

نقاط متساوی‌الفاصله از خط و نقطه

ویژگی نیمساز یک زاویه

ویژگی عمودمنصف یک زاویه

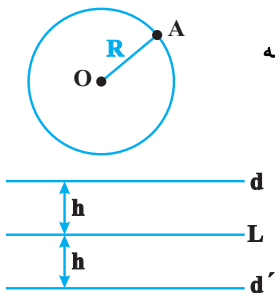
ترسیم‌های هندسی

۱. ترسیم‌های هندسی و استدلال

درسنامه

نقاط متساوی‌الفاصله از یک نقطه:

مجموعه نقاطی از صفحه که از نقطه ثابت O به فاصله ثابت R باشند، روی دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R قرار دارند. در شکل مقابل، نقطه A روی دایره قرار دارد، پس $OA = R$ است.

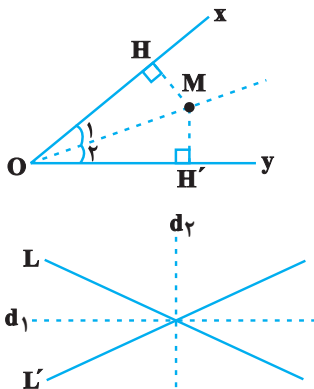


نقاط متساوی‌الفاصله از یک خط:

مجموعه نقاطی از صفحه که از یکی از خطوط صفحه به فاصله معلومی باشند، دو خط موازی با آن خط هستند که در طرفین آن خط قرار دارند. به عنوان مثال در شکل مقابل، مجموعه نقاطی از صفحه که از خط L به فاصله معلوم h باشند، دو خط d و d' در طرفین خط L هستند.

ویژگی نیمساز یک زاویه:

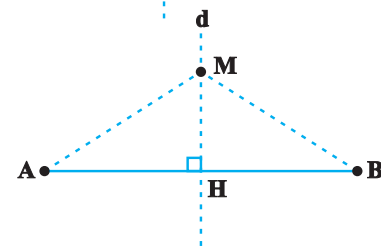
هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. در شکل مقابل اگر $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ باشد، آن‌گاه $MH = MH'$ است و در صورتی که $MH = MH'$ باشد، آن‌گاه $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ است.



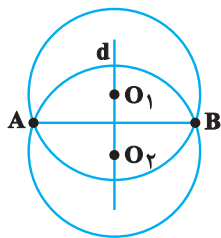
مجموعه نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع L و L' به یک فاصله باشند، نیمساز هر یک از زاویه‌هایی است که بین دو خط تشکیل می‌شود. این دو نیمساز در نقطه تقاطع دو خط، برهم عمود هستند.

ویژگی عمودمنصف یک پاره‌خط:

هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد. یعنی در شکل زیر، اگر نقطه M روی خط d (عمودمنصف پاره‌خط AB) قرار داشته باشد، آن‌گاه $MA = MB$ است و در صورتی که $MA = MB$ باشد، آن‌گاه نقطه M روی خط d (عمودمنصف پاره‌خط AB) قرار دارد.



مراکز دایره‌هایی که از دو نقطه A و B عبور می‌کنند، بر روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند. در شکل زیر O_1 و O_2 مرکز دو دایره‌ای هستند که از نقاط A و B عبور کرده‌اند و d عمودمنصف پاره‌خط AB است.



۱. مثلثی با معلوم‌بودن طول سه ضلع آن قابل‌رسم است. برای رسم این مثلث چند کمان باید رسم کنیم؟

(کار در کلاس ۱ و ۲ صفحه‌ی ۱۱ کتاب درسی)

۴) حداکثر ۲

۳) حداقل ۲

۲) ۲

۱) ۱

۲. نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر از نقطه‌ی B قرار دارد. در صفحه چند نقطه وجود دارد که از A به فاصله‌ی ۷ سانتی‌متر و از B به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر باشد؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳. کدام گزینه، نمی‌تواند تعداد جواب‌های مسأله‌ی زیر باشد:

«دو نقطه‌ی A و B به فاصله‌ی x از هم قرار دارند. چند نقطه وجود دارد که از A به فاصله‌ی y و از B به فاصله‌ی z باشد؟»

(کار در کلاس ۳ صفحه‌ی ۱۱ کتاب درسی)

- ۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

۴. سه نقطه‌ی A، B و C مفروض‌اند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A، B و C به ترتیب به فاصله‌ی ۴، ۳ و ۲ باشد؟

(کار در کلاس ۳ صفحه‌ی ۱۱ کتاب درسی)

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) حداقل ۱ ۴) حداکثر ۲

۵. در مثلث ABC، دو رأس A و B ثابت هستند. با داشتن طول ارتفاع وارد بر AB، رأس C همواره روی کدام قرار دارد؟

(مرتبط با فعالیت صفحه‌ی ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۲۳ مهر - ۹۵)

- ۱) نیم‌دایره‌ای به قطر AB ۲) دایره‌ای به قطر AB ۳) یک خط موازی AB ۴) دو خط موازی AB

۶. تعداد نقاطی در صفحه که از خط d و نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۸ باشند، چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

(مرتبط با فعالیت‌های صفحه‌های ۱۰ و ۱۵ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۷ آبان - ۹۵)

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۷. زاویه‌ی $\angle xOy = 60^\circ$ را در نظر گرفته و به مرکز O، کمانی به شعاع دو واحد رسم کرده‌ایم تا Ox و Oy را در P و Q قطع کند. برای آن که بتوانیم نیمساز $\angle xOy$ را رسم کنیم، حداقل شعاع کمان‌هایی که باید به مرکز P و Q رسم شوند، چقدر است؟

(فعالیت صفحه‌ی ۱۲ کتاب درسی)

- ۱) ۲ ۲) ۱/۵ ۳) ۱ ۴) ۰/۵

۸. خط موربی دو خط موازی d و d' را به ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کند. اگر نقطه‌ی O از هر سه خط به یک فاصله باشد، زاویه‌ی BOC چند درجه است؟

(مرتبط با فعالیت صفحه‌ی ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۸۶)

- ۱) ۱۰۵ ۲) ۹۵ ۳) ۹۰ ۴) ۷۵

۹. در مثلث ABC، نیمساز زاویه‌ی داخلی A، ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. از نقطه‌ی D عمودهای DE و DF را به ترتیب بر اضلاع AB و AC رسم می‌کنیم. طول‌های کدام دو پاره‌خط، همواره با هم مساوی است؟

(نتیجه‌ی صفحه‌ی ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۸۸)

- ۱) BE و CF ۲) AE و CF ۳) AE و AF ۴) BE و AF

۱۰. در مثلث ABC، نقاط D و E را به ترتیب روی اضلاع AB و AC به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $AD = AE$ باشد. از D عمودی بر AB و از E عمودی بر AC رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطه‌ی M قطع کنند. نقطه‌ی M همواره بر کدام یک از خطوط زیر واقع است؟

(مرتبط با فعالیت صفحه‌ی ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۲۳ مهر - ۹۵)

- ۱) نیم‌ساز زاویه‌ی A ۲) میانه‌ی نظیر رأس A ۳) ارتفاع نظیر رأس A ۴) عمودمنصف ضلع BC

۱۱. در مثلث متساوی‌الساقین ABC داریم $AB = AC$ و $\hat{A} = 80^\circ$. عمودمنصف‌های ساق‌ها همدیگر را در نقطه‌ی O قطع می‌کنند. کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث OBC چند درجه است؟

(نتیجه‌ی صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۹۳)

- ۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۱۲. در مثلث ABC طول‌های دو ضلع AB و AC به ترتیب ۴ و ۶ سانتی‌متر و مقدار مساحت برابر ۱۰ سانتی‌متر مربع است. اگر نیمساز داخلی \hat{A} ، ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع کرده باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی D از ضلع AB کدام است؟

(نتیجه‌ی صفحه‌ی ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۹۳)

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۳. دو خط d و d' برهم عمودند. اگر خط L ، این دو خط را در نقاط متمایز A و B قطع کند، آن گاه حداکثر چند نقطه روی خط L می‌توان یافت که از d و d' به یک فاصله باشند؟
 (نتیجه‌ی صفحه‌ی ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۲۳ مهر - ۹۵)

- هیچ ① ۱ ② ۲ ③ ۴ بی‌شمار ④

۱۴. دو خط متقاطع d_1 و d_2 و نقطه‌ی O مفروض‌اند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از این دو خط به یک فاصله باشد و از نقطه‌ی O به فاصله‌ی ۵ سانتی‌متر باشد؟
 (مرتبط با فعالیت‌های صفحه‌های ۱۰ و ۱۲ کتاب درسی)

- ۲ ① ۲ حداقل ② ۴ ③ ۴ حداکثر ④

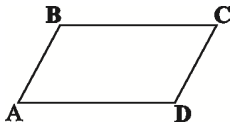
۱۵. روی اضلاع متوازی‌الاضلاع $ABCD$ چند نقطه وجود دارد که از قطرهای آن به یک فاصله هستند؟

(نتیجه‌ی صفحه‌ی ۱۲ کتاب درسی)

- صفر ① ۲ ② ۴ ③ ۴ بی‌شمار ④

۱۶. از تقاطع عمودمنصف‌های اضلاع متوازی‌الاضلاع زیر، لزوماً کدام شکل ایجاد می‌شود؟

(مرتبط با صفحه‌ی ۱۴ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۲۳ مهر - ۹۵)



① مستطیل

② مربع

③ لوزی

④ متوازی‌الاضلاع

۱۷. پاره‌خط AB در صفحه مفروض است. برای رسم عمودمنصف این پاره‌خط، به کمک خط‌کش و پرگار باید چند کمان رسم کرد؟

(فعالیت صفحه‌ی ۱۴ کتاب درسی)

- ۱ ① ۲ ② ۳ ③ ۴ حداکثر ۳ ④

۱۸. مثلث OAB مفروض است. عمودمنصف پاره‌خط‌های OA و OB را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی T قطع کنند. نقطه‌ی T لزوماً ...

① روی نیم‌ساز زاویه‌ی AOB قرار دارد.

② روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

③ روی پاره‌خط AB قرار دارد.

④ درون مثلث است.

(مرتبط با صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۲۱ آبان - ۹۵)

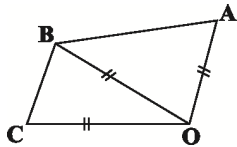
۱۹. در شکل مقابل، کدام گزینه لزوماً صحیح است؟

① O روی نیم‌ساز \widehat{ABC} واقع است.

② B روی نیم‌ساز \widehat{AOC} واقع است.

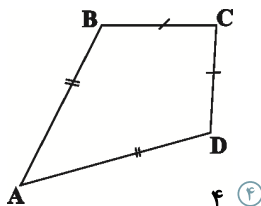
③ O روی عمودمنصف AC واقع است.

④ B روی عمودمنصف AC واقع است.



۲۰. در چهارضلعی $ABCD$ مطابق شکل، چه تعداد از موارد زیر همواره صحیح است؟

(مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۷ آبان - ۹۵)



الف) قطر AC نیم‌ساز زاویه‌ی C است.

ب) قطر BD نیم‌ساز زاویه‌ی B است.

پ) قطر AC بخشی از عمودمنصف قطر BD است.

ت) قطر BD بخشی از عمودمنصف قطر AC است.

- صفر ① ۱ ② ۲ ③ ۴ ④

۲۱. از مثلث ABC ، ضلع BC و نقطه‌ی H پای ارتفاع وارد بر ضلع BC ثابت است. با تغییر نقطه‌ی A در صفحه، وسط ضلع AB بر روی کدام یک از خطوط زیر جابه‌جا می‌شود؟

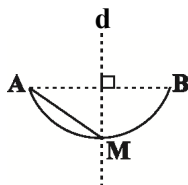
(مرتبط با صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۲۱ آبان - ۹۵)

① عمودمنصف BH ② عمودمنصف BC ③ خطی موازی BC ④ نیم‌ساز زاویه‌ی AHB

۲۲. مطابق شکل، کمان AB قسمتی از یک دایره به شعاع ۳ و خط d عمودمنصف پاره‌خط AB است. اگر $AM = 2$ باشد،

(مرتبط با صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۲۱ آبان - ۹۵)

فاصله‌ی مرکز دایره تا وسط AM کدام است؟



۱ ①

$\sqrt{2}$ ②

$2\sqrt{2}$ ③

$\sqrt{5}$ ④

۲۳. دو نقطه‌ی A و B و خط d داده شده‌اند. می‌خواهیم مثلث متساوی‌الساقینی رسم کنیم که رأسش روی d و قاعده‌ی آن پاره‌خط AB باشد، با توجه به اوضاع A، B و d، تعداد جواب‌های ممکن برای رسم مثلث کدام نمی‌تواند باشد؟

(مرتبط با صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۲۱ آبان - ۹۵)

- ① یک جواب ② دو جواب ③ هیچ جواب ④ بی‌شمار جواب

۲۴. در چهارضلعی ABCD، $\hat{B} = 90^\circ$ و رأس C محل تقاطع نیم‌ساز زاویه‌ی داخلی A و عمودمنصف ضلع AD است. اگر $AB = 4$ و مساحت چهارضلعی ۱۸ باشد، محیط ABCD کدام است؟

(مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۲۱ آبان - ۹۵)

- ① ۱۶ ② ۱۸ ③ ۲۰ ④ ۲۴

۲۵. در مثلث ABC، نقطه‌ی H (پای ارتفاع AH) از اضلاع AB و AC به یک فاصله است. مثلث ABC لزوماً چگونه است؟

(مرتبط با صفحه‌های ۱۱ و ۱۲ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۱۹ آذر - ۹۵)

- ① فقط قائم‌الزاویه ② فقط متساوی‌الساقین ③ متساوی‌الاضلاع ④ متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه

۲۶. نقاط A، B و C روی یک خط قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از این سه نقطه به یک فاصله باشد؟

(مثال صفحه‌های ۱۳ و ۱۴ کتاب درسی)

- ① صفر ② ۱ ③ ۴ ④ بی‌شمار

۲۷. در یک ذوزنقه، نقطه‌ای از دو سر قاعده‌ی CD به یک فاصله و هم‌چنین از قاعده‌ی CD و ساق AD به یک فاصله است. این نقطه حاصل برخورد کدام است؟

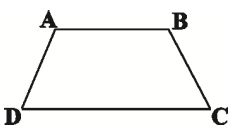
(مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۲۳ مهر - ۹۵)

- ① نیم‌سازهای \hat{C} و \hat{D}

- ② عمودمنصف‌های دو ساق

- ③ عمودمنصف CD و نیم‌ساز زاویه‌ی D

- ④ دو دایره با شعاع یکسان و به مرکز اوساط قاعده‌ها



۲۸. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، عمودمنصف ساق AB با ساق AC در نقطه‌ی M متقاطع است. اگر $\hat{MBC} = 57^\circ$ ، آنگاه زاویه‌ی حاده‌ی A چند درجه است؟ ($\hat{A} < 90^\circ$)

(مرتبط با صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۹۲)

- ① ۲۱ ② ۲۲ ③ ۲۳ ④ ۲۴

۲۹. در مثلث MNP، $\hat{PMN} = 3\hat{PNM}$ و عمودمنصف ضلع MN، ضلع PN را در نقطه‌ی T قطع کرده است. اگر $PM = 6$ و $PN = 10$ ، آنگاه طول MT چقدر است؟

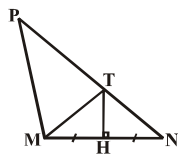
(مرتبط با صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۸۸)

- ① ۸

- ② ۶

- ③ ۴

- ④ $3/5$



۳۰. نقاط A و B در صفحه ثابت هستند و نقطه‌ی C طوری در صفحه تغییر می‌کند که $\hat{ABC} = 2\hat{BAC}$. وقتی C تغییر می‌کند، مجموعه نقاطی که محل تلاقی نیم‌ساز زاویه‌ی \hat{ABC} با پاره‌خط AC هستند، کدام است؟

(مرتبط با صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۸ بهمن - ۹۵)

- ① یک نقطه ② یک دایره ③ خطی موازی با AB ④ عمودمنصف AB

۳۱. روی محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) نقطه‌ای وجود دارد که از رأس‌های B و C به فاصله‌ی ۵ سانتی‌متر و از رأس A به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر قرار دارد. اندازه‌ی وتر این مثلث کدام است؟

(مرتبط با صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی)

- ① $3\sqrt{20}$ ② $4\sqrt{5}$ ③ ۲۰ ④ $5\sqrt{20}$

۳۲. در چهارضلعی $ABCD$ ، اگر $AB=AD$ و $CB=CD$ ، آن گاه روی قطر AC چند نقطه وجود دارد که از دو رأس B و D به یک فاصله باشند؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

۳۳. در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، $\hat{A} = 4\hat{B}$ ($AB = AC$) است. عمودمنصف اضلاع AB و AC ، ضلع BC را به ترتیب در نقاط M و N قطع می‌کنند. اگر $BC = 24$ باشد آنگاه طول پاره‌خط BN کدام است؟

- نتیجه‌ی صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی (آزمون کانون - ۸۸)
- ۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۳۴. قطر AB در دایره‌ای مفروض است. عمودمنصف AB دایره را در نقطه‌ی C قطع می‌کند. مثلث ABC همواره چگونه مثلثی است؟

- ۱) متساوی‌الساقین غیرقائم‌الزاویه ۲) متساوی‌الاضلاع
۳) قائم‌الزاویه‌ی غیرمتساوی‌الساقین ۴) قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین

۳۵. در مثلثی که زاویه‌های آن حاده هستند، اگر عمودمنصف‌های دو ضلع AC و AB یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند، آنگاه زاویه‌ی $\hat{B}OC$ همواره برابر کدام است؟

- ۱) $90^\circ + \frac{1}{2}\hat{A}$ ۲) $\hat{B} + \hat{C}$ ۳) $\frac{1}{3}(\hat{B} + \hat{C})$ ۴) $2\hat{A}$

۳۶. در مثلث ABC داریم $AB = AC$ و $\hat{A} = 80^\circ$ ، عمودمنصف‌های دو ساق مثلث، قاعده‌ی BC را در M و N قطع می‌کند. کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث AMN چند درجه است؟

- ۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۳۷. در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، به طول ساق ۵ و قاعده‌ی ۶، نیمساز زاویه‌ی B ، ضلع AC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی D از ضلع AB چند برابر $\frac{1}{11}$ است؟

- ۱) ۲۴ ۲) ۲۱ ۳) ۲۶ ۴) ۲۳

۳۸. در شکل زیر با کمک خط‌کش و پرگار، نقطه‌ی O را چنان پیدا کرده‌ایم که از A و B به یک فاصله بوده و فاصله‌ی O از خط L برابر ۸ است. طول OA کدام می‌تواند باشد؟

- ۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) ۵ ۴) $4\sqrt{2}$

۳۹. چند لوزی متمایز با قطرهای به طول ۱۲ و ۱۶ و طول ضلع ۹ می‌توان رسم کرد؟

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۴۰. چند متوازی‌الاضلاع متمایز با معلوم بودن طول دو قطر و زاویه‌ی بین آن‌ها می‌توان رسم کرد؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۴۱. پاره‌خط AB به طول ۶ مفروض است. عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم. از نقطه‌ی A دایره‌ای به شعاع ۵ رسم کرده تا عمودمنصف AB را در نقاط C و D قطع کند. چهارضلعی $ACBD$ کدام است؟

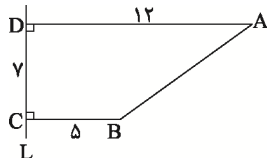
- ۱) مربع به قطر ۶ ۲) لوزی به قطرهای ۵ و ۶ ۳) مستطیل به اضلاع ۵ و ۶ ۴) لوزی به قطرهای ۶ و ۸

۴۲. در کدام یک از ترسیم‌های زیر، یک شکل منحصربه‌فرد حاصل نمی‌شود؟

- ۱) رسم یک لوزی با معلوم بودن دو قطر ۲) رسم یک مستطیل با معلوم بودن یک قطر و یک ضلع
۳) رسم یک مربع با معلوم بودن قطر ۴) رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن یک قطر و یک ضلع

۴۳. در کدام مورد زیر، با اطلاعات داده شده، فقط یک شکل قابل رسم است؟

- ۱) متوازی‌الاضلاعی با طول قطر ۲ و ۷ ۲) مربعی با طول قطر ۶
۳) لوزی با طول ضلع ۵ ۴) دایره‌ای با یک وتر به طول ۲ که آن وتر قطر دایره نیست.



۴۴. اگر طول ضلع یک لوزی برابر با ۱۰ باشد، آن گاه حداقل طول قطر بزرگ آن، چه قدر باشد تا لوزی قابل رسم گردد؟
(مکمل تمرین های ۲ و ۳ صفحه ۱۶ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۷ آبان - ۹۵)

۲۰ (۴)

$۱۰\sqrt{۳}$ (۳)

$۱۰\sqrt{۲}$ (۲)

۱۰ (۱)

۴۵. کدام چهارضلعی را نمی توان رسم کرد؟

(مرتبط با تمرین های ۲ و ۴ صفحه ۱۶ و تمرین ۶ صفحه ۲۷ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۲۱ آبان - ۹۵)

۱) مستطیلی که طول یک ضلع آن ۴ و طول قطر آن ۱۰ باشد.

۲) متوازی الاضلاعی که طول ضلع هایش ۳ و ۵ و طول یک قطر آن ۶ باشد.

۳) مستطیلی که طول قطر آن ۱۰ و زاویه ی بین دو قطر ۶۰° باشد.

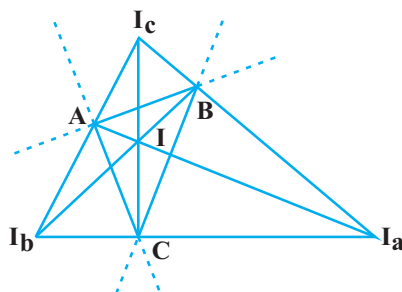
۴) لوزی که طول ضلع آن ۵ و طول یک قطر آن ۱۲ باشد.

همرسی اجزای فرعی مثلث

۲. استدلال

۱. ترسیم های هندسی و استدلال

درس نامه



همرسی نیمسازها:

سه نیمساز داخلی هر مثلث همرسند، نقطه ی همرسی نیمسازهای داخلی، از هر سه ضلع مثلث، به یک فاصله است و همواره داخل مثلث قرار دارد. همچنین هر دو نیمساز خارجی مثلث با نیمساز داخلی زاویه ی سوم همرسند، این نقطه ی همرسی از یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر، به یک فاصله است، یعنی در شکل مقابل داریم:

I : نقطه ی همرسی نیمسازهای داخلی مثلث ABC که از هر سه ضلع AB ، AC و BC به یک فاصله است.

I_a : نقطه ی همرسی نیمساز داخلی زاویه ی \hat{A} و نیمسازهای خارجی \hat{B} و \hat{C} که از ضلع BC و امتداد AB و AC به یک فاصله است.

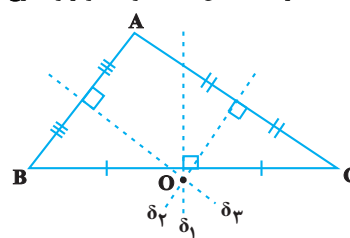
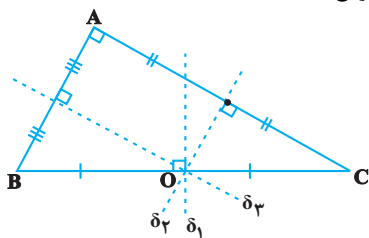
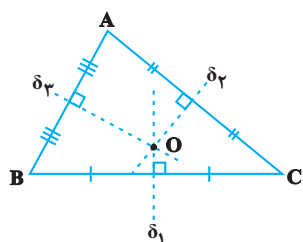
I_b : نقطه ی همرسی نیمساز داخلی زاویه ی \hat{B} و نیمسازهای خارجی \hat{A} و \hat{C} که از ضلع AC و امتداد AB و BC به یک فاصله است.

I_c : نقطه ی همرسی نیمساز داخلی زاویه ی \hat{C} و نیمسازهای خارجی \hat{A} و \hat{B} که از ضلع AB و امتداد AC و BC به یک فاصله است.

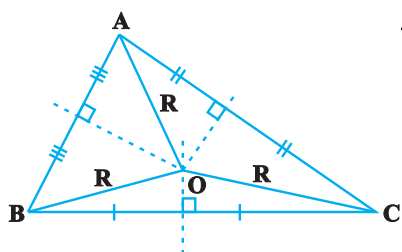
یعنی چهار نقطه ی I ، I_a ، I_b و I_c از اضلاع مثلث ABC یا امتداد آن ها، به یک فاصله هستند.

همرسی عمودمنصف ها:

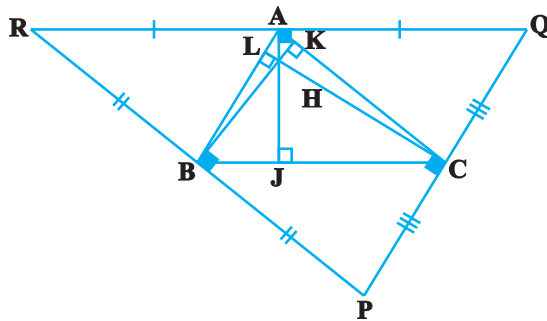
عمود منصف های ضلع های هر مثلث همرسند. نقطه ی همرسی عمود منصف ها بسته به این که مثلث حاده الزاویه، قائم الزاویه یا منفرجه الزاویه باشد، به ترتیب داخل مثلث، وسط وتر و خارج مثلث واقع است.



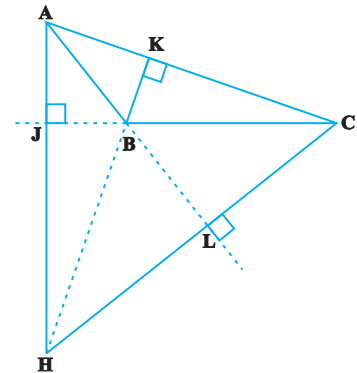
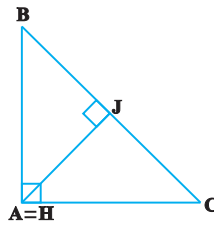
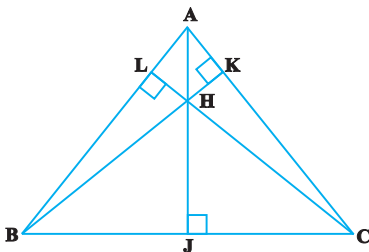
نقطه ی همرسی عمود منصف های هر مثلث، از سه رأس آن مثلث به یک فاصله است.



قضیه: اگر از رئوس مثلث ABC ، خطوطی به موازات اضلاع آن رسم کنیم تا مثلث PQR به دست آید، آن‌گاه ارتفاع‌های مثلث ABC ، عمودمنصف‌های مثلث PQR هستند. از این قضیه می‌توان نتیجه گرفت که ارتفاع‌های هر مثلث هم‌مرسند.



نقطه‌ی هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث، بسته به این‌که آن مثلث حاده الزاویه، قائم الزاویه و یا منفرجه الزاویه باشد، به ترتیب داخل مثلث، رأس قائمه و خارج مثلث واقع است.



۴۶. برای مثلث متساوی‌الساقین $(AB = AC)ABC$ به قاعده‌ی ۶ سانتی‌متر نقطه‌ای وجود دارد که از هر رأس آن به فاصله‌ی ۵ سانتی‌متر است. مساحت این مثلث چقدر است؟
 (مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۸ کتاب درسی)

- ۱۸ (۱) ۲۷ (۲) ۲۴ (۳) ۳۰ (۴)

۴۷. در مثلث متساوی‌الساقین $(AB = AC)ABC$ ، $BC = ۸$ و فاصله‌ی نقطه‌ی هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع از قاعده‌ی مثلث برابر ۳ است. طول ساق مثلث به شرط آن که از قاعده بزرگ‌تر باشد، کدام است؟

(مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۸۰)

- ۹ (۱) $۳\sqrt{۵}$ (۲) ۶ (۳) $۴\sqrt{۵}$ (۴)

۴۸. چهار نقطه‌ی A ، B ، C و D در یک صفحه وجود دارند. چند نقطه در این صفحه وجود دارد که از این چهار نقطه به یک فاصله باشد؟

(مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی)

- ۱ صفر (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۴ حداکثر ۱ (۴)

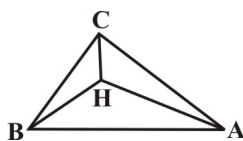
۴۹. در مثلث ABC که $\hat{B} = ۶۰^\circ$ و $\hat{C} = ۵۰^\circ$ ، اگر O نقطه‌ی هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع باشد، آن‌گاه اندازه‌ی زاویه‌ی BOC چند درجه است؟

(مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی)

- ۱۱۰ (۱) ۱۳۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۴۰ (۴)

۵۰. در مثلث ABC که در آن $\hat{A} = ۴۰^\circ$ و $\hat{B} = ۶۰^\circ$ و H محل تلاقی سه ارتفاع است. زاویه‌ی $\angle AHC$ چند برابر زاویه‌ی $\angle BHC$ است؟

(مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی) (آزاد ریاضی ۸۸)



- $\frac{۵}{۶}$ (۱) $\frac{۵}{۷}$ (۲) $\frac{۶}{۷}$ (۳) $\frac{۷}{۵}$ (۴)

۵۱. در مثلث ABC ، داریم $\hat{A} = 40^\circ$ و $\hat{B} = 60^\circ$ ، اگر نقطه‌ی تلاقی سه ارتفاع H باشد، زاویه‌ی CHA چند درجه است؟

(مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی) (آزاد ریاضی - ۹۰)

۸۰ (۴)

۱۴۰ (۳)

۱۲۰ (۲)

۱۰۰ (۱)

(مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۹۲)

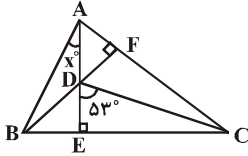
۵۲. با توجه به شکل مقابل، مقدار x کدام است؟

۳۷ (۱)

۵۳ (۲)

۳۶ (۳)

۲۳ (۴)



۵۳. مثلث دلخواه ABC را در نظر می‌گیریم. از رئوس A ، B و C خطوطی به موازات اضلاع روبه‌رویشان رسم می‌کنیم تا این خطوط مثلث $A'B'C'$ را تشکیل دهند. نقطه‌ی تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC برای مثلث $A'B'C'$ چه نقطه‌ای است؟

(مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۹۲)

(۲) نقطه‌ی تلاقی ارتفاع‌ها

(۱) نقطه‌ی تلاقی میانه‌ها

(۴) محل تلاقی عمودمنصف‌ها

(۳) محل تلاقی نیمسازها

۵۴. مثلث ABC مفروض است. وسط‌های اضلاع آن را M ، N و P می‌نامیم. کدام گزینه همواره درست است؟

(مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی)

(۱) نقطه‌ی هم‌رسی ارتفاع‌های MNP از سه ضلع آن به یک فاصله است.

(۲) نقطه‌ی هم‌رسی ارتفاع‌های MNP از سه رأس آن به یک فاصله است.

(۳) نقطه‌ی هم‌رسی ارتفاع‌های MNP از سه ضلع مثلث ABC به یک فاصله است.

(۴) نقطه‌ی هم‌رسی ارتفاع‌های MNP از سه رأس مثلث ABC به یک فاصله است.

۵۵. اگر در مثلث ABC زاویه‌ی $\hat{A} = 92^\circ$ ، کدام‌یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

(مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی) (آزاد پزشکی - ۷۹)

(۲) نقطه‌ی تلاقی سه نیم‌ساز خارج مثلث است.

(۱) نقطه‌ی تلاقی سه میانه خارج مثلث است.

(۴) نقطه‌ی تلاقی سه ارتفاع روی ضلع BC است.

(۳) نقطه‌ی تلاقی سه ارتفاع خارج مثلث است.

۵۶. در مثلث غیر قائم‌الزاویه‌ی ABC ، اگر نقطه‌ی O محل تلاقی سه ارتفاع باشد، نقطه‌ی A برای مثلث OBC چه نقطه‌ای است؟

(مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۹۱)

(۲) محل تلاقی سه میانه

(۱) محل تلاقی سه ارتفاع

(۴) محل تلاقی عمودمنصف‌ها

(۳) محل تلاقی نیمسازها

۵۷. اگر \hat{A} ، \hat{B} و \hat{C} زاویه‌های یک مثلث به ترتیب با اعداد ۱، ۲ و ۳ متناسب باشند و نیم‌سازهای داخلی در نقطه‌ی D متقاطع باشند، زاویه‌ی \hat{ADC} کدام است؟

۱۴۰° (۴)

۹۵° (۳)

۱۲۰° (۲)

۱۴۵° (۱)

۵۸. در مثلث ABC که زاویه‌ها به نسبت ۲، ۳ و ۷ است، زاویه‌ی بزرگ‌تر A بوده و D محل تلاقی سه نیم‌ساز است. حاصل

(مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی) (آزاد ریاضی - ۸۷)

$\hat{ADB} + \hat{ADC} - \hat{BDC}$ کدام است؟

۹۰° (۴)

۶۰° (۳)

۷۵° (۲)

۱۰۵° (۱)

۵۹. کدام‌یک از نقاط زیر از سه ضلع مثلث به یک فاصله است؟

(۲) نقطه‌ی تلاقی سه ارتفاع

(۱) نقطه‌ی تلاقی سه میانه

(۴) نقطه‌ی تلاقی سه نیم‌ساز

(۳) نقطه‌ی تلاقی سه عمود منصف

۶۰. در صفحه‌ی یک مثلث، چند نقطه می‌توان یافت که از سه ضلع آن مثلث یا امتداد آن‌ها به یک فاصله باشند؟

(مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی) (سراسری تجربی - ۸۰)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۶۱. از تقاطع نیمسازهای خارجی مثلث ABC ، مثلث PQR ایجاد شده است. نقطه‌ی هم‌رسی نیمسازهای داخلی ABC ، برای Δ

(مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی)

② نقطه‌ی تقاطع عمودمنصف‌ها

④ نقطه‌ی تقاطع ارتفاع‌ها

(مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی)

الف) نقطه‌ی هم‌رسی عمودمنصف‌های یک مثلث از سه ضلع آن مثلث به یک فاصله است.

ب) نقطه‌ی هم‌رسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث از سه رأس آن به یک فاصله است.

ج) نقطه‌ی هم‌رسی ارتفاع‌های هر مثلث همواره یا داخل مثلث واقع است یا خارج مثلث.

③ ④

② ③

① ②

هیچ ①

نامساوی‌های هندسی

۲. استدلال

۱. ترسیم‌های هندسی و استدلال

درس‌نامه

نامساوی‌های هندسی:

➕ قضیه‌ی ضلع برتر:

اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، آن‌گاه زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، از زاویه‌ی روبه‌رو به

ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌تر است. در مثلث ABC ، اگر $AC > AB$ ، آن‌گاه $\hat{B} > \hat{C}$.

➕ قضیه‌ی زاویه‌ی برتر:

اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، آن‌گاه ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر، از ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی کوچک‌تر، بزرگ‌تر است. در مثلث ABC ،

اگر $\hat{B} > \hat{C}$ ، آن‌گاه $AC > AB$.

➕ قضیه‌ی نامساوی مثلث:

در هر مثلث، مجموع طول هر دو ضلع، از طول ضلع سوم بزرگ‌تر است، یعنی در مثلث ABC داریم: $AB + AC > BC$ ،

$AB + BC > AC$ و $AC + BC > AB$

⊙ اگر a ، b و c ، طول اضلاع یک مثلث باشند، آن‌گاه $a < b + c$ و $|b - c| < a$. به بیان دیگر در هر مثلث، طول هر ضلع از مجموع دو

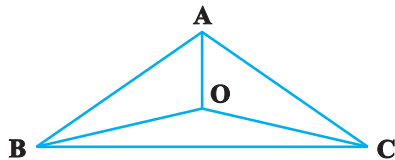
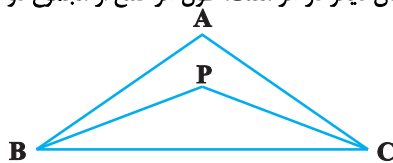
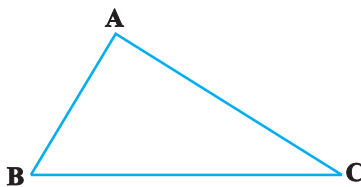
ضلع دیگر کم‌تر و از قدرمطلق تفاضل دو ضلع دیگر بیش‌تر است.

⊙ اگر از نقطه‌ی دلخواه P درون مثلث ABC ، به دو رأس B و C وصل کنیم،

آن‌گاه $\hat{P} > \hat{A}$ و $PB + PC < AB + AC$.

⊙ مجموع فواصل هر نقطه‌ی دلخواه داخل مثلث از سه رأس آن، از محیط مثلث کوچک‌تر و از نصف محیط مثلث بزرگ‌تر است.

$$\frac{AB + AC + BC}{2} < OA + OB + OC < AB + AC + BC$$



۶۳. در مثلث ABC اگر $AB + AC = 2BC$ و $AB > AC$ ، آن‌گاه در مورد زاویه‌های این مثلث کدام گزینه درست است؟

(مرتبط با قضیه ۱ صفحه‌ی ۲۱ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۹۲)

④ $\hat{B} < \hat{C} < \hat{A}$

③ $\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$

② $\hat{C} < \hat{A} < \hat{B}$

① $\hat{C} > \hat{A} > \hat{B}$

۶۴. اگر در مثلث ABC ، $\hat{A} = 52^\circ$ ، آن‌گاه کدام‌یک از گزاره‌های زیر لزوماً درست است؟

(مرتبط با عکس قضیه‌ی ۱ صفحه‌ی ۲۲ کتاب درسی)

② ضلع BC کوچک‌ترین ضلع مثلث نیست.

① ضلع BC کوچک‌ترین ضلع مثلث است.

④ ضلع BC بزرگ‌ترین ضلع مثلث نیست.

③ ضلع BC بزرگ‌ترین ضلع مثلث است.

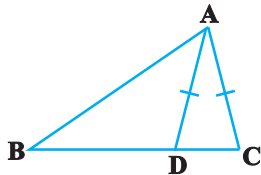
۶۵. در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویه A ضلع BC را در نقطه D قطع می‌کند، کدام نامساوی همواره صحیح است؟
(تمرین ۶ صفحه ۲۷ کتاب درسی) (سراسری ریاضی - ۸۰)

- ① $BA > BD$ ② $DA > DB$ ③ $AB > AD$ ④ $DB > DA$

۶۶. در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، که $\hat{A} = 90^\circ$ و $AB > AC$ نقطه O نقطه‌ی هم‌رسی نیمسازهای آن است. کدام گزینه نادرست است؟
(مرتبط با عکس قضیه‌ی ۱ صفحه ۲۲ کتاب درسی)

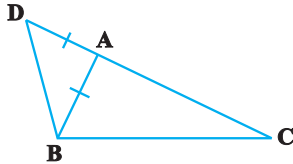
- ① $AO < BO$ ② $AO < CO$ ③ $CO < BO$ ④ $AC < CO$

۶۷. در شکل مقابل $AD = AC$. کدام گزینه لزوماً صحیح است؟
(مرتبط با عکس قضیه‌ی ۱ صفحه ۲۲ کتاب درسی)



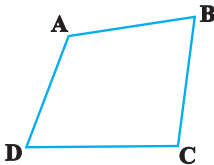
- ① $BC > AB$
② $BD > AD$
③ $AB > AD$
④ $BC > AD$

۶۸. مطابق شکل ضلع AC از مثلث ABC را به اندازه‌ی ضلع AB ادامه داده‌ایم تا به نقطه D برسیم. کدام گزینه لزوماً صحیح است؟
(مرتبط با عکس قضیه‌ی ۱ صفحه ۲۲ کتاب درسی)



- ① $AC > AB$
② $BC > AC$
③ $BC > AB$
④ $DC > BC$

۶۹. در چهارضلعی $ABCD$ شکل مقابل، AB کوچک‌ترین ضلع و DC بزرگ‌ترین ضلع‌اند. کدام گزینه لزوماً صحیح است؟
(مرتبط با قضیه‌ی ۱ صفحه ۲۱ کتاب درسی)



- ① $\hat{B} > \hat{D}$
② $\hat{A} < \hat{C}$
③ $\hat{B} > \hat{C}$
④ $\hat{B} < \hat{C}$

۷۰. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ که $AB > AD$ کدام گزینه لزوماً صحیح است؟
(مرتبط با قضیه‌ی ۱ صفحه ۲۱ کتاب درسی)

- ① $\hat{D}\hat{A}\hat{C} > \hat{B}\hat{A}\hat{C}$ ② $\hat{B}\hat{D}\hat{C} > \hat{A}\hat{D}\hat{B}$
③ $\hat{D}\hat{A}\hat{B} > \hat{A}\hat{B}\hat{C}$ ④ $\hat{D}\hat{A}\hat{B} < \hat{A}\hat{B}\hat{C}$

۷۱. با کدام سه طول داده شده می‌توان مثلث ساخت؟ ($a, b, c > 0$)

- ① $a, b, a + b + 1$ ② $a + 1, b + 1, a + b$
③ $a^2, (a + 1)^2, 2a^2 + 3a + 1$ ④ $a - 2, 2a, 3a$

۷۲. فرض کنیم $0 < a < b < c$ باشد، برای آن که a و b و c اضلاع مثلثی باشند، لازم و کافی است داشته باشیم:

(نتیجه‌ی تمرین ۶ صفحه ۲۷ کتاب درسی) (سراسری ریاضی - ۴۹)

- ① $c < a + b$ ② $a < b + c$ ③ $b < a + c$ ④ $c^2 < a^2 + b^2$

۷۳. کدام دسته از اعداد زیر می‌تواند سه ضلع یک مثلث باشد؟

(نتیجه‌ی تمرین ۶ صفحه ۲۷ کتاب درسی) (آزاد ریاضی - ۷۵)

- ① ۳ و ۵ و ۷ ② ۲ و ۳ و ۶ ③ ۱ و ۲ و ۳ ④ ۱ و ۳ و ۴

۷۴. اگر a, b و c طول اضلاع یک مثلث باشند، کدام گزینه لزوماً درست نیست؟

(نتیجه‌ی تمرین ۶ صفحه ۲۷ کتاب درسی) (آزاد - ۷۷)

- ① $2a, 2b$ و $2c$ طول سه ضلع مثلثی هستند. ② a^2, ab و ac طول سه ضلع مثلثی هستند.
③ $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$ و $\frac{c}{2}$ طول سه ضلع مثلثی هستند. ④ $a + 2, b + 4$ و $c + 7$ طول سه ضلع مثلثی هستند.

۷۵. سه پاره‌خط به طول‌های $4x - 4$ و $x + 7$ و $6x$ اضلاع مثلثی هستند، مقادیر x به کدام صورت است؟

(نتیجه‌ی تمرین ۶ صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی) (سراسری ریاضی - ۸۲)

④ $\frac{11}{9} < x < 4$

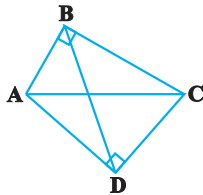
③ $2 < x < 3$

② $\frac{5}{3} < x < 3$

① $\frac{11}{9} < x < 3$

۷۶. در چهار ضلعی $ABCD$ ، $\hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$ و $AB < CD$ است. کدام یک از نامساوی‌های زیر همواره درست است؟

(نتیجه‌ی تمرین ۶ صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۸۵)



① $BC < AD$

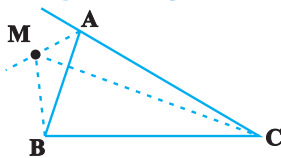
② $BD < AC$

③ $AB < AD$

④ $CD < BC$

۷۷. در شکل زیر، نقطه‌ی M روی نیمساز خارجی زاویه‌ی A است. نسبت $\frac{MB + MC}{AB + AC}$ ، چگونه است؟

(نتیجه‌ی تمرین ۶ صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی) (سراسری خارج کشور ریاضی - ۹۴)



① بزرگ‌تر از ۱

② کمتر از ۱

③ برابر ۱

④ غیرمشخص

۷۸. مثلث ABC با محیط $2P$ مفروض است، اگر M نقطه‌ای در درون این مثلث و مجموع فاصله‌های M از سه رأس مثلث برابر

(نتیجه‌ی تمرین ۶ صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی) (سراسری تجربی - ۵۷)

L باشد، همواره داریم:

④ $L < P$

③ $L = P$

② $L > P$

① $L > 2P$

۷۹. در مثلثی به طول اضلاع ۳، $2 + \sqrt{2}$ و $3 - \sqrt{2}$ واحد، نقطه‌ی M داخل مثلث تغییر مکان می‌دهد. کدام عدد برای مجموع فواصل

نقطه‌ی M از سه رأس مثلث، مورد قبول است؟

(نتیجه‌ی تمرین ۶ صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی) (سراسری خارج کشور ریاضی - ۸۸)

④ ۸

③ $4\sqrt{2}$

② ۴

① $5 - \sqrt{2}$

۸۰. از نقطه‌ی دلخواه O در داخل مثلث ABC به سه رأس آن وصل می‌کنیم. اگر مجموع طول این سه پاره‌خط، برابر ۸ باشد، محیط

مثلث در کدام بازه‌ی زیر قرار دارد؟ (P محیط مثلث ABC است.)

(نتیجه‌ی تمرین ۶ صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۸۵)

④ $8 < P < 16$

③ $P > 17$

② $P > 16$

① $16 < P < 24$

۸۱. متوازی‌الاضلاعی با معلوم بودن طول ضلع‌های آن ۴ و ۶ و طول قطر x قابل رسم است. اگر x عددی صحیح باشد، چند

(نتیجه‌ی تمرین ۶ صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی)

متوازی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد؟

④ نه

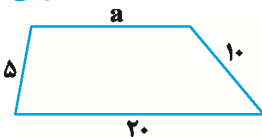
③ هشت

② هفت

① شش

(نتیجه‌ی تمرین ۶ صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی)

۸۲. اگر دوزنقه زیر قابل رسم باشد، آن‌گاه محدوده‌ی a کدام است؟



② $5 < a < 15$

① $5 < a < 25$

④ $10 < a < 25$

③ $5 < a < 10$

مفاهیم استدلال

۲. استدلال

۱. ترسیم‌های هندسی و استدلال

درس نامه

استدلال:

➕ قضیه:

برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به دست می‌آید، قضیه نامیده می‌شود.

➖ عکس قضیه:

اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آن چه حاصل می‌شود «عکس قضیه» گفته می‌شود. عکس قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

⊕ قضیه دو شرطی:

اگر عکس یک قضیه‌ی شرطی، خود یک قضیه شرطی باشد، آن‌گاه این دو قضیه شرطی را می‌توان به‌صورت یک قضیه بیان کرد. چنین قضیه‌ای، قضیه دوشروطی نامیده می‌شود.

⊙ قضیه‌های دوشروطی را می‌توان با نماد \Leftrightarrow (اگر و تنها اگر) بیان کرد.

⊕ گزاره:

گزاره یک جمله‌ی خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد، اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد، گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزاره‌ی ساده می‌گویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزاره‌ی ساده باشد که به آن گزاره‌ی مرکب می‌گویند.

⊙ **نقیض یک گزاره:** همان‌طور که می‌دانیم، ارزش یک گزاره یا درست است یا نادرست. نقیض یک گزاره، ارزشی دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره دارد.

⊕ مثال نقض:

به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی یا حدس کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود. به‌عنوان مثال برای حکم کلی «همه اعداد اول، فرد هستند.» می‌توان عدد ۲ را به‌عنوان مثال نقض ارائه کرد که عدد اول است ولی فرد نیست.

⊕ برهان خلف:

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی کاربرد دارد، برهان غیرمستقیم یا برهان خلف است. بدین صورت که به‌جای آن‌که به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به‌درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (نقیض حکم درست باشد) و به یک تناقض با فرض یا یک امر غیرممکن می‌رسیم.

۸۳. عکس کدام یک از قضایای شرطی زیر، یک قضیه‌ی شرطی نیست؟

(مرتبط با صفحه‌ی ۲۲ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۹۱)

- ① مساحت‌های هر دو مثلث همنهشت با هم برابرند.
- ② اگر سه ضلع مثلثی برابر باشند، آنگاه هر زاویه‌ی آن 60° است.
- ③ مثلثی که دو زاویه‌ی برابر دارد، دارای دو ضلع برابر است.
- ④ در یک مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر است.

(مرتبط با صفحه‌ی ۲۴ کتاب درسی)

۸۴. «برهان خلف» نوعی . . . است.

- ① مثال نقض ② استدلال استقرایی ③ استدلال استنتاجی ④ گزاره‌ی شرطی

۸۵. در اثبات یک قضیه به روش اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف از کدام اصل استفاده می‌شود؟

(مرتبط با صفحه‌ی ۲۴ کتاب درسی)

- ① فرض را درست می‌گیریم و به حکم درست دست می‌یابیم.
- ② فرض را نادرست می‌گیریم و به حکم نادرست می‌رسیم.
- ③ حکم را نادرست می‌گیریم و با فرض نادرست مواجه می‌شویم.
- ④ حکم را درست می‌گیریم و به فرض درست می‌رسیم.

۸۶. در اثبات حکم «عمودمنصف هر پاره‌خط یکتاست.» به روش برهان خلف، تناقض پدید آمده کدام است؟

(مرتبط با صفحه‌ی ۲۴ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۱۹ آذر - ۹۵)

- ① از یک نقطه خارج یک خط، دو خط به موازات آن خط رسم شده است.
- ② از یک نقطه خارج یک خط، دو خط بر آن خط عمود رسم شده است.
- ③ مجموع زوایای یک مثلث بیش‌تر از 180° رسم شده است.
- ④ دو خط متقاطع، موازی یکدیگر شده‌اند.

(مرتبط با صفحه‌ی ۲۵ کتاب درسی) (سراسری ریاضی - ۷۸)

۸۷. کدام قضیه به صورت دو شرطی بیان نمی‌شود؟

- ① در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع و میانه یک ضلع بر هم منطبق‌اند.
- ② در مثلث قائم‌الزاویه عمودمنصف اضلاع بر روی وتر متقاطع‌اند.
- ③ در مثلث قائم‌الزاویه یکی از میانه‌ها نصف وتر است.
- ④ در هر مثلث ضلع مقابل به زاویه‌ی 90° بزرگ‌ترین ضلع است.

۸۸. کدام یک از قضیه‌های زیر را نمی‌توان به صورت یک قضیه‌ی دوشرطی نوشت؟

(مرتبط با صفحه‌ی ۲۵ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۵ آذر - ۹۵)

- ① اگر در مثلث ABC ، $AB > AC$ باشد، آن گاه $\hat{C} > \hat{B}$ است.
- ② اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، آن گاه قطرهایش عمودمنصف یکدیگرند.
- ③ اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند، آن گاه هم‌مساحت‌اند.
- ④ اگر دو دایره محیط‌های برابر داشته باشند، آن گاه مساحت برابر دارند.

۸۹. کدام یک از احکام زیر را نمی‌توان به صورت یک قضیه‌ی دوشرطی نوشت؟

(مرتبط با صفحه‌ی ۲۵ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۵ آذر - ۹۵)

- ① مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب، 360° است.
- ② نقطه‌ی هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث، از سه رأس آن مثلث به یک فاصله است.
- ③ قضیه‌ی فیثاغورس
- ④ ارتفاع‌های نظیر اضلاع مساوی در هر مثلث، باهم برابرند.

(مرتبط با صفحه‌ی ۲۵ کتاب درسی)

۹۰. کدام گزینه، یک قضیه‌ی دوشرطی نیست؟

- ① متوازی‌الاضلاع‌ی که دو ضلع مجاورش برابرند، لوزی است.
- ② مربع، مستطیلی است که طول اقطارش برابر است.
- ③ هر دوزنقه، اگر متساوی‌الساقین باشد، دو قطر آن برابرند.
- ④ مثلثی که نیمساز یک زاویه‌ی آن، میانه‌ی ضلع مقابل به آن زاویه است، متساوی‌الساقین است.

۹۱. کدام یک از گزینه‌های زیر مثال نقض عبارت: «در مثلثی که اضلاع نامساوی دارد، بزرگ‌ترین ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی منفرجه است» می‌باشد؟

(مرتبط با صفحه‌های ۲۵ و ۲۶ کتاب درسی)

- ① مثلث متساوی‌الاضلاع
 - ② مثلث متساوی‌الساقین
 - ③ مثلث قائم‌الزاویه
 - ④ مثلث مختلف‌الاضلاع
۹۲. با استفاده از استدلال استقرایی حدس می‌زنیم که «در هر مثلث نقطه‌ی هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع در داخل یا در خارج مثلث واقع است.» نتیجه‌گیری کلی از این حدس با کدام روش رد می‌شود؟

(مرتبط با صفحه‌های ۲۵ و ۲۶ کتاب درسی)

- ① استدلال استنتاجی
- ② اثبات غیرمستقیم
- ③ مثال نقض
- ④ استدلال استقرایی

(مرتبط با صفحه‌های ۲۵ و ۲۶ کتاب درسی)

۹۳. برای کدام یک از گزاره‌های زیر، نمی‌توان مثال نقض ارائه کرد؟

- ① نقطه‌ی هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع یک مثلث، داخل یا خارج مثلث قرار دارد.
- ② نقطه‌ی هم‌رسی ارتفاع‌های یک مثلث، همواره داخل مثلث واقع است.
- ③ هر زاویه‌ی خارجی یک چند ضلعی، از هر زاویه‌ی داخلی آن بزرگ‌تر است.
- ④ نقطه‌ی هم‌رسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی یک مثلث، همواره داخل مثلث قرار دارد.

(مرتبط با صفحه‌های ۲۵ و ۲۶ کتاب درسی)

۹۴. مثال نقض حدس کلی زیر، کدام گزینه است؟

«چهارضلعی که دو ضلع آن برابر و دو ضلع دیگر آن موازی باشند، متوازی‌الاضلاع است.»

- ① مستطیل
- ② دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه
- ③ دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین
- ④ لوزی

(مرتبط با صفحه‌های ۲۵ و ۲۶ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۱۹ آذر - ۹۵)

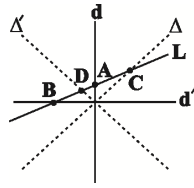
۹۵. کدام گزینه تنها یک مثال نقض دارد؟

- ① محل هم‌رسی ارتفاع‌های هر مثلث یا داخل آن است و یا خارج آن.
- ② چندضلعی که همه‌ی زوایای آن با هم برابر باشند، منتظم است.
- ③ هر دو مستطیل هم‌مساحت، هم‌نهشت می‌باشند.
- ④ حاصل ضرب هر عدد صحیح در $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.

(مرتبط با صفحه‌های ۲۵ و ۲۶ کتاب درسی) (آزمون کانون - ۵ آذر - ۹۵)

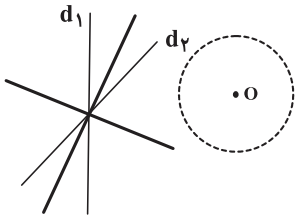
۹۶. کدام گزینه مثال نقض دارد؟

- ① مجذور هر عدد بین صفر و یک کوچک‌تر از خود عدد است.
- ② برای هر دو مجموعه‌ی A و B داریم $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$.
- ③ هر دو مثلث هم‌نهشت هم مساحت هستند.
- ④ در هر مثلث که همه‌ی زوایای آن کوچک‌تر از 90° باشد محل برخورد ارتفاع‌ها داخل مثلث است.



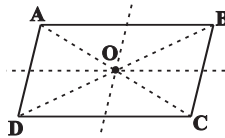
۱۴. گزینه ۴

نقاطی که از دو خط متقاطع d_1 و d_2 به یک فاصله‌اند، نیمسازهای زوایای بین آن‌ها می‌باشند که دو خط عمود بر هم‌اند و نقطه‌ای که از نقطه‌ی O به فاصله‌ی 5 سانتی‌متراند دایره‌ای به مرکز O و به شعاع 5 اند. نقاط برخورد این دو خط عمود بر هم و دایره جواب است که حداکثر چهار نقطه است.



۱۵. گزینه ۳

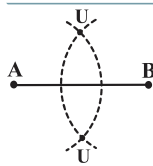
نقاطی که از قطرهای متوازی‌الاضلاع به یک فاصله‌اند، همان نقاط روی نیمسازهای زوایای بین این دو خط‌اند که در چهار نقطه با اضلاع متوازی‌الاضلاع تلاقی دارند.



۱۶. گزینه ۴

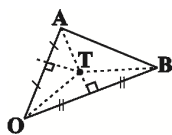
چون اضلاع متوازی‌الاضلاع دایره‌دو باهم موازی‌اند و عمودمنصف‌های وارد بر دو ضلع موازی نیز باهم موازی هستند، پس چهارضلعی تشکیل‌شده متوازی‌الاضلاع است.

۱۷. گزینه ۲



با توجه به روش رسم عمودمنصف یک پاره‌خط، برای رسم آن احتیاج به رسم دو کمان داریم.

۱۸. گزینه ۳



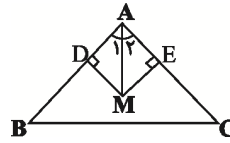
اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط قرار داشته باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.

نقطه‌ی T روی عمودمنصف OA قرار دارد، پس $OT = TA$
نقطه‌ی T روی عمودمنصف OB قرار دارد، پس $OT = TB$
در نتیجه $TA = TB$ است.

اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد. در نتیجه نقطه‌ی T روی عمودمنصف پاره‌خط AB نیز قرار دارد.

۱۰. گزینه ۱

مطابق شکل در دو مثلث AMD و AME داریم:

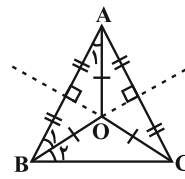


$$\left. \begin{array}{l} AM = AM \\ AD = AE \\ \hat{D} = \hat{E} = 90^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(وتر و یک ضلع قائمه)} \\ \rightarrow \Delta AMD \cong \Delta AEM \end{array}$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

بنابراین نقطه‌ی M روی نیمساز زاویه‌ی A قرار دارد.

۱۱. گزینه ۱



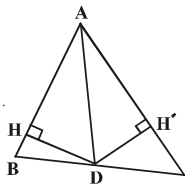
اگر از O به A وصل کنیم به علت آن که O روی عمودمنصف AB واقع است $OA = OB$ و از آن‌جا که O روی عمودمنصف AC واقع است، $OA = OC$ پس $OB = OC$ و مثلث‌های OAB ، OAC و OBC متساوی‌الساقین هستند، داریم:

$$\Delta OAB : \hat{B}_1 = \hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2} = 40^\circ$$

$$\Delta ABC : \hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{A} - \hat{B}_1 = 20^\circ - 40^\circ = 10^\circ$$

۱۲. گزینه ۲



مجموع مساحت‌های دو مثلث ABD و ACD برابر مساحت مثلث ABC است. طول‌های ارتفاع این دو مثلث را DH و DH' فرض می‌کنیم که چون نقطه‌ی D روی نیمساز قرار دارد این دو فاصله با هم برابرند، پس:

$$DH = DH' = h$$

$$S(\Delta ABC) = \frac{1}{2} AB \times DH + \frac{1}{2} AC \times DH'$$

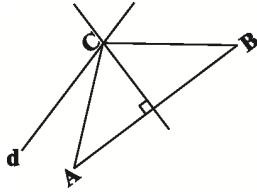
$$= \frac{1}{2} \times 4h + \frac{1}{2} \times 6h = 5h$$

طبق صورت سؤال مساحت مثلث ABC برابر 10 است، پس:

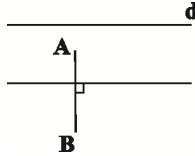
$$10 = 5h \Rightarrow h = 2$$

۱۳. گزینه ۳

مجموعه‌ی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله باشند، دو خط Δ و Δ' (نیمسازهای زوایای بین دو خط d و d') هستند که محل تلاقی آن‌ها با خط L یعنی نقاط C و D جواب مورد نظر می‌باشد. واضح است که اگر L موازی یکی از دو خط Δ و Δ' باشد، مسأله تنها یک جواب دارد. بنابراین مسأله حداکثر دو جواب دارد.

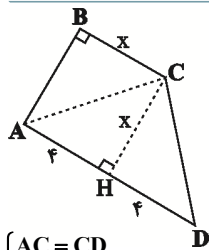


و اگر عمودمنصف AB با خط d موازی باشد، مسئله جواب ندارد.



و چنانچه عمودمنصف AB بر خط d منطبق باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد.

گزینه ۳ ۲۴



نقطه‌ی C روی نیمساز زاویه‌ی A قرار دارد. پس:

$$\begin{cases} BC = CH = x \\ AB = AH = 4 \end{cases}$$

نقطه‌ی C روی عمودمنصف ضلع AD قرار دارد. پس:

$$\begin{cases} AC = CD \\ AH = HD = 4 \end{cases}$$

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$$

طبق شکل داریم:

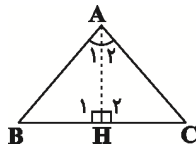
$$\frac{4x}{2} + \frac{4x}{2} = 18 \Rightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow AC = CD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\text{محیط چهارضلعی: } 4 + 3 + 5 + 8 = 20$$

گزینه ۲ ۲۵

اگر نقطه‌ای به فاصله‌ی یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه روی نیمساز قرار دارد.

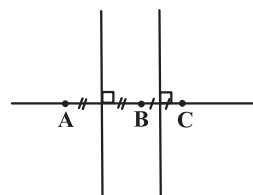


پس نقطه‌ی H روی نیمساز زاویه‌ی \hat{A} قرار دارد، پس $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ داریم:

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \\ AH = AH \end{cases} \Rightarrow \triangle ABH \cong \triangle ACH \Rightarrow AB = AC$$

در نتیجه مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

گزینه ۱ ۲۶



نقطه‌ای که از سه نقطه‌ی A، B و C به یک فاصله است، محل برخورد عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB و BC است که چون این دو موازی‌اند، چنین نقطه‌ای وجود ندارد.

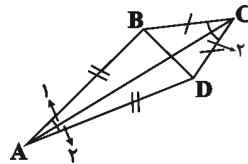
گزینه ۳ ۱۹

چون $OA = OC$ است، پس O از دو سر پاره‌خط AC به یک فاصله است. یعنی O روی عمودمنصف AC واقع است.

گزینه ۳ ۲۰

$$\begin{cases} AB = AD \\ BC = CD \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle ABC \cong \triangle ADC$$

مشترک AC



$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ C_1 = C_2 \end{cases} \Rightarrow \hat{C} \text{ و } \hat{A} \text{ نیمساز زوایای } \hat{C} \text{ و } \hat{A}$$

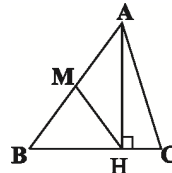
$$\begin{cases} AB = AD \Rightarrow BD \text{ عمودمنصف } A \\ CB = CD \Rightarrow BD \text{ عمودمنصف } C \end{cases}$$

$$\Rightarrow BD \text{ عمودمنصف } AC$$

بنابراین ۲ مورد صحیح است.

گزینه ۱ ۲۱

مثلث ABH قائم‌الزاویه است و در نتیجه MH (M وسط ضلع AB است) نصف وتر است، یعنی $MH = BM$. بنابراین نقطه‌ی M که از دو سر پاره‌خط BH به یک فاصله است، همواره بر روی عمودمنصف BH قرار دارد.

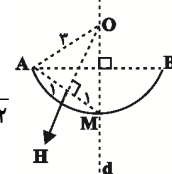


گزینه ۳ ۲۲

مرکز دایره نقطه‌ای است که همه‌ی نقاط روی دایره از آن به یک فاصله هستند. مرکز دایره روی خط d قرار دارد، چون d عمودمنصف وتر AB است، برای دقیق مشخص شدن مرکز دایره، عمودمنصف AM را رسم کرده و با d قطع می‌دهیم. این نقطه همان مرکز دایره است. چون $AO = MO = BO$ حال در مثلث AHO داریم:

$$AO^2 = AH^2 + OH^2$$

$$\Rightarrow OH^2 = 3^2 - 1^2 = 8 \Rightarrow OH = 2\sqrt{2}$$

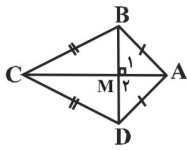


گزینه ۲ ۲۳

برای رسم این مثلث کافی است عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کرده و محل برخورد آن با خط d را C بنامیم. در این صورت مثلث ABC جواب مسئله است. در صورتی که عمودمنصف AB خط d را در یک نقطه قطع کند مسئله یک جواب دارد.

$$\Delta ABC : BC = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$$

گزینه ۴ .۳۲



با توجه به مفروضات سؤال، دو مثلث ABC و ACD طبق حالت تساوی سه ضلع، هم‌نهشت هستند و بنابراین دو مثلث ABM و AMD طبق حالت تساوی دو ضلع و زاویه‌ی بین با هم هم‌نهشت هستند، پس:

$$\begin{cases} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \rightarrow \hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180^\circ \rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ \\ BM = MD \end{cases}$$

یعنی قطر AC عمود منصف قطر BD است، بنابراین، بی‌شمار نقطه روی خط AC وجود دارند که از B و D به یک فاصله‌اند.

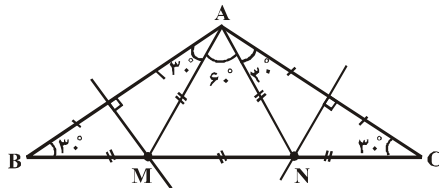
گزینه ۳ .۳۳

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ, \hat{A} = 4\hat{B}, \hat{B} = \hat{C}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 120^\circ, \hat{B} = \hat{C} = 30^\circ$$

عمودمنصف یک پاره‌خط، مجموعه نقاطی از صفحه است که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است. پس:

$$\begin{cases} AM = BM \Rightarrow \hat{MAB} = \hat{B} = 30^\circ \Rightarrow \hat{MAN} = 60^\circ \\ AN = CN \Rightarrow \hat{NAC} = \hat{C} = 30^\circ \end{cases}$$



به راحتی (بنا به تقارن شکل) می‌توان نشان داد که $BM = AM = AN = NC = MN$ (بررسی کنید). پس:

$$BM = MN = NC = \frac{BC}{3} = 8$$

$$\Rightarrow BN = BM + MN = 16$$

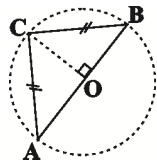
گزینه ۴ .۳۴

چون نقطه‌ی C روی عمودمنصف AB قرار دارد، پس $BC = AC$ است. از طرفی داریم:

$$\Delta BOC : \begin{cases} OB = OC = R \\ \hat{O} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{BCO} = \hat{B} = 45^\circ$$

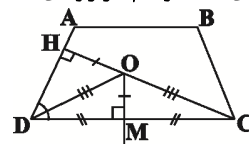
به همین ترتیب، $\hat{A} = 45^\circ$ بنابراین $\hat{C} = 90^\circ$ است. پس

ΔABC قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.



گزینه ۳ .۲۷

در دوزنقه‌ی $ABCD$ مطابق شکل، O نقطه‌ی برخورد عمودمنصف قاعده‌ی CD و نیم‌ساز زاویه‌ی D است.

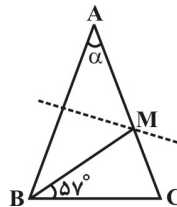


گزینه ۲ .۲۸

اگر اندازه‌ی \hat{A} را α فرض کنیم، داریم:

$$\hat{B} = \hat{C} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$MA = MB \Rightarrow \hat{ABM} = \hat{A} = \alpha$$



$$\hat{B} = \hat{MBC} + \hat{ABM} \Rightarrow 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 57^\circ + \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\alpha = 33^\circ \Rightarrow \alpha = 22^\circ$$

گزینه ۳ .۲۹

T روی عمودمنصف ضلع MN قرار

دارد پس $MT = TN$ و در نتیجه

$\hat{TMN} = \hat{PNM}$ که در این صورت

داریم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{PTM} = \hat{PNM} + \hat{TMN} = 2\hat{PNM} \\ \hat{PMT} = \hat{PMN} - \hat{TMN} = 3\hat{PNM} - \hat{PNM} = 2\hat{PNM} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \hat{PTM} = \hat{PMT} \Rightarrow PT = PM = 6$$

$$\Rightarrow MT = TN = PN - PT = 10 - 6 = 4$$

گزینه ۴ .۳۰

اگر $\hat{BAC} = x$ باشد، آن‌گاه $\hat{ABC} = 2x$ است. طبق شکل اگر نیم‌ساز \hat{ABC} را رسم کنیم تا AC را در نقطه‌ی M قطع کند، آن‌گاه همواره مثلث ABM متساوی‌الساقین خواهد بود.

پس $MA = MB$ و M روی عمودمنصف AB قرار دارد.

گزینه ۲ .۳۱

هر نقطه‌ای که از B و C به یک

فاصله است روی عمودمنصف BC

قرار دارد پس نقطه‌ی موردنظر محل

برخورد عمودمنصف ضلع BC با

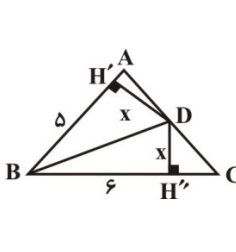
اضلاع مثلث است و بنابراین نقطه‌ی

موردنظر همان نقطه N در شکل

مقابل است. طبق قضیه‌ی فیثاغورس:

$$\Delta ACN : AC = \sqrt{25 - 9} = 4$$

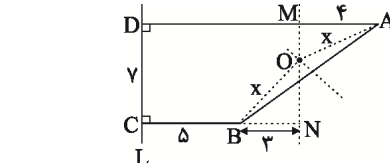
حال نیمساز زاویه B را رسم می‌کنیم. این نیمساز، ضلع AC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. می‌دانیم فاصله‌ی هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. پس $DH'' = DH' = x$ محاسبه می‌کنیم:



$$\begin{aligned} \Delta SAB C &= \Delta SAB D + \Delta SBDC \\ \xrightarrow{(*)} 12 &= \frac{x \times 5}{2} + \frac{x \times 6}{2} \\ \Rightarrow 12 &= \frac{11x}{2} \\ \Rightarrow x &= \frac{24}{11} = 24\left(\frac{1}{11}\right) \end{aligned}$$

گزینه ۳

چون O از A و B به یک فاصله است، پس روی عمودمنصف AB قرار دارد و چون O از خط L به فاصله‌ی 8 می‌باشد، پس روی خطی موازی با L قرار دارد. برخورد این دو خط همان نقطه‌ی O است، با توجه به شکل داریم:



$$\left. \begin{aligned} \Delta AMO : x^2 &= 16 + OM^2 \\ \Delta BNO : x^2 &= 9 + ON^2 = 9 + (y - OM)^2 \end{aligned} \right\}$$

تفاضل $\rightarrow OM^2 - (y - OM)^2 + y = 0$

$$\Rightarrow 14OM - 4y = 0$$

$$\Rightarrow OM = 3 \Rightarrow OA = OB = x = 5$$

گزینه ۱

می‌دانیم در لوزی قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. پس با توجه به اطلاعات داده شده و شکل مقابل طول ضلع‌های مثلث OAB برابر 8 ، 6 و 9 است.

از طرفی در لوزی قطرها بر هم عمودند. پس این مثلث قائم‌الزاویه است. پس ضلع‌های این مثلث باید در قضیه فیثاغورس صدق کنند که اعداد 6 ، 8 و 9 صدق نمی‌کنند. $(9^2 \neq 6^2 + 8^2)$ در نتیجه چنین لوزی‌ای وجود ندارد.

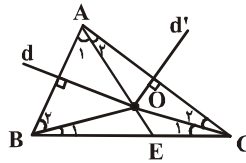
گزینه ۱

فرض می‌کنیم $ABCD$ متوازی‌الاضلاع موردنظر باشد، مثلث BOC با معلوم بودن دو ضلع $OC = \frac{AC}{2}$ و $OB = \frac{BD}{2}$ و زاویه‌ی بین آن‌ها (α) قابل رسم است.

مثلث BOC را رسم کرده، OB و OC را از نقطه‌ی O به‌اندازه‌ی خودشان امتداد می‌دهیم تا نقاط D و A به‌دست

گزینه ۴

هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است، پس:

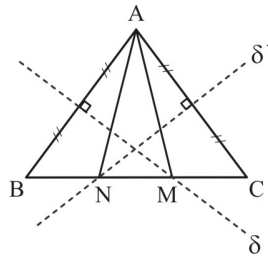


$$\begin{aligned} AB \text{ عمودمنصف ضلع } &\Rightarrow OA = OB \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_2 \\ AC \text{ عمودمنصف ضلع } &\Rightarrow OA = OC \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_1 \\ \text{اگر مطابق شکل، امتداد پاره‌خط } &OA \text{ را در } BC \text{ در نقطه‌ی } E \\ \text{قطع کند، آنگاه:} & \\ \hat{B}OC &= \hat{B}OE + \hat{C}OE = (\hat{A}_1 + \hat{B}_2) + (\hat{A}_2 + \hat{C}_1) \\ \Rightarrow \hat{B}OC &= 2\hat{A}_1 + 2\hat{A}_2 = 2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) = 2\hat{A} \end{aligned}$$

توجه کنید که چون \hat{A} حاده است، نقطه‌ی O درون مثلث می‌افتد. اما اگر \hat{A} منفرجه باشد، آنگاه نقطه‌ی O خارج مثلث قرار دارد که در آن صورت داریم:

$$\hat{B}OC = 360^\circ - 2\hat{A}$$

گزینه ۲



$$\hat{A} = 60^\circ, AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = 60^\circ$$

هر نقطه واقع بر عمود منصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است، پس:

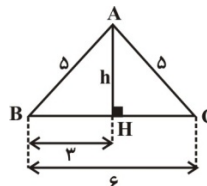
$$\left\{ \begin{aligned} M \in \delta &\Rightarrow MA = MB \\ \Rightarrow \hat{B}AM = \hat{B} = 60^\circ &\Rightarrow \hat{AMB} = 60^\circ \\ N \in \delta' &\Rightarrow NA = NC \\ \Rightarrow \hat{CAN} = \hat{C} = 60^\circ &\Rightarrow \hat{ANC} = 60^\circ \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \hat{MAN} = 180^\circ - (\hat{AMB} + \hat{ANC}) = 60^\circ$$

بنابراین، کوچکترین زاویه‌ی مثلث AMN زاویه‌ی $\hat{MAN} = 60^\circ$ است.

گزینه ۱

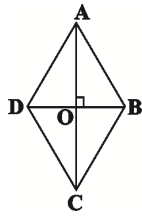
مثلث ABC به صورت مقابل است، با توجه به شکل:



$$h^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow h^2 = 16 \Rightarrow h = 4$$

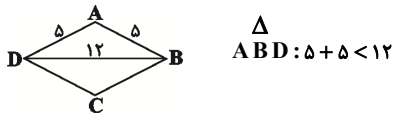
پس مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S = \frac{h \times BC}{2} = \frac{4 \times 6}{2} = 12 \quad (*)$$



گزینه ۴۵

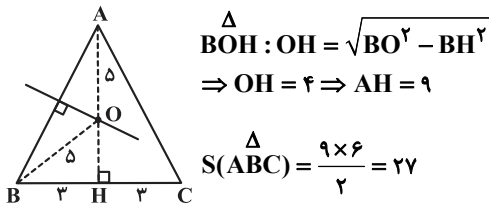
مستطیل گزینه‌ی «۱» بنابر تمرین ۲ صفحه‌ی ۱۶ قابل رسم است. متوازی‌الاضلاع گزینه‌ی «۲» را می‌توان طبق آنچه در تمرین ۴ صفحه‌ی ۱۶ آموخته‌اید رسم کرد. برای رسم مستطیل گزینه‌ی «۳»، دو خط با زاویه‌ی 60° رسم می‌کنیم. دایره‌های به شعاع $\frac{1}{2} = 5$ رسم می‌کنیم. محل تلاقی دایره با دو خط رئوس مستطیل مورد نظر را مشخص می‌کند. لوزی با معلومات گزینه‌ی «۴» را نمی‌توان رسم کرد، زیرا:



یادآوری: در هر مثلث، مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است.

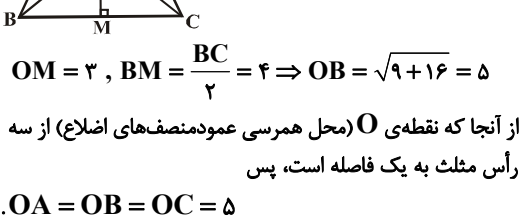
گزینه ۴۶

نقطه‌ای که از سه رأس مثلث به یک فاصله است محل هم‌مرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث است. مطابق شکل داریم:



گزینه ۴۷

مطابق شکل نقطه‌ی M وسط قاعده BC و نقطه‌ی O محل هم‌مرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث است. در مثلث قائم‌الزاویه OBM داریم:



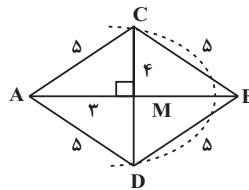
در مثلث قائم‌الزاویه ABM داریم:

$AM = OA + OM = 5 + 3 = 8, MB = 4$

$\Rightarrow AB = \sqrt{AM^2 + MB^2} = \sqrt{64 + 16}$
 $= \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

می‌آیند و ABCD متوازی‌الاضلاع خواسته شده است و مسئله همواره یک جواب دارد.

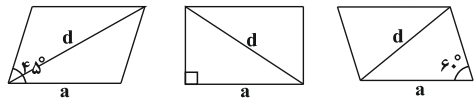
گزینه ۴۱



مطابق شکل، چون C و D روی عمودمنصف AB می‌باشند، پس $AD = BD = 5$ و $AC = BC = 5$ می‌باشد.

به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه، مقدار $MC = MD = 4$ می‌باشد. چون قطرهای عمودمنصف یکدیگرند. پس یک لوزی به اقطار ۶ و ۸ و ضلع ۵ داریم.

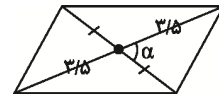
گزینه ۴۲



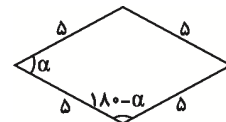
گزینه ۴۳

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

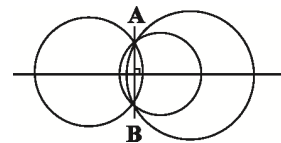
گزینه‌ی «۱»: چون زاویه‌ی بین دو قطر معلوم نیست، بنابراین چهار مثلث به‌وجود آمده توسط قطرهای، به‌صورت منحصربه‌فرد قابل رسم نیستند و لذا بی‌شمار متوازی‌الاضلاع قابل رسم است.



گزینه‌ی «۳»: چون زاویه‌ی بین اضلاع مشخص نیستند، بنابراین واضح است که با تغییر α بی‌شمار لوزی قابل رسم است.



گزینه‌ی «۴»: می‌دانیم مرکز دایره‌ای که AB وتر آن است روی عمودمنصف AB قرار دارد. چون هر نقطه روی عمودمنصف AB می‌تواند حکم مرکز را داشته باشد، بنابراین مطابق شکل بی‌شمار دایره از AB می‌گذرد.



گزینه‌ی «۲» مطابق فعالیت صفحه‌ی ۱۵ کتاب درسی هر مربع با داشتن قطر آن به‌صورت منحصربه‌فرد قابل رسم است.

گزینه ۴۴

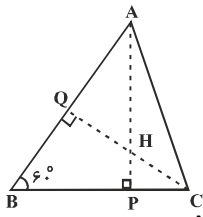
اگر AC قطر بزرگ لوزی باشد، آن‌گاه $AC \geq BD$ و به‌طور مشابه $OA \geq OB$ در مثلث OAB داریم:

$OA^2 \geq OB^2 \Rightarrow 2OA^2 \geq OA^2 + OB^2 \Rightarrow 2OA^2 \geq AB^2$

$\xrightarrow{AB=10} 2OA^2 \geq 100 \Rightarrow OA^2 \geq 50 \Rightarrow OA \geq 5\sqrt{2}$

بنابراین حداقل طول قطر بزرگ لوزی (AB) برابر $2 \times 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ است.

گزینه ۲ - ۵۱



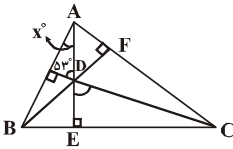
دو ارتفاع AP و CQ را رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطه‌ی H قطع کنند، در چهارضلعی BPHQ مجموع زاویه‌های داخلی ۳۶۰° است، پس:

$$۶۰^\circ + ۹۰^\circ + ۹۰^\circ + \hat{P}HQ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{P}HQ = ۱۲۰^\circ$$

و از آن‌جا که $\hat{C}HA$ با $\hat{P}HQ$ متقابل به رأس است، داریم:

$$\hat{C}HA = \hat{P}HQ = ۱۲۰^\circ$$

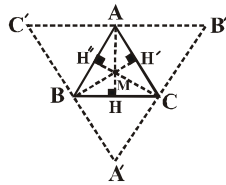
گزینه ۱ - ۵۲



چون D نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های مثلث ABC است، پس امتداد CD ضلع AB را با زاویه‌ی قائمه قطع می‌کند.

$$x = ۹۰^\circ - ۵۳^\circ = ۳۷^\circ$$

گزینه ۴ - ۵۳



اثبات عمودبودن AH برای $B'C'$: $\begin{cases} AH \perp BC \\ BC \parallel B'C' \end{cases}$

$$\Rightarrow AH \perp B'C'$$

اثبات منصف‌بودن AH: $\begin{cases} BC \parallel B'C' \\ AB \parallel A'B' \end{cases}$

$$\Rightarrow AB' = BC \Rightarrow AB' = CB \text{ (متوازی‌الاضلاع است)}$$

به‌طور مشابه، $ACBC'$ نیز متوازی‌الاضلاع است، پس:

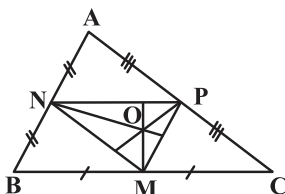
$$AC' = BC \text{ (۲)}$$

پس از (۱) و (۲) داریم: $AB' = AC'$ ، یعنی AH عمودمنصف ضلع $B'C'$ است و به همین ترتیب BH' و CH'' نیز عمودمنصف‌های اضلاع $A'B'$ و $A'C'$ از مثلث $A'B'C'$ هستند. بنابراین نقطه‌ی تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC، نقطه‌ی تلاقی عمودمنصف‌های مثلث $A'B'C'$ است.

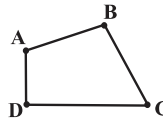
گزینه ۴ - ۵۴

اضلاع مثلث MNP با اضلاع مثلث ABC موازی است پس عمودمنصف‌های $(MN \parallel AC, PM \parallel AB, NP \parallel BC)$

اضلاع ABC بر اضلاع MNP عمودند پس O نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های مثلث MNP است و این یعنی O از سه رأس مثلث ABC به یک فاصله است (طبق خاصیت نقطه‌ی همرسی عمودمنصف‌ها در هر مثلث)



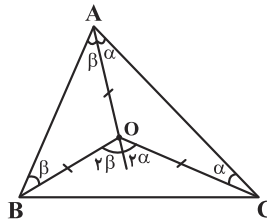
گزینه ۴ - ۴۸



نقطه‌ای که از چهار نقطه‌ی A، B، C و D به یک فاصله است، محل تقاطع عمودمنصف‌های اضلاع چهارضلعی ABCD است. بنابراین اگر عمودمنصف‌های اضلاع این چهارضلعی هم‌رس باشند، یک نقطه وجود دارد که از این چهار نقطه به یک فاصله است و در غیر این صورت چنین نقطه‌ای وجود ندارد.

گزینه ۴ - ۴۹

نقطه‌ی همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث از سه رأس مثلث، به یک فاصله است ($OA = OB = OC$). مطابق شکل اگر O داخل مثلث واقع باشد، بنا به قضیه‌ی زاویه‌ی خارجی داریم:



$$\hat{B}OC = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2\hat{A}$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} + ۶۰^\circ + ۵۰^\circ = ۱۸۰^\circ$$

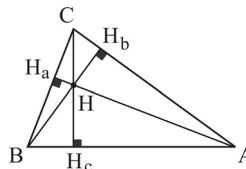
$$\Rightarrow \hat{A} = ۷۰^\circ$$

$$\hat{B}OC = 2\hat{A} = ۱۴۰^\circ$$

در نتیجه:

گزینه ۳ - ۵۰

در چهارضلعی BH_aHH_c ، داریم:



$$\hat{B} + \hat{H}_a + H_a\hat{H}H_c + \hat{H}_c = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۶۰^\circ + ۹۰^\circ + H_a\hat{H}H_c + ۹۰^\circ = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow H_a\hat{H}H_c = ۱۲۰^\circ$$

و چون این زاویه با زاویه‌ی AHC متقابل به رأس است، پس $\hat{A}HC = ۱۲۰^\circ$

در چهارضلعی AH_bHH_c ، داریم:

$$\hat{A} + \hat{H}_b + H_b\hat{H}H_c + \hat{H}_c = ۳۶۰^\circ \Rightarrow$$

$$۴۰^\circ + ۹۰^\circ + H_b\hat{H}H_c + ۹۰^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow H_b\hat{H}H_c = ۱۴۰^\circ$$

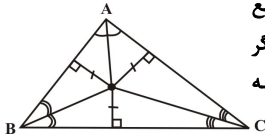
و چون این زاویه با زاویه‌ی BHC متقابل به رأس است، پس $\hat{B}HC = ۱۴۰^\circ$

$$\Rightarrow \frac{\hat{A}HC}{\hat{B}HC} = \frac{۱۲۰^\circ}{۱۴۰^\circ} = \frac{۶}{۷}$$

$$\Rightarrow \hat{A}DB + \hat{A}DC - \hat{B}DC = 90^\circ + \left(\frac{\hat{C} + \hat{B} - \hat{A}}{2}\right)$$

$$= 90^\circ + \left(\frac{30^\circ + 45^\circ - 105^\circ}{2}\right) = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$$

گزینه ۴ ۵۹

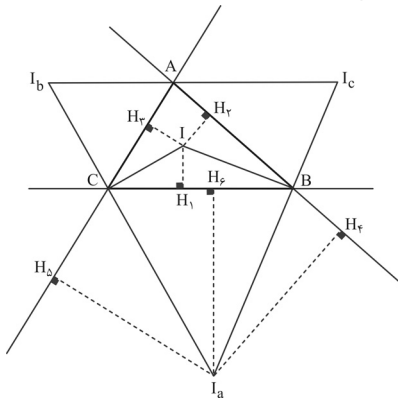


می‌دانیم که، یک نقطه از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله است، اگر و تنها اگر روی نیمساز آن زاویه واقع باشد.

پس اگر نقطه‌ای از سه ضلع یک مثلث به یک فاصله باشد، باید بر روی نیمسازهای زاویه‌های مثلث واقع باشد، یعنی باید نقطه‌ی مشترکی بین سه نیمساز مثلث باشد. تنها نقطه‌ای که این ویژگی را دارد محل تلاقی سه نیمساز یک مثلث است.

گزینه ۴ ۶۰

مطابق شکل زیر، مثلث ABC را در نظر گرفته و نیمسازهای زاویه‌های داخلی B و C و نیمسازهای زاویه‌های خارجی A، B و C را رسم می‌کنیم، از آنجا که هر نقطه واقع بر نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است، بنابراین:



نقطه‌ی I روی نیمساز داخلی زاویه‌ی B قرار دارد، پس:

$$IH_1 = IH_2$$

نقطه‌ی I روی نیمساز داخلی زاویه‌ی C قرار دارد، پس:

$$IH_1 = IH_3$$

در نتیجه $IH_1 = IH_2 = IH_3$ ، یعنی نقطه‌ی I از سه ضلع AB، BC و AC به یک فاصله است.

نقطه‌ی Ia روی نیمساز زاویه‌ی خارجی B قرار دارد، پس:

$$I_aH_4 = I_aH_6$$

نقطه‌ی Ia روی نیمساز زاویه‌ی خارجی C قرار دارد، پس:

$$I_aH_5 = I_aH_6$$

در نتیجه $I_aH_4 = I_aH_5 = I_aH_6$ ، یعنی نقطه‌ی Ia از ضلع BC و امتداد ضلع‌های AB و AC به یک فاصله است.

با نظیر استدلال اخیر، می‌توان ثابت کرد که:

- نقطه‌ی Ib از ضلع AC و امتداد ضلع‌های AB و BC به یک فاصله است.

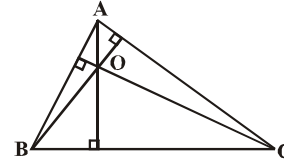
- نقطه‌ی Ic از ضلع AB و امتداد ضلع‌های AC و BC به یک فاصله است.

گزینه ۳ ۵۵

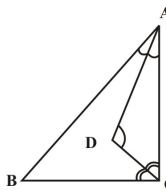
اگر در مثلثی یک زاویه منفرجه باشد، ارتفاع‌های آن در خارج مثلث هم‌رس هستند.

گزینه ۱ ۵۶

در شکل زیر روشن است که امتدادهای سه ارتفاع مثلث BOC از نقطه‌ی A می‌گذرد. پس نقطه‌ی A محل برخورد ارتفاع‌های مثلث BOC است.



گزینه ۲ ۵۷



طبق فرض، $\frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{3}$ و در نتیجه $\hat{B} = 2\hat{A}$ و $\hat{C} = 3\hat{A}$.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 2\hat{A} + 3\hat{A} = 180^\circ$$

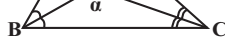
$$\Rightarrow 6\hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ \Rightarrow \hat{B} = 2\hat{A} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{C} = 3\hat{A} = 90^\circ$$

حال به سراغ محاسبه‌ی زاویه‌ی ADC می‌رویم، داریم:

یادآوری: در هر مثلث، زاویه‌ی منفرجه بین هر دو نیمساز داخلی، برابر است با

90° به‌علاوه‌ی نصف زاویه‌ی سوم، مثلاً



در شکل

$$\alpha = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$$

مقابل داریم:

$$\hat{A}DC = 90^\circ + \frac{\hat{B}}{2} = 90^\circ + \frac{60^\circ}{2} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

گزینه ۲ ۵۸

طبق فرض، زاویه‌های مثلث ABC، به نسبت ۲، ۳ و ۷ هستند پس می‌توانیم در نظر بگیریم $\hat{A} = 7k$ ، $\hat{B} = 3k$ و $\hat{C} = 2k$ ،

از آنجا که مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است، داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 7k + 3k + 2k = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 12k = 180^\circ \Rightarrow k = 15^\circ \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 105^\circ \\ \hat{B} = 45^\circ \\ \hat{C} = 30^\circ \end{cases}$$

از آنجا که AD، BD و CD نیمسازهای زاویه‌های مثلث هستند، همان‌طور که از تست قبل می‌دانیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} \hat{A}DB = 90^\circ + \frac{\hat{C}}{2} \\ \hat{A}DC = 90^\circ + \frac{\hat{B}}{2} \\ \hat{B}DC = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} \end{cases}$$

