h_c=۲$ چند مثلث قابل رسم است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیش از ۲

۳۷- چند مثلث با اضلاع ۱۰ و ۶ و اندازهٔ ارتفاع ۸ وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) بیش از ۲

۳۸- در رسم مثلث ABC با معلومات $c = ۲x + ۵$، $b = x + ۶$ و $h_a = ۲x + ۳$، یک مثلث قائم‌الزاویه حاصل شده است. طول وتر این مثلث کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۳۹- در رسم مثلث ABC با معلومات $c = ۱۴$، $b = ۱۰$ و h_a دو مثلث متمایز ایجاد شده است. بیشترین مقدار صحیح h_a کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۴۰- در رسم مثلث ABC با معلوم بودن $b = ۸$، $c = x + ۳$ و $h_b = ۲x - ۳$ یک مثلث قابل رسم است. x کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۴۱- با معلومات $a = ۱۰$، $m_a = ۶$ و $h_a = ۵$، چند مثلث ناهم‌نهشت می‌توان رسم کرد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۴۲- آیا با معلومات $a = ۸$، $m_a = ۱۳$ و $h_a = ۵$، مثلث ABC قابل رسم است؟ در صورت قبول، فاصلهٔ دورترین رأس از ارتفاع کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) قابل رسم نیست.

۴۳- آیا می‌توان با معلومات $m_a = ۳$، $a = ۸$ و $h_a = ۳$ مثلثی رسم کرد؟ در صورت قبول، نسبت ضلع بزرگ‌تر به ضلع کوچک‌تر در این مثلث کدام است؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۱/۵ ۳) ۱/۶ ۴) قابل رسم نیست.

۴۴- آیا می‌توان با معلومات $h_a = ۷$، $m_a = ۲۵$ و $a = ۴۸$ مثلثی رسم کرد؟ در صورت قبول، نوع مثلث کدام است؟

۱) قائم‌الزاویه ۲) متساوی‌الساقین ۳) نامشخص ۴) قابل رسم نیست.

۴۵- در مثلثی $h_a = ۸$، $m_a = ۱۰$ و $c = ۱۷$ می‌باشند. طول ضلع a کدام می‌تواند باشد تا مثلث قابل رسم باشد؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۴۶- آیا می‌توان با معلومات $h_a = ۸$، $c = ۱۰$ و $m_a = ۱۷$ مثلثی رسم کرد؟ در صورت قبول، مقدار a کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱۸ ۲) ۳۰ ۳) ۴۲ ۴) قابل رسم نیست.

۴۷- آیا می‌توان با معلومات $m_a = ۸$، $b = ۴$ و $h_a = ۵$ مثلثی رسم کرد؟ در صورت قبول، فاصلهٔ رأس B از h_a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۸ ۳) ۱۱ ۴) قابل رسم نیست.

۴۸- مثلث ABC با معلوم بودن ضلع $b = ۹$ و میانهٔ $m_a = ۶$ و ضلع a قابل رسم است. a کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۶ ۳) ۲۰ ۴) ۶

۴۹- در رسم مثلث ABC با معلوم بودن دو ضلع $b = ۷$ و $c = ۵$ و میانهٔ $m_a = ۴$ با خط‌کش و پرگار، کدام نتیجه حاصل می‌شود؟

۱) غیرقابل رسم ۲) جواب منحصربه‌فرد ۳) دو جواب متمایز ۴) فاقد جواب

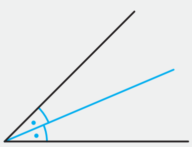
۵۰- با معلومات $c = ۷$، $b = ۵$ و $m_a = ۲x - ۱$ مثلث ABC قابل رسم است. x چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

درسنامهٔ ۴

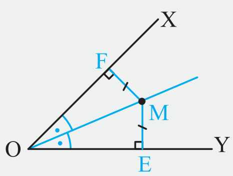
نیمساز

نیمساز زاویه: نیمساز یک زاویه، خطی است که زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.



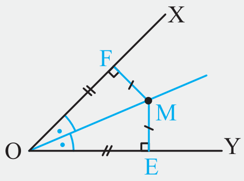
ویژگی‌های نیمساز یک زاویه

① هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع زاویه به یک فاصله می‌باشد و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.



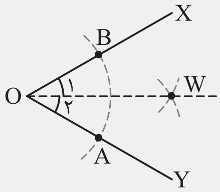
$\boxed{\text{M روی نیمساز } X\hat{O}Y \text{ است.} \Leftrightarrow ME = MF}$

۲ اگر از نقطه‌ای دلخواه روی نیمساز، دو عمود بر دو ضلع زاویه رسم کنیم، پاره‌خط‌هایی که روی دو ضلع زاویه ایجاد می‌شوند، با هم برابرند.

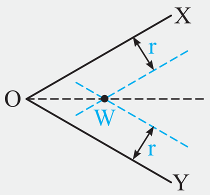


روش رسم نیمساز یک زاویه

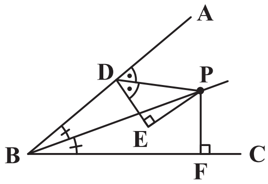
۱ برای رسم نیمساز زاویهٔ XOY، به مرکز O و شعاع دلخواه کمانی رسم می‌کنیم تا اضلاع زاویه را در A و B قطع کند. دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کرده و به مراکز A و B دو کمان می‌زنیم تا همدیگر را در W قطع کنند. از W به O وصل می‌کنیم. OW نیمساز زاویهٔ XOY است، زیرا مثلث‌های OAW و OBW به حالت سه ضلع برابر هم‌نهشت می‌باشند، بنابراین $\widehat{O}_{۱} = \widehat{O}_{۲}$ است.



۲ برای رسم نیمساز زاویهٔ XOY، دو خط به فاصلهٔ r از هر یک از اضلاع زاویه رسم می‌کنیم. این دو خط همدیگر را در نقطهٔ W قطع می‌کنند. از O به W وصل می‌کنیم. OW نیمساز زاویه می‌باشد، زیرا فاصلهٔ W تا دو ضلع زاویه برابر r است، پس روی نیمساز قرار دارد.

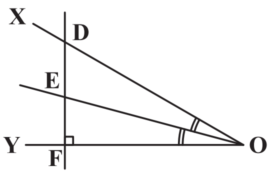


۵۱- در شکل مقابل، نقطهٔ P روی نیمساز زاویه‌های ABC و ADE قرار دارد. اگر PF = ۵ باشد، طول پاره‌خط PE کدام است؟



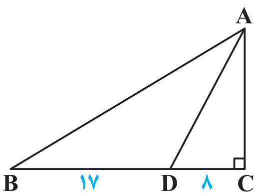
۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۵۲- در شکل مقابل، نیمساز زاویهٔ XOY رسم شده است. کدام گزینه درست است؟



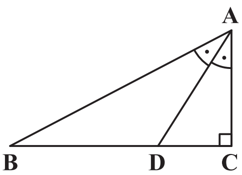
۱) EF < DE
۲) EF = DE
۳) EF = ۲DE
۴) EF > DE

۵۳- در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل مقابل، AD نیمساز زاویهٔ A می‌باشد. در این مثلث، وتر چند واحد از ضلع کوچک‌تر مثلث، بزرگ‌تر است؟



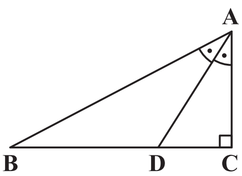
۱) ۱۱
۲) ۱۳
۳) ۹
۴) ۱۵

۵۴- در شکل مقابل، اگر BD = ۱۵ و AB − AC = ۱۲ باشد، طول پاره‌خط DC کدام است؟



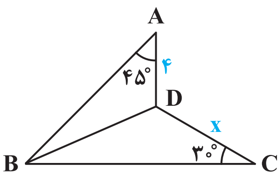
۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

۵۵- در شکل مقابل، مثلث ACB قائم‌الزاویه است. اگر AB = AC + ۸ و BD = DC + ۴ باشد، طول پاره‌خط DC کدام است؟



۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

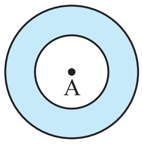
۵۶- در شکل مقابل، BD نیمساز زاویهٔ ABC است. مقدار x کدام است؟



۱) ۶
۲) $۴\sqrt{۲}$
۳) ۵
۴) $۲\sqrt{۶}$

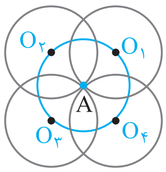
پاسخ‌های تشریحی

۱ ۲ نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از A بیشتر از ۳ است، خارج دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ می‌باشند. هم‌چنین نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از A کم‌تر از ۵ است، درون دایره به مرکز A و شعاع ۵ قرار دارند. پس اشتراک این دو ناحیه به‌صورت ناحیهٔ رنگی مقابل می‌باشد که مساحت آن برابر است با:

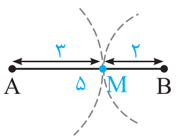


$$S_{\text{رنگی}}=\pi(۵)^{۲}-\pi(۳)^{۲}=۲۵\pi-۹\pi=۱۶\pi$$

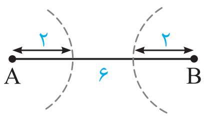
۲ ۳ مرکز هر دایره به شعاع ۲ که از نقطهٔ A می‌گذرد، به فاصلهٔ ۲ از نقطهٔ A قرار دارد. واضح است تمام نقاطی که به فاصلهٔ ۲ از نقطهٔ A می‌باشند روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ هستند. در شکل مقابل $O_۱$، $O_۲$، $O_۳$ و $O_۴$ مرکز دایره‌هایی به شعاع ۲ و گذرا از A می‌باشند که همهٔ مرکزها روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ (دایرهٔ آبی) قرار دارند.



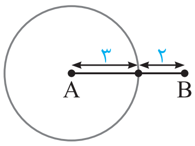
۳ ۱ کافی است یک‌بار به مرکز A و به شعاع ۳ و بار دیگر به مرکز B و شعاع ۲ دایره‌ای رسم کنیم. همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید فقط نقطهٔ M روی هر دو دایره قرار دارد. پس فقط یک نقطه در صفحه وجود دارد.



۴ ۲ نقاطی که به فاصلهٔ ۲ واحد از A قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ واقع‌اند. هم‌چنین نقاطی که به فاصلهٔ ۲ واحد از نقطهٔ B قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۲ می‌باشند. واضح است که این دو دایره همدیگر را قطع نمی‌کنند، پس هیچ نقطه‌ای با شرایط گفته شده وجود ندارد.

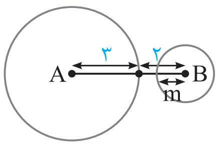


۵ ۳ دو نقطهٔ M و M' حتماً روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ قرار دارند. از طرفی این دو نقطه باید روی دایره‌ای به مرکز B و به شعاع m قرار داشته باشند.

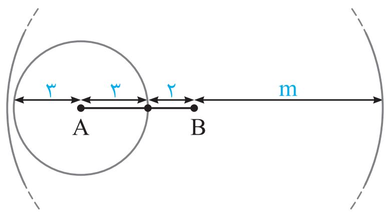


در دو حالت زیر، دایره به مرکز B، دایره به مرکز A را قطع نمی‌کند.

حالت اول: وقتی $m<۲$ باشد:

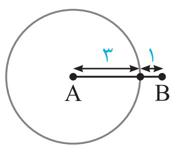


حالت دوم: وقتی $m>۸$ باشد:

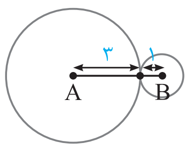


بنابراین اگر $۲<m<۸$ باشد، این دو دایره همدیگر را در دو نقطهٔ M و M' قطع می‌کنند، پس ۵ مقدار صحیح برای m وجود دارد. دقت کنید در حالت $m=۲$ و $m=۸$ دو دایره بر هم مماس شده و فقط یک نقطه یافت می‌شود.

۶ ۴ همهٔ نقاطی که به فاصلهٔ ۳ از A قرار دارند روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ می‌باشند. از طرفی تمام نقاطی که به فاصلهٔ $۲a-۱$ از B قرار دارند روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع $۲a-۱$ واقع‌اند. در دو حالت زیر این دو دایره فقط یک نقطهٔ مشترک خواهند داشت:

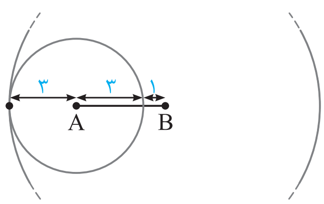


حالت اول:



$$\Rightarrow ۲a-۱=۱ \Rightarrow ۲a=۲ \Rightarrow a=۱$$

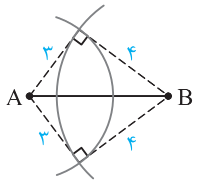
حالت دوم:



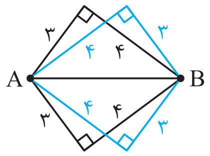
$$\Rightarrow ۲a-۱=۷ \Rightarrow ۲a=۸ \Rightarrow a=۴$$

بنابراین به ازای $a=۱$ و $a=۴$ فقط یک نقطه یافت می‌شود.

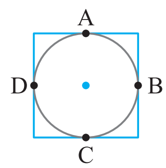
۷ **۳** ابتدا فرض می‌کنیم دنبال نقاطی هستیم که از A به فاصلهٔ ۳ و از B به فاصلهٔ ۴ می‌باشند. بنابراین دو نقطه با این ویژگی‌ها در صفحه معلوم می‌شود که شکل حاصل از وصل کردن این نقاط به A و B دو مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع ۳، ۴ و ۵ می‌باشند. حال ممکن است دو نقطه‌ای که پیدا می‌شوند به فاصلهٔ ۳ از B و به فاصلهٔ ۴ از A باشند، پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر با طول اضلاع ۳، ۴ و ۵ نیز داریم. بنابراین مجموع مساحت چهار مثلث برابر است با:



$$S = ۴ \times \left(\frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۴\right) = ۲۴$$

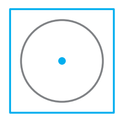


۸ **۲** می‌دانیم تمام نقاطی که به فاصلهٔ معلوم L از مرکز مربع هستند، روی دایره‌ای قرار دارند که مرکز آن، همان مرکز مربع و شعاع آن L می‌باشد. با توجه به L و طول نصف قطر مربع و نصف ضلع مربع، حالات زیر را داریم:



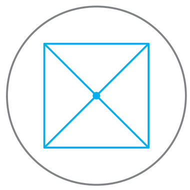
L = نصف ضلع

⇐ ۴ نقطه



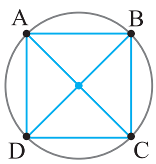
L < نصف ضلع

⇐ هیچ نقطه



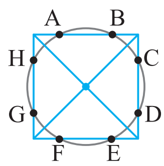
L > نصف قطر

⇐ صفر نقطه



L = نصف قطر

⇐ ۴ نقطه

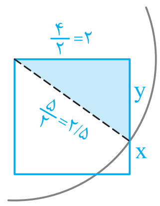


L < نصف قطر

⇐ ۸ نقطه

بنابراین با توجه به توضیحات فوق، m می‌تواند ۸ باشد.

۹ **۲** برای پیدا کردن دو نقطهٔ مطلوب، کافی است به مرکز رأس مربع و شعاع ۲/۵ یک دایره رسم کنیم. با توجه به شکل مقابل، در مثلث قائم‌الزاویهٔ رنگی، $y = \frac{۳}{۲}$ خواهد بود. توجه کنید که اعداد ۳، ۴ و ۵ فیثاغورسی هستند، پس هر مضربی از آن‌ها یعنی $\frac{۳}{۲}$، $\frac{۴}{۲}$ و $\frac{۵}{۲}$ نیز فیثاغورسی می‌باشند. حال برای به‌دست آوردن فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس تا یکی از این نقاط داریم:

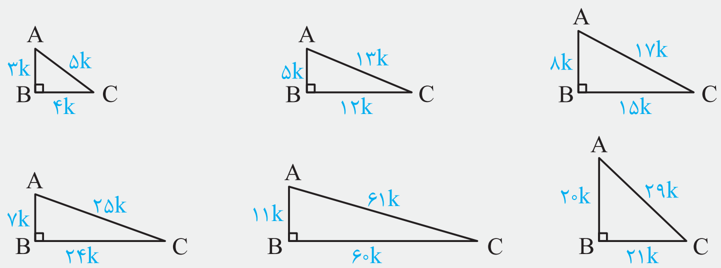


$$x = ۲ - y \Rightarrow x = ۲ - \frac{۳}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

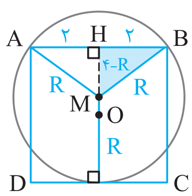
نیم‌نگاه

به اعداد a، b و c که در رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ صدق می‌کنند، اعداد فیثاغورسی می‌گویند. در واقع این اعداد، اضلاع مثلث قائم‌الزاویه می‌باشند.

نکته: اگر a، b و c اعداد فیثاغورسی باشند، هر مضربی از آن‌ها نیز فیثاغورسی است.



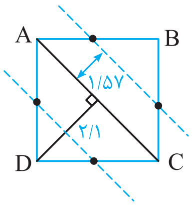
۱۰ **۱** می‌دانیم این سه نقطه روی دایره‌ای به مرکز M و شعاع R قرار دارند. با توجه به شکل مقابل، در مثلث قائم‌الزاویهٔ MBH داریم:



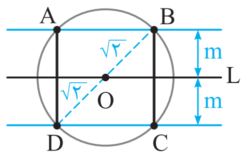
$$R^۲ = ۲^۲ + (۴ - R)^۲ \Rightarrow \cancel{R^۲} = ۴ + ۱۶ + \cancel{R^۲} - ۸R \Rightarrow ۸R = ۲۰ \Rightarrow R = ۲/۵$$

حال فاصلهٔ M تا نقطهٔ O مرکز مربع برابر است با:

$$OM = OH - MH \Rightarrow OM = ۲ - (۴ - R) = ۲ - (۴ - ۲/۵) = ۰/۵$$



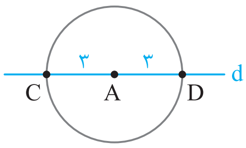
۱۱ **۱** نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ $\frac{\pi}{۲} \simeq \frac{۳/۱۴}{۲} \simeq ۱/۵۷$ از قطر (خط) AC هستند، دو خط موازی آن و به فاصلهٔ ۱/۵۷ از آن می‌باشند. از طرفی، قطر مربع به ضلع ۳ برابر $۳\sqrt{۲}$ و نصف قطر آن $۲/۱ \simeq \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ است. پس این دو خط، محیط مربع را در ۴ نقطه قطع می‌کنند.

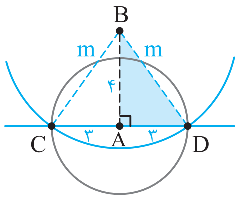


۱۲ **۴** نقاطی که به فاصلهٔ $\sqrt{۲}$ از نقطهٔ O قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{۲}$ قرار دارند. از طرفی نقاطی که به فاصلهٔ m از خط L هستند روی دو خط به موازات L و به فاصلهٔ m از آن می‌باشند. چون ۴ نقطه وجود دارند که هر دو ویژگی را دارا می‌باشند (هر مربع دارای ۴ رأس می‌باشد) پس نحوهٔ قرارگیری آن‌ها به‌صورت مقابل است:

با توجه به شکل، طول قطر مربع برابر $۲\sqrt{۲}$ می‌باشد. پس طول هر ضلع آن ۲ بوده و داریم:

$$۲m = ۲ \Rightarrow m = ۱$$



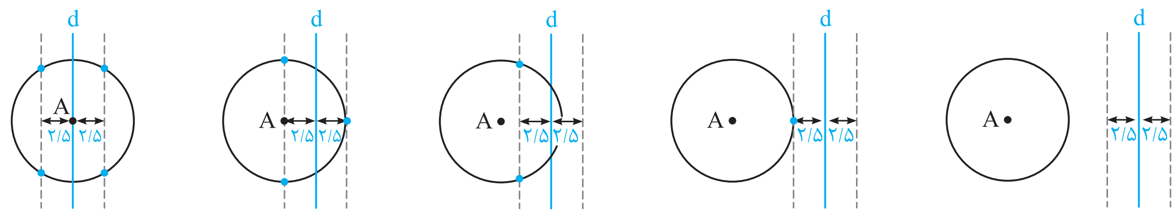


۱۳ **۳** نقاط C و D روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ قرار دارند. از آن‌جایی که نقاط C و D روی خط d نیز هستند، پس به‌صورت شکل مقابل می‌باشند:

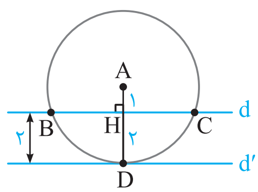
حال چون همین دو نقطهٔ C و D بـه فاصلهٔ m از نقطهٔ B هستند، پس باید دایره به مرکز B و شعاع m نیز از نقاط C و D بگذرد. بنابراین به ناچار نقطهٔ B دقیقاً بالای (پایین) نقطهٔ A و به فاصلهٔ ۴ از آن قرار دارد.[1] حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ BAD، اندازهٔ m برابر ۵ می‌باشد، زیرا اعداد ۳، ۴ و ۵ اعداد فیثاغورسی هستند یا می‌توان گفت:

$$AD^{۲} + AB^{۲} = BD^{۲} \Rightarrow ۹ + ۱۶ = BD^{۲} \Rightarrow BD = m = ۵$$

۱۴ **۴** نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۲/۵ هستند، روی دو خط به موازات d و به فاصلهٔ ۲/۵ در طرفین آن می‌باشند. از طرفی، نقاطی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۵ هستند روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۵ می‌باشند. با توجه به وضعیت نقطهٔ A و خط d یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد:



صفر نقطهٔ تلاقی — یک نقطهٔ تلاقی — دو نقطهٔ تلاقی — سه نقطهٔ تلاقی — چهار نقطهٔ تلاقی

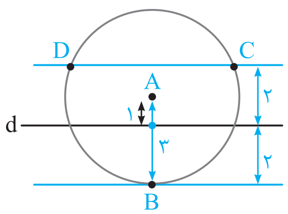


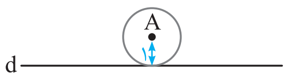
۱۵ **۳** تمام نقاطی که به فاصلهٔ ۳ از A قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ می‌باشند. حال این دایره باید با این دو خط در سه نقطه مشترک باشد، پس نحوهٔ قرارگیری آن‌ها به‌صورت مقابل است.

بنابراین داریم:

$$\text{مجموع فاصله‌های A از دو خط} = AH + AD = ۱ + ۳ = ۴$$

دقت کنید با توجه به این‌که فاصلهٔ دو خط از هم برابر ۲ و فاصلهٔ ۳ از نقطهٔ A برابر ۳ می‌باشد، نقطهٔ A نمی‌تواند بین دو خط قرار داشته باشد.





۱۶ **۱** نقاطی که به فاصلهٔ ۳ از نقطهٔ A هستند روی دایره‌ای به شعاع ۳ و به مرکز A قرار دارند. از طرفی، نقاطی که به فاصلهٔ ۲ از خط d هستند روی دو خط موازی خط d و به فاصلهٔ ۲ از d می‌باشند. حال اشتراک این دو خط و دایره باید سه نقطه باشد. بنابراین نحوهٔ قرارگیری آن‌ها به‌صورت مقابل است. همان‌طور که در شکل می‌بینید فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d برابر ۱ است. پس یک نقطه روی خط d وجود دارد که به فاصلهٔ ۱ از نقطهٔ A می‌باشد.

[1] در ادامهٔ همین فصل خواهیم دید که در حقیقت نقطهٔ B روی عمودمنصف پاره‌خط CD قرار دارد.

۱۷ ۳

نیم‌نگاه

برای رسم یک مثلث نیاز به معلوم بودن سه جزء مستقل از هم است و چنان‌چه مثلث ویژگی‌هایی خاص داشته باشد، به تعداد این ویژگی‌های خاص می‌توان از تعداد داده‌های موردنیاز برای رسم کم کرد. مثلاً در مثلث قائم‌الزاویه اگر دو جزء مشخص باشد، جزء سوم هم مشخص می‌شود. چون در واقع همین‌که می‌دانیم یکی از زاویه‌ها ۹۰° است، خود یکی از معلومات است.

با توجه به این توضیحات سراغ گزینه‌ها می‌رویم. چون در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر، نصف وتر است، پس داشتن وتر و میانهٔ وارد بر وتر در واقع یک داده محسوب می‌شود و دو جزء مستقل از هم نیستند.

۱۸ ۱

چون اندازه‌های داده شده برای اضلاع مثلث همگی معلوم هستند، فقط باید بررسی کنیم که بزرگ‌ترین عدد از مجموع دو عدد دیگر کوچک‌تر باشد. بنابراین داریم:

۱) $۵+۳>۷$ ۲) $۳+۲\not>۶$ ۳) $۱+۲\not>۳$ ۴) $۱+۳\not>۴$

۱۹ ۲

نیم‌نگاه

با توجه به روابط $a<b+c$، $b<a+c$، $c<a+b$ در هر مثلث می‌توان گفت که:

$$\boxed{|b-c|<a<b+c \text{ یا } |a-c|<b<a+c \text{ یا } |a-b|<c<a+b}$$

حال اگر یکی یا دوتا از اندازه‌های داده شده برای اضلاع مثلث مجهول باشد، برای این‌که حدود پارامتر را طوری تعیین کنیم تا مثلث قابل رسم باشد کافی است اندازهٔ ضلع مجهول را بین تفاضل و مجموع دو ضلع معلوم قرار دهیم. توجه کنید حل این نامساوی معادل با حل سه نامساوی $a<b+c$، $b<a+c$ و $c<a+b$ می‌باشد.

$$BC=a\Rightarrow|b-c|<a<b+c\xRightarrow[c=۵]{b=۱۲}|۱۲-۵|<a<۱۲+۵\Rightarrow ۷<a<۱۷$$

۲۰ ۳

با توجه به رابطهٔ $|b-c|<a<b+c$ می‌توان نوشت:

$$|۲x-(x-۱)|<۱۷<۲x+(x-۱)\Rightarrow|x+۱|<۱۷<۳x-۱\Rightarrow\begin{cases}x>-۱۸\\x<۱۶\\x>۶\end{cases}\Rightarrow ۶<x<۱۶\Rightarrow \text{۹ مقدار}$$

۲۱ ۲

ابتدا به کمک نامساوی زیر حدود x را پیدا می‌کنیم:

$$۶-۳/۵<۵x+۱<۶+۳/۵\Rightarrow ۲/۵<۵x+۱<۹/۵\Rightarrow ۱/۵<۵x<۸/۵\Rightarrow ۰/۳<x<۱/۷$$

از طرفی مقدار محیط باید عددی صحیح باشد، پس داریم:

$$\text{محیط}=۳/۵+۶+۵x+۱=۵x+۱۰/۵\xRightarrow{۰/۳<x<۱/۷}۱۲<۵x+۱۰/۵<۱۹\Rightarrow\begin{cases}Max\,(\text{محیط})=۱۸\\Min\,(\text{محیط})=۱۳\end{cases}$$

۲۲ ۲

باید اضلاع مثلث در نامساوی زیر صدق کنند:

$$۵-۲<۲x-۱<۵+۲\Rightarrow ۳<۲x-۱<۷\Rightarrow ۴<۲x<۸\Rightarrow ۲<x<۴$$

چون x عددی صحیح می‌باشد، پس $x=۳$ قابل قبول است. بنابراین طول ضلع مجهول برابر $۲x-۱=۵$ می‌شود. پس اضلاع مثلث ۲، ۵ و ۵ می‌باشند، در نتیجه یک مثلث متساوی‌الساقین است.

۲۳ ۱

نیم‌نگاه

اگر سه تا از اندازه‌های داده شده برای اضلاع مثلث مجهول باشند، برای تعیین حدود پارامتر به منظور آن‌که مثلث با اندازه‌های داده شده قابل رسم باشد باید اندازه‌های داده شده را در هر سه نامساوی $a<b+c$، $b<a+c$ و $c<a+b$ قرار دهیم و سپس با اشتراک‌گیری از جواب‌های به‌دست آمده حدود پارامتر را تعیین کنیم.

چون طول سه پاره‌خط داده شده پارامتری هستند، پس باید مجموع هر دو ضلع دلخواه بزرگ‌تر از ضلع سوم باشد:

$$\begin{cases}(۴x-۴)+(x+۷)>۶x\Rightarrow x<۳\\(۴x-۴)+(۶x)>x+۷\Rightarrow x>\frac{۱۱}{۹}\\(x+۷)+(۶x)>۴x-۴\Rightarrow x>-\frac{۱۱}{۳}\end{cases}\Rightarrow\frac{۱۱}{۹}<x<۳$$

۲۴ ۴

اضلاع مثلث باید در سه نامساوی زیر صدق کنند:

$$\begin{cases}۴x-۳<(x+۱)+(۲x+۴)\Rightarrow ۴x-۳<۳x+۵\Rightarrow x<۸\\۲x+۴<(x+۱)+(۴x-۳)\Rightarrow ۲x+۴<۵x-۲\Rightarrow x>۲\\x+۱<(۲x+۴)+(۴x-۳)\Rightarrow x+۱<۶x+۱\Rightarrow x>۰\end{cases}\Rightarrow ۲<x<۸\Rightarrow\alpha=۲,\beta=۸\Rightarrow\frac{\beta}{\alpha}=\frac{۸}{۲}=۴$$

۲۵ **۱** ابتدا حدود x را برای این که مثلث ABC قابل رسم باشد، تعیین می‌کنیم:

$$|(۴x-۱)-(۲x+۳)|<۸<(۴x-۱)+(۲x+۳)\Rightarrow \begin{cases}|۲x-۴|<۸\Rightarrow \begin{cases}۲x-۴<۸\Rightarrow x<۶\\ -۲x+۴<۸\Rightarrow -۲<x\end{cases}\\ ۸<۶x+۲\Rightarrow ۱<x\end{cases}$$

از اشتراک روابط بالا داریم: $(I)\ ۱<x<۶$. حال باید حدود x را برای قابل رسم بودن مثلث $A'B'C'$ تعیین کنیم:

$$|(۳x-۲)-(۲x+۵)|<۴<(۳x-۲)+(۲x+۵)\Rightarrow\begin{cases}|x-۷|<۴\Rightarrow\begin{cases}x-۷<۴\Rightarrow x<۱۱\\ ۷-x<۴\Rightarrow ۳<x\end{cases}\\ ۴<۵x+۳\Rightarrow \frac{۱}{۵}<x\end{cases}$$

از اشتراک روابط بالا نیز داریم: $(II)\ ۳<x<۱۱$. پس طبق $(I)\cap(II)$ برای قابل رسم بودن هر دو مثلث باید داشته باشیم: $۳<x<۶$.

چون x باید عددی صحیح باشد، تنها جواب‌ها $x=۴$ و $x=۵$ می‌باشند.

۲۶ **۳**

نیم‌نگاه

اگر a، b و c اضلاع یک مثلث باشند به طوری که $a\ge b\ge c$، آن‌گاه a بزرگ‌ترین ضلع مثلث در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases}a\ge b\\a\ge c\end{cases}\xRightarrow{+}۲a\ge b+c\xRightarrow{+a}۳a\ge\underbrace{a+b+c}_{\text{محیط}}\Rightarrow a\ge\frac{\text{محیط}}{۳}$$

$$a<b+c\xRightarrow{+a}۲a<\underbrace{a+b+c}_{\text{محیط}}\Rightarrow a<\frac{\text{محیط}}{۲}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\text{محیط}}{۳}\le a<\frac{\text{محیط}}{۲}}$$

با توجه به توضیحات بالا داریم:

$$\frac{۲۴}{۳}\le \text{بزرگ‌ترین ضلع}<\frac{۲۴}{۲}\Rightarrow ۸\le\text{بزرگ‌ترین ضلع}<۱۲\Rightarrow$$ با توجه به گزینه‌ها، بزرگ‌ترین ضلع ۱۳ نیست.

۲۷ **۳**

نیم‌نگاه

در مثلث متساوی‌الساقین با اضلاع a، b و b داریم:

$$a+b+b=\text{محیط}\Rightarrow a=\text{محیط}-۲b>۰\Rightarrow ۲b<\text{محیط}\Rightarrow b<\frac{\text{محیط}}{۲}$$

$$b+b>a\Rightarrow ۲b>a\xRightarrow{+۲b}۲b+۲b>\underbrace{a+۲b}_{\text{محیط}}\Rightarrow ۴b>\text{محیط}\Rightarrow b>\frac{\text{محیط}}{۴}$$

$$\Rightarrow\boxed{\frac{\text{محیط}}{۴}<b<\frac{\text{محیط}}{۲}}$$

با توجه به مطالب فوق داریم:

$$\frac{۱۶}{۴}<b<\frac{۱۶}{۲}\Rightarrow ۴<b<۸\Rightarrow$$ ۳ مقدار صحیح برای b وجود دارد.

۲۸ **۳** با فرض $BD=x$ در مثلث BAD داریم:

$$۸-۶<x<۸+۶\Rightarrow ۲<x<۱۴$$

همچنین در مثلث BCD نیز داریم:

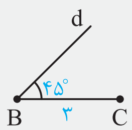
$$۱۰-۷<x<۱۰+۷\Rightarrow ۳<x<۱۷$$

بنابراین $۳<x<۱۴$ می‌تواند باشد و در نتیجه ۱۰ مقدار صحیح می‌تواند اختیار کند.

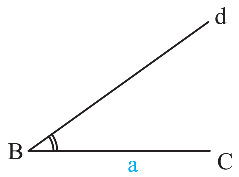
۲۹ **۴**

نیم‌نگاه

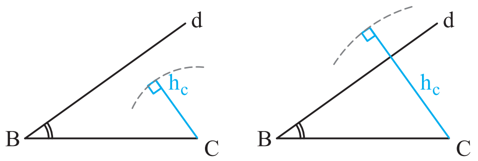
در رسم مثلث به کمک خط‌کش و پرگار، اضلاع و زوایایی که اندازهٔ آن‌ها مشخص است برای ما قابل رسم هستند. مثلاً اگر در مثلث ABC طول ضلع BC برابر ۳ و زاویهٔ B برابر ۴۵° باشد، ابتدا پاره‌خط $BC=۳$ را رسم کرده و سپس در رأس B خط d را طوری رسم می‌کنیم تا زاویهٔ B برابر ۴۵° شود.



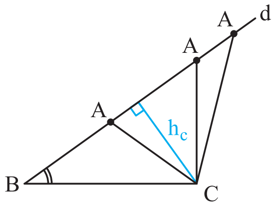
ابتدا ضلع $BC=a$ را رسم می‌کنیم. سپس در نقطهٔ B خط d را طوری رسم می‌کنیم تا با ضلع $BC=a$ زاویهٔ B را بسازد.



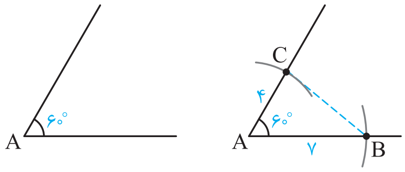
حال اگر فاصلهٔ C از خط d کم‌تر و یا بیشتر از h_c باشد، هیچ مثلثی نمی‌توان رسم کرد.



اما اگر فاصلهٔ C از خط d برابر h_c باشد، بی‌شمار مثلث می‌توان رسم کرد. به این‌ترتیب که رأس A را هر کجای خط d درنظر بگیریم، مثلث ABC مثلث مطلوب است.



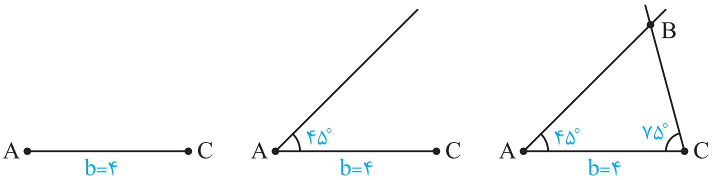
۳۰ | **۲** چون از مثلث ABC دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها مشخص است (یکی از حالت‌های همنهشتی)، پس تنها یک مثلث منحصربه‌فرد با این داده‌ها قابل رسم است که طریقهٔ رسم به‌صورت روبه‌رو می‌باشد:



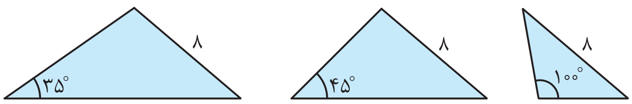
۳۱ | **۲** چون دو زاویه از مثلث مشخص است، پس زاویهٔ سوم نیز به‌راحتی معلوم می‌شود:

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ \Rightarrow \widehat{A}+60^\circ+75^\circ=180^\circ \Rightarrow \widehat{A}=45^\circ$$

بنابراین دو زاویهٔ $\widehat{A}$ و $\widehat{C}$ و ضلع بین آن‌ها یعنی b از مثلث معلوم است (یکی از حالت‌های همنهشتی)، پس تنها یک مثلث منحصربه‌فرد با این داده‌ها قابل رسم است که طریقهٔ رسم به‌صورت زیر می‌باشد:



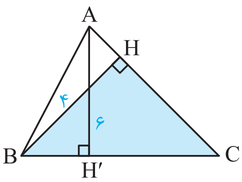
۳۲ | **۴** چون دو زاویه و ضلع داده‌شده نام مشخصی ندارند، پس ضلع به طول ۸ می‌تواند روبه‌روی هر کدام از سه زاویهٔ 35°، 45° و 100° باشد، پس سه مثلث غیرهمنهشت می‌توان رسم کرد:



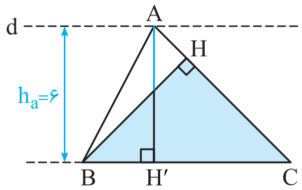
توجه کنید سه مثلثی که رسم می‌شوند متشابه هستند.

۳۳ | **۱** چون $AB=AC$ و $\widehat{B}=45^\circ$ می‌باشد، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین و $\widehat{C}=45^\circ$ می‌باشد. در نتیجه $\widehat{A}=90^\circ$ است. بنابراین با این معلومات یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین می‌توان رسم کرد.

۳۴ | **۱** فرض می‌کنیم مثلث ABC به‌صورت مقابل باشد:



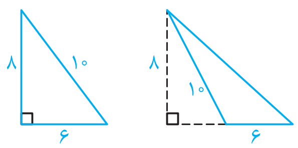
مثلث BHC با معلوم بودن وتر و یک ضلع، قابل رسم است. خط d را به موازات BC و به فاصلهٔ ۶ واحد از آن رسم می‌کنیم. محل تلاقی امتداد CH و خط d نقطهٔ A را معلوم می‌کند. مثلث ABC تنها جواب مسأله است.



۳۵ | **۳** چون h_a از b و c کوچک‌تر است، دو مثلث قابل رسم است. یکی حاده‌الزاویه و دیگری منفرجه‌الزاویه.

۳۶ | **۱** در هر مثلث ارتفاع نظیر یک ضلع، از دو ضلع دیگر بزرگ‌تر نیست. در این سؤال چون $h_c > b$ می‌باشد، مسأله جواب ندارد.

۳۷ **۳** از آن‌جایی که ارتفاع وارد بر یک ضلع مثلث نمی‌تواند از دو ضلع دیگر آن بزرگ‌تر باشد، پس ارتفاع نظیر ضلع سوم، در مثلث به اضلاع ۱۰ و ۶ نمی‌تواند ۸ باشد. همچنین ارتفاع نظیر ضلع ۱۰ نیز نمی‌تواند ۸ باشد. اما ارتفاع نظیر ضلع ۶ می‌تواند برابر ۸ باشد. در این حالت، دو مثلث یکی قائم‌الزاویه و دیگری منفرجه‌الزاویه قابل رسم است.



۳۸ **۱** با معلومات b، c و h_a زمانی مثلث قائم‌الزاویه حاصل می‌شود که اولاً دو ضلع b و c با هم برابر نباشند و ثانیاً ارتفاع، برابر یکی از اضلاع باشد، پس دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $h_a = b$ و $b \neq c$:

$$h_a = b \Rightarrow ۲x + ۳ = x + ۶ \Rightarrow x = ۳$$

$$x = ۳ \Rightarrow \begin{cases} b = x + ۶ = ۹ \\ c = ۲x + ۵ = ۱۱ \end{cases} \Rightarrow b \neq c$$

بنابراین در این حالت، طول وتر برابر ۱۱ می‌باشد.

حالت دوم: $h_a = c$ و $b \neq c$:

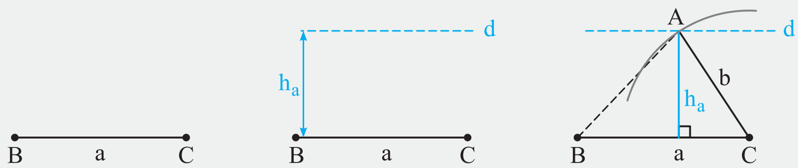
$h_a = c \Rightarrow ۲x + ۳ = ۲x + ۵ \Rightarrow$ امکان ندارد.

۳۹ **۳** h_a باید هم از $b = ۱۰$ و هم از $c = ۱۴$ کوچک‌تر باشد، پس $Max(h_a) = ۹$.

۴۰ **۳**

نیم‌نگاه

با معلومات دو ضلع و ارتفاع وارد بر یکی از همان اضلاع (a، b و h_a) در صورتی‌که $h_a < b$ باشد، دو مثلث، اگر $h_a = b$ باشد یک مثلث و در غیر این‌صورت هیچ مثلثی قابل رسم نیست. نحوهٔ رسم به‌صورت زیر است:

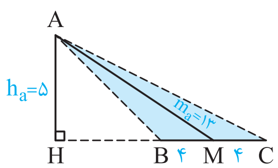


چون دو ضلع و ارتفاع وارد بر یکی از آن دو ضلع داده شده و تنها یک مثلث قابل رسم است، پس:

$$h_b = c \Rightarrow ۲x - ۳ = x + ۳ \Rightarrow x = ۶$$

۴۱ **۲** چون $h_a < m_a$ می‌باشد، بنابراین فقط یک مثلث قابل رسم است.

۴۲ **۱** چون $h_a < m_a$ می‌باشد، پس یک مثلث می‌توان رسم کرد که به‌صورت مقابل می‌باشد. بنابراین فاصلهٔ دورترین رأس از ارتفاع برابر است با:

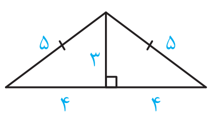


$$\overset{\Delta}{AHM}: AH^۲ + HM^۲ = AM^۲ \Rightarrow ۲۵ + HM^۲ = ۱۶۹ \Rightarrow HM^۲ = ۱۴۴ \Rightarrow HM = ۱۲$$

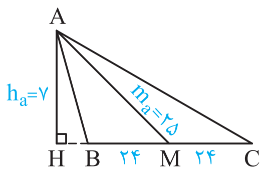
$\Rightarrow$ فاصلهٔ دورترین رأس از ارتفاع $= CH = CM + HM = ۴ + ۱۲ = ۱۶$

توجه کنید فاصلهٔ نقطه از خط، طول عمودی است که از نقطه بر خط وارد می‌شود که در این سؤال همان CH می‌باشد.

۴۳ **۳** چون $m_a = h_a$ می‌باشد، پس یک مثلث متساوی‌الساقین می‌توان رسم کرد که به‌صورت مقابل می‌باشد و طول ساق این مثلث برابر ۵ خواهد بود. پس نسبت ضلع بزرگ‌تر به کوچک‌تر برابر $\frac{۸}{۵} = ۱/۶$ می‌باشد.

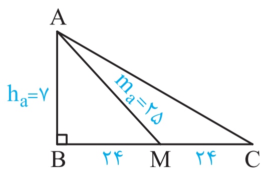


۴۴ **۱** چون $h_a < m_a$ می‌باشد، پس یک مثلث می‌توان رسم کرد. با توجه به شکل مقابل، به کمک فیثاغورس در مثلث AHM داریم:



$$AH^۲ + HM^۲ = AM^۲ \Rightarrow ۴۹ + HM^۲ = ۶۲۵ \Rightarrow HM^۲ = ۵۷۶ \Rightarrow HM = ۲۴$$

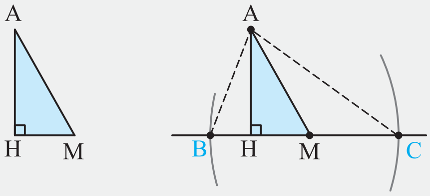
از آن‌جایی‌که $HM = BM = ۲۴$ می‌باشد، پس H بر B منطبق است و این یعنی ارتفاع مثلث ABC و ضلع AB بر هم منطبق هستند، پس مثلث ABC قائم‌الزاویه است و به‌صورت مقابل می‌باشد:



۴۵ ۳

نیم‌نگاه

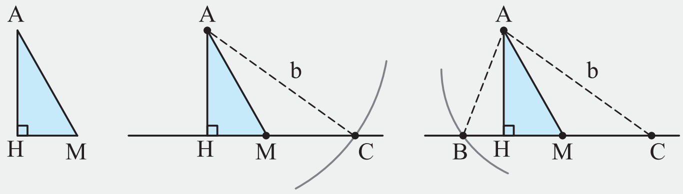
رسم مثلث با معلوم بودن یک ضلع و میانه و ارتفاع وارد بر آن ضلع



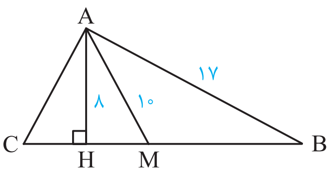
اگر a یک ضلع و h_a ارتفاع وارد بر آن و m_a میانهٔ نظیر همان ضلع باشد، در صورتی‌که $h_a < m_a$ باشد، یک مثلث و اگر $h_a = m_a$ باشد، یک مثلث متساوی‌الساقین می‌توان رسم کرد. اگر $h_a > m_a$ باشد، هیچ مثلثی وجود ندارد. طریقهٔ رسم به این‌صورت است که چون h_a و m_a معلوم هستند، پس می‌توان مثلث AHM را با دو ضلع معلوم رسم کرد. حال HM را امتداد داده و به مرکز M و شعاع $\frac{a}{۲}$ دو کمان می‌زنیم تا B و C معلوم شوند.

نکته: اگر b یک ضلع، m_a و h_a میانه و ارتفاع وارد بر ضلع a باشند که هیچ اطلاعاتی در مورد a نداریم، در صورتی‌که h_a هم از b و هم از m_a کوچک‌تر باشد، دو مثلث و اگر h_a با عدد کوچک‌تر از بین m_a و b برابر باشد، یک مثلث می‌توان رسم کرد. اما اگر h_a بزرگ‌تر از m_a یا بزرگ‌تر از b باشد، هیچ مثلثی نمی‌توان رسم کرد.

طریقهٔ رسم به این صورت است که ابتدا مثلث قائم‌الزاویهٔ AHM را رسم می‌کنیم. HM را از دو طرف امتداد می‌دهیم و به مرکز A و شعاع b یک کمان می‌زنیم تا نقطهٔ C معلوم شود. حال به مرکز M و شعاع MC یک کمان می‌زنیم تا نقطهٔ B به‌دست آید.



فرض می‌کنیم مثلث به‌صورت مقابل باشد:



در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHM طول HM برابر است با:

$$AM^۲ = HM^۲ + HA^۲ \Rightarrow ۱۰۰ = HM^۲ + ۶۴ \Rightarrow HM = ۶$$

حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB داریم:

$$AB^۲ = AH^۲ + HB^۲ \Rightarrow ۲۸۹ = ۶۴ + HB^۲ \Rightarrow HB^۲ = ۲۲۵ \Rightarrow HB = ۱۵$$

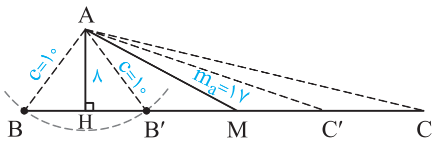
بنابراین طول MB برابر است با:

$$MB = HB - HM = ۱۵ - ۶ = ۹$$

از آن‌جایی که AM میانهٔ وارد بر ضلع BC می‌باشد، پس:

$$BC = ۲ \times MB \Rightarrow BC = ۲ \times ۹ = ۱۸ \Rightarrow a = ۱۸$$

۴۶ ۲ چون $h_a < b , m_a$، پس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را می‌توان رسم کرد که به شکل مقابل می‌باشند:



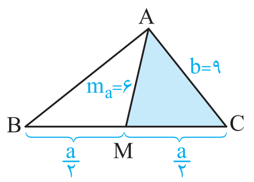
در حالت اول که مثلث ABC ایجاد می‌شود داریم:

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{AHB}: AB^۲ = BH^۲ + AH^۲ \Rightarrow ۱۰۰ = BH^۲ + ۶۴ \Rightarrow BH = ۶ \\ \overset{\Delta}{AHM}: AM^۲ = AH^۲ + HM^۲ \Rightarrow ۲۸۹ = ۶۴ + HM^۲ \Rightarrow HM = ۱۵ \end{cases} \Rightarrow a = ۲BM = ۲(BH + HM) = ۲(۶ + ۱۵) = ۴۲$$

در حالت دوم که مثلث $AB'C'$ ایجاد می‌شود خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{AHB'}: AB'^۲ = AH^۲ + HB'^۲ \Rightarrow ۱۰۰ = ۶۴ + HB'^۲ \Rightarrow HB' = ۶ \\ \overset{\Delta}{AHM}: AM^۲ = AH^۲ + HM^۲ \Rightarrow ۲۸۹ = ۶۴ + HM^۲ \Rightarrow HM = ۱۵ \end{cases} \Rightarrow a = ۲B'M = ۲(HM - HB') = ۲(۱۵ - ۶) = ۱۸$$

بنابراین با توجه به گزینه‌ها a نمی‌تواند ۳۰ باشد.



۴۷ ۴ چون $h_a > b$ است، پس با این معلومات نمی‌توان مثلثی رسم کرد.

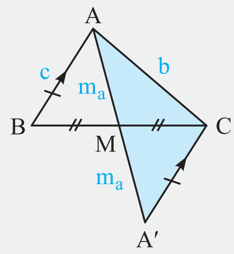
۴۸ ۳ مسأله را حل شده فرض می‌کنیم، با توجه به شکل مقابل، چون مثلث ABC قابل رسم است، پس مثلث AMC نیز با معلوم بودن سه ضلع باید قابل رسم باشد، بنابراین:

$$|m_a - b| < \frac{a}{۲} < m_a + b \Rightarrow |۶ - ۹| < \frac{a}{۲} < ۶ + ۹ \Rightarrow ۶ < a < ۳۰$$

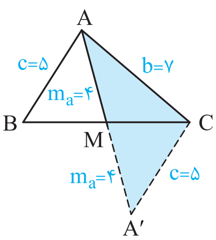
۴۹ ۲

نیم‌نگاه

رسم مثلث با معلوم بودن دو ضلع و میانهٔ وارد بر ضلع سوم



اگر b و c دو ضلع مثلث و m_a میانهٔ وارد بر ضلع سوم مثلث باشد، در صورتی که $|b - c| < ۲m_a < b + c$، یک مثلث می‌توان رسم کرد و در غیر این‌صورت هیچ مثلثی قابل رسم نیست. نحوهٔ رسم به این‌صورت است که میانهٔ AM را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ A' برسیم، چون سه ضلع مثلث $AA'C$ معلوم است، قابل رسم می‌باشد، پس آن را رسم می‌کنیم. سپس از C به وسط AA' وصل کرده و به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ B به‌دست آید. حالا دلیل $|b - c| < ۲m_a < b + c$ روشن شد، چون داستان اصلی، قابل رسم بودن مثلث $AA'C$ است.



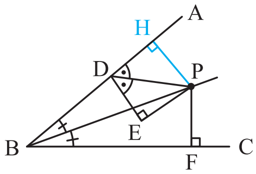
باید میانهٔ m_a را به اندازهٔ خودش امتداد دهیم و بررسی کنیم که آیا مثلث $AA'C$ قابل رسم است یا خیر:

$۷ - ۵ < ۸ < ۵ + ۷ \Rightarrow$ یک مثلث قابل رسم است.

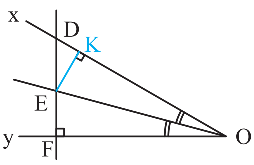
۵۰ ۲ مطابق آن‌چه گفته شد باید $|b - c| < ۲m_a < b + c$ باشد، پس:

$$۲ < ۲(۲x - ۱) < ۱۲ \Rightarrow ۱ < ۲x - ۱ < ۶ \Rightarrow ۲ < ۲x < ۷ \Rightarrow ۱ < x < ۳/۵$$

بنابراین x می‌تواند مقادیر صحیح ۲ و ۳ را بپذیرد.

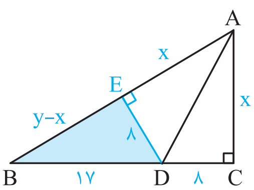


۵۱ ۲ چون P روی نیمساز ABC است، پس مطابق شکل $PH = PF = ۵$ می‌باشد. از طرفی چون P روی نیمساز ADE نیز هست، پس $PH = PE = ۵$.



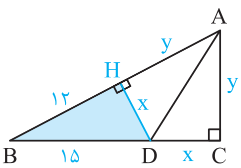
۵۲ ۱ می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. بنابراین در شکل مقابل $EF = EK$ می‌باشد. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ EKD، وتر از اضلاع قائمه بزرگ‌تر است، پس:

$$DE > EK \xRightarrow{EF = EK} DE > EF$$



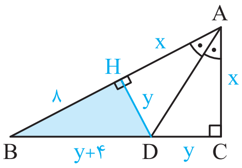
۵۳ ۴ فرض می‌کنیم $AC = x$ و $AB = y$ باشد. $y - x$ مدنظر سؤال است. از نقطهٔ D عمودی بر وتر مثلث رسم می‌کنیم. چون D روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد، پس فاصله‌اش از دو ضلع زاویه برابر است و در نتیجه $DE = ۸$ و همچنین $AE = x$ خواهد بود. در مثلث قائم‌الزاویهٔ BED داریم:

$$BD^۲ = BE^۲ + DE^۲ \Rightarrow ۱۷^۲ = (y - x)^۲ + ۸^۲ \Rightarrow (y - x)^۲ = ۲۲۵ \Rightarrow y - x = ۱۵$$



۵۴ ۲ فرض می‌کنیم $DC = x$ و $AC = y$ باشد. از D بر AB عمود می‌کنیم، چون D روی نیمساز A می‌باشد، پس $DC = DH = x$ و $AH = AC = y$ است. با توجه به $AB - AC = ۱۲$، طول AB برابر $۱۲ + y$ به‌دست می‌آید، پس $BH = ۱۲$ خواهد بود. حال به کمک فیثاغورس در مثلث BHD داریم:

$$BD^۲ = HD^۲ + HB^۲ \Rightarrow ۱۵^۲ = x^۲ + ۱۲^۲ \Rightarrow x^۲ = ۸۱ \Rightarrow x = ۹ \Rightarrow DC = ۹$$



۵۵ ۱ با فرض $AC = x$ و $DC = y$، مقادیر $AB = x + ۸$ و $BD = y + ۴$ به‌دست می‌آیند. از D بر AB عمود می‌کنیم، چون D روی نیمساز زاویهٔ A می‌باشد، پس $DH = DC = y$ و $AH = AC = x$ می‌باشد. به کمک فیثاغورس در مثلث BHD داریم:

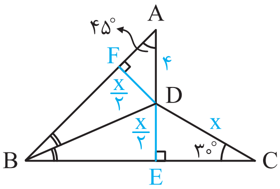
$$BD^۲ = HD^۲ + HB^۲ \Rightarrow (y + ۴)^۲ = y^۲ + ۸^۲ \Rightarrow y^۲ + ۸y + ۱۶ = y^۲ + ۶۴$$

$$\Rightarrow ۸y = ۴۸ \Rightarrow y = ۶ \Rightarrow DC = ۶$$

۵۶ **۲**

نیم‌نگاه

در فصل سوم خواهیم خواند که در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰°، برابر نصف وتر و ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۶۰°، برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است.

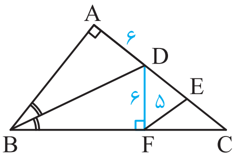


چون D روی نیمساز زاویهٔ $A\hat{B}C$ قرار دارد، پس فاصله‌اش تا BA و BC برابر است. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ DEC، DE ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° است، پس برابر نصف وتر یعنی $\frac{x}{۲}$ می‌باشد. همچنین مثلث DFA قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است $(\hat{A} = \hat{D} = ۴۵^\circ)$، بنابراین $AF = \frac{x}{۲}$ و داریم:

$$AF^۲ + DF^۲ = AD^۲ \Rightarrow (\frac{x}{۲})^۲ + (\frac{x}{۲})^۲ = ۴^۲ \Rightarrow \frac{x^۲}{۴} + \frac{x^۲}{۴} = ۱۶ \Rightarrow \frac{۲x^۲}{۴} = ۱۶$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۳۲ \Rightarrow x = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$$

۵۷ **۴**



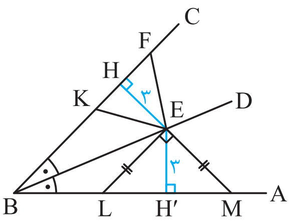
چون D روی نیمساز زاویهٔ B است، پس فاصله‌اش تا دو ضلع زاویهٔ B برابر است. از طرفی چون $AB = BF$ می‌باشد، پس F پای عمودی است که از D بر BC رسم می‌شود. بنابراین $DF = DA = ۶$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ DFC، چون $DE = EC$، پس FE میانهٔ وارد بر وتر می‌باشد که برابر با نصف وتر است. پس:

$$EF = \frac{۱}{۲}DC \Rightarrow ۵ = \frac{۱}{۲}DC \Rightarrow DC = ۱۰$$

حال به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث DFC داریم:

$$DC^۲ = FD^۲ + FC^۲ \Rightarrow ۱۰^۲ = ۶^۲ + FC^۲ \Rightarrow FC^۲ = ۶۴ \Rightarrow FC = ۸$$

۵۸ **۲**



چون مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع KEF برابر $۳\sqrt{۳}$ است، پس طول ضلع مثلث برابر است با:

$$\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = ۳\sqrt{۳} \Rightarrow a^۲ = ۱۲ \Rightarrow a = \sqrt{۱۲}$$

حال ارتفاع مثلث KEF را به‌دست می‌آوریم:

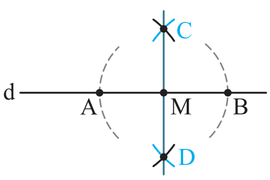
$$EH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \sqrt{۱۲} = ۳$$

با توجه به این‌که E نقطه‌ای روی نیمساز زاویهٔ B است، پس مطابق شکل، طول EH' نیز برابر ۳ می‌باشد. چون مثلث LEM قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، پس ارتفاع وارد بر وتر همان میانهٔ وارد بر وتر نیز هست و می‌دانیم میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر می‌باشد. یعنی:

$$EH' = ۳ \Rightarrow LM = ۲ \times ۳ = ۶$$

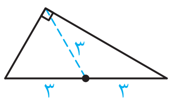
۵۹ **۱** همان‌طور که در رسم عمودمنصف دیدید، برای رسم عمودمنصف AB کافی است دو کمان به مراکز A و B رسم کنیم.

۶۰ **۲**



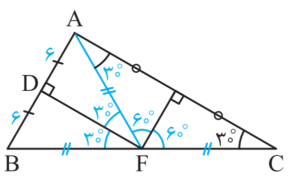
کافی است به مرکز M و شعاع دلخواه یک دایره رسم کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. اکنون M وسط پاره‌خط AB است. حال کافی است عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم. برای رسم عمودمنصف AB کافی است به مراکز A و B و به شعاع دلخواهی که بزرگ‌تر از نصف AB باشد، دو دایره رسم کنیم تا یکدیگر را در C و D قطع کنند. خط گذرا از C و D هم از M می‌گذرد و هم بر d عمود است. بنابراین باید سه دایره رسم کنیم.

۶۱ **۳**



در مثلث قائم‌الزاویه، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها در وسط وتر قرار دارد و فاصلهٔ آن تا سه رأس مثلث برابر است. بنابراین طول بزرگ‌ترین ضلع که همان وتر می‌باشد برابر ۶ است.

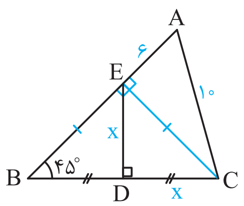
۶۲ **۱**



با توجه به صورت تست، شکل مسأله به‌صورت مقابل است. حال کافی است از F به A وصل کنیم. چون F روی عمودمنصف اضلاع است، پس $FA = FC$ و $FA = FB$. می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، نیمساز زاویهٔ رأس نیز می‌باشد. بنابراین زاویه‌ها مطابق شکل می‌باشند. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADF ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰°، نصف وتر است. پس:

$$DA = ۶ \Rightarrow FA = ۱۲ \Rightarrow FA = FC = ۱۲$$

۶۳ **۱**



از E به C وصل می‌کنیم. مثلث BEC متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است، لذا مثلث CEA قائم‌الزاویه می‌باشد و داریم:

$$AE^۲ + CE^۲ = AC^۲ \Rightarrow ۶^۲ + CE^۲ = ۱۰^۲ \Rightarrow CE = ۸$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین CDE داریم:

$$CD^۲ + DE^۲ = CE^۲ \Rightarrow x^۲ + x^۲ = ۸^۲ \Rightarrow x^۲ = ۳۲ \Rightarrow x = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$$