مجموعه کتاب‌های علامه حلی

هندسه دهم

ویژهٔ استعدادهای درخشان

• لیلا کاظمی

شناسنامه کتاب

سرشناسه	: کاظمی، لیلا، ۱۳۵۷
عنوان و نام پدیدآور	: هندسه دهم، ویژه استعدادهای درخشان
مشخصات نشر	: تهران: انتشارات حلی، ۱۳۹۵.
مشخصات ظاهری	: ۱۵۲ ص.: مصور(رنگی)، جدول(رنگی)، نمودار (رنگی)؛ ۲۲ × ۲۹ س‌م.
فروست	: مجموعه کتاب علامه حلی
شابک	: ۴-۵۹-۷۷۵۵-۶۰۰-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی	: فیپای مختصر
یادداشت	: فهرستنویسی کامل این اثر در نشانی: *http://opac.nlai.ir* قابل دسترسی است
یادداشت	: واژه‌نامه
شماره کتابشناسی ملی	: ۴۴۲۷۴۸۷

عنوان کتاب	هندسه دهم، ویژه استعدادهای درخشان
ناشر	انتشارات حلی
مؤلفان	لیلا کاظمی
صفحه‌آرا	عاطفه قلیچ خانی
طراح جلد	سعید شمس
حروف‌نگار	آزاده مهری
تصویرساز	محمد حسین صفدریان
مسئول هماهنگی	شیوا دلوچی
سال چاپ	۱۳۹۵
نوبت چاپ	اول
شمارگان	۲۰۰۰ جلد
قیمت	۱۴٬۹۰۰
شماره شابک	۴-۵۹-۷۷۵۵-۶۰۰-۹۷۸

جالب است بدانی

تهران، خیابان انقلاب، میدان فردوسی، ابتدای کوچه براتی، پلاک ۱۶ واحد ۱۴

تلفن دفتر مرکزی: ۵-۶۶۷۴۴۳۸۴

فهرست مطالب

پیشگفتار

به نام خدا

چند سال پیش، تعدادی از معلمان با دغدغه «آموزش استعدادهای درخشـان»، دورهم جمع شدند و موسسه علامه حلی را تأسیس کردند. این معلم‌ها-که خودشان از دانش‌آموختگان مدارس استعدادهای درخشان شهر تهران می‌باشند-سال‌ها در مدارس سمپاد (سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان)، به دنبال پیاده‌سازی روش‌های جدید و مؤثر آموزش بوده‌اند و درنهایت تصمیم گرفتند تا نتیجه این تجربیات را در موسسه علامه‌حلی در اختیار دیگر فعالان در عرصه آموزش بگذارند.

مجموعه کتاب‌های انتشارات علامه‌حلی، یکی از محصولات این تلاش جمعی است. در این کتاب‌ها تلاش شده است تا علاوه‌بر تأمین محتوای مناسب برای دانش‌آموزان برتر کشور، روش‌های جدیدتر و مؤثرتر آموزشی هم در انتقال این محتوا به کار گرفته شده و پیاده‌سازی شود. در پس این کتاب‌ها، ساعت‌ها کار فکری برای انتخاب ساختار و شیوه تدوین صرف شده است. فعال کردن دانش‌آموز در روند آموزش و ارجاع او به انجام مشاهدات، فعالیت‌ها و آزمایش‌های مناسب برای انتقال مفاهیم آموزشی و همچنین ترغیب دانش‌آموز برای مراجعه به منابع گسترده‌تر چون سایت‌های علمی اینترنتی و نرم‌افزارهای آموزشی، از ویژگی‌های این سیستم آموزشی است. علاوه‌براین برای کمک به فرایند تدریس معلمان عزیز، محصولات جانبی چون متن راهنمای تدریس کتاب، محتوای الکترونیک و ... در کنار هر کتاب تولید شده است.

مجموعه کتاب‌های علامه‌حلی، با همکاری جمع زیادی از مؤلفین و معلمان باتجربه مدارس سمپاد ـ که به‌دقت انتخاب شده‌اند ـ تألیف و ویرایش گردیده است؛ اما آرزوی ما در این مؤسسه این است که از حضور تمامی معلمان دلسوز و باتجربه مدارس سمپاد و دیگر مراکز آموزشی برتر کشور عزیزمان، در تألیف کتاب‌ها و دیگر محصولات آموزشی، بهره ببریم؛ بنابراین از شما دبیران عزیز خواهشمندیم تجربه‌های خود را درزمینه استفاده از این کتاب و آموزش آن در کلاس، برای ما به آدرس الکترونیک: book@mhelli.ir ارسال فرمایید تا ما در چاپ‌های بعدی کتاب، از تجربیات، نظرات و حتی تصاویر ارسالی شما در انجام آزمایش‌ها، فعالیت‌ها، بازدیدها و ... در کتاب ـ و البته با ذکر نام ارسال‌کننده ـ استفاده کنیم. البته دانش‌آموزان خوب و پرتلاش هم می‌توانند در این کار همکاری کنند و با معلمان خود در اجرای این طرح همراه شوند.

عابدی جعفری

مدیر انتشارات علامه‌حلی

مقدمهٔ مؤلف

افلاطون: مطالعهٔ ریاضیات، دستگاه ذهنی را توسعه می‌دهد و به کار می‌اندازد که ارزش آن از هزاران چشم بهتر است زیرا درک حقیقت از طریق ریاضی میسر است.

از اولین نشانه‌های تمدن بشر در کنار رودخانه نیل (مصریان باستان) تا کنون، هر جا که نشانه‌ای از تفکر و هوشمندی آدمی به چشم می‌خورد، ردپایی از هندسه هم می‌توان پیدا کرد. هندسه به علمِ شکل‌ها و مطالعه آن‌ها شهرت دارد که در قالبِ استانداردهایی مثل منطق و اصول به بررسی رابطهٔ اَشکال و خواص آن‌ها می‌پردازد؛ تا بعدها، منجم‌ها در فهم و توصیف اجرام آسمانی یا فیزیکدان‌ها در ویژگی‌های حرکت یا مطالعه ساختارهای اجسام و هنرمندان در فهم و خلقِ آثار هنری و توصیف تفکراتشان و معماران در طراحی ساختمان‌ها و فضاها از علم هندسه بهره ببرند. چه آن موقع که ارشمیدس از آن در محاسبهٔ هوشمندانه حجم و مساحت اجسام استفاده کرد یا دکارت دنیایی از ترکیب هندسه و جبر آفرید و منجر به پیدایش حساب بینهایت کوچک ها شد، یا نوابغی چون گوس، اویلر و ریمان به کمک هندسه، شاخه‌های جذابی از ریاضیات، مانند توپولوژی، هندسه دیفرانسیل و یا دنیای خمینه‌ها را برای ما خلق کردند؛ و اکنون‌که نظریه‌های مختلف علمی از نجوم تا فیزیک برای پاسخگویی به سؤالات چیستی و چرایی گیتی، ناگزیر به استفادهٔ از هندسه هستند و مطمئناً در آینده نیز چنین خواهد بود.

این کتاب برای فهم مقدماتی هندسه در پایهٔ دهم، برای دانش آموزان سخت‌کوش رشته ریاضی تألیف شده که دوست دارند از این قافله علم عقب نمانند.

با تغییر کتب آموزشی، در این کتاب سعی کرده‌ایم بیشترین کمک ممکن را برای فهم بهتر هندسه در پاسخ به نیاز و نگرانی‌های شما دانش آموزان ساعی و اولیای گرامی‌تان داشته باشیم.

در هر فصل سعی شده علاوه بر تدریس مفاهیم موجود در کتاب آموزشی، جای خالیِ مفاهیم، مسائل و قضایای مهم هندسی در کتاب را پرکنیم و بعدازآن تعدادی مسئله کلیدی را با حل آن‌ها برایتان آورده‌ایم. انتظار می‌رود پس از خواندن هر مسئله به خودتان وقت بدهید و سعی کنید بدون مراجعه به راه‌حلِ آن، ایده‌هایی از راه حل را پیداکرده و از لذت اثبات مسئله بی‌بهره نباشید. بدیهی است که با صرف زمان کافی ممکن است به راه‌حل‌های بهتری از راه‌حل‌های موجود در کتاب دست پیدا کنید. در آخر هر فصل هم تعدادی مسئله و تست وجود دارد که بهتر است برای حل آن‌ها به‌اندازه کافی دقت و حوصله به خرج دهید و در صورت حل نشدن به معلم خود مراجعه کنید. علیرغم تلاش‌های ما ممکن است در این کتاب، به اشتباهات تایپی و نقایصی از این قبیل برخورد کنید که امیدواریم آن‌ها را به ما گوشزد کنید. در پایان از مجموعهٔ همکارانم در مؤسسه علامه حلی؛ علی‌الخصوص آقای انصاری مدیرعامل مؤسسه و آقای عابدی مدیریت بخش کتاب تشکر ویژه می‌نمایم و همچنین از خانم‌ها فراهانیان، قلیچ خانی، مهری و دلوچی که زحمت صفحه‌آرایی، تایپ و هماهنگی و پیگیری را کشیده‌اند، صمیمانه تشکر می‌کنم.

با سپاس فراوان

لیلا کاظمی

۱۳۹۵

قبل از شروع به مطالعهٔ کتاب این قسمت را بخوانید:

وقتی شروع به خواندن این کتاب کنید با بخش‌های مختلفی مواجه می‌شوید که غالباً یک لاک‌پشت متفاوت برای هرکدام وجود دارد. در هریک از این بخش‌ها از شما انتظار داریم کار متفاوتی انجام دهید. این قسمت‌ها براساس تئوری‌های نوین آموزش و تجارب موفق تدریس برای آموزش دانش‌آموزان مستعد طراحی شده است. این بخش‌ها شامل:

درخت دانش: در صفحه دوم هر فصل، نموداری رسم شده تا به شما کمک کند در کمترین حجم، مطالب علمی فصل و چگونگی تقسیم‌بندی و ارتباط آن‌ها را با هم درک کنید. درواقع این بخش نقشه‌ای است برای گم نشدن در موضوعات علمی.

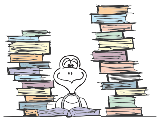
اهداف رفتاری: بعد از درخت دانش، چند جمله نوشته شده که از اول کار معلوم کند این فصل را می‌خوانیم که چه بشود. خوب است در آخر فصل هم برگردیم و ببینیم، آیا می‌توانم کارهایی را که در این بخش گفته انجام دهیم یا نه!

پاسخگو باش: در این قسمت باید پاسخگوی مطالبی که تا اینجا خوانده‌اید باشید. پاسخگوی سؤالاتی که انتظار می‌رود بعد از خواندن درس تا آن قسمت، بتوانید باکمی فکرکردن به آن‌ها جواب دهید.

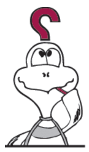
فسفر بسوزان: شاید لازم باشد مقدار بیشتری از مغز خودمان استفاده کنیم و قدری فسفر ذخیره شده را بسوزانیم. البته اگر نتوانستید به سوالات این بخش جواب دهید افسرده نشوید؛ برخی از فسفر بسوزانیدها را خود مولفان هم بلد نیستند جواب دهند!

دست‌به‌کارشو: در موضوعات علمی مخصوصاً علوم تجربی، یادگیری باکیفیت بدون انجام آزمایش، مشاهده و ساخت وسایل علمی امکان‌پذیر نیست. در قسمت دست‌به‌کارشو نحوه انجام آزمایش، دستورالعمل ساخت وسیله و یا نوع مشاهده توضیح داده می‌شود.

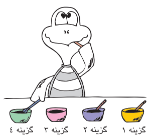
جالب است بدانی: برای افرادی که دوست دارند بیشتر از سطح استاندارد با موضوعات آشنا شوند این قسمت توصیه می‌شود. در این قسمت مطالبی آورده شده که خواندن و یادگرفتن آن الزامی نیست ولی آن‌قدر جذاب است که نشود به‌راحتی بی‌خیال خواندن آن شد.



لغت‌نامه: ما دانش‌آموزان مستعد و متفاوت (!) دوست داریم بتوانیم علاوه بر مطالب درسی، جستجویی هم بکنیم و ببینیم در دنیا درباره موضع درسی ما چه چیزی وجود دارد. برای همین در پایان هر فصل لغات مهم با معادل انگلیسی آن آورده شده است.



تمرین‌ها: در آخر هر فصل تمرین‌های مرتبط با آن آورده شده است. تعداد تمرین‌ها، وقت لازم برای انجام آن‌ها، تعداد سؤالات سخت و آسان و نوع سؤالات کاملاً محاسبه شده، پس خیالتان راحت که همه را می‌توانید انجام دهید. سوالات سخت با ستاره مشخص شده، اگر این سوالات را نتوانستید حل کنید خیلی به خودتان آسیب نزنید!



پرسش‌های چهارگزینه‌ای: سؤالات چهارگزینه‌ای یا همان تست هم در آخر هر فصل طراحی شده است. سؤالات چهارگزینه‌ای با این پیش فرض طراحی شده است که اگر نکات مربوط به سؤال را بلد باشید حداکثر در ۲ دقیقه بتوانید به آن جواب دهید.

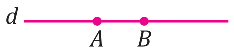
شهرفرنگ: از آنجایی که همه ما ساعت‌هایی از روز را در اینترنت سِیر می‌کنیم، می‌شود علاوه‌بر سایر کارها، به سایت‌های علمی و جذاب هم سر زد. در بخش شهرفرنگ سایتی مربوط به موضوع فصل معرفی می‌شود که توصیه مؤلفان بازدید از آن سایت است.

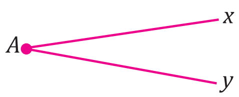
پیشگفتار

همان‌طور که می‌دانید، پایه‌های عظیم ساختمان رفیع «هندسه» بر «اصول» آن استوار است.
«اصل‌ها» گزاره‌های درستی هستند که فرض می‌کنیم درست هستند و به کمک آن‌ها و منطق، مرحله به مرحله و قدم به قدم، قضایا و مسئله‌ها اثبات می‌شوند.
بازی شطرنج را در نظر بگیرید. «اصول» در این بازی نحوهٔ **حرکت مهره‌ها** و **قوانین بازی** هستند. برای کسی‌که می‌خواهد برای اولین‌بار شطرنج بازی کند. باید توضیح داد که حرکت مهرهٔ اسب و رخ و ... چه تفاوتی دارد و قوانین برد و باخت به چه صورت است.
اما اگر این فرد از ما بپرسد چرا حرکت این مهره‌ها و قوانین بازی این‌طور تدوین شده‌اند، چه پاسخی باید به او داد؟
تصور بر آن است که این «اصول» به خودی خود نه درست هستند و نه غلط؛ اما با رعایت و به کارگیری بی‌قید و شرط آن‌ها در حین مسئله (بازی)، یک ساختار کلی لذت بخش خواهیم داشت. «هندسه» نیز چنین است. موجوداتی نظیر نقطه، خط، صفحه و فضا با خواص و قوانین مخصوص آن‌ها را در نظر می‌گیریم و اصولی بین آن‌ها قرار می‌دهیم تا با تبعیت از این اصول و قوانین به مجموعه‌ای منطقی اما «توضیح‌ناپذیر» و لذت بخش اما «آزمایش ناپذیر» دست پیدا کنیم. «توضیح‌ناپذیر» از آن جهت که اصول آن (همانند اصول شطرنج) فاقد هر نوع منطق مستقلی هستند و «آزمایش ناپذیر» به آن دلیل که هر نقطهٔ تجربه‌پذیری در دنیای اطراف ما به هر حال ابعادی خواهد داشت در حالی‌که در هندسهٔ اقلیدسی اصول دربارهٔ نقاطی بیان می‌شوند که هیچ بعدی ندارند و هر خطی که در هر جایی غیر از هندسه اقلیدسی رسم شود، نوع مستطیلی خواهد بود؛ در حالی‌که در هندسه اقلیدسی خط طولی بدون عرض است.

برای فهم این کتاب لازم است اصول و تعریف ویژگی‌های زیر را بدانیم:

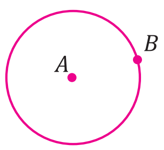
۱) نقطه هیچ بعدی ندارد. خط طول دارد و بی‌انتها است. روی هر خط همواره می‌توان نقطهٔ جدیدی در نظر گرفت و از هر دو نقطه یک خط منحصربه فرد می‌گذرد. اگر دو نقطه روی یک خط در نظر بگیریم به قسمتی از خط که بین آن دو نقطه قرار می‌گیرد، پاره‌خط می‌گوئیم. اگر یک نقطه روی خطی اختیار کنیم به قسمتی از خط که در یک طرف این نقطه قرار می‌گیرد نیم‌خط می‌گوئیم.
نقطه را با حروف بزرگ و خط را با حروف کوچک علامت‌گذاری می‌کنیم. به اجتماع دو نیم‌خط با مبدأ مشترک **زاویه** می‌گوئیم.





(زاویهٔ $x\widehat{A}y$)

۲) هرگاه دو نقطه در صفحه‌ای قرار داشته باشند، دایره‌ای به مرکز یکی از این نقاط وجود دارد که از نقطهٔ دیگری میگذرد.



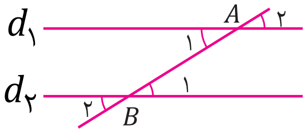
در تعریف تحلیلی دایره می‌گوئیم: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ ثابتی از صفحه (به اسم مرکز) به یک فاصله باشند. به این فاصله، **شعاع** دایره می‌گوئیم.
۳) روی هر خط، هر پاره‌خط به طول دلخواه می‌توان جدا کرد و هر پاره‌خط را به طول دلخواه می‌توان امتداد داد.
۴) وقتی از کلمهٔ «هم‌نهشت» یا «برابر» برای دو شکل هندسی در این کتاب استفاده می‌کنیم، منظور آن است که یکی از آن دو شکل دیگری را می‌پوشاند. (این دو شکل درتمام ویژگی‌های قابل اندازه‌گیری همانند

یکدیگرند.)

پیش از این تعدادی قضیه و مسئله را در سال‌های قبل خوانده‌اید که در فصل‌های مختلف کتاب بنا به نیاز از آن‌ها استفاده خواهیم کرد و هر جا که لازم باشد، اثبات آن‌ها را یادآوری می‌کنیم:

۱) قضیهٔ موازی مورب: هر خط که خطوط موازی را قطع کند، تعدادی زاویه به‌وجود می‌آورد که تمام زوایای حاده آن‌ها باهم و تمام زوایای منفرجهٔ آن‌ها باهم برابر خواهند بود.

زوایای A_1 , A_2 را متقابل به رأس می‌گوئیم.

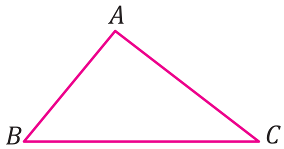


$$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{B}_2$$

توجه: عکس قضیهٔ موازی ـ مورب نیز درست است. (اگر خطی دو خط d_1 و d_2 را طوری قطع کند که A_1 , A_2 باشد، در این صورت می‌توان گفت که d_1 و d_2 موازی هستند.)

۲) مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر 180° است.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$



۳) دو مثلث به یکی ازحالت‌های: سه ضلع نظیر به نظیر برابر (ض ض ض)، دو ضلع و زاویهٔ بین نظیر به نظیر برابر (ض ز ض) و دو زاویه و ضلع بین نظیر به نظیر برابر (ز ض ز) هم‌نهشت خواهند بود.

تذکر: در مثلث‌های قائم‌الزاویه دو حالت وتر و یک ضلع قائمه نظیربه نظیر برابر و وتر و یک زاویهٔ حاده نظیر به نظیر برابر نیز باعث هم‌نهشتی آن دو مثلث خواهد شد.

۴) مساحت مستطیل برابر است با حاصل‌ضرب طول و عرض آن؛

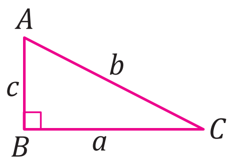
مساحت مثلث برابر با نصف حاصل‌ضرب ارتفاع در قاعدهٔ نظیر آن؛

مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب ارتفاع در قاعدهٔ نظیر آن؛

مساحت ذوزنقه برابر است با نصف حاصل‌ضرب مجموع قاعده‌ها در ارتفاع ذوزنقه؛

مساحت هر چهارضلعی که قطرهای آن برهم عمود باشند، برابر است با نصف حاصل‌ضرب قطرهای آن.

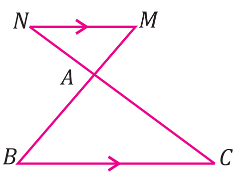
۵) قضیهٔ فیثاغورث: در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع طول وتر برابر است با مجموع مربعات طول‌های اضلاع قائمه.



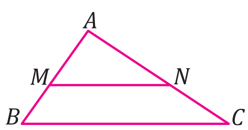
$$c^2 + a^2 = b^2$$

تذکر: عکس قضیه فیثاغورث نیز درست است؛ یعنی اگر اضلاع مثلثی در رابطهٔ بالا صدق کردند آن مثلث قائم‌الزاویه در $\hat{B}$ خواهد بود.

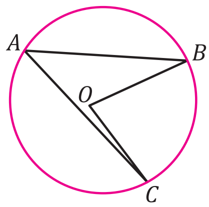
۶) قضیه تالس: اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر مثلث (امتداد آن‌ها) را قطع کند، روی آن دو ضلع چهار پاره‌خط متناسب ایجاد می‌شود.



$$MN \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$



۷) اندازهٔ زاویهٔ محاطی برابر نصف کمان روبه‌روی آن است. اندازهٔ زاویهٔ مرکزی برابر کمان روبه‌روی آن است:



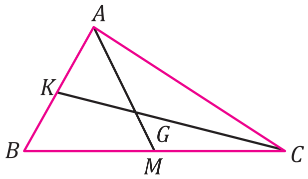
$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}\ ,\ \hat{O}=\overset{\frown}{BC}$$

۸) در مثلث متساوی‌الساقین:

الف) زوایای مجاور به قاعده باهم برابرند.

ب) ارتفاع و میانه و نیم‌ساز رسم شده از رأس مثلث متساوی‌الساقین برهم منطبق هستند.

۹) در هر مثلث هر میانه، میانه دیگری را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کند



$$AK=KB, BM=MC$$
$$\Rightarrow AG=۲GM, CG=۲\times GK$$

رهنمودها

ورزیده شدن در حل مسئله هندسی، با در دست داشتن روش‌های گوناگون حل مسائل مختلف به‌دست نمی‌آید.

ممکن است تغییر یک کلمه در صورت یک مسئله، آن را از مسئله‌ای ساده به مسئله‌ای پیچیده چه بسا لاینحل تبدیل کند. پیشنهاد می‌کنیم برای حل مسئله‌های جدید، در روش‌های حل مسئله‌های قبلی تعمق کنید و نقاط مشترک و تفاوت در راه‌حل‌ها را پیدا کنید. این کار وسعت دیدی به شما می‌دهد که در حل مسئله جدید کمک می‌کند تا به بیراهه نروید.

صورت مسئله را با دقت بخوانید و اگر لازم است برای فهم بهتر آن دوباره و یا سه باره این کار را تکرار کنید.

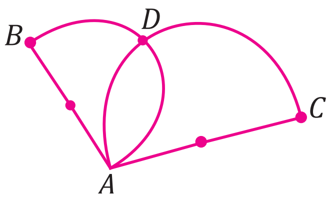
به کمک صورت مسئله سعی کنید شکل مربوط به آن را تا آن‌جا که ممکن است دقیق رسم کنید.

سعی کنید با فرض مسئله پیش بروید یعنی اگر قرار است چهار ضلعی‌ای رسم کنید، آن را در حالت خاص (متوازی‌الاضلاع یا بدتر از آن مستطیل) رسم نکنید.

اگر قرار است در مثلثی میانه رسم کنید، سعی کنید با استفاده از خط‌کش تا آن‌جا که ممکن است وسط ضلع را دقیق‌تر انتخاب کنید و اگر قرار است نیم‌ساز رسم کنید پیشنهاد می‌کنیم از نقاله استفاده کنید تا شکل درست‌تر رسم شود.

شاید این مثال، لزوم رسم شکل دقیق را به شما یادآور شود.

در شکل زیر نیم‌دایره‌ای به قطر AB و نیم‌دایرهٔ دیگری به قطر AC رسم کرده‌ایم تا همدیگر را در D قطع کنند. پاره‌خط BC را رسم کنید تا نیم‌دایره به قطر AB را در E و نیم‌دایره به قطر AC را در F قطع کند.



چون E روی نیم‌دایره به قطر AB است پس زاویهٔ AEB محاطی مقابل به قطر است. پس $A\hat{E}B=۹۰^\circ$

از طرفی F نیز روی نیم‌دایره به قطر AC است، پس $A\hat{F}C=۹۰^\circ$

حال به مثلث AEF دقت کنید. مجموع زوایای داخلی این مثلث چقدر است؟

زاویه‌های $A\hat{D}B$ و $A\hat{D}C$ نیز زوایای محاطی مقابل به قطر هستند و هر کدام یک قائمه می‌شوند پس زاویهٔ $B\hat{D}C$ چقدر است؟

و این یعنی از دو نقطهٔ B و C دو خط می‌گذرد! چرا این نتایج عجیب به‌دست آمده‌اند؟

سعی کنید شکلی که برای مسئله رسم می‌کنید به اندازهٔ کافی بزرگ باشد و فرض مسئله را روی شکل نیز نشان دهید. مثلاً اگر قرار است زاویه‌ای با زاویهٔ دیگری برابر باشند این برابری را روی شکل نیز نشان دهید.

گاهی لازم است برای حل مسئله و رسیدن به حکم، از رسم خط یا پاره‌خط‌های جدیدی در شکل استفاده کنیم. برای فهمیدن اینکه در رویارویی با مسئله جدید، چه خط یا خط‌هایی را باید رسم کنیم، لازم است در روش حل مسئله‌های پیشین به اندازهٔ کافی تعمق و تفکر کرده باشیم. معمولاً در اثبات آنکه دو پاره‌خط باهم برابرند، سعی می‌کنیم مثلث‌هایی شامل آن دو پاره‌خط پیدا کنیم که بتوانیم هم‌نهشتی آن‌ها را اثبات کنیم و یا از ویژگی‌های مثلث متساوی‌الساقین و یا متوازی‌الاضلاع استفاده کنیم.

به‌نظر شما چرا در حل مسائل شامل میانه در مثلث، آن میانه را به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم اما کمتر پیش می‌آید که در ارتفاع یا نیم‌ساز مثلث این کار را انجام می‌دهیم؟ با کمی تفکر می‌فهمیم که اگر در مثلثی، میانه‌ای را به اندازهٔ خودش امتداد دهیم، نقطهٔ جدید به‌دست آمده که با سه رأس مثلث چهار رأس یک متوازی‌الاضلاع را نشان می‌دهند (چرا؟) و متوازی‌الاضلاع خواص کمک کنندهٔ زیادی دارد و این دستکاری در شکل، ما را به آن‌ها مسلح می‌کند.

دیدن راه‌حل‌های مختلف برای یک مسئله و تفکر در آنکه چه نوع دستکاری‌های دیگری در شکل راه‌گشا هستند، قطعاً شما را در حل مسائل هندسی ورزیده‌تر خواهد کرد.

فصل ۱

ترسیم و استدلال

در سردر اولین دانشگاه بشر (آکادمی) نوشتند: «هر کس هندسه نمی‌داند وارد نشود»

اگر این فصل را به خوبی مطالعه کنی و کارهای خواسته‌شده را به دقت انجام دهی:

- با ابزارهای ترسیم هندسی آشنا خواهی شد.
- خواص عمودمنصف یک پاره‌خط را خواهی دانست.
- با خواص نیمساز آشنا خواهی شد.
- خواص میانه‌های یک مثلث را خواهی دانست.
- با شرایط رسم‌پذیر، می‌توانی برخی از مسائل ترسیم را رسم کنی.

◄ ترسیم‌های هندسی

یکی از راه‌های اولیهٔ انتقال مفاهیم و افکار در سیر تکامل بشر، رسم شکل‌هایی بوده که به کمک آن‌ها انسان‌ها می‌توانستند باهم ارتباط برقرار کنند. به نظر می‌رسد این راه ارتباطی پیش از اختراع خط و نوشتن، در جوامع بشری کاربرد داشته و مشکلات به وجود آمده را حل می‌کرده است. پس از شکل‌گیری زبان و گفتار نیز انسان از ترسیم غافل نشده و آن را به‌عنوان وسیله‌ای برای بیان افکار و تجسم بخشیدن به آن‌ها استفاده می‌کند.

در هندسهٔ اقلیدسی، ما با موجودات غیرواقعی نقطه، خط، صفحه و مانند آن‌ها سروکار داریم که ابعاد آن‌ها به ترتیب صفر، یک و دو هستند و همان‌طور که می‌دانید، در دنیای اطراف ما تاکنون قابل‌مشاهده و تجربه نبوده‌اند. از طرفی به نظر می‌رسد موجودات هندسی می‌توانند در حل مسائل، انتقال ایده‌ها، خلق آثار هنری، افزایش قدرت تجسم و مرتب‌کردن افکار، کاربردهای گوناگون و فراوانی داشته باشند. در این فصل از کتاب می‌خواهیم از قوانین و زبان هندسی برای تجسم و ترسیم اشکال استفاده کنیم.

در حل مسائل هندسی لازم است با تعاریف و ویژگی‌ها و گرامر بین موجودات هندسی آشنا باشیم. به یاد داشته باشید که در مسائل ترسیم:

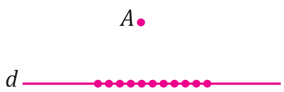
۱) در صورت‌مسئله سعی می‌کنیم به کمک چیزهایی که معلوم هستند و به ما داده شده‌اند، چیز یا چیزهایی را پیدا کنیم که به آن‌ها مجهول می‌گوییم.

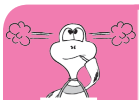
۲) چیزهایی که معلوم‌اند، نقاط یا پاره‌خط‌ها و یا زوایا و یا ... هستند که در صورت‌مسئله مشخص می‌شوند.

همان‌طور که می‌دانید، واحدهای اندازه‌گیری و وسایل اندازه‌گیری در دستگاه‌های مختلف متفاوت است و همواره خطاها در اندازه‌گیری باعث می‌شوند که هرگز نتوانیم به مقدار دقیق دسترسی داشته باشیم. در مسائل هندسی، طول پاره‌خط و یا اندازهٔ زاویه داده‌شده را اندازه‌گیری نمی‌کنیم؛ بلکه می‌پذیریم پاره‌خط، زاویه و یا... در صفحه وجود دارد و سعی می‌کنیم به کمک پرگار و خط‌کش از آنچه در دسترس ماست، مجهول (ها) را که در دسترس ما نیستند رسم کنیم.

مثلاً فرض کنیم، می‌خواهیم از نقطهٔ A خارج از خط d عمودی بر آن رسم کنیم. اگر کسی پیشنهاد کند که نقطهٔ B جایی روی خط d قرار دارد که با رسم پاره‌خط AB در نقطهٔ B زاویهٔ قائم ساخته می‌شود؛ اما روش معینی برای پیدا کردن نقطهٔ B به ما ندهد، ما می‌توانیم به‌اندازهٔ زاویهٔ B مشکوک باشیم و حق داریم که عمود بودن AB بر d را نپذیریم.

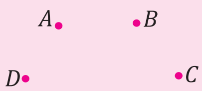
کدام‌یک از این نقاط نقطهٔ B هستند؟





فسفر بسوزان

فرض کنید شما به همراه سه نفر دیگر از دوستانتان، در حیاط مدرسه، در نقاط مشخصی ایستاده‌اید و قرار است همگی به سمت توپی که روی زمین قرار دارد بدوید و کسی برنده است که زودتر به توپ برسد. جای توپ را طوری مشخص کنید؛ که هیچ‌کس اعتراضی نداشته باشد.



(آیا مسئله همیشه جواب دارد؟ آیا فقط یک جواب دارد؟)

این بازی را حداکثر با چند نفر می‌توان انجام داد؟

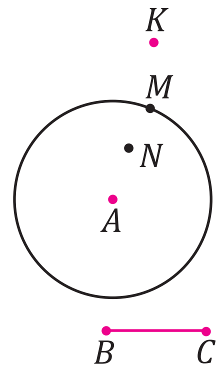
این افراد چگونه باید بایستند تا مسئله جواب داشته باشد؟

در ترسیم قبول می‌کنیم که:

الف) برای رسم یک خط دو نقطه از آن کافی است. (حتماً دقت کرده‌اید که در هندسه «خط» و «خط راست» یکی هستند). پاره‌خط به قسمتی از خط که بین دو نقطهٔ روی آن قرار گرفته گفته می‌شود. برای پیدا کردن نقطه‌ای روی خط گاهی از خواص آن نقطه استفاده می‌کنیم. نقطه از برخورد دو خط یا خط و دایره و یا دو دایره به دست می‌آید.

ب) برای رسم دایره لازم است نقطه‌ای به نام مرکز و پاره‌خطی به نام شعاع داشته باشیم.

با رسم دایره به مرکز A و شعاع BC، تمام نقاطی از صفحه را پیدا می‌کنیم که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ A برابر با طول پاره‌خط BC باشد. فاصلهٔ نقاط بیرون دایره از نقطهٔ A بیشتر از طول BC و نقاط درون کمتر از BC است.



$AM = BC$

$AN < BC$

$AK > BC$

بنابراین اگر در این کتاب گفته شود دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۴ سانتی‌متر رسم کنید، منظور آن است که نقطه‌ای به نام A و پاره‌خطی به طول ۴ سانتی‌متر داده شده‌اند: همهٔ نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از نقطه A برابر پاره‌خطی با طول ۴ باشد، با یک دایره نمایش داده می‌شود.

جالب است بدانی

حل مسائل ترسیم با ابزارهای هندسی به‌صورت غیررسمی، در طول تاریخ شکل یک مسابقهٔ تاریخی بین ریاضی‌دوستان به خود گرفت.

این مسابقه که کسی بتواند با ابزارهای کمتر، اما با همان دقت کافی در هندسه مسئله ترسیم را حل کند، باعث شهرت بعضی از مسائل شده است. در بعضی از ترسیم شکل‌های بنیادی هندسی، سعی بر آن بوده که تنها با استفاده از پرگار شکل را مشخص کنند که از بین این مسئله‌ها، پیدا کردن مرکز دایرهٔ معلوم فقط با پرگار، مسئلهٔ حل شده و جالبی است. (سعی کنید!) همچنین بعضی از مسائل فقط با خط‌کش غیرمدرج حل می‌شوند که رسم خطی موازی با دو خط دیگر از نقطهٔ معلومی بیرون این دو خط یکی از آن‌ها است. (سعی کنید از نقطهٔ A خارج از دو خط موازی d و d' خطی موازی با آن‌ها فقط به کمک خط‌کش رسم کنید)

ثابت شده است بعضی از مسائل ترسیم که مدت‌های طولانی فکر ریاضی دوستان را به خود مشغول کرده بودند، قابل‌حل با خط‌کش و پرگار نیستند. ازجمله این مسائل معروف تضعیف مکعب (رسم مکعبی که حجم آن دو برابر حجم مکعب معلوم دیگری باشد.) تثلیث زاویه (تقسیم یک زاویه دلخواه به سه قسمت مساوی) و تربیع دایره (رسم مربع هم‌مساحت با دایره معلوم) است. حالا می‌دانیم که با خط‌کش و پرگار نمی‌توانیم مربعی هم‌مساحت با دایرهٔ به شعاع معلوم رسم کنیم.

جالب است بدانی

مسئله ساختن مکعبی که حجم آن دو برابر حجم مکعب مفروضی باشد، مسئله دلیان ($Delian$) نام دارد.

در کتاب‌های تاریخ ریاضی می‌خوانیم: مردم آتن در سال ۴۳۰ پیش از میلاد به پیشگوی معبد دلوس مراجعه کردند و خواستند بدانند که چگونه می‌توانند جلوی بیماری طاعون را که به شهر آن‌ها حمله کرده و مردم را قتل‌عام می‌کند بگیرند. پیشگوی معبد به آن‌ها می‌گوید که برای متوقف کردن طاعون باید اندازهٔ محراب «آپولو» را که به شکل مکعب بود، دو برابر کنند.

حالا می‌دانیم که مسئله دو برابر کردن حجم مکعب که هر یال آن یک واحد باشد منجر به حل معادلهٔ $x^3 = 2$ می‌شود که با کمک خط‌کش و پرگار حل‌شدنی نیست.

برای ترسیم شکل‌های هندسی و حل مسائل مربوط به آن لازم است ویژگی‌ها و خواص بعضی از خط‌ها و پاره‌خط‌های خاص را بدانیم:

۱) عمودمنصف یک پاره‌خط خطی است که بر وسط آن پاره‌خط عمود است.

با این تعریف، عمودمنصف اولاً شامل تمام نقاطی است که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشند و ثانیاً هر نقطه روی عمودمنصف از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

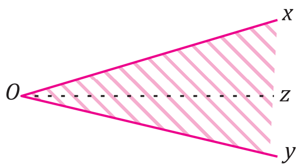
پاسخگو باش
تفاوت دو جملهٔ روبه‌رو چیست؟

اگر خط d عمودمنصف پاره‌خط AB باشد:

الف) اگر نقطهٔ M در صفحه‌ای که پاره‌خط AB در آن است طوری قرار بگیرد که $MA = MB$ باشد، می‌توان ثابت کرد که M روی عمودمنصف پاره‌خط AB در آن صفحه است.

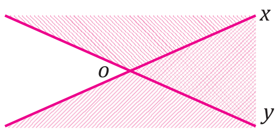
پاسخگو باش
جمله روبه‌رو را ثابت کن.

ب) اگر نقطهٔ T طوری در صفحه قرار بگیرد که $TA = TB$ باشد، می‌توان ثابت کرد که نقطهٔ T روی عمودمنصف پاره‌خط AB در آن صفحه است.



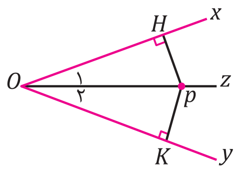
۲) نیمساز زاویهٔ xoy نیم‌خط OZ است با مبدأ O که $x\hat{o}z = z\hat{o}y$

(دقت کنید که زاویه از اجتماع دو نیم‌خط با مبدأ مشترک به دست می‌آید.) به قسمتی که در شکل مشخص شده است درون زاویه می‌گوییم.



برای پیدا کردن درون زاویه $x\hat{o}y$، کافی است خط xx' را در نظر بگیریم و قسمتی از صفحه را که oy در آن قرار دارد هاشور بزنیم. سپس خط yy' را در نظر بگیریم و قسمتی از صفحه را که ox در آن قرار دارد هاشور بزنیم. قسمتی از صفحه که دوبار هاشور می‌خورد درون زاویه گفته می‌شود.)

پاسخگو باش
جمله روبه‌رو را ثابت کن.



$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow PH = PK$

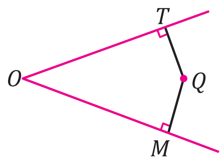
اگر oz نیمساز زاویهٔ $x\hat{o}y$ باشد:

الف) اگر نقطهٔ P روی oz باشد، P از اضلاع زاویه به یک فاصله است.

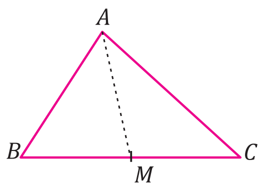
(یادآوری: فاصله P از خط xx' یعنی طول عمودی که از P بر xx' رسم می‌شود.)

پاسخگو باش
جمله روبه‌رو را ثابت کن.

ب) اگر نقطهٔ Q از دو نیم‌خط ox و oy به یک فاصله باشد، Q روی نیمساز (oz) است. (چرا؟)



$QT = QM \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$



۳) میانه پاره‌خطی است که رأس مثلث را به وسط ضلع روبرو وصل می‌کند.

AM میانه وارد بر ضلع BC است. $BM = MC \Rightarrow$

تذکر: اگر اضلاع BC، AC و AB را به ترتیب با a، b و c نمایش دهیم، به‌جای میانه وارد بر ضلع a (BC) از m_a و به‌جای ارتفاع وارد بر ضلع a از h_a استفاده می‌کنیم.

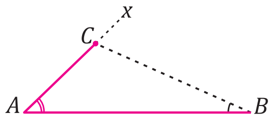
اگر نیمساز زاویهٔ داخلی A در مثلث ABC ضلع BC را در D قطع کند، به D پای نیمساز می‌گوییم و پاره‌خط AD را با d_a نمایش می‌دهیم.

ترسیم

در گذشته دیده‌ایم که مثلث‌هایی که **دو ضلع و زاویه بین** و یا **دو زاویه و ضلع بین** و یا **سه ضلع** نظیر به نظیر برابر داشته باشند برابر (هم‌نهشت) هستند؛ یعنی با داشتن یکی از سه حالت فوق، فقط یک مثلث ترسیم‌پذیر است.

مثال ۱. اگر دو ضلع و زاویه بین آن دو ضلع از مثلثی معلوم باشد، چطور آن را رسم می‌کنید؟
(در این کتاب به‌جای اینکه گفته شود مثلثی با دو ضلع $AB=۵$, $AC=۴$ و زاویه بین $\hat{A}=۴۰^\circ$ رسم کنید، می‌گوییم مثلثی با معلوم بودن سه ضلع AC ، AB و $\hat{A}$ رسم کنید؛ و منظورمان از رسم کردن، استفاده از خط‌کش و پرگار و معلومات مسئله یعنی AB و AC و $\hat{A}$ است.)

پاسخ: برای رسم کافی است پاره‌خط AB را رسم کنیم



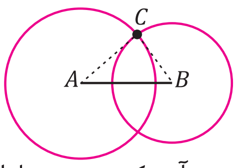
(دقت کنید که AB چون جزء معلومات مسئله است، قابل ترسیم است و مثلاً BC را چون جزء معلومات مسئله نیست نمی‌توانیم رسم کنیم.) از سمت نقطهٔ A زاویهٔ معلوم $\hat{A}$ را جدا کنیم یعنی نیم‌خط AX را طوری رسم کنیم که $B\hat{A}X=\hat{A}$. روی نیم‌خط Ax به اندازهٔ AC جدا کنیم و نقاط B و C را به یکدیگر وصل کنیم.

دست‌به‌کار شو

مثلثی با معلوم بودن $\hat{A}$, $\hat{B}$ ، AB رسم کن.

مثال ۲. مثلثی با معلوم بودن سه ضلع AB، AC، BC رسم کنید.(تذکر: در مثلث ABC، ضلع AC روبه‌رو به زاویه B است، به همین دلیل به‌جای AC می‌توانید از b استفاده کنید. به همین ترتیب: $BC=a$, $AB=c$)

پاسخ: پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. به مرکز A دایره‌ای به شعاع AC و به مرکز B دایره‌ای به شعاع BC رسم می‌کنیم. اگر این دایره‌ها همدیگر را در دو نقطه قطع کنند، یکی از نقاط را نقطه C می‌نامیم و نقطه C را به A و B وصل می‌کنیم. مثلث ABC، مثلث مطلوب است.



تذکر: در این حالت (شکل (۱)) $AB < AC + BC$ یعنی مثلث فقط وقتی به وجود می‌آید که مجموع طول هر دو ضلع آن، از ضلع سوم بزرگ‌تر باشد که به آن شرط وجود مثلث می‌گوییم.
در حل مسائل ترسیم سعی می‌کنیم که با توجه به معلومات مسئله، مثلثی در شکل پیدا کنیم که توسط یکی از حالت‌های بالا و یا حالت‌های اصلی دیگر (وتر و یک ضلع و یا وتر و یک زاویه حاده) قابل رسم باشد. پس از رسم این مثلث که ما آن را **مثلث حل‌کننده** میگوییم، به رسم شکل اصلی می‌پردازیم.

دست‌به‌کار شو

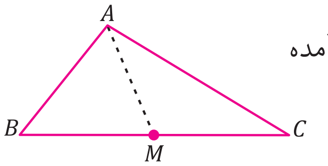
مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کن که:
الف) وتر و یک ضلع آن معلوم باشد.
ب) وتر و یک زاویه حاده آن معلوم باشد.

مثال ۳. مثلثی با معلوم بودن a، b و m_a رسم کنید.

پاسخ: فرض کنیم مسئله را حل کرده‌ایم و مثلث خواسته‌شده معلوم است. با توجه به صورت‌مسئله

$BC=a\ ,\ AC=b\ ,\ Am=m_a$ معلوم‌اند. چون میانه، ضلع مقابل را نصف می‌کند پس $BM=MC=\frac{a}{۲}$ هم معلوم هستند، پس هر سه ضلع مثلث AMC معلوم‌اند و این مثلث به حالت سه ضلع قابل رسم است و مثلث حل کننده، مثلث AMC است. پس مراحل ترسیم به شکل زیر خواهد بود:

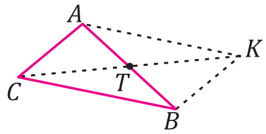
الف) مثلث AMC را با معلوم بودن سه ضلع $AM=m_a\ ,\ MC=\frac{a}{۲}\ ,\ AC=b$ رسم می‌کنیم.



ب) CM را از سمت M به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم و نقطهٔ به‌دست‌آمده را B می‌نامیم.

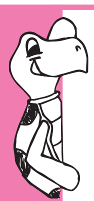
ج) از A به B وصل می‌کنیم. مثلث ABC مثلث مطلوب است.

مثال ۴. مثلثی با معلوم بودن a و b و m_c رسم کنید.



پاسخ: (بازهم) فرض می‌کنیم مسئله حل شده است؛ پس در شکل روبه‌رو $BC=a\ ,\ AC=b\ ,\ CT=m_c$ معلوم‌اند،

اما AB معلوم نیست؛ یعنی $AT=\frac{AB}{۲}$ را نداریم و فعلاً مثلث حل‌کننده مشخص نیست. برای پیدا کردن مثلث حل‌کننده، میانه CT را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ K برسیم.



علاوه بر خاصیت‌های خوب دیگری که میانه دارد، معمولاً در حل مسائل، در نظر داشته باشید که اگر میانهٔ مثلث را به اندازهٔ خودش امتداد دهیم چهارضلعی‌ای به وجود می‌آید (در شکل بالا $AKBC$) که قطرهای آن (AB و CK قطر هستند) همدیگر را نصف کرده‌اند. می‌دانیم که این چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع خواهد بود و به ما این امکان را می‌دهد که از خواص زیادی که متوازی‌الاضلاع دارد استفاده کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} AT=TB\ (\text{میانه است}CT) \\ CT=TK \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{همدیگر را نصف کرده‌اند}]{\text{قطرهای چهار ضلعی}AKBC} \text{متوازی الاضلاع}\ AKBC$$

در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو برابرند: $AK=BC$

مثلث حل‌کننده مسئله ظاهر شد. $\overset{\Delta}{ACK}$ با سه ضلع معلوم قابل رسم است.

$$CK=۲\times m_c\ ,\ AK=BC=a\ ,\ AC=b$$

پس مراحل ترسیم به‌صورت زیر خواهد بود:

الف) مثلث ACK را با اضلاع $CK=۲m_c\ ,\ AK=a\ ,\ AC=b$ رسم می‌کنیم.

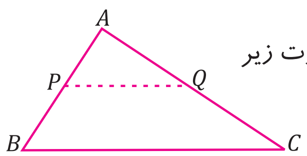
ب) نقطهٔ T وسط ضلع CK را پیدا می‌کنیم و AT را رسم می‌کنیم.

ج) پاره‌خط AT را از سمت T به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ B برسیم.

د) مثلث ABC را رسم می‌کنیم. این مثلث، مثلث مطلوب است.

مثال ۵. نقاط P و Q به ترتیب وسط‌های اضلاع AB، AC در مثلث ABC هستند. مثلث ABC را با معلوم بودن AC و AB و پاره‌خط PQ رسم کنید.

پاسخ: فرض کنیم مثلث ABC موردنظر، شکل روبه‌رو باشد.



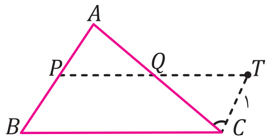
پس مثلث حل کننده مسئله، مثلث APQ است. (چرا؟) و مراحل ترسیم به‌صورت زیر خواهد بود:

الف) مثلث APQ را به حالت سه ضلع رسم می‌کنیم.

ب) اضلاع AP، AQ را به ترتیب از سمت P و Q به اندازهٔ خودشان امتداد می‌دهیم تا نقاط B و C به‌دست‌آمده آیند.

ج) از B به C وصل می‌کنیم، مثلث ABC مثلث مطلوب است.

تذکر: در مسئله بالا اگر پاره‌خط PQ را مطابق شکل به اندازهٔ خودش امتداد دهیم تا به نقطهٔ T برسیم، مثلث‌های APQ و TCQ به حالت دو ضلع و زاویه بین باهم برابر خواهد بود



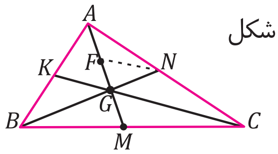
(چرا؟) پس $\overset{(1)}{\boxed{AP = TC}}$, $\hat{C}_1 = \hat{A}$ و چون نقطهٔ P وسط ضلع AB قرار دارد:

$\overset{(2)}{\boxed{AP = PB}}$ پس از ۱ و ۲: $\boxed{TC = BP}$

اما چون $\hat{C}_1 = \hat{A}$، طبق عکس قضیه موازی مورب، خط‌های AB و CT باهم موازی‌اند. پس پاره‌خط‌های CT و BP باهم برابر و موازی‌اند؛ یعنی چهارضلعی $BCTP$ متوازی‌الاضلاع است و $PT = BC$ ، پس PQ نصف BC است و با آن موازی است.

نتیجه: پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلثی را به هم وصل می‌کند، موازی ضلع سوم و نصف آن است. (به این قضیه: **میان خط در مثلث** میگوییم.)

مثال ۶. مثلثی با معلوم بودن سه میانهٔ آن رسم کنید.



پاسخ: فرض کنیم مثلث ABC با داشتن سه میانهٔ آن رسم شده است، پس در شکل روبه‌رو $AM = m_a$, $BN = m_b$, $CK = m_c$ معلوم‌اند.

درباره میانه‌های یک مثلث می‌دانیم در یک نقطه (G) همرس‌اند و G هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کند.

$$\frac{۲}{۳}m_a = AG = ۲GM , BG = ۲GN , CG = ۲GK = \frac{۲}{۳}m_c$$

اگر وسط پاره‌خط AG را F بنامیم:

$$AF = FG = GM = \frac{۱}{۳}m_a$$

طبق تذکر مثال قبل (قضیه میان دو خط در مثلث)، در مثلث AGC (نقطهٔ F وسط ضلع AG و نقطهٔ N وسط ضلع AC است) FN موازی با ضلع CG و نصف آن است. پس:

$$FN = \frac{۱}{۲}CG = \frac{۱}{۲}(\frac{۲}{۳}m_c) = \frac{۱}{۳}m_c$$

پس هر ضلع مثلث FNG، برابر یک‌سوم یکی از میانه‌های مثلث ABC است و قابل رسم و مثلث حل‌کننده مسئله ما است. مراحل ترسیم به‌صورت زیر خواهد بود:

الف) مثلث GFN را به حالت ۳ ضلع رسم می‌کنیم (هر ضلع یک‌سوم یکی از میانه‌ها است)

$$FG = \frac{۱}{۳}m_a , FN = \frac{۱}{۳}m_c , GN = \frac{۱}{۳}m_b$$

ب) GF را از سمت F به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ A برسیم. (چرا؟)

ج) GN را از سمت G به اندازهٔ دو برابر خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ B برسیم. (چرا؟)

د) از A به N وصل کرده و به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ C برسیم. (چرا؟)

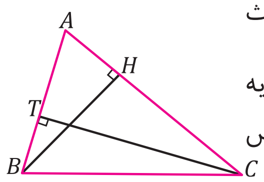
هـ) مثلث ABC مثلث مطلوب است.

پاسخگو باش

آیا مثلثی وجود دارد که طول سه میانهٔ آن ۳، ۶، ۹ باشد؟ چرا؟

مثال ۷. مثلثی با معلومات a، h_c , h_b رسم کنید.

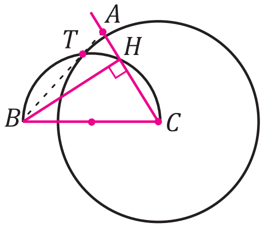
پاسخ: فرض کنیم مثلث ABC در شکل روبه‌رو مثلث خواسته شده باشد، پس معلوم‌های مسئله $BC=a$, $BH=h_b$, $CT=h_c$ هستند. مثلث حل‌کننده مسئله می‌تواند مثلث $\overset{\Delta}{BHC}$ باشد (به حالت وتر (BC) و ضلع قائم (BH) قابل رسم است.) و چون زاویه T قائمه است، پس T روی دایره به قطر BC است (چرا؟) و CT معلوم است، پس مراحل ترسیم به‌صورت زیر خواهد بود:



الف) مثلث BHC را به حالت وتر و یک ضلع رسم می‌کنیم.

ب) دایره‌ای به قطر CB رسم می‌کنیم.

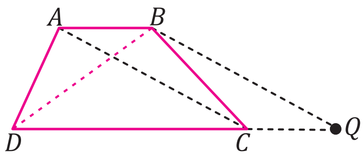
ج) دایره‌ای به مرکز C و شعاع CT رسم می‌کنیم تا دایره‌ی به قطر BC را در نقطهٔ T قطع کند.



د) پاره‌خط BT را رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا امتداد پاره‌خط CH را در A قطع کند. مثلث ABC مطلوب است.

مثال ۸. از ذوزنقه‌ای دو قطر و دو قاعده معلوم هستند، این ذوزنقه را رسم کنید.

پاسخ: فرض کنیم ذوزنقه $ABCD$، ذوزنقه مطلوب باشد.



پس AB و CD (قاعده‌ها) و AC و BD (قطرها) معلوم هستند. برای پیدا کردن مثلث حل‌کننده کافی است از B خطی موازی قطر AC رسم کنیم تا امتداد DC را در Q قطع کند. $ABQC$ متوازی‌الاضلاع است. (چرا؟)
پس $AC=BQ$, $AB=QC$ و مثلث BDQ (مثلث حل‌کننده) به حالت سه ضلع قابل رسم خواهد بود.
مراحل ترسیم به عهده شما گذاشته می‌شود.

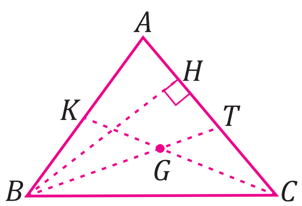
مثال ۹. از مثلث ABC، m_b , m_c h_b معلوم‌اند. مثلث را رسم کنید.

پاسخ: مثل همیشه فرض کنیم مسئله را حل کرده‌ایم و مثلث ABC شکل روبه‌رو مثلث مطلوب است و $BT=m_b$, $CK=m_c$, $BH=h_b$ معلوم هستند. می‌دانیم که میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند. پس نقطهٔ G محل برخورد میانه‌های BT و CK طوری قرار دارد که:

$$CG=\frac{۲}{۳}CK=۲Gk$$

$$BG=\frac{۲}{۳}BT=۲GT$$

مثلث حل‌کننده مسئله ما، مثلث $\overset{\Delta}{BHT}$ است (چرا؟).
مراحل ترسیم به‌صورت زیر خواهد بود:



الف) مثلث BTH را به حالت وتر و یک ضلع رسم می‌کنیم.

ب) نقطهٔ G روی ضلع BT را طوری پیدا می‌کنیم که $BG=\frac{۲}{۳}BT$؛

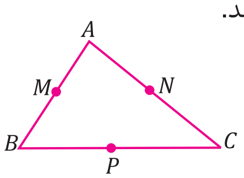
ج) به مرکز G و شعاع $CG=\frac{۲}{۳}m_C$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع TH را در C قطع کند.

د) پاره‌خط CG را به اندازهٔ نصف آن از سمت G امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ K به دست آید.

هـ) پاره‌خط BK را رسم می‌کنیم و به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ A به دست آید.

مثلث ABC، مثلث مطلوب است.

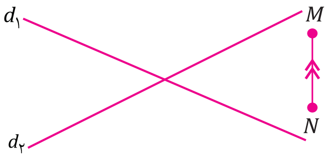
مثال ۱۰. خطی رسم کنید که هر سه رأس مثلث ABC از آن خط هم‌فاصله باشند.

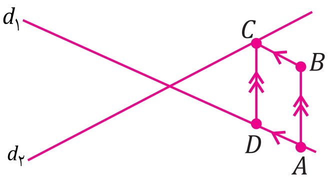


پاسخ: فرض کنیم نقاط M، N و P به ترتیب وسط‌های اضلاع AB، AC، BC باشند.

سه خط MN، MP، PN جواب‌های مسئله‌اند. (چرا؟)

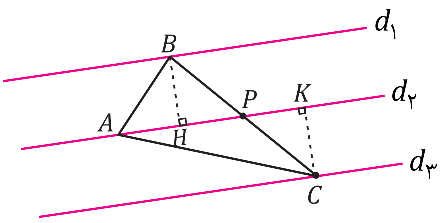
مثال ۱۱. خط‌های متقاطع $d_۱$, $d_۲$ و پاره‌خط MN مطابق شکل مفروض‌اند. پاره‌خطی موازی و هم‌طول MN طوری رسم کنید که ابتدا و انتهای آن روی خطوط $d_۱$, $d_۲$ باشد.





پاسخ: از نقطهٔ دلخواه A روی خط $d_۱$ موازی و مساوی پاره‌خط MN، پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ B موازی خط $d_۱$ خطی رسم کرده تا $d_۲$ را در C قطع کند. از C خطی موازی AB رسم می‌کنیم که $d_۱$ را در D قطع کند. پاره‌خط CD پاره‌خط مطلوب است. (چرا؟)

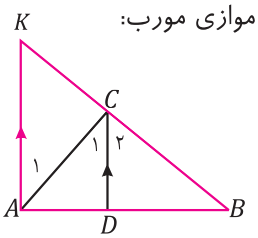
مثال ۱۲. از سه رأس مثلث ABC سه خط موازی طوری رسم کنید که فاصلهٔ آن‌ها برابر باشند.



پاسخ: فرض کنیم مسئله حل‌شده است و $d_۱ \parallel d_۲ \parallel d_۳$, $BH=CK$، پس نقطهٔ P وسط ضلع BC است (چرا؟) و AP میانه است. بنابراین برای حل مسئله کافی است میانهٔ AP را رسم کرده و از نقاط B و C خطوطی موازی میانه رسم کنیم. (مسئله چند جواب دارد؟)

مثال ۱۳. مثلثی را با داشتن d_c,b,a رسم کنید.

پاسخ: فرض کنیم مثلث ABC شکل روبه‌رو،مثلث مطلوبست .پس طول BC, AC, CD معلوم است. خطی موازی CD که از A رسم کردایم در امتداد ضلع BC را در K قطع می‌کند طبق موازی مورب:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۱=\hat{C}_۱\\ \hat{K}=\hat{C}_۲\\ \hat{C}_۱=\hat{C}_۲\end{array}\right\}\rightarrow \hat{A}_۱=\hat{K}\Rightarrow AC=CK,CD$$

$$\text{طبق تالس}: \frac{AD}{DB}=\frac{CK}{BC}\Rightarrow\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{BC}(۱)$$

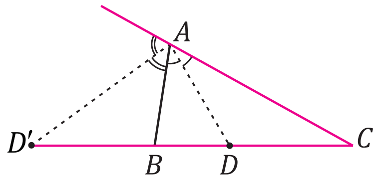
$$,\frac{CD}{AK}=\frac{BC}{BK}\rightarrow\frac{CD}{AK}=\frac{BC}{BC+CK}\rightarrow AK=\frac{CD(BC+CA)}{BC}$$ ادامه راه حل به عهده شماست

نتیجه مهم: در مثلث ABC نیمساز زاویه‌ی C ضلع مقابل‌اش را به ۲ قسمت تقسیم کرده که $\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{BC}$

پس: در هر مثلث ، هر نیمساز داخلی، ضلع مقابلش را به نسبت اضلاع آن زاویه تقسیم می‌کند (قضیه نیمساز داخلی)

مثال ۱۴. از مثلثی ضلع a و نقطهٔ تقاطع نیمساز رأس A با این ضلع و d_a (طول نیمساز داخلی) معلوم است. مثلث را رسم کنید.

پاسخ: فرض کنیم مسئله حل‌شده و مثلث ABC مقابل، جواب مسئله است. پس معلوم‌های مسئله پاره‌خط BC، نقطهٔ D روی آن و طول پاره‌خط AD است. از متن مثال ۱۳ پاره‌خط‌هایی که نیمساز زاویه A روی ضلع BC جدا می‌کند با نسبت اضلاع زاویه A برابر است: $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$

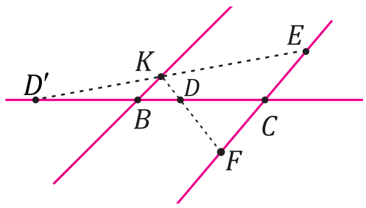


به طریق مشابه می‌توان ثابت کردیم که اگر AD'، نیمساز خارجی زاویه A باشد:

$$\frac{D'B}{D'C}=\frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{DB}=\frac{D'B}{D'C}$$

از چهار نقطهٔ D، C، B، D' روی خط $\overleftrightarrow{BC}$ سه نقطهٔ C، B و D معلوم هستند. کافی است برای پیدا کردن نقطهٔ D':

الف) از نقاط B،C دو خط $d_۱$, $d_۲$ را موازی یکدیگر رسم کنیم و نقاط E و F را در دو طرف C روی خط $d_۲$ طوری قرار دهیم که $FC=CE$



ب) از F به D وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا $d_۱$ را در K قطع کند. زوایای مثلث‌های BKD و CFD باهم نظیر به نظیر برابرند، پس طبق اطلاعات سال گذشته، مثلث‌های BKD، DCF متشابه‌اند و

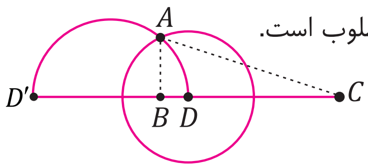
$$\frac{BD}{DC}=\frac{DK}{DF}=\frac{BK}{CF} \quad (۱)$$

ج) از E به K وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا امتداد BC را در D' قطع کند در $\overset{\Delta}{DCE}$ داریم:

$$BK \parallel CE \Rightarrow \frac{D'B}{DC}=\frac{BK}{CE} \quad (۲)$$

$$\text{از (۱) و (۲)} \Rightarrow \frac{D'B}{D'C}=\frac{BD}{DC}$$

د) از آنجائی که نیمسازهای داخلی و خارجی هر زاویه برهم عمودند، پس $D\hat{A}D'=۹۰^\circ$ بنابراین نقطهٔ A روی دایره به قطر DD' است. برای پیدا کردن نقطهٔ A؛ به مرکز D و شعاع $AD=d_A$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایره‌ای به قطر DD' را در A قطع کند. $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث مطلوب است.



◄ استدلال

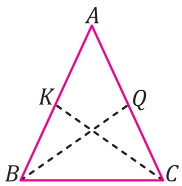
در طول تاریخ، تجربه و آزمایش یکی از مهم‌ترین راه‌های کسب علم و دانش بوده است. بااین‌حال تلاش‌های افراد هوشمند و سخت‌کوش در طراحی و اجرای آزمایش‌های دقیق و پیچیده همیشه هم موفق نیست و بسیار پیش‌آمده که با گذر زمان تجربیات جدید، خبر از غلط و نادرست بودن نتایج آزمایش‌های پیشین داده‌اند. در سال ۱۹۲۶یوهانس فایبیگر، پاتولوژیست، با خوراندن نوعی کرم به موش‌های آزمایشگاهی‌اش نشان داد که کرم‌ها باعث شده‌اند تمام موش‌ها سرطان معده بگیرند. آکادمی علوم سوئد، برای کشف عامل


یوهانس فایبیگر

سرطان معده نوبل پزشکی آن سال را به این دانشمند دانمارکی داد و این کشف را «درخشان، هوشمندانه و بی‌نظیر» توصیف کرد. امروزه می‌دانیم که این نظریه از اساس غلط است. به دلیل این سوءبرداشت‌ها و خطاهای آزمایشگاهی، در علوم تجربی معمولاً بااحتیاط زیادی استدلال و نتیجه‌گیری می‌کنند. به برداشت‌ها و نتایجی که به دنبال تجربه و آزمایشگاه به دست می‌آیند و نتایج به‌دست‌آمده به‌صورت کلی بیان می‌شوند **استدلال استقرایی** می‌گوییم. در تمام علوم تجربی معمولاً از این نوع استدلال استفاده می‌شود.

در شاخه‌های مختلف ریاضی معمولاً از **استدلال استنتاجی** استفاده می‌شود. در این نوع از استدلال از اصول ریاضی، منطق و مسائلی که قبلاً درستی آن‌ها را اثبات کرده‌ایم برای اثبات مسئله جدید استفاده می‌کنیم.

مثلاً برای اثبات آنکه در مثلث متساوی‌الساقین میانه‌های وارد بر ساق‌ها باهم برابرند، از مسئله‌ای که قبلاً ثابت کرده‌ایم (مثلث‌هایی که دو ضلع و زاویهٔ بین نظیربه‌نظیر برابر دارند هم‌نهشت (مساوی) هستند.) استفاده می‌کنیم.



فرض: $AB = AC\ ,\ AK = KB\ ,\ AQ = QC$

حکم: $BQ = Ck$

اثبات

$$\begin{cases} AB = AC \rightarrow \dfrac{AB}{۲} = \dfrac{AC}{۲} \rightarrow AK = AQ \\ \hat{A} = \hat{A} \\ AC = AB \end{cases} \overset{(\text{ض ز ض})}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{AkC} \cong \overset{\Delta}{ABQ} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} BQ = CK$$

عکس قضیه:

قضیه: در مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به قاعده باهم برابرند.

اگر جای فرض و حکم قضیهٔ بالا را عوض کنیم، جملهٔ زیر به دست می‌آید:

مثلثی که دو زاویه برابر باشند، متساوی‌الساقین است.

به جملهٔ اخیر «عکس قضیهٔ بالا » می‌گوییم؛ که در اینجا عکس قضیه درست و قابل‌اثبات است.

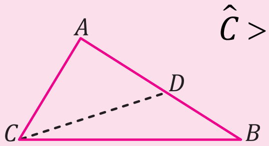
اگر عکس قضیه‌ای نیز درست باشد به آن قضیه دو شرطی می‌گوییم.

پاسخگو باش

مثالی از قضیه دو شرطی بزن و سپس قضیه‌ای بنویس که دو شرطی نباشد.

پاسخگو باش

در مثلث ABC ، ضلع AB از ضلع AC بزرگ‌تر است. میخواهیم ثابت کنیم $\hat{C} > \hat{B}$



الف) روی AB پاره‌خط AD را به‌اندازه AC جدا کن.

ب) ثابت کن:

$$A\hat{D}C > A\hat{B}C$$

ج) ثابت کن:

$$A\hat{C}B > A\hat{B}C$$

د) بنابراین در هر مثلث با دو ضلع نابرابر زاویه..................................

تذکر: در اثبات بعضی از قضیه‌ها، بجای آنکه از درست بودن فرض استفاده کنیم و درست بودن حکم را نتیجه بگیریم، برعکس عمل می‌کنیم یعنی فرض می‌کنیم حکم غلط است و از تصور اینکه حکم غلط است به تناقض با فرض مسئله یا به تناقض با قوانین یا قضایا درست قبلی می‌رسیم، با این کار نشان می‌دهیم، غلط بودن حکم ما را به‌جای غلط و غیرممکنی می‌رساند؛ پس حکم نمی‌تواند غلط باشد. به‌این‌ترتیب نشان می‌دهیم حکم درست است. به این نوع استدلال، اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف می‌گوییم.

پاسخگوباش

نتیجهٔ سؤال پاسخگو باش قبل را عکس کن و ثابت کن عکس سؤال نیز درست است.

فسفر بسوزان

بررسی کن در مثلثی که دو نیمساز برابر باشد، متساوی‌الساقین است؟

این حدس در سال ۱۸۴۰ از طرف لموس ریاضی‌دان آلمانی (*C.L.Lehmuse* ۱۸۶۳-۱۷۸۰) برای ریاضیدانان سوئیسی اشتانیر (*Jacob Steiner* ۱۸۶۳-۱۷۹۶) فرستاده شد و حل بسیار پیچیده او، دیگر ریاضی‌دان‌ها را واداشت تا در جستجوی راه‌های ساده‌تر برآیند. یکی از بهترین راه‌حل‌ها توسط ریاضی‌دان فرانسوی دسکوپ در سال ۱۸۸۰ حل شد.


جاکوب اشتاینر

پاسخگوباش

اگر بدانیم از یک نقطه خارج از یک خط، یک خط و فقط یک خط موازی آن رسم می‌شود، ثابت کن دو خط موازی با یک خط، باهم موازی‌اند..

اگر مثالی باعث شود متوجه شویم جمله‌ای (گزاره‌ای) غلط است به آن مثال، مثال نقض می‌گوییم.

پاسخگوباش

با خط‌کش مدرج مثالی بزن که نشان دهد گزاره‌های زیر غلط است:

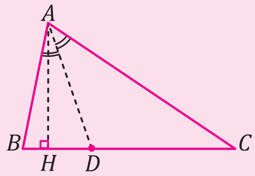
الف) در هر مثلث متساوی الساقین، طول قاعده از طول ساق‌ها کوتاهتر است.

ب) مثلث هایی که مساحت برابر داشته باشند محیط برابر دارند.

ج) چهار ضلعی‌ای که قطرهای آن بر هم عمود باشند لوزی است.

د) چهار ضلعی که قطرهای برابر داشته باشد مستطیل است.

در مثلث ABC، AD نیمساز داخلی زاویهٔ A است.
(تذکر: به نقطهٔ D، پای نیمساز داخلی می‌گوییم)



الف) با استفاده از ارتفاع AH مساحت مثلث‌های $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{ACD}$ را بنویسید و جای خالی را پر کن:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ACD}}}{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}=\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

ب) مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABD}$ را برحسب ضلع AB و مساحت $\overset{\Delta}{ACD}$ را برحسب ضلع AC بنویسید و جای خالی را پر کن:

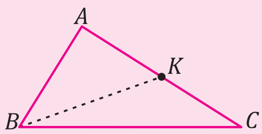
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ACD}}}{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}=\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

ج) با کمک دو قسمت قبل، جای خالی را پر کن:

$$\frac{AC}{AB}=\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

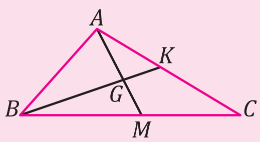
د) به نتیجه‌ای که در قسمت بالا به‌دست آورده‌اید، قضیهٔ نیمساز داخلی می‌گوییم.

چرا هر میانه، مثلث را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند:



$$AK=KC\Rightarrow S_{ABK}=S_{CBK}$$

در مثلث ABC مطابق شکل m_a، m_b یکدیگر را در G قطع کرده‌اند.



الف) چهار مثلث نام ببر که همگی، هم‌مساحت باشند.

ب) ثابت کن:

$$S_{BGM}=S_{AGK}$$

ج) از C به G وصل کنید و ثابت کن:

$$S_{BGM}=S_{GMC}، S_{AGK}=S_{GKC}$$

د) ثابت کن:

$$S_{AGC}=۲S_{GMC}$$

ه) ثابت کن:

$$AG=۲GM$$

تذکر اول: دقت کنید که در سؤال قبل ثابت کرده‌اید که میانهٔ AM توسط یک میانهٔ دیگر (در اینجا میانه BK) به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌شود. پس می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث هر میانه، میانهٔ دیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کند. (چرا؟) پاره‌خط بزرگ‌تر که از میانه جدا می‌شود، سمت رأس مثلث است. به همین ترتیب برای میانهٔ BK نیز می‌توان گفت:

$$BG = ۲GK$$

تذکر دوم: با توجه به اینکه روی پاره‌خط AM فقط یک نقطهٔ G با شرط $AG = ۲GM$ می‌توان پیدا کرد، پس میانهٔ CT هم باید از نقطهٔ G بگذرد (چرا؟)

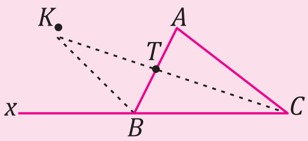
تذکر سوم: می‌توان نتیجه گرفت که میانه‌ها، مثلث را به ۶ مثلث هم‌مساحت مستقیم می‌کنند.(چرا؟)

پاسخگو باش

در مثلث ABC، ضلع CB را از سمت B امتداد می‌دهیم. به زاویهٔ ABX زاویهٔ خارجی B می‌گوییم.

الف) میانهٔ CT را رسم کن و آن را به‌اندازهٔ خودش از سمت T ادامه بده تا به نقطهٔ K برسی.

ثابت کن $\overset{\Delta}{ATC} \cong \overset{\Delta}{TBK}$ و اجزای نظیر آن را بنویس.



ب) چرا زاویهٔ ABK از زاویهٔ خارجی B کوچک‌تر است؟

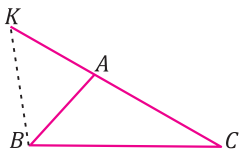
ج) چرا زاویه خارجی B از زاویه A بزرگ‌تر است؟

د) ثابت کن زاویه خارجی B از زاویهٔ C نیز بزرگ‌تر است؟

ه) بنابراین در هر مثلث هر زاویهٔ خارجی......................

مثال ۱۵. ثابت کنید در هر مثلث مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است.

$$AB + AC > BC$$
$$AC + BC > AB$$
$$AB + BC > AC$$



حکم: $a + b > c$، $a + c > b$، $b + c > a$

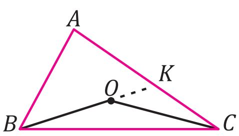
پاسخ: برای اثبات هر قسمت از حکم یکی از ضلع‌ها را به اندازهٔ دیگری امتداد می‌دهیم تا پاره‌خطی به طول مجموع دو ضلع به دست آید. دقت کنید که ضلع را از سمتی امتداد دهید که مثلث متساوی‌الساقینی بیرون مثلث ABC ایجاد شود.

$$Ak = AB = C \ \Rightarrow \ \widehat{K} = \widehat{B}_۱$$
$$KC = AK + CA = b + C$$
$$K\widehat{B}C > \widehat{B}_۱ \ , \ \widehat{B}_۱ = \widehat{K}$$
$$\Rightarrow \ K\widehat{B}C > \widehat{K} \xrightarrow{\text{در هر مثلث ضلع روبه رو به زاویه بزرگ تر از ضلع روبه رو به زاویه کوچک تر}} CK > BC \ \Rightarrow \ b + c > a$$

مثال ۱۶. اگر نقطهٔ O، نقطهٔ دلخواهی در درون مثلث ABC باشد:

الف) $OB + OC < AB + AC$

ب) محیط $> OA + OB + OC >$ $\frac{۱}{۲}$محیط



پاسخ:

الف) BO را امتداد می‌دهیم تا فاصله AC را در K قطع کند.

$$\overset{\Delta}{ABK}: Ab + AK > Bk\ ,\ BK = BO + OK$$

$$\overset{\Delta}{OKC}: OK + KC > OC$$

$$AB + Ak + OK + KC > BO + OK + OC \ \Rightarrow\ AB + AC > BO + OC$$

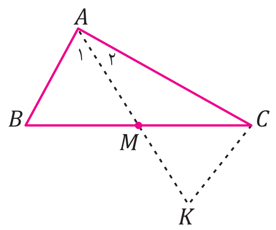
ب) طبق قسمت الف:

$$\left.\begin{array}{l} BC < OB + OC < AB + AC \\ AB < OA + OB < AC + BC \\ AC < OA + OB < AB + BC \end{array}\right\} \xrightarrow{+} \text{محیط} < ۲(OA + OB + OC) < ۲\times\text{محیط}$$

مثال ۱۷. اگر در مثلث ABC، $AB < AC$ و M وسط پاره‌خط BC باشد ثابت کنید:

الف) $B\hat{A}M > M\hat{A}C$ (زاویهٔ بین میانه و ضلع کوچک‌تر بزرگ‌تر است از زاویهٔ بین میانه و ضلع بزرگ‌تر)

ب) $B\hat{A}H < H\hat{A}C\ (AH \perp BC)$ (زاویه بین ارتفاع و ضلع کوچک‌تر، کوچک‌تر است از زاویهٔ بین ارتفاع و ضلع بزرگ‌تر)



پاسخ:

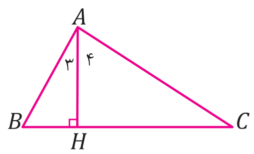
الف) میانهٔ AM را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ K برسیم.

$$\overset{\Delta}{ABM} \cong \overset{\Delta}{MCK} \ \Rightarrow\ \hat{K} = \hat{A}_۱\ ,\ AB = CK$$

$$\left.\begin{array}{l} AB < AC \\ AB = KC \end{array}\right\} \Rightarrow\ KC < AC$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{K} > \hat{A}_۲ \\ \hat{K} = \hat{A}_۱ \end{array}\right\} \Rightarrow\ \hat{A}_۱ > \hat{A}_۲$$

در هر سه مثلث، زاویه روبه‌رو ضلع بزرگ‌تر، از زاویه روبه‌رو ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.



ب) طبق قضیه

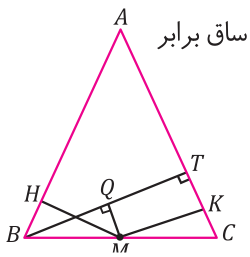
$$AB < AC \ \Rightarrow\ \hat{B} > \hat{C}$$

در هر مثلث زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر

$$\hat{B} + \hat{A}_۳ = ۹۰^\circ = \hat{C} + \hat{A}_۴ \ \Rightarrow\ \hat{A}_۳ < \hat{A}_۴$$

مثال ۱۸. ثابت کنید مجموع فواصل هر نقطه روی قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق برابر است

با مقدار ثابت ارتفاع وارد بر ساق



فرض : $AB = AC$

حکم : $MK + MH = BT$

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l} MQ \perp BT \\ CT \perp BT \end{array}\right\} \Rightarrow MQ \parallel CT \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \widehat{BMQ} = \hat{C} \\ AB = AC \rightarrow \hat{B} = \hat{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} = B\widehat{M}Q$$

$$\xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه ی حاده}} \overset{\Delta}{HBM} \cong \overset{\Delta}{QBM} \Rightarrow MH = BQ \ (۱)$$

$$QTKM_{\text{مستطیل}} \Rightarrow QT = MK \ (۲)$$

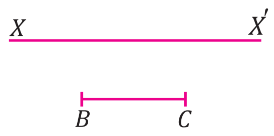
$$(۱),(۲) \Rightarrow BT = BQ$$

$$QT = MH + MK$$

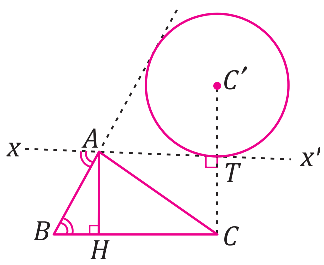
تذکر اول: به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که اگر نقطهٔ M در امتداد قاعده قرار داشته باشد، تفاضل فواصل نقطهٔ M از دو ساق برابر ارتفاع وارد بر ساق است.

تذکر دوم: اگر از نقطهٔ M به A وصل کنید و مساحت مثلث‌های ABM، ACM را نوشته و باهم جمع کنید نیز به همین نتیجه می‌رسید.

مثال ۱۹. از مثلث ABC اندازهٔ ضلع BC و اندازهٔ ارتفاع AH معلوم است و می‌دانیم زاویه B دو برابر زاویه C است. مثلث را رسم کنید. *(مرحله دوم المپیاد ـ ۱۳۶۵)*



پاسخ: از نقطهٔ A که فاصله آن تا خط BC برابر AH است خط xx' را به موازات پاره‌خط BC رسم می‌کنیم حال نقطهٔ A باید روی خط xx' طوری قرار بگیرد که $A\hat{B}C = ۲A\hat{C}B$ یا طبق موازی مورب $x\hat{A}B = ۲x'\hat{A}C$



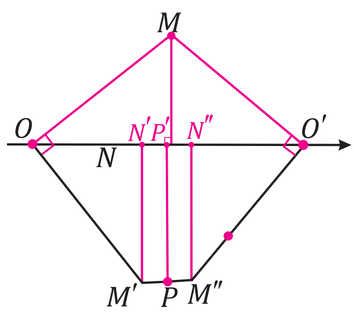
برای این کار قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به xx' را پیدا می‌کنیم و آن را C' می‌نامیم و پاره‌خط CC' خط xx' را در T قطع کند دایره به مرکز C' و شعاع $C'T$ رسم می‌کنیم.

از نقطهٔ B مماس بر این دایره مطابق شکل رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این مماس با خط xx' نقطهٔ A است و $x\hat{A}B = ۲x\hat{A}C$ (چرا؟)

مثال ۲۰. در یک صفحه نقطهٔ O' را به‌دلخواه روی محور ox در نظر می‌گیریم. نقطهٔ دلخواه M را یک‌بار حول نقطهٔ O به اندازهٔ ۹۰° در جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا نقطهٔ M' به دست آید. بار دوم نقطهٔ M را حول o' به اندازهٔ ۹۰° در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا نقطهٔ M'' به دست آید. ثابت کنید نقطهٔ P، وسط $M'M''$، نقطهٔ ثابتی است. *(مرحله دوم المپیاد ـ ۶۶)*

پاسخ:

از نقاط M، P، M'، M'' بر محور ox عمود رسم می‌کنیم و پای ارتفاع‌ها را به ترتیب P' , N , N' , N'' می‌نامیم.



$$۲PP' = M'N' + M''N'' \quad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l} OM = OM'' \\ \widehat{N} = \widehat{N'} = ۹۰° \\ O\widehat{M}N = M'\widehat{O}N' \cong ۹۰° = M\widehat{O}N \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ONM'} = \overset{\Delta}{OMN}$$

و به همین ترتیب $\overset{\Delta}{O'NM} \cong \overset{\Delta}{O'N''M''}$ پس:

$$ON = M'N' \,,\, M''N'' = NO'$$

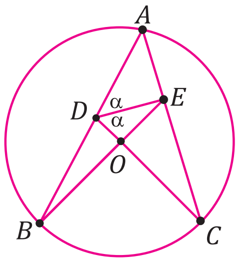
$$MN = ON' = O'N''$$

$$\Rightarrow ۲PQ = M'N' + M''N'' = ON + NO' = OO'$$

(۱)

$$ON' - P'N' = N''O' - N''P' = \frac{۱}{۲}OO'$$

پس PP' و OP' ثابت‌اند و درنتیجه نقطهٔ P ثابت است.



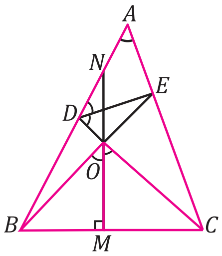
مثال ۲۱. در شکل نقطهٔ O مرکز دایره است. α چند درجه است؟

پاسخ:

عمودمنصف BC را رسم می‌کنیم تا AB را در N قطع کند. $\overset{\Delta}{ODN} \cong \overset{\Delta}{DOE}$ (چرا؟)
و مثلث BOD متساوی‌الساقین است. (چرا؟) پس اگر $BN = BE = b \,,\, BC = a$

$$B\widehat{N}C = ۳۶۰° - ۶\alpha \;\Rightarrow\; B\widehat{C}N = ۳\alpha - ۹۰° \;,$$

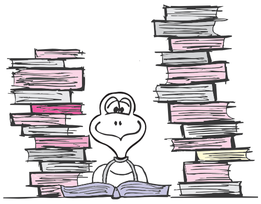
$$B\widehat{E}C = ۵\alpha - ۱۸۰° \;,\; B\widehat{C}A = ۲۷۰° - ۴\alpha$$



$$\left.\begin{array}{l} BNC : b < a \;\Rightarrow\; ۳\alpha - ۹۰° < ۳۶۰° - ۶\alpha \;\Rightarrow\; \alpha < ۵۰° \\ BEC : b < a \;\Rightarrow\; ۲۷۰° - ۴\alpha < ۵\alpha - ۱۸۰° \;\Rightarrow\; \alpha > ۵۰° \end{array}\right\} \Rightarrow \text{تناقض}$$

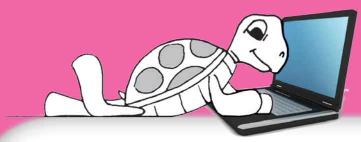
به همین ترتیب برای $b > a$ نیز تناقض مشابهی به دست می‌آید، پس: $\alpha = ۵۰°$

لغتنامه

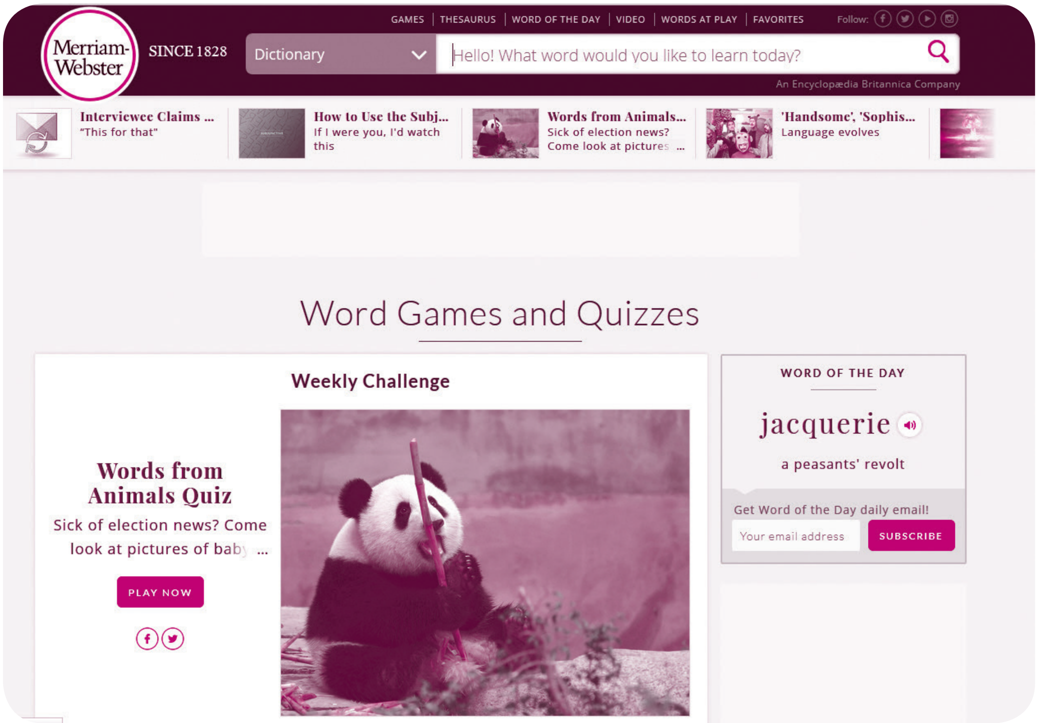


ترجمه	واژه علمی	ترجمه	واژه علمی
اثبات	*Proof*	عمود منصف	*Bisector Perpendicular*
استدلال	*Reasoning*	متقاطع	*Crossoover*
استنتاج	*Conclusion*	مثلث	*Triangle*
پاره‌خط	*Segment*	مربع	*Square*
ترسیم	*Draw*	موازی	*Parallel*
چهارضلعی	*Four square*	نقطه	*Point*
خط	*Line*	نیم‌خط	*Ray*
خط عمود	*Perpendicular*	نیم‌ساز زاویه	*Angle Bisector*
دایره	*Circle*		
زاویه	*Angle*		

شهرفرنگ



www.merriam-webster.com



تمرین‌ها

عمودمنصف

۱. یک پاره‌خط در یک صفحه چند عمودمنصف دارد؟ در فضا چطور؟

۲. چطور وسط یک پاره‌خط را پیدا کنیم؟

۳. در مثلث ABC، عمودمنصف‌های اضلاع AB و AC یکدیگر را در I قطع کرده‌اند.

الف) آیا دایرهٔ به مرکز I که از رأس A بگذرد، از رأس‌های B و C نیز می‌گذرد؟

ب) ثابت کنید، عمودمنصف ضلع BC نیز از I می‌گذرند.

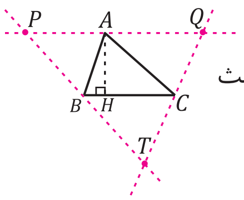
ج) در چه صورتی نقطهٔ I حتماً در درون مثلث ABC است؟

د) در چه صورتی نقطهٔ I وسط ضلع BC قرار می‌گیرد؟

تذکر: در تمرین قبل ثابت کردیم، عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث همرس‌اند و این نقطه مرکز دایره‌ای است که از هر سه رأس مثلث می‌گذرد. (چرا؟)

۴. در چهارضلعی $ABCD$ نقطهٔ M محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع AB و BC است و نقطهٔ P محل برخورد عمودمنصف‌های CD، AD است. ثابت کنید MP قسمتی از عمودمنصف قطر AC است.

۵. در مثلث ABC، مطابق شکل از رأس‌های مثلث موازی اضلاع روبه‌روی آن‌ها خط‌هایی رسم کرده‌ایم تا مثلث PQT تشکیل شود.



الف) سه متوازی‌الاضلاع در شکل نام ببرید.

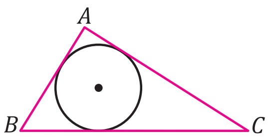
ب) با توجه با اینکه میدانیم در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو برابرند؛ ثابت کنید رأس‌های مثلث ABC وسط‌های اضلاع $\overset{\Delta}{PQT}$ هستند.

ج) عمودمنصف پاره‌خط PQ را رسم کنید و ثابت کنید قسمتی از این عمودمنصف ارتفاع $\overset{\Delta}{ABC}$ است.

د) ثابت کنید ارتفاع‌های هر مثلث همرس‌اند.

نیمساز

۶. در مثلث ABC، نیمساز زاویهٔ A نیمساز زاویهٔ B را در O قطع کرده است.



الف) آیا O از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است؟

ب) ثابت کنید نیمساز زاویهٔ C نیز از O می‌گذرد.

تذکر: در سؤال بالا ثابت کرده‌اید که نیمسازهای داخلی هر مثلث همرس‌اند؛ به دایره‌ای به مرکز O که به هر ضلع مثلث ABC مماس باشد دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC می‌گوییم.

ج) مساحت مثلث‌های OAB، OAC، OBC را برحسب شعاع دایره محاطی داخلی و اضلاع مثلث بنویسید و باهم جمع کنید. رابطهٔ به‌دست‌آمده را برحسب محیط و مساحت و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC بنویسید.

۷. در مثلث ABC، نیمسازهای خارجی زوایای A و B همدیگر را در T قطع کرده‌اند.

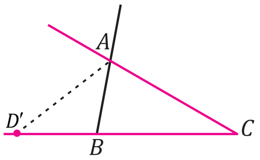
الف) ثابت کنید نیمساز داخلی زاویهٔ C نیز از T می‌گذرند.

ب) با توجه به قسمت الف جای خالی را پر کنید: در هر مثلث هر نیمساز داخلی یک زاویه با .... همرس‌اند.

تذکر: به دایره‌ای به مرکز T که به ضلع AB و امتداد اضلاع CA، CB مماس باشد، دایرۀ محاطی خارجی نظیر ضلع BC می‌گوییم و شعاع آن را با r_C نمایش می‌دهیم. هر مثلث سه دایرۀ محاطی خارجی دارد. (چرا؟)

۸. قضیۀ نیمساز داخلی را به‌صورت یک جمله بنویسید.

۹. (عکس قضیه نیمساز داخلی) اگر در مثلث ABC، نقطه‌ای D طوری روی ضلع BC قرار بگیرد که $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$ ثابت کنید AD نیمساز است.



۱۰. در شکل مقابل D' پای نیمساز خارجی زاویۀ A در مثلث ABC است. ثابت کنید...

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD'}{DC'}$$

ترسیم

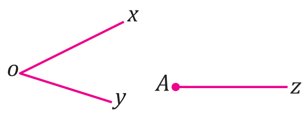
۱۱. عمودمنصف یک پاره‌خط را رسم کنید.

۱۲. از نقطۀ A عمودی بر خط d رسم کنید. دو حالت را در نظر بگیرید. A روی خط d و بیرون خط d باشد.

۱۳. m_a و h_a را در مثلث معلوم ABC رسم کنید.

۱۴. پاره‌خطی هم‌نهشت (مساوی) پاره‌خط معلوم AB از نقطۀ C رسم کنید.

۱۵. زاویه‌ای مساوی زاویۀ xoy روی نیم‌خط Az رسم کنید.



۱۶. در مثلث معلوم ABC، d_a را رسم کنید. سپس نیمساز خارجی زاویۀ A را نیز رسم کنید.

۱۷. دایره‌ای رسم کنید که از همۀ رئوس مثلث ABC بگذرد (به این دایره، دایرۀ محیطی مثلث می‌گوییم)

۱۸. دایره‌ای رسم کنید که بر هر سه ضلع مثلث ABC مماس باشد. (دایرۀ محاطی داخلی)

۱۹. دایره‌ای رسم کنید که بر امتداد اضلاع AB، BC و بر ضلع AC مماس باشد. (به این دایره، دایره محاطی خارجی می‌گوییم. مثلث ABC، سه دایرۀ محاطی خارجی دارد.)

۲۰. پاره‌خط PQ معلوم است:

الف) زاویه‌ای رسم کنید که PQ نیمساز آن باشد. چند زاویه با این خاصیت می‌توان رسم کرد؟

ب) (می‌دانیم که در متوازی‌الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند) متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که PQ قطر آن باشد.

ج) مستطیلی رسم کنید که PQ قطر آن باشد.

د) لوزی‌ای رسم کنید که PQ قطر آن باشد.

۲۱. دو خط d و d' بیرون از محدودۀ کاغذ یکدیگر را قطع می‌کنند:

الف) نیمساز زاویه‌ای بین این دو خط را رسم کنید.

ب) از نقطۀ معلوم A روی کاغذ، خطی بکشید که امتداد آن از محل برخورد این دو خط بگذرد.

۲۲. کمانی از دایره در صفحه رسم شده است. مرکز این دایره را پیدا کنید.

۲۳. مثلث ABC را با معلوم بودن هرکدام از بخش‌های زیر رسم کنید و بررسی کنید چند مثلث با این معلومات رسم می‌شود.

۱) c, b, h_a ۲) a, b, m_b ۳) m_a, m_b, a ۴) m_a, m_b, c

۵) $\hat{A} = ۹۰^\circ,\ BC,\ \hat{B}$ ۶) $A = ۹۰^\circ,\ BC,\ AB$ ۷) $AB = AC = b,\ \hat{B}$ ۸) a, h_a, h_b

۹) a, b, d_c ۱۰) a, h_a, m_a ۱۱) $\hat{B}, \hat{C}, m_a$ ۱۲) a, h_a, m_a

۱۳) $A = ۹۰^\circ,\ h_a,\ m_a$ ۱۴) محیط $\overset{\Delta}{ABC}$، $\hat{C}, \hat{B}$ ۱۵) $\hat{A}, m_b, m_c$

۲۴. پاره‌خط AB معلوم است:

الف) عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

ب) نیم‌خط AX را طوری رسم کنید که زاویهٔ BAX اندازه معلوم ۴۰° داشته باشد.

ج) نقطهٔ برخورد نیم‌خط AX و عمودمنصف پاره‌خط AB را O بنامید و دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA رسم کنید. مشخص کنید زاویهٔ O به وجود آمده در مثلث قائم‌الزاویه چقدر است.

د) نقطهٔ دلخواه C را روی کمانی از دایره که نسبت به پاره‌خط AB، با نقطهٔ O هم‌طرف است انتخاب کنید و آن را به B و A وصل کنید. زاویهٔ $A\hat{C}B$ چقدر است؟ چرا؟

هـ) اگر نقطهٔ دلخواه M بیرون یا درون دایره رسم شده باشد، چگونه تساوی روبرو ممکن است:

$A\widehat{M}B = A\hat{C}B$

و) اگر بخواهیم همهٔ نقاطی از صفحه را پیدا کنیم که وقتی آن‌ها را به نقاط ثابت A و B صفحه وصل می‌کنیم زاویهٔ ثابت α ساخته شود، چه‌کاری باید انجام دهیم؟

ز) نتیجه‌ای که گرفته‌اید را بنویسید.

۲۵. ذوزنقه‌ای با معلوم بودن اضلاع آن رسم کنید.

۲۶. پاره‌خط AB مفروض است.

الف) نیم‌خط AX را طوری رسم کنید که با پاره‌خط AB زاویهٔ ۳۰° تشکیل دهد.

ب) از نقطهٔ A عمودی بر نیم‌خط AX رسم کنید تا عمودمنصف AB را O قطع کند.

ج) دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA رسم کنید و نقطهٔ M را روی این دایره به‌صورت دلخواه انتخاب کنید و اندازهٔ زاویهٔ AMB را مشخص کنید.

د) اندازهٔ زاویهٔ $A\widehat{M}B$ چه عدد یا عددهایی می‌تواند باشد؟

ه) نتیجه را به‌صورت یک جملهٔ فارسی بیان کنید.

۲۷. از نقطهٔ A خطی مماس بر دایرهٔ معلوم رسم کنید.

الف) نقطهٔ A روی دایره باشد. ب) نقطهٔ A بیرون دایره باشد.

۲۸. خطی بر دو دایره معلوم مماس رسم کنید. (مسئله چند جواب دارد)

۲۹. از مثلثی $d_a, h_a, \hat{A}$ معلوم است، مثلث را رسم کنید.

استدلال

۳۰. با استدلال استنتاجی ثابت کنید:

الف) مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی برابر است با: $(n-۲)\times۱۸۰$

ب) تعداد قطرهای هر nضلعی برابر است با: $\frac{n(n-۳)}{۲}$

۳۱. چرا یک مثلث نمی‌تواند یک زاویهٔ قائمه و یک زاویهٔ ۱۰۰° داشته باشد؟

۳۲. از یک نقطه خارج از خط حداکثر چند عمود بر آن خط رسم می‌شود؟ چرا؟

۳۳. با استدلال استنتاجی ثابت کنید چهار نقطهٔ وسط اضلاع هر چهارضلعی، رأس‌های یک متوازی‌الاضلاع را نشان می‌دهند.

۳۴. بررسی کنید آیا این جمله درست است: در هر مثلث قائم‌الزاویه، وتر از اضلاع قائمه بزرگ‌تر است.

۳۵. مسئله زیر را ثابت کنید و درستی عکس آن را بررسی کنید:

در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر، نصف وتر است.

۳۶. گزاره‌های زیر را در صورت درستی اثبات کنید، در غیر این صورت مثال نقض بیاورید.

الف) چهارضلعی‌ای که دو ضلع مساوی و دو ضلع موازی داشته باشد، متوازی‌الاضلاع است.

ب) از برخورد نیمسازهای داخلی زوایای هر متوازی‌الاضلاع یک مستطیل پدید می‌آید.

ج) مثلثی که دو میانهٔ برابر داشته باشد، متساوی‌الساقین است.

د) در هر مثلث هر میانه از نصف مجموع دو ضلع مجاور آن کوچک‌تر است.

هـ) اگر نقطهٔ M روی نیمساز خارجی $\hat{A}$ از مثلث ABC باشد: $MB+MC>AB+AC$

و) اگر $x<y$, $z<t$ باشد $\Leftarrow$ $x-z<y-t$

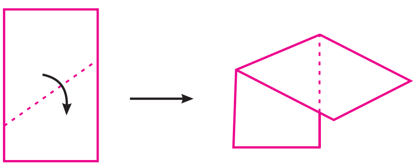
ز) مثلث‌های هم‌مساحت، هم‌نهشت هستند.

۳۷. مادربزرگ شنل قرمزی مریض است خانه او در نقشه زیر با نقطهٔ A نشان داده شده است. شنل قرمزی از خانهٔ خود که در نقطهٔ B قرار دارد به سمت رودخانه حرکت می‌کند تا برای مادربزرگ آب ببرد. شنل قرمزی از کجای رودخانه آب بردارد تا کمترین فاصلهٔ ممکن را طی کرده باشد.

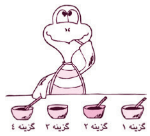
۳۸. در بین تمام مثلث‌های ABC که ضلع مشترک AB و مساحت برابر دارند، نقطهٔ C کجا قرار بگیرد تا کمترین محیط را برای $\overset{\Delta}{ABC}$ بسازد؟

۳۹. فردی n نقطه روی محیط دایره قرار داده و این نقطه‌ها را دوبه‌دو به یکدیگر طوری وصل می‌کند که هیچ سه خطی از یک نقطه نگذرند. (شکل زیر برای $n=۵$ رسم شده است) و نتیجه می‌گیرد تعداد نواحی‌ای که در داخل دایره به وجود می‌آید برابر ۲^n است. آیا می‌توانید صحت نتیجه‌گیری وی را رد و یا تائید کنید؟

۴۰. کاغذی را مطابق شکل تاکرده‌ایم. محیط آنچه تغییری کرده است، کمتر شده یا بیشتر؟ ثابت کنید آیا می‌توان کاغذ را طوری تا کرد که محیط شکل حاصل بیشتر شود؟



۴۱. ثابت کنید خطوط موازی با یک خط، خود باهم موازی هستند.



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

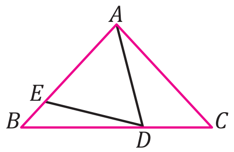
۱. در شکل روبه‌رو $AB=AC$ و $C\widehat{A}D=۲۰^\circ$, $AE=AD$ اندازهٔ زاویه $B\widehat{D}E$ چقدر است؟ *(المپیاد بلژیک)*

۱) ۸°

۲) ۹°

۳) ۱۰°

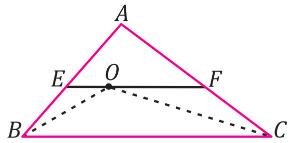
۴) ۱۲۰°



۲. در مثلث ABC شکل روبه‌رو، نقطهٔ O محل برخورد نیمسازهای داخلی است و EF موازی BC رسم شده است. اگر $EB=۵$, $FC=۸$ باشد، طول EF کدام است؟

۱) ۱۰   ۲) ۱۳

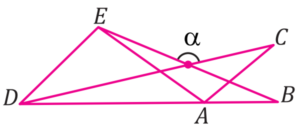
۳) ۱۴   ۴) می‌توان تغییر کرد.



۳. در شکل مقابل $AB=AC$, $AD=AE$, $C\widehat{A}B=۵۰^\circ$, $A\widehat{E}D=۶۵^\circ$ میباشد. زاویه α چقدر است؟

۱) ۱۱۵   ۲) ۱۲۰

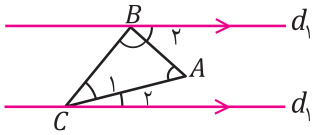
۳) ۱۲۵   ۴) ۱۳۰



۴. در شکل روبه‌رو $d_۱ \parallel d_۲ , B_۲=\frac{۱}{۳}B_۱ , C_۲=\frac{۱}{۳}C_۱$ میباشد. $\widehat{A}$ کدام است؟

۱) ۱۳۵° ۲) ۱۲۵°

۳) ۱۰۰° ۴) ۹۰°



۵. تعداد قطرهای یک چندضلعی ۲۰ است. از هر رأس این چندضلعی چند قطر می‌گذرد؟ *(سراسری تجربی ـ ۶۸)*

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۶

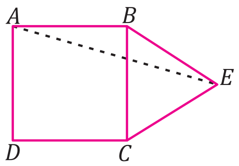
۶. مربع $ABCD$ و مثلث متساوی‌الاضلاع BEC مطابق شکل واقع شده‌اند. زاویه $D\widehat{A}E$ چقدر است؟

۱) ۷۵°

۲) ۶۰°

۳) ۴۵°

۴) ۷۰°



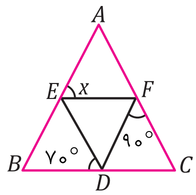
۷. در شکل مقابل $AB=AC$, $\overset{\Delta}{EDF}$ متساوی‌الاضلاع است. زاویه x کدام است؟

۱) ۵۰°

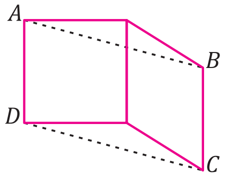
۲) ۶۰°

۳) ۷۰°

۴) ۴۰°

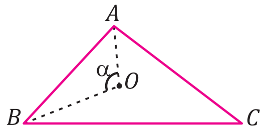


۸. در شکل مقابل یک مربع و یک لوزی با زاویه ۶۰°، در یک ضلع مشترک‌اند. بزرگ‌ترین زاویه متوازی‌الاضلاع $ABCD$ چقدر است؟



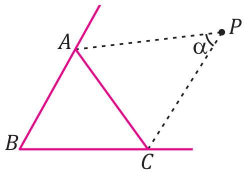
۱) ۱۰۰
۲) ۱۰۵
۳) ۱۲۰
۴) ۱۳۰

۹. در شکل مقابل، نقطهٔ O محل برخورد نیمسازهای داخلی زوایای A، B در مثلث ABC هستند. اندازهٔ α برحسب زاویه C کدام است؟



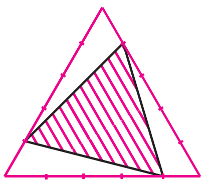
۱) $۹۰-\frac{\widehat{C}}{۲}$
۲) $۹۰+\frac{\widehat{C}}{۲}$
۳) $۲\widehat{C}$
۴) $۹۰+۲\widehat{C}$

۱۰. در شکل مقابل، نقطهٔ P محل برخورد نیمسازهای خارجی زوایای A، C هستند. اندازهٔ زاویه α برحسب زاویه B کدام است؟



۱) $۹۰-\frac{\widehat{B}}{۲}$
۲) $۹۰+\frac{\widehat{B}}{۲}$
۳) $\widehat{B}$
۴) $\frac{\widehat{B}}{۲}$

۱۱. هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به نسبت‌های ۱ و ۳ تقسیم شده است. مساحت مثلث سایه زده شده، چند برابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۸}$
۳) $\frac{۷}{۱۶}$
۴) $\frac{۵}{۸}$

۱۲. در مثلثی $a=۵$, $b=۷$, $h_c=۳$ می‌باشد. چند مثلث با این شرایط قابل رسم است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۱۳. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول اضلاع ۷ و ۲۴ فاصلهٔ نقطه تلاقی سه میانه از بزرگ‌ترین ضلع چقدر است؟ (آزاد ـ ۸۹)

۱) ۶/۷۲
۲) ۳/۳۶
۳) ۲/۲۴
۴) ۴/۴۸

۱۴. پاره‌خط AB در صفحه وجود دارد. نقطهٔ C در صفحه طوری قرار دارد که $\widehat{ACB}=۳۰^\circ$. نقاطی از صفحه که نقطهٔ C می‌تواند یکی از آن‌ها باش:

۱) کمانی از یک دایره است.
۲) کمانی از دو دایره است.
۳) یک دایره است.
۴) دو خط موازی با پاره‌خط AB است.

۱۵. مرکزهای دو دایره که اولی از هر سه رأس مثلث ABC می‌گذرد و دومی بر هر سه ضلع مثلث ABC مماس است، به ترتیب کدام است؟

۱) محل برخورد میانه‌ها ـ محل برخورد نیمسازها
۲) محل برخورد نیمسازها ـ محل برخورد عمودمنصف‌ها
۳) محل برخورد عمود نصف‌ها ـ محل برخورد میانه‌ها
۴) محل برخورد عمودمنصف‌ها ـ محل برخورد نیمسازها

۱۶. در مثلث ABC، $\widehat{A}=۷۵^\circ$, $\widehat{B}=۹۵^\circ$ می باشد.کدام رابطه بین اضلاع مثلث برقرار است؟

۱) $c<a<b$
۲) $a<b<c$
۳) $a<c<b$
۴) $c<b<a$

۱۷. **در مثلث ABC، $h_a = ۴ , m_a = ۶/۵$ است. طول d_a کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟**

۱) ۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۶/۲ ۴) ۴/۸

۱۸. **در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویه A ضلع BC را در D قطع کرده است. کدام نامساوی همواره درست است؟** *(سراسری ـ ۸۰)*

۱) $AB > BD$ ۲) $AD > BD$ ۳) $AB > AD$ ۴) $BD > AD$

۱۹. **در مثلثی که زاویه بین دو نیمساز داخلی برابر ۱۴۰° باشد، محل همرسی عمودمنصف‌ها کجا است؟**

۱) داخل مثلث ۲) روی محیط مثلث ۳) بیرون مثلث ۴) نمی‌توان تعیین کرد.

۲۰. **در رسم مثلث ABC با معلوم بودن دو ضلع $b = ۷ , c = ۵$ و نیز میانهٔ $m_a = ۴$، با خط‌کش و پرگار کدام نتیجه حاصل می‌شود؟**

۱) بی‌شمار جواب دارد.

۲) دارای جواب منحصربه‌فرد است.

۳) دارای ۲ جواب متمایز است.

۴) دارای سه جواب است.

۲۱. **در مستطیلی به اندازهٔ اضلاع ۴ و ۹ واحد، محل تلاقی نیمسازهای داخلی، رأس‌های یک چهارضلعی هستند. مساحت این چهارضلعی کدام است؟**

۱) ۱۲/۵ ۲) ۱۳/۵ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۲۲. **چند مثلث وجود دارد که طول ضلع آن ۳، ۵ و یکی از ارتفاع‌ها برابر ۴ باشد؟**

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۶

۲۳. **چند مثلث ABC، با محیط برابر ۱۰ و $\widehat{B} = ۶۰^\circ \ , \ \widehat{C} = ۵۰^\circ$ وجود دارد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

◄ آزمون دوره‌ای فصل

۱. مثلثی رسم کنید که m_a , h_a , m_c در آن معلوم باشد.

۲. ثابت کنید در مثلث ABC نیمساز زاویهٔ A، نیمساز زاویهٔ B را قطع می‌کند. (از برهان خلف استفاده کنید.)

۳. نیمسازهای خارجی زوایای یک متوازی‌الاضلاع را رسم کرده‌ایم. چهار ضلعی حاصل از برخورد این نیمسازها چه شکلی خواهد بود؟ چرا؟

۴. در یک n ضلعی محدب، مجموع زوایا، به‌جز یکی از زوایا برابر ۲۱۴۵° است. این n ضلعی چند قطر دارد؟

◄ المپیاد

۱. در مثلث متساوی‌الساقین ABC که در آن $AB = AC$ نقاط X و Y روی پاره‌خط AC طوری قرار گرفته‌اند که X بین A و Y قرار دارد و به‌علاوه $BY = AX = BX$ اگر $\angle YBC = ۱۰^\circ$ زاویهٔ $\angle BAC$ چند درجه است؟ *(مرحله اول المپیاد ـ ۹۳)*

۱) $\frac{۹۵}{۳}$

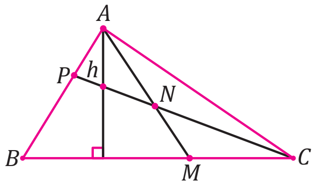
۲) ۳۸

۳) ۴۰

۴) ۴۱

۵) $\frac{۱۸۵}{۴}$

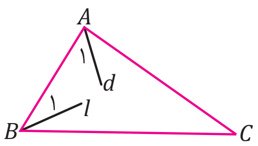
◄ پاسخ آزمون دوره‌ای فصل



۱. ابتدا یک خط افقی رسم می‌کنیم (d) سپس خط عمودی بر d کشیده و به اندازهٔ h_a از آن جدا می‌کنیم و این نقطه را A می‌نامیم. از نقطهٔ A دایره‌ای به مرکز A و شعاع m_a می‌زنیم تا خط d را در M قطع کند. سپس نقطهٔ N را طوری روی AM انتخاب می‌کنیم که، $\frac{AN}{AM}=\frac{۲}{۳}$ پس از نقطهٔ N دایره‌ای به مرکز N و شعاع $\frac{۲}{۳}\times m_C$ میزنیم تا خط d را در نقطهٔ C قطع کند، سپس خط NC را به اندازهٔ $\frac{m_C}{۳}$ از سمت N ادامه می‌دهیم تا به نقطهٔ P برسیک. A را به P وصل کرده و ادامه می‌دهیم تا خط d را در نقطهٔ B قطع کند. مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ همان مثلث مطلوب است.

۲. خط d نیمساز $\hat{A}$ و خط L نیمساز $\hat{A}$ است.

برهان خلف: $d \parallel L$

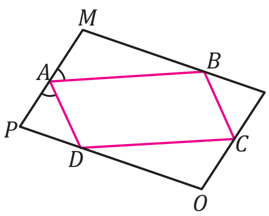


زاویه ی بین خط d , $AB = \frac{\hat{A}}{۲}$

زاویه ی بین خط L , $AB = \frac{\hat{B}}{۲}$

این دو زاویه باتوجه به این‌که یک سمت خط AB قرار دارند و $d \parallel L$ است، پس باید مکمل باشند ولی در این صورت مجموع زوایای داخلی مثلث بیش از ۱۸۰° خواهد شد، تناقض حاصل مبنی بر اشتباه بودن فرض اولیه می‌باشد، پس $d \nparallel L$ و یکدیگر را قطع می‌کند.

۳. مستطیل



$$\left.\begin{array}{l} D\hat{A}B + A\hat{B}C = ۱۸۰ \\ M\hat{B}A = \frac{۱۸۰ - A\hat{B}C}{۲} \\ M\hat{A}B = \frac{۱۸۰ - D\hat{A}B}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} M\hat{B}A = \frac{D\hat{A}B}{۲} \\ M\hat{A}B = \frac{B\hat{A}C}{۲} \end{array}\right. \xRightarrow{\text{جمع}} M\hat{B}A + A\hat{M}B = ۹۰^\circ$$

به همین ترتیب $\hat{M} , \hat{N} , \hat{O} , \hat{P} = 90^\circ$

۴. چون n ضلعی محدب است پس $\hat{x},۱۸۰^\circ$: $۲۱۴۵+\hat{x}=(n-۲)\times ۱۸۰$

$۲۵۰۵+\hat{x}=۱۸۰\,n$

مجموع زوایای داخلی : $(n-۲)۱۸۰$

تعداد اقطار : $\frac{n(n-۳)}{۲}=\frac{۱۴(۱۱)}{۲}=۷۷$

◄ پاسخ المپیاد

۱. گزینهٔ (۳) صحیح است

همانند شکل زیر فرض کنید $\angle BAX = \alpha$ می‌دانیم $AX = BX$ پس زاویهٔ $\angle ABX = \alpha$ می‌شود از طرفی زاویهٔ BXC زاویهٔ خارجی مثلث ABX است، پس $\angle BXC = ۲\alpha$ طبق فرض مسئله می‌دانیم $BX = BY$ پس زاویهٔ $\angle BYA = ۲\alpha$ است.

در مثلث ABC می‌دانیم:

$$\angle BAX = \alpha AB = AC \Rightarrow \angle ACB = \angle ABC = ۹۰^\circ - \frac{\alpha}{۲}$$

در مثلث BYC زاویهٔ BYA زاویهٔ خارجی است، پس خواهیم داشت:

$$\angle YBC + \angle YCB = \angle BYA = ۱۰^\circ \Rightarrow \angle YBC = ۲\alpha - (۹۰^\circ - \frac{\alpha}{۲}) \Rightarrow \alpha = ۴۰^\circ$$